UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DE DADOS

PROVA I - Probabilidade (PPGECD000000001)

Professor: Raydonal Ospina Martinez. **E-mail:** raydonal@castlab.org

Regras

Recomendo que leiam atentamente as perguntas e reservem um tempo adequado para refletir sobre elas. Ressalto que todas as questões devem ser respondidas de forma detalhada, pois soluções ambíguas ou pouco claras serão penalizadas. Lembro ainda que não farei esforço para interpretar ou "adivinhar" o que o aluno quis escrever ou dizer. Por isso, é fundamental que sejam claros e organizados. Informo que a prova deverá ser entregue (digitalizada em formato PDF) no dia **15/05/2025** até as 12:30h (GMT-3 Horário de Brasília). Deverão encaminhar para o e-mail acima com assunto de envio (`Resposta Prova I - Mestrado - ''coloque aqui seu nome''`) e colocando seu nome.

Problema 1

Sejam Ω e Ω' conjuntos não vazios e $\mathcal{Q}$ uma σ-álgebra sobre Ω'. Se $T\colon \Omega \to \Omega'$ é uma função, então prove que a coleção

$$T^{-1}(\mathcal{Q}) = \{T^{-1}(A) : A \in \mathcal{Q}\}$$

é uma σ-álgebra sobre Ω.

Problema 2

Sejam P e Q duas medidas de probabilidade definidas sobre a mesma σ-álgebra. Demonstre que $R = \alpha P + (1-\alpha)Q$ é uma medida de probabilidade para cada $\alpha \in [0,1]$. Além disso, determine se as seguintes funções também são medidas de probabilidade:

a) $1 - R$.

b) $\frac{1+R}{2}$.

c) R^2.

d) $|R|$.

e) $4(1 - R)$.

f) $\sqrt{R}$.

Problema 3

Considere o espaço mensurável $((0,1), \mathcal{B}(0,1))$ (Note que aqui $\Omega = (0,1)$ e $\mathcal{B}(0,1)$ é a σ-álgebra de Borel restrita ao intervalo (0,1)). Demonstre para cada item a seguir que P é uma medida de probabilidade, sendo que para cada $A \in \mathcal{B}(0,1)$:

a) $P(A) = \displaystyle\int_A 2x \, dx$.

b) $P(A) = \displaystyle\int_A \frac{3}{2}\sqrt{x} \, dx$.

Problema 4

Considere uma população que se desenvolve de acordo com as seguintes regras: um indivíduo inicial constitui a 0-é geração (geração zero) e ele pode ter 0, 1 ou 2 descendentes com probabilidades de $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$, respectivamente. Após gerar seus descendentes, o indivíduo morre. Cada descendente se reproduz independentemente dos outros e da história da família, seguindo a mesma regra do indivíduo original. A primeira geração será formada pelos filhos do primeiro indivíduo, a segunda geração será formada pelos seus netos, e assim por diante.

- Qual o espaço amostral do experimento? Qual poderia ser a σ-álgebra associada?
- Dado que existe apenas um indivíduo na segunda geração, qual é a probabilidade de que a primeira geração tenha tido dois indivíduos?
- Qual é a probabilidade de que exista pelo menos um indivíduo na segunda geração?

Problema 5

Uma moeda honesta é lançada três vezes seguidas. Considere os seguintes eventos:

$A :=$ "Os resultados dos lançamentos 1 e 2 são diferentes".

$B :=$ "Os resultados dos lançamentos 2 e 3 são diferentes".

$C :=$ "Os resultados dos lançamentos 1 e 3 são diferentes".

a) Qual o espaço amostral do experimento?

b) Verifique que $P(A) = P(A|B) = P(A|C)$ e que $P(A) \neq P(A|B \cap C)$.

c) A, B e C são independentes 2 a 2? A, B e C são independentes? Explique suas respostas.

Problema 6: Bônus

Seja $Q = (x, y)$ um ponto escolhido aleatoriamente num disco unitário centrado em $(0, 0)$ e com raio 1.

- Qual o espaço amostral do experimento?
- Calcule a probabilidade de que Q esteja a uma distância máxima de 0.5 do centro.
- Calcule a probabilidade de $y > \frac{1}{\sqrt{2}}$;
- Calcule a probabilidade de $|x - y| < 1$ e $|x + y| < 1$.

BOA PROVA