Método do Jacobiano.

Seja $\underset{\sim}{X} = (X_1, \dots X_n)$ um vetor aleatório assumindo valores em $G_0 \subset \mathbb{R}^n$. Seja $g: G_0 \to G$, uma função inversível e $G \subseteq \mathbb{R}^n$. Assim, $g(\underset{\sim}{X}) = \underset{\sim}{Y}$ em que $\underset{\sim}{Y} = (Y_1, \dots Y_n)$ em que

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= g_1(X_1, \dots, X_n) \\
Y_2 &= g_2(X_1, \dots, X_n) \\
&\vdots \\
Y_n &= g_n(X_1, \dots, X_n)
\end{aligned}
$$

$$
g: \begin{array}{ccl}
G_0 & \longrightarrow & G \\
(X_1 \dots X_n) & \longrightarrow & g(X_1, \dots X_n) = (g_1(X_1 \dots X_n), \dots g_n(X_1 \dots X_n)) \\
 & & = (Y_1, \dots, Y_n).
\end{array}
$$

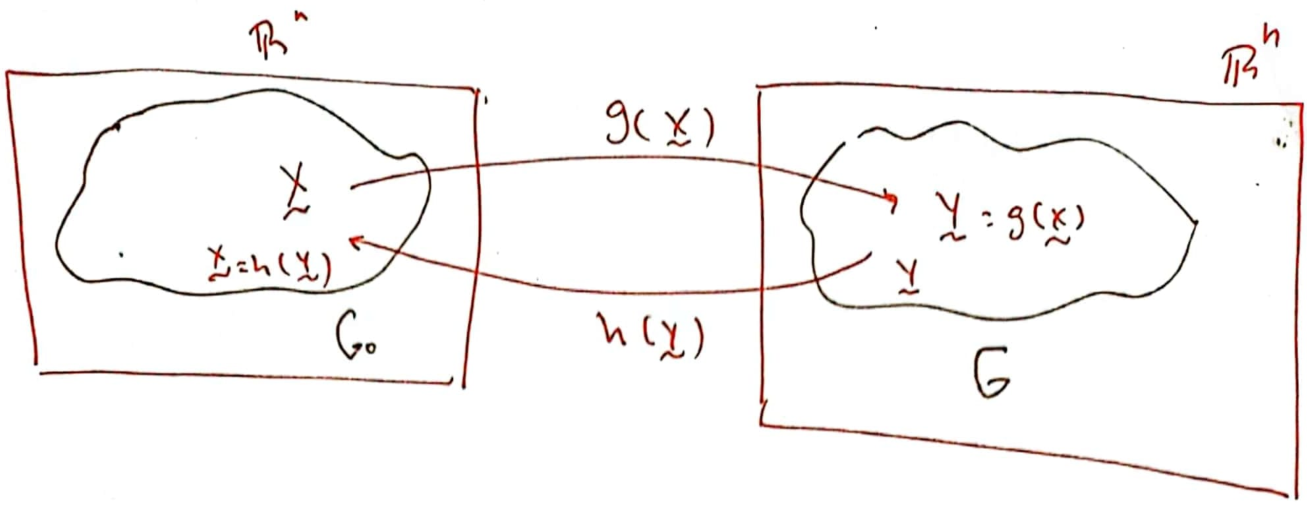
Seja $h: G \to G_0$ a inversa de g, de tal forma que

$\underset{\sim}{X} = h(\underset{\sim}{Y})$ com

$$
\begin{aligned}
X_1 &= h_1(Y_1 \dots Y_n) \\
X_2 &= h_2(Y_1 \dots Y_n) \\
&\vdots \\
X_n &= h_n(Y_1 \dots Y_n)
\end{aligned}
$$

Assim que o vetor aleatório $\underset{\sim}{X}$ com densidade absolutamente contínua, temos que $P(\underset{\sim}{X} \in G_0) = 1$, então qual é a distribuição de Y?

Digitalizado com CamScanner



Solução: Note que como g é inversível ela define uma bijeção, daí $P(Y \in G) = 1$, além disso, dado B um subconjunto de Borel de $\mathbb{R}^n$, $B \subseteq G$, temos que $P(\underset{\sim}{Y} \in B) = P(g(\underset{\sim}{X}) \in B) =$

$P(\underset{\sim}{X} \in h(B))$, em que $h(B) = \{ \underset{\sim}{x}$ tais que $\underset{\sim}{x} = h(\underset{\sim}{y})$, para algum $\underset{\sim}{y} \in B \}$, i.e.

$$P(\underset{\sim}{Y} \in B) = \int \cdots \int_{h(B)} f(x_1, x_2 \ldots x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \, .$$

Considere a transformação da variável $\underset{\sim}{x} = h(\underset{\sim}{y})$ fazendo

$$\begin{aligned} x_1 &= h_1(y_1, \ldots, y_n) \\ x_2 &= h_2(y_1 \ldots y_n) \\ &\vdots \\ x_n &= h_n(y_1 \ldots y_n) \end{aligned}$$

Seja $J_{\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}}$ cujo (i,j) elemento é

$$(J_{\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}})_{i,j} = \frac{d x_i}{d y_j} = \frac{d h_i}{d y_j}$$

Digitalizado com CamScanner

Sendo assim

$$P(\underset{\sim}{Y} \in B) = \int \cdots \int_B f(h_1(y_1 \ldots y_n), \ldots h_n(y_1 \ldots y_n)) \left| \det J_{\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}} \right| dy_1 \ldots dy_n$$

Logo, $\underset{\sim}{Y}$ é vetor aleatório absolutamente contínuo com densidade

$$f_{\underset{\sim}{Y}}(y_1 \ldots y_n) = \begin{cases} f(h_1(y_1 \ldots y_n) \ldots, h_n(y_1 \ldots y_n)) \left| \det J_{\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}} \right| \\ \text{se} \quad (y_1 \ldots y_n) \in G \\ 0, \quad \text{se} \quad (y_1, \ldots y_n) \notin G \end{cases}$$

Note que $\left| \det J_{\underset{\sim}{y}, \underset{\sim}{x}} \right| = \dfrac{1}{\left| \det J_{\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}} \right|}$ (Propriedades do Jacobiano da transformação).

Exemplo:

Seja $X \sim U(0,1)$ e $Y \sim U(0,1)$ e seja $Z = X/Y$.
Qual é a distribuição da variável aleatória Z?

Solução:

Suponhamos que X e Y são v.a. independentes. e consideremos a transformação de variável

$$Z = X/Y \quad \text{e} \quad W = Y$$

$$\underset{\sim}{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \overset{g}{\sim} \begin{pmatrix} Z \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X/Y \\ Y \end{pmatrix}$$

$$g: \begin{array}{ccc} (0,1) \times (0,1) & \longrightarrow & (0,\infty) \times (0,1) \\ (x, y) & \longrightarrow & g(x,y) = (g_1(x,y), g_2(x,y)) = (\frac{x}{y}, y) \end{array}$$

i.e.

$w = \frac{1}{z}$

$z = x/y$.

A transformação inversa

$$\left.\begin{array}{l} X = ZW \\ Y = W \end{array}\right\} \quad J_{XY} = \begin{vmatrix} \frac{dx}{dz} & \frac{dx}{dw} \\ \frac{dy}{dz} & \frac{dy}{dw} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w & z \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = w$$

logo (Z, W) tem densidade da forma.

$$f(z,w) = \begin{cases} w & \text{se } (z,w) \in R \\ 0 & \text{se } (z,w) \notin R. \end{cases}$$

Qual é a densidade marginal de Z.
Se $z < 1$ então a densidade será

$f_Z(w) = \int_0^1 f(z,w)\,dw = \int_0^1 w\,dw = \frac{1}{2}$. se $z \geq 1$, então

$$f_Z(w) = \int_0^{1/z} w\,dw = 1/2z^2$$

Daí

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ 1/2, & 0 < z < 1 \\ 1/z^2, & z \geq 1 \end{cases}$$

i.e $f_Z(z)$ é uma função de densidade.

Exemplo

Suponha que X e Y são independentes com distribuição $Exp(1)$, i.e. $X \sim Exp(1)$ e $Y \sim Exp(1)$. Qual é a distribuição conjunta de Z e W, em que $Z = X + Y$ e $W = X/Y$. ?

Digitalizado com CamScanner

Solução: Note que Z e W são v.a positivas

Note que $Z = WY + Y = (W+1)Y \Rightarrow Y = \frac{Z}{W+1}$

$$X = \frac{WZ}{W+1} = Z\left(1 - \frac{1}{W+1}\right)$$

$$g: (0,\infty) \times (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty) \times (0,\infty)$$

$$(x, y) \longrightarrow (g_1(x,y), g_2(x,y)) = (x+y, \ x/y) = (z, w).$$

Note que a densidade conjunta de X e Y é

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x>0, \ y>0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A matriz jacobiana da transformação inversa é

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dz} & \frac{dx}{dw} \\ \frac{dy}{dz} & \frac{dy}{dw} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{w}{w+1} & \frac{z}{w+1} \\ \frac{1}{w+1} & \frac{-z}{(w+1)^2} \end{pmatrix}$$

e o determinante desta matriz é

$$\frac{-wz}{(w+1)^3} - \frac{z}{(w+1)^3} = -\frac{z\cancel{(w+1)}}{\cancel{(w+1)}^{2}} = -\frac{z}{(w+1)^2}$$ que em módulo é $z/(w+1)^2$.

Então (z, w) admite densidade

$$g(z,w) = \begin{cases} \frac{ze^{-z}}{(w+1)^2}, & \text{se } z>0, \ w>0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A densidade de Z é

$$f_Z(z) = \int_0^\infty \frac{ze^{-z}}{(w+1)^2}\,dw = ze^{-z}\int_0^1 \frac{1}{(w+1)^2}\,dw$$

$$= ze^{-z}\underbrace{\left\{ \frac{1}{-(w+1)}\Big|_0^\infty \right\}}_{=1} = ze^{-z}$$

Daí,

$g(z,w) = f_Z(z) \dfrac{1}{(w+1)^2}$, portanto a densidade de

w será

$$f_W(w) = \int_0^\infty f_Z(z) \frac{1}{(w+1)^2} \, dz = \frac{1}{(w+1)^2} \int_0^\infty f(z)\, dz = \frac{1}{(w+1)^2}$$

e daí, densidade de z é

$$f_Z(z) = z\, e^{-z}\, \mathbb{I}_{(0,\infty)}(z)$$

$$f_W(w) = \frac{1}{(w+1)^2}\, \mathbb{I}_{(0,\infty)}(w)$$

Portanto, $g(z,w) = f_Z(z)\, f_W(w)$, i.e, Z e W são variáveis aleatórias independentes.

———— " ————

Seja $\underset{\sim}{X} = (X_1, \ldots X_n)$ um vetor aleatório contínuo, assumindo valores em $G_0 \subset \mathbb{R}^n$. Seja $g: G_0 \longrightarrow G$, em que $G \subseteq \mathbb{R}^n$ e g é uma função k a 1. Ou seja existem $G_1, \ldots G_k$ disjuntos tais que $G_0 = \bigcup_{\ell=1}^{k} G_\ell$ e $g|_{G_\ell}$ é inversível.
($g|_{G_\ell}$ é a restrição de g ao subconjunto G_ℓ que faz a restrição inversível).

Seja $\underset{\sim}{Y} = g(\underset{\sim}{X})$ e suponhamos que $g|_{G_\ell} = g_\ell$ é uma função continuamente diferenciável.

Seja $h_\ell: G \longrightarrow G_\ell$ a função inversa de $g_\ell: G_\ell \longrightarrow G$
$\ell = 1, 2, \ldots k$.

Se $\underset{\sim}{X}$ tem densidade conjunta f, qual a densidade de Y?

Dado $B \subset G$, um conjunto de Borel, tem-se que

$$P(\underset{\sim}{Y} \in B) = P(g(\underset{\sim}{X}) \in B) = \sum_{l=1}^{k} P(g(\underset{\sim}{X}) \in B ; \underset{\sim}{X} \in G_l)$$

$$= \sum_{l=1}^{k} P(g_l(\underset{\sim}{X}) \in B) = \sum_{l=1}^{k} P(\underset{\sim}{X} \in h_l(B))$$

$$= \sum_{l=1}^{k} \int \cdots \int_{h_l(B)} f(x_1 \ldots x_n)\, dx_1 \ldots dx_n .$$

Aplicando a transformação da variável.

$$P(\underset{\sim}{Y} \in B) = \sum_{l=1}^{k} \int \cdots \int_{B} f(h_1(\underset{\sim}{y}) \ldots h_n(\underset{\sim}{y})) \det J_l(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y})\, d\underset{\sim}{y}$$

em que $J_l(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y})$ é a matriz Jacobiana de h e

$$P(\underset{\sim}{Y} \in B) = \int \cdots \int_{B} \left\{ \sum_{l=1}^{k} f(h_l(\underset{\sim}{y})) \left| \det J_l(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}) \right| d\underset{\sim}{y} \right.$$

em que

$$f(h_l(\underset{\sim}{y})) = f(h_{l1}(y_1 \ldots y_n), \ldots h_{ln}(y_1 \ldots y_n)) \quad e$$

$$d\underset{\sim}{y} = dy_1 \ldots dy_n .$$

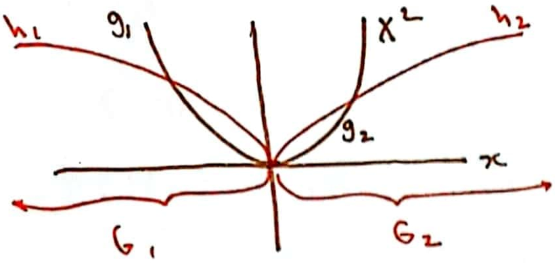
Portanto, Y admite densidade

$$f_{\underset{\sim}{Y}}(\underset{\sim}{y}) = \begin{cases} \sum_{l=1}^{k} f(h_l(\underset{\sim}{y})) \left| \det J_l(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}) \right|, & \text{se } \underset{\sim}{y} \in G \\ 0 & \text{se } \underset{\sim}{y} \notin G \end{cases}$$

— // —

Digitalizado com CamScanner

Exemplo: Seja $X \sim N(0,1)$ e seja $Y = X^2$ qual é a densidade de Y?



X assume valores em $\mathbb{R}$ com densidade

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

Seja $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2$

Sejam $G_1 = (-\infty, 0]$ e $G_2 = (0, \infty)$, $\mathbb{R} = G_1 \cup G_2$, $\emptyset = G_1 \cap G_2$

g restrita a G_1 é inversível, com inversa

$h_1(y) = -\sqrt{y}$,

g restrita a G_2 é inversível, com inversa $h_2(y) = \sqrt{y}$

$$\frac{d h_1}{dy} = \frac{-1}{2\sqrt{y}} \quad \text{e} \quad \frac{d h_2}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$\left| \frac{d h_1}{dy} \right| = \left| \frac{d h_2}{dy} \right| = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Daí, $$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{2\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2}$$

$$= \frac{1 \; e^{-y/2}}{\sqrt{2\pi y}}$$

logo

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y^2/2}, & \text{se } y > 0 \\ 0, & \text{se } y \leq 0 \end{cases}$$

Esta distribuição é um caso particular da distribuição gama.

Digitalizado com CamScanner

Lembre que $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt \quad , \; x > 0$

$\Gamma(1) = 1$

$\Gamma(n+1) = n!$

$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. De fato.

$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{1/2}\, dt$, Seja $t = y/2$

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty e^{-y/2} \left(\frac{y}{2}\right)^{-1/2} \frac{1}{2}\, dy = \int_0^\infty \frac{e^{-y/2}}{\sqrt{2}}\, y^{-1/2}\, dy =$$

$$\sqrt{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-y/2}}{\cancel{\sqrt{2\pi}}\, y} \overset{1/\sqrt{2}}{dy} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\pi}$$

Distribuições Especiais.

1. Distribuição Gama

X tem distribuição Gama se X admite densidade

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1} e^{-\beta x}\, \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)$$

em que $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Note que se $\alpha = 1$, a distribuição é $Exp(\beta)$

se $\alpha = 1/2$ e $\beta = 1/2$

$$f(x) = \frac{(1/2)^{1/2}}{\Gamma(1/2)}\, x^{-1/2} e^{-x/2}\, \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\, e^{-x^2/2}\, \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x).$$

Ou seja, se $X \sim N(0,1)$, então $X^2 \sim Gama(1/2, 1/2)$

Proposição: Dados $\alpha > 0$, $\beta > 0$, tem-se que

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1}\, dt.$$

Digitalizado com CamScanner

A partir daí, é fácil mostrar que que se $X \sim Gama(\alpha_1, \beta)$ e $Y \sim Gama(\alpha_2, \beta)$ e X e Y são independentes, então $X + Y \sim Gama(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$.

- Distribuição χ^2 (qui-quadrado).

Sejam $X_1 \dots X_n$ v.a. independentes com a mesma distribuição $N(0,1)$.

Neste caso, dizemos que $Y = X_1^2 + \dots + X_n^2$ tem distribuição χ^2 com n graus de liberdade, denotado por $Y \sim \chi^2_{(n)}$

Note que $X_i^2 \sim gama(1/2, 1/2)$.

Daí, $Y \sim$ gamma $(n/2, 1/2)$.

- Distribuição Beta.

Seja X_1 e X_2 v.a. independentes $X_1 \sim Gama(\alpha, \beta)$

Seja $Y = X_1 + X_2$, $Y_2 = \dfrac{X_1}{X_1 + X_2}$

$y_1 = g_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2$

$y_2 = g_2(x_1, x_2) = x_1 / x_1 + x_2$

Daí, $x_1 = y_1 y_2$, $x_2 = y_1(1 - y_2)$

$$|J(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y})| = \begin{vmatrix} \dfrac{dx_1}{dy_1} & \dfrac{dx_1}{dy_2} \\ \dfrac{dx_2}{dy_1} & \dfrac{dx_2}{dy_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2 & y_1 \\ 1-y_2 & -y_1 \end{vmatrix} = -y_1 \neq 0.$$

$\Rightarrow$ $g: (0, \infty) \times (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty) \times (0,1)$

$(x, y) \longrightarrow (g_1(x,y), g_2(x,y)) = (x_1 + x_2, x_1/x_1 + x_2)$
$= (y_1 \quad y_2)$

é uma função inversível..

Digitalizado com CamScanner

Daí, a função de densidade de Y_1 e Y_2 é

$$f(y_1, y_2) = y_1 \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (y_1 y_2)^{\alpha-1} (y_1(1-y_2))^{\beta-1} e^{-y_1}$$

$$= \underbrace{\left\{ \frac{y_2^{\alpha-1} (1-y_2)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \right\}}_{f_{Y_2}(y_2)} \underbrace{\left\{ y_1^{\alpha+\beta-1} e^{-y_1} \right\}}_{f_{Y_1}(y_1)}$$

logo Y_2 e Y_1 são independentes.

$$f_{Y_2}(y_2) = \frac{y_2^{\alpha-1} (1-y_2)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \qquad y_2 \in (0,1)$$

se chama de densidade Beta, i.e.

$Y_2 \sim$ Beta (α, β).

Já a densidade de Y_1 é

$$f_{Y_1}(y_1) = e^{-y_1} y_1^{\alpha+\beta-1} \qquad 0 < y_1 < \infty, \quad \text{i.e.}$$

$Y_1 \sim$ Gama$(\alpha+\beta, 1)$.

Outras distribuições importantes.

- Distribuição t
- Distribuição F