UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DE DADOS

PROVA I - Probabilidade (PPGECD000000001)

Professor: Raydonal Ospina Martinez. **E-mail:** raydonal@castlab.org

Regras

Recomendo que leiam atentamente as perguntas e reservem um tempo adequado para refletir sobre elas. Ressalto que todas as questões devem ser respondidas de forma detalhada, pois soluções ambíguas ou pouco claras serão penalizadas. Lembro ainda que não farei esforço para interpretar ou "adivinhar" o que o aluno quis escrever ou dizer. Por isso, é fundamental que sejam claros e organizados. Informo que a prova deverá ser entregue no dia **17/12/2024** no horário da aula (impressa ou digitalizada).

Problema 1

Seja $\Omega = \{a, b, c, d\}$ um espaço amostral, a coleção

$$\mathcal{F} = \{0, \Omega, \{a\}, \{b, c\}, \{d\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}, \{a, d\}\}$$

a σ-álgebra associada e P uma função de $\mathcal{F}$ em $[0, 1]$ tal que: $P(\{a\}) = \frac{4}{9}$, $P(\{b, c\}) = \frac{2}{7}$ e $P(\{d\}) = 1 - \alpha$. Determine o valor de α que torna P uma medida de probabilidade sobre o espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{F})$. Encontre $P(\{a, b, c\})$, $P(\{b, c, d\})$ e $P(\{a, d\})$. São $\{b, c, d\}$ e $\{a, d\}$ eventos independentes? Explique.

Problema 2

Considere uma matriz 2×2 dada por $\begin{pmatrix} 1 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ na qual os elementos desconhecidos são extraídos aleatoriamente (de modo uniforme) do conjunto $\Omega = \{1, 2, 3\}$. Qual é a probabilidade que a escolha resulte em uma matriz singular, se repetições são permitidas?

Problema 3

Seja $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ um espaço de probabilidade com a σ-álgebra associada $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ (conjunto de partes de Ω). Mostre que a função $X^2 - X - 2$ a valores reais é uma variável aleatória.

Problema 4

Seja X uma variável aleatória com função de massa de probabilidade $f(x)$ e seja $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ um conjunto de Borel em $\mathbb{R}$ tal que $p = P(X \in A) > 0$. A função de probabilidade condicional de X dado o evento $(X \in A)$ é definida por

$$f(x|A) = \frac{1}{p} f(x) \mathbb{I}_A(x) = \begin{cases} \frac{1}{p} f(x), & \text{se } x \in A, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

1. Demonstre que $f(x|A)$ é efetivamente uma função de probabilidade.

2. Sendo $f(x)$ definida por

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{2n+1} & \text{se} \quad x \in \mathcal{M}, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

em que $\mathcal{M} = \{-n, -(n-1), \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, (n-1), n\}$ obtenha $F(x)$ e $F(x|A)$ para $A = \{1, 2, 3, \ldots, (n-1), n\}$.

Dica: $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ e $\sum_{i=m}^{n} 1 = n + 1 - m$

Problema 5

Suponha que o vetor aleatório bivariado (X, Y) seja distribuído uniformemente no círculo unitário, isto é, (X, Y) possui suporte no conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

A densidade é constante dentro do círculo e zero fora dele.

(a) Encontre a função de densidade conjunta $f_{X,Y}(x, y)$.

(b) Encontre a função de distribuição acumulada conjunta $F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$.

(d) Verifique se X e Y são independentes.

(e) Calcule a probabilidade

$$P\left(0.5 < X^2 + Y^2 < \sqrt{\tfrac{\pi}{4}}\right).$$

(f) Definindo a transformação $(X, Y) \mapsto (R, \Theta)$ por

$$X = R\cos(\Theta), \quad Y = R\sin(\Theta),$$

encontre a distribuição conjunta de (R, Θ).

BOA PROVA