

Probabilidade (PGE950)

Raydonal Ospina & Leandro Rêgo

Departamento de Estatística
Universidade Federal de Pernambuco
Recife/PE

PGE950 2018-I

Revisão de teoria de conjuntos

Um *conjunto* representa uma coleção de objetos geralmente representado pelas letras maiúsculas, A , B , etc.

Exemplo 1

- O conjunto cujos elementos são as vogais a, e, i, o e u , i.e.

$$A = \{a, e, i, o, u\}.$$

- O conjunto de dias da semana

$$A = \{\text{segunda, terça, quarta, quinta, sexta, sábado, domingo}\}.$$

- O conjunto de números inteiros. $A = \mathbb{Z} = \{1, 2, \dots\}.$
- O conjunto de números reais. $A = \mathbb{R}.$
- O conjunto de soluções da equação quadrática $x^2 - x - 2 = 0$, $A = \{-1, 2\}.$

- Se A e B são conjuntos e todo elemento x pertencente a A também pertence a B então o conjunto A é dito um subconjunto do conjunto B denotado por $A \subseteq B$. Esta definição inclui o caso em que A e B possuem os mesmos elementos, isto é, são o mesmo conjunto ($A = B$).
- O conjunto que contém todos os conjuntos considerados é denominado de *universo* Ω .

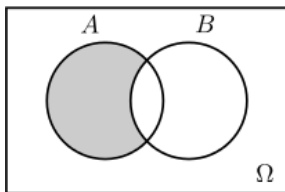
Operações entre conjuntos

Se A e B são eventos, as operações de união, interseção, diferença e complemento entre conjuntos (operações que geram novos conjuntos) são denotadas respectivamente por $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ e A^c . As anteriores operações indicam:

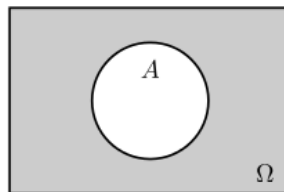
- $A \cup B = \{\omega : \omega \in A \text{ ou } \omega \in B\}$ é um evento que acontece, se e somente se, A ou B acontecem.
- $A \cap B = \{\omega : \omega \in A \text{ e } \omega \in B\}$ é um evento que acontece, se e somente se, A e B acontecem.
- $A - B$ é o evento que acontece, se e somente se, A acontece, mas B não acontece.
- $A^c = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$ é o evento que acontece, se e somente se, A não acontece.
- Dois conjuntos A e B , são ditos disjuntos (ou excludentes) se: $A \cap B = \emptyset$
- Uma família de conjuntos é dita disjunta dois a dois ou mutuamente disjunta se dados dois conjuntos quaisquer da família, eles são disjuntos. Mais formalmente falando, seja A_λ , uma família de conjuntos disjuntos indexados pelo índice $\lambda \in \Lambda$ então:

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \forall i, j \in \Lambda, \quad i \neq j$$

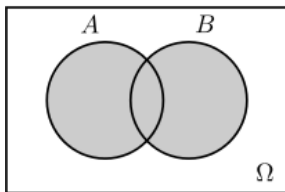
Note que $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \emptyset$, não implica que a família seja disjunta dois a dois. Um contra-exemplo seria: $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}\}$.



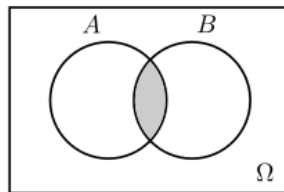
$$A - B$$



$$A^c$$



$$A \cup B$$



$$A \cap B$$

Figura: Operações básicas entre conjuntos.

Outras operações entre conjuntos

- $A \cap A = A$.
- $A \cup A = A$.
- $A \cap \emptyset = \emptyset$.
- $A \cup \emptyset = A$. Elemento neutro da união.
- $A \cap \Omega = A$. Elemento neutro da interseção.
- $A \cup \Omega = \Omega$.
- $A \cap B = B \cap A$. Propriedade comutativa da interseção.
- $A \cup B = B \cup A$. Propriedade comutativa da união.
- $(A^c)^c = A$. Propriedade de involução.
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$. Propriedade associativa da interseção.
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. Propriedade associativa da união.
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Propriedade distributiva da interseção.
- $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$. Lei de De Morgan
- $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$. Lei de De Morgan
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Propriedade distributiva da união

Leis de De Morgan para sequências.

Sejam A_1, A_2, \dots uma sequência de eventos (família de conjuntos) de Ω .

- ❶ $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ é o evento que ocorre quando pelo menos um dos eventos A_i , $i = 1, 2, \dots$ ocorre.
- ❷ $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ é o evento que ocorre quando todos os eventos A_i , $i = 1, 2, \dots$ ocorrem.

❸

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c$$

Esta propriedade estabelece que o evento de que nenhum dos A_i 's aconteçam é igual ao complementar do evento de que pelo menos um dos A_i 's aconteça.

❹

$$\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \right)^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c$$

A propriedade expressa que o complementar do evento de que todos os A_i 's aconteçam é exatamente o evento de que pelo menos um deles não aconteça.

Exercício 1

Verificar a validade das anteriores igualdades.

Definição 1 (Função)

Sejam A e B dois conjuntos. Se a cada elemento de um conjunto A esta associado exatamente um único elemento do conjunto B , então se diz que tal correspondência é uma função de A em B a qual é denotada por f e se escreve como

$$f : A \rightarrow B.$$

O conjunto A se chama o domínio da função e o conjunto B é o codomínio ou contradomínio de f .

- ❶ Se $a \in A$, então o elemento de B que corresponde a este a , se chama a *imagem* de a e é denotada por $f(a)$. Se f é uma função de A em B e $b \in B$ então se define a *imagem recíproca* de B como o conjunto de todos os elementos do conjunto A que tem a b como a sua imagem, isto quer dizer:

$$f^{-1}(b) := \{a \in A : f(a) = b\}.$$

- ❷ Se C é um subconjunto de B , então o conjunto de elementos de A cujas imagens são elementos de C , é chamado de *imagem recíproca de C por f* e a denotamos por $f^{-1}(C)$. Isto é:

$$f^{-1}(C) := \{a \in A : f(a) \in C\}.$$

- ❸ Se D é um subconjunto de A , então um subconjunto de B cujos elementos são as imagens dos elementos de D por meio da função f se chama de *imagem direta* de D e é denotada por $f(D)$, em que

$$f(D) := \{b \in B : b = f(a) \text{ para algum } a \in D\} = \{f(a) : a \in D\}.$$

Cardinalidade

- 1 Um subconjunto importante dos números naturais é o conjunto de índices $I_n = \{p \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq n\}$ para algum $n \in \mathbb{N}$.
- 2 Logo, todo conjunto I_n é finito.
- 3 Seja A um conjunto não vazio. Se existe $n \in \mathbb{N}$ e uma função injetiva $g : A \mapsto I_n$ diremos que A é finito, caso contrário, A é infinito.
- 4 O menor número n que verifica esta propriedade é dito número de elementos de A . Escrevemos $|A| = n$. Diremos também que o conjunto vazio é finito e que seu número de elementos é 0.
- 5 Uma função de bijeção entre dois conjuntos finitos ocorre somente quando eles possuem a mesma quantidade de elementos, aí dizemos que eles possuem a mesma cardinalidade. (De forma geral, se existe uma bijeção entre dois conjuntos, eles possuem a mesma cardinalidade, podendo eles serem infinitos).

Exemplo 2

Caso exista uma bijeção entre A e $I_5 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$, então A possui 5 elementos. Resulta trivial demonstrar que esta função es bijetiva: $f : \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\} \mapsto 1, 2, 3, 4, 5$:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = \omega_1 \\ 2, & \text{se } x = \omega_2 \\ 3, & \text{se } x = \omega_3 \\ 4, & \text{se } x = \omega_4 \\ 5, & \text{se } x = \omega_5 \end{cases}$$

Definição 2 (Produto cartesiano)

O produto cartesiano entre dois conjuntos A e B (denotado por $A \times B$) é um novo conjunto em que seus elementos são pares ordenados (a, b) , em que $a \in A$ e $b \in B$. Simbolicamente, temos que

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

e em geral os conjuntos produto $A \times B$ e $B \times A$ são distintos uma vez que o par (a, b) é distinto do par (b, a) .

Exemplo 3

O produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é o conjunto de todos os pares de números reais (x, y) e o denotamos por \mathbb{R}^2 . De forma análoga são construídos os conjuntos $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4, \dots, \mathbb{R}^k, \dots$

Se a cardinalidade do conjunto $|A| = n$ e a cardinalidade do conjunto $|B| = m$, então a cardinalidade de $|A \times B| = nm$. Este resultado é conhecido como *princípio da multiplicação*. Em geral, a cardinalidade do produto cartesiano de n conjuntos é

$$|(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n)| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_n|.$$

Exemplo 4

Seja $A = \{0, 1\}$. o conjunto $\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_n$ tem 2^n elementos.