Distribuições de funções de variáveis aleatórias.

Inicialmente, suponhamos que conhecemos a função de distribuição $F_{\underset{\sim}{X}}(x,y)$ do vetor aleatório $\underset{\sim}{X} = (X, Y)$. Seja g uma função definida no $\mathbb{R}^2$ que assume valores reais que é contínua. A função $Z = g(X,Y)$ é uma variável aleatória definida no mesmo espaço amostral, então, a idéia é determinar a função de distribuição de Z que denotaremos por

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(g(X,Y) \leq z) = P((X,Y) \in B_z)$$

$$= \iint_{B_z} f(x,y)\,dx\,dy \quad , \text{ em que } B_z = \{(x,y) : g(x,y) \leq z\}$$

Teorema: Sejam X e Y duas variáveis aleatórias com função de densidade conjunta $f(x,y)$. Sejam $Z_1 = g(X,Y) = X+Y$, $Z_2 = g(X,Y) = Y - X$, $Z_3 = g(X,Y) = XY$, $Z_4 = g(X,Y) = Y/X$. Então as densidades de Z_1, Z_2, Z_3 e Z_4 estão respectivamente dadas por:

a) $f_{Z_1}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y, y)\,dy$, para $z \in \mathbb{R}$.

b) $f_{Z_2}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z+x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(z+y, y)\,dy$, para $z \in \mathbb{R}$.

c) $f_{Z_3}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f(x, z/x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|y|} f(z/y, y)\,dy$, para $z \in \mathbb{R}$.

d) $f_{Z_4}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x, zx)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|y|}{z^2} f(y/z, y)\,dy$, para $z \in \mathbb{R}$.

Prova:

a) $$F_{Z_1}(z) = \iint_{B_z} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\{(x,y):\, x+y \leq z\}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)\,dy\,dx$$

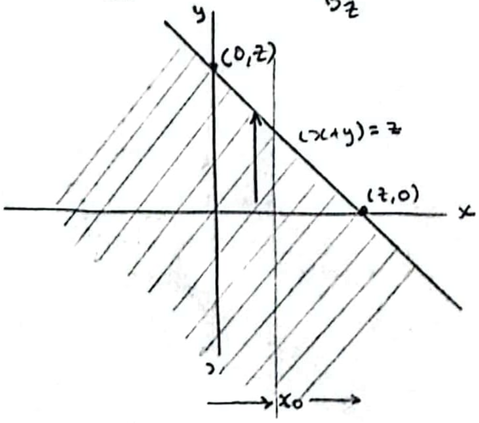


Fig: Região de integração B_z, em que $B_z = \{(x,y) : x+y \leq z\}$

fazendo $y = u - x$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z} f(x, u-x)\,du\,dx = \int_{-\infty}^{z} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, u-x)\,dx\,du$$

Agora $$\frac{dF_{Z_1}(z)}{dz} = \frac{d}{dz}\left\{ \int_{-\infty}^{z} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, u-x)\,dx \right) du \right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x)\,dx = f_{Z_1}(z)$$

Aqui utilizamos o fato de que para uma função contínua h
$\frac{d}{dt}\left\{\int_c^t h(x)\,dx\right\} = h(t)$. (Decorre do teorema fundamental do cálculo).

Intercambiando o papel de x pelo de y no cálculo das integrais temos a segunda igualdade.

b) Seja $Z_2 = Y - X$, então $F_{Z_2}(z) = P(Z_2 \le z) = \iint_{B_z} f(x,y)\,dx\,dy$.

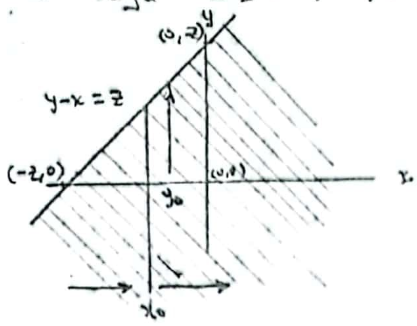


Fig: Região de integração $B_z = \{(x,y): y - x \le z\}$

$$= \iint_{\{(x,y):\, y-x \le z\}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{x+z} f(x,y)\,dy\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z} f(x, u+x)\,du\,dx \quad (\text{fazendo } y = u + x)$$

$$= \int_{-\infty}^{z} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, u+x)\,dx\,du \quad (\text{intercambiando as integrais})$$

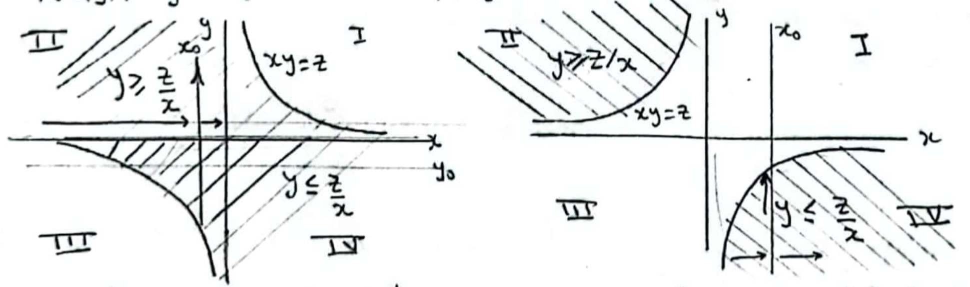
$$\frac{d}{dz}\left\{ \int_{-\infty}^{z} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, u+x)\,dx \right) du \right\} = f_{Z_2}(z) = \frac{d F_{Z_2}(z)}{dz}$$

Logo $f_{Z_2}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z+x)\,dx$, para $z \in \mathbb{R}$.

Intercambiando o papel de x pelo de y temos a segunda igualdade em b).

c) Seja $Z_3 = XY$, então $F_{Z_3}(z) = P(Z_3 \le z) = \iint_{B_z} f(x,y)\,dx\,dy$

$$\iint_{\{(x,y):\, xy \le z\}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\{(x,y):\, xy \le z,\ z > 0\}} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{\{(x,y):\, xy \le z,\ z < 0\}} f(x,y)\,dx\,dy$$



$\{(x,y): xy \le z,\ z > 0\}$ $\{(x,y): xy \le z,\ z < 0\}$

Fig: Região de integração $B_z = B_{z^+} \cup B_{z^-}$ em que $B_{z^+} = \{(x,y): xy \le z, z > 0\}$
$B_{z^-} = \{(x,y): xy \le z,\ z < 0\}$.

$\{(x,y): xy \le z\} = \{(x,y): x < 0,\ y \ge z/x\} \cup \{(x,y): x > 0,\ y \le z/x\}$

$= \{$Região no quadrante II e III$\} \cup \{$Região no quadrante IV$\}$

$$F_{Z_3}(z) = \int_{-\infty}^{0} \left(\int_{z/x}^{\infty} f(x,y)\,dy \right) dx + \int_{0}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{z/x} f(x,y)\,dy \right) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \left(\int_{z}^{-\infty} x^{-1} f\left(x, \frac{u}{x}\right) du \right) dx + \int_{0}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{z} x^{-1} f\left(x, \frac{u}{x}\right) du \right) dx \quad \left(\text{fazendo } y = \frac{u}{x}\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{z} \frac{1}{|x|} f\left(x, \frac{u}{x}\right) du \right) dx$$

(Lembrando que $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$ sendo c um ponto intermedio entre a e b)

(Lembre que $|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \ge 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$)

Daí, $\frac{dF_{Z_3}(z)}{dz} = f_{Z_3}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f(x, \frac{z}{x})\, dx, \quad z \in \mathbb{R}.$

Agora, se intercambiamos o papel de x pelo de y em c) temos a segunda igualdade.

d) Consideremos agora $Z_4 = Y/X$. Neste caso,

$F_{Z_4}(z) = P(Z_4 \leq z) = \iint_{B_z} f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{\{(x,y):\, y/x \leq z\}} f(x,y)\, dx\, dy$

Note que se $x < 0$, então $y/x \leq z$ se e somente se $y \geq xz$. Logo

$\{(x,y): \frac{y}{x} \leq z\} = \{(x,y): x<0,\ y \geq xz\} \cup \{(x,y): x>0,\ y \leq xz\}$

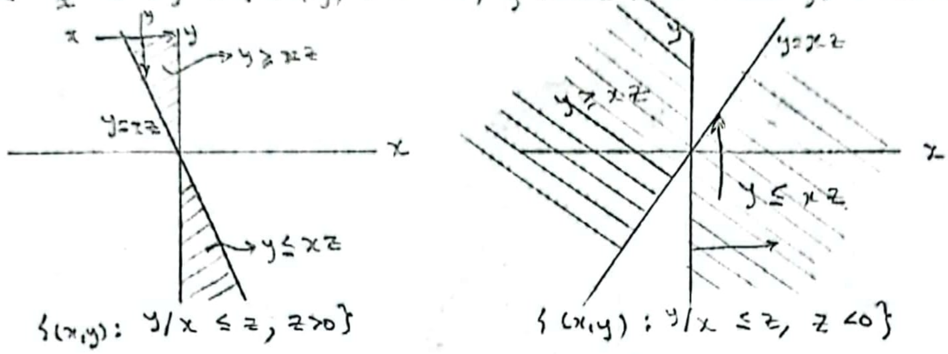


Fig. Região de integração

$B_z = B_z^+ \cup B_z^-$

$B_z^+ = \{(x,y): y/x \leq z, z>0\}$

$B_z^- = \{(x,y): y/x \leq z, z<0\}$

$$F_{Z_4}(z) = \int_{-\infty}^{0} \left(\int_{xz}^{\infty} f(x,y)\, dy \right) dx + \int_{0}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{xz} f(x,y)\, dy \right) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \left(\int_{z}^{-\infty} x f(x, ux)\, du \right) dx + \int_{0}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{z} x f(x, ux)\, du \right) dx \quad (\text{fazendo } y = ux)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{z} |x| f(x, ux)\, du \right) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{z} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x, ux)\, dx \right) du \quad (\text{intercambiando as integrais})$$

Agora $f_{Z_4}(z) = \frac{dF_{Z_4}(z)}{dz} = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x, zx)\, dx, \quad z \in \mathbb{R}.$

ao intercambiar o papel de x pelo de y obtemos a segunda igualdade em d).

No caso em que X e Y sejam variáveis aleatórias independentes, temos que a) do Teorema anterior fica da forma

$f_{Z_1}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\, dy$, i.e.

$f_{Z_1}(z) = f_X * f_Y$ (a convolução de f_X e f_Y)