UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DE DADOS

PROVA II - Probabilidade (PPGECD000000001)

Professor: Raydonal Ospina Martinez. **E-mail:** raydonal@castlab.org

Regras

Recomendo que leiam atentamente as perguntas e reservem um tempo adequado para refletir sobre elas. Ressalto que todas as questões devem ser respondidas de forma detalhada, pois soluções ambíguas ou pouco claras serão penalizadas. Lembro ainda que não farei esforço para interpretar ou "adivinhar" o que o aluno quis escrever ou dizer. Por isso, é fundamental que sejam claros e organizados. Informo que a prova deverá ser entregue (digitalizada em formato PDF) no dia **26/06/2025** até as 21:00h (GMT-3 Horário de Brasília). Deverão encaminhar para o e-mail acima com assunto de envio (`Resposta Prova II - Mestrado - ''coloque aqui seu nome''`) e colocando seu nome.

Problema 1

Seja $\Omega = \{a, b, c\}$ um espaço amostral, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ o conjunto de partes de Ω como sua σ-álgebra e $P(\{\omega\}) = \frac{1}{3}$ para todo $\omega \in \Omega$. Consideremos as variáveis aleatórias X e Y definidas em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ como

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad \omega = a, \text{ ou } \omega = b, \\ 0, & \text{se} \quad \omega = c \end{cases} \qquad \text{e} \qquad Y(\omega) = \begin{cases} \pi, & \text{se} \quad \omega = a, \\ \frac{1}{2}, & \text{se} \quad \omega = b, \\ -1, & \text{se} \quad \omega = c \end{cases}$$

Obtenha as distribuições condicionais acumuladas $F(X|Y)$ e $F(Y|X)$
Dica: Note que as variáveis X e Y são discretas.

Res. A função de probabilidade conjunta, $p(x, y) = P(X = x, Y = y)$, é determinada avaliando os pares $(X(\omega), Y(\omega))$ para cada $\omega \in \Omega$. Dado que $P(\{a\}) = P(\{b\}) = P(\{c\}) = 1/3$ temos:

- Para $\omega = a$: Temos $X(a) = 1$ e $Y(a) = \pi$. Então $P(\{a\}) = 1/3$. Logo, $p(1, \pi) = P(X = 1, Y = \pi) = 1/3$.
- Para $\omega = b$: Temos $X(b) = 1$ e $Y(b) = 1/2$. Então é $P(\{b\}) = 1/3$. Logo, $p(1, 1/2) = P(X = 1, Y = 1/2) = 1/3$.
- Para $\omega = c$: Temos $X(c) = 0$ e $Y(c) = -1$. Então $P(\{c\}) = 1/3$. Logo, $p(0, -1) = P(X = 0, Y = -1) = 1/3$.

Como as variáveis são discretas a distribuição conjunta pode ser representada na tabela

$X \backslash Y$	-1	1/2	π	$p_X(x)$
0	1/3	0	0	1/3
1	0	1/3	1/3	2/3
$p_Y(y)$	1/3	1/3	1/3	1

A função de probabilidade condicional de X dado Y é dada por $p(x|y) = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)}$ e $p(y|x) = \frac{p(x,y)}{p_X(x)}$, i.e.,

- Se $y = -1$: $p(x|-1) = \frac{p(x,-1)}{1/3}$. Logo, $p(0|-1) = 1$ e $p(1|-1) = 0$.
- Se $y = 1/2$: $p(x|1/2) = \frac{p(x,1/2)}{1/3}$. Logo, $p(0|1/2) = 0$ e $p(1|1/2) = 1$.
- Se $y = \pi$: $p(x|\pi) = \frac{p(x,\pi)}{1/3}$. Logo, $p(0|\pi) = 0$ e $p(1|\pi) = 1$.

Por outro lado, A função de probabilidade condicional de Y dado X é

- Se $x = 0$: $p(y|0) = \frac{p(0,y)}{1/3}$. Logo, $p(-1|0) = 1$ e $p(y|0) = 0$ para $y \neq -1$.
- Se $x = 1$: $p(y|1) = \frac{p(1,y)}{2/3}$. Logo, $p(1/2|1) = 1/2$ e $p(\pi|1) = 1/2$.

Agora, somente precisamos acumular a partir das probabilidades condicionais, i.e. olhar para cada valor de y, ou seja $F(x|y) = P(X \leq x|Y = y)$

- Para $y = -1$: a probabilidade está concentrada em $X = 0$.

$$F(x|-1) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 1, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

- Para $y = 1/2$: a probabilidade está concentrada em $X = 1$.

$$F(x|1/2) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 1 \\ 1, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

- Para $y = \pi$: a probabilidade está concentrada em $X = 1$.

$$F(x|\pi) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 1 \\ 1, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

De forma análoga $F(y|x) = P(Y \leq y|X = x)$, i.e. precisamos olhar para cada x.

- Para $x = 0$: a probabilidade está concentrada em $Y = -1$.

$$F(y|0) = \begin{cases} 0, & \text{se } y < -1 \\ 1, & \text{se } y \geq -1 \end{cases}$$

- Para $x = 1$: a probabilidade está concentrada em $Y = 1/2$ e $Y = \pi$.

$$F(y|1) = \begin{cases} 0, & \text{se } y < 1/2 \\ P(Y \leq y|X = 1) = p(1/2|1) = 1/2, & \text{se } 1/2 \leq y < \pi \\ P(Y \leq y|X = 1) = p(1/2|1) + p(\pi|1) = 1, & \text{se } y \geq \pi \end{cases}$$

Problema 2

Suponha que a distribuição conjunta das variáveis aleatórias discretas X e Y está dada por

$X \diagdown Y$	1	2	3	4
0	0,1	0	0	0
-1	0,1	0,1	0	0
-2	0,1	0,1	0,1	0
-3	0,1	0,1	0,1	0,1

Calcule:

1. $P(X \geq -1, Y \geq 1)$
2. As distribuições marginais de X e Y e determine se X e Y são independentes.
3. Encontre a função de distribuição condicional de X dado Y.

Res. Seja $p(x, y)$ a função de probabilidade conjunta dada na tabela.

(a): Cálculo de $P(X \geq -1, Y \geq 1)$ O evento $\{X \geq -1, Y \geq 1\}$ contem os pares (x, y) tais que $x \in \{0, -1\}$ e $y \in \{1, 2, 3, 4\}$. A probabilidade é a soma das probabilidades conjuntas para esses pares.

$$\begin{aligned} P(X \geq -1, Y \geq 1) &= \sum_{x \in \{0,-1\}} \sum_{y=1}^{4} p(x, y) \\ &= p(0, 1) + p(0, 2) + p(0, 3) + p(0, 4) \\ &\quad + p(-1, 1) + p(-1, 2) + p(-1, 3) + p(-1, 4) \\ &= (0,1 + 0 + 0 + 0) + (0,1 + 0,1 + 0 + 0) \\ &= 0,1 + 0,2 = 0,3 \end{aligned}$$

Portanto, $\mathbf{P(X \geq -1, Y \geq 1) = 0,3}$.

(b): As distribuições marginais, $p_X(x)$ e $p_Y(y)$, são obtidas somando as probabilidades ao longo das linhas e colunas da tabela conjunta, respectivamente.

X \ Y	1	2	3	4	$p_X(x)$
0	0,1	0	0	0	0,1
-1	0,1	0,1	0	0	0,2
-2	0,1	0,1	0,1	0	0,3
-3	0,1	0,1	0,1	0,1	0,4
$p_Y(y)$	0,4	0,3	0,2	0,1	1,0

Assim, a distribuição marginal de X é $p_X(0) = 0,1$; $p_X(-1) = 0,2$; $p_X(-2) = 0,3$; $p_X(-3) = 0,4$. Por outro lado, a distribuição marginal de Y é $p_Y(1) = 0,4$; $p_Y(2) = 0,3$; $p_Y(3) = 0,2$; $p_Y(4) = 0,1$.

Agora, sabemos que duas variáveis aleatórias X e Y são independentes se, e somente se, $p(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$ para **todos** os pares (x,y). É suficiente encontrar um contra-exemplo. Considere o par $(x,y) = (0,1)$.: Da tabela, temos que $p(0,1) = 0,1$, e o produto das marginais é $p_X(0) \cdot p_Y(1) = (0,1) \times (0,4) = 0,04$. Como $p(0,1) = 0,1 \neq 0,04 = p_X(0)p_Y(1)$, logo X e Y não são independentes.

(c): A função de distribuição condicional de X dado Y, $F(x|y) = P(X \leq x|Y = y)$ é obtida da distribuição condicional $p(x|y) = p(x,y)/p_Y(y)$.

Para $Y = 1$ ($p_Y(1) = 0,4$) $p(0|1) = \frac{0,1}{0,4} = \frac{1}{4}$; $p(-1|1) = \frac{0,1}{0,4} = \frac{1}{4}$; $p(-2|1) = \frac{0,1}{0,4} = \frac{1}{4}$; $p(-3|1) = \frac{0,1}{0,4} = \frac{1}{4}$.

$$F(x|1) = \begin{cases} 0, & x < -3 \\ 1/4, & -3 \leq x < -2 \\ 1/4 + 1/4 = 1/2, & -2 \leq x < -1 \\ 1/2 + 1/4 = 3/4, & -1 \leq x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

para $Y = 2$ ($p_Y(2) = 0,3$) $p(-1|2) = \frac{0,1}{0,3} = \frac{1}{3}$; $p(-2|2) = \frac{0,1}{0,3} = \frac{1}{3}$; $p(-3|2) = \frac{0,1}{0,3} = \frac{1}{3}$.

$$F(x|2) = \begin{cases} 0, & x < -3 \\ 1/3, & -3 \leq x < -2 \\ 1/3 + 1/3 = 2/3, & -2 \leq x < -1 \\ 1, & x \geq -1 \end{cases}$$

para $Y = 3$ ($p_Y(3) = 0,2$) $p(-2|3) = \frac{0,1}{0,2} = \frac{1}{2}$; $p(-3|3) = \frac{0,1}{0,2} = \frac{1}{2}$.

$$F(x|3) = \begin{cases} 0, & x < -3 \\ 1/2, & -3 \leq x < -2 \\ 1, & x \geq -2 \end{cases}$$

para $Y = 4$ ($p_Y(4) = 0,1$) $p(-3|4) = \frac{0,1}{0,1} = 1$.

$$F(x|4) = \begin{cases} 0, & x < -3 \\ 1, & x \geq -3 \end{cases}$$

Problema 3

Considere um par de variáveis aleatórias discretas (X, Y) cuja função de distribuição de probabilidade conjunta é F, i.e., $F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$, $x, y \in \mathbb{R}$. Sejam F_X e F_Y as funções de distribuição das variáveis aleatórias X e Y, respectivamente (distribuições marginais). Mostre que:

$$P(X > x, Y > y) = 1 - F_X(x) - F_Y(y) + F(x,y).$$

Res. Sejam A e B os eventos:

- $A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) > x\}$
- $B = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) > y\}$

O nosso objetivo é calcular $P(A \cap B)$. Note que

- $A^c = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$. Por definição, $P(A^c) = P(X \leq x) = F_X(x)$.
- $B^c = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq y\}$. Por definição, $P(B^c) = P(Y \leq y) = F_Y(y)$.

Mas sabemos que

$$P(A \cap B) = 1 - P((A \cap B)^c)$$

e utilizando as Leis de De Morgan para conjuntos, sabemos que $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$. Daí,

$$P(A \cap B) = 1 - P(A^c \cup B^c)$$

Agora, aplicamos o Princípio da Inclusão-Exclusão para a probabilidade da união de dois eventos:

$$P(A^c \cup B^c) = P(A^c) + P(B^c) - P(A^c \cap B^c)$$

Assim, $P(A^c) = F_X(x)$, $P(B^c) = F_Y(y)$ e $A^c \cap B^c = \{X \leq x \text{ e } Y \leq y\}$. A probabilidade deste evento é, por definição da função de distribuição conjunta, $P(A^c \cap B^c) = P(X \leq x, Y \leq y) = F(x,y)$. Substituindo estes termos de volta na fórmula da união:

$$P(A^c \cup B^c) = F_X(x) + F_Y(y) - F(x,y)$$

como $P(A \cap B) = 1 - (F_X(x) + F_Y(y) - F(x,y))$ temos

$$P(X > x, Y > y) = 1 - F_X(x) - F_Y(y) + F(x,y)$$

Problema 4

Sejam X e Y variáveis aleatórias com função de densidade de probabilidade conjunta dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{se } \; -1 < x < 1, -1 < y < 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

1. Obtenha $P(X+Y>0)$ e $P(X>0)$.
2. Sejam $Z = X+Y$ e $W = X-Y$ funções lineares das varáveis aleatórias X e Y. Usando o método do Jacobiano obtenha a função de densidade conjunta de Z e W.
3. Obtenha a função de densidade (marginal) de W
4. Obtenha a função de densidade condicional de Z dado W, i.e., $f_{Z|W}(z|w)$.

Res.

(a) Como a distribuição é uniforme, a probabilidade de um evento $A \subseteq S$ é dada por $P(A) = \text{Área}(A)/\text{Área}(S)$. O evento corresponde à região $R_1 = \{(x,y) \in S : x+y>0\}$, ou $y > -x$. A linha $y=-x$ divide o quadrado S em duas metades de área igual. A região $y>-x$ é a metade superior do quadrado. Portanto, a $\text{Área}(R_1) = \frac{1}{2}\text{Área}(S) = \frac{1}{2} \times 4 = 2$. Assim. a probabilidade $P(X+Y>0) = \frac{\text{Área}(R_1)}{\text{Área}(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Agora para $P(X>0)$, o evento corresponde à região $R_2 = \{(x,y) \in S : x>0\}$. Esta região é o retângulo $[0,1]\times[-1,1]$, que é a metade direita do quadrado S. A área é $\text{Área}(R_2) = (1-0) \times (1-(-1)) = 1 \times 2 = 2$. A probabilidade é: $P(X>0) = \frac{\text{Área}(R_2)}{\text{Área}(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

(b) Dada a transformação $Z = X+Y$ e $W = X-Y$, resolvemos para X e Y:

- $Z + W = (X+Y) + (X-Y) = 2X \implies X = \frac{Z+W}{2}$
- $Z - W = (X+Y) - (X-Y) = 2Y \implies Y = \frac{Z-W}{2}$

O Jacobiano J é o determinante da matriz de derivadas parciais de (x,y) em relação a (z,w):

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$$

O valor absoluto do Jacobiano é $|J| = 1/2$. O suporte original é $-1 < x < 1$ e $-1 < y < 1$. Substituímos X e Y:

- $-1 < \frac{z+w}{2} < 1 \implies -2 < z+w < 2$
- $-1 < \frac{z-w}{2} < 1 \implies -2 < z-w < 2$

Esta região S' no plano (z,w) é um quadrado rotacionado com vértices em $(2,0), (0,2), (-2,0), (0,-2)$.

Agora, a densidade é $f_{Z,W}(z,w) = f_{X,Y}(x(z,w), y(z,w)) \cdot |J|$.

$$f_{Z,W}(z,w) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Assim, a função de densidade conjunta de (Z,W) é:

$$f_{Z,W}(z,w) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & \text{se } (z,w) \in S' \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(c) Para obter $f_W(w)$, integramos $f_{Z,W}(z,w)$ sobre z. Para um $w \in (-2,2)$ fixo, os limites de z são dados por $-2 < z+w < 2 \implies -2-w < z < 2-w$ e $-2 < z-w < 2 \implies w-2 < z < w+2$. Combinando: $\max(-2-w, w-2) < z < \min(2-w, w+2)$, i..e, $-2+|w| < z < 2-|w|$.

$$\begin{aligned} f_W(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Z,W}(z,w)\,dz &= \int_{-2+|w|}^{2-|w|} \frac{1}{8}\,dz \\ &= \frac{1}{8}[z]_{-2+|w|}^{2-|w|} = \frac{1}{8}\left((2-|w|)-(-2+|w|)\right) \\ &= \frac{1}{8}(4-2|w|) = \frac{2-|w|}{4} \end{aligned}$$

A densidade marginal de W (é uma distribuição triangular) dada por:

$$f_W(w) = \begin{cases} \frac{2-|w|}{4}, & \text{se } -2 < w < 2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(d) A densidade condicional é $f_{Z|W}(z|w) = \frac{f_{Z,W}(z,w)}{f_W(w)}$, para $f_W(w) > 0$.

$$f_{Z|W}(z|w) = \frac{1/8}{(2-|w|)/4} = \frac{4}{8(2-|w|)} = \frac{1}{2(2-|w|)}$$

O suporte de z dado w é $-2+|w| < z < 2-|w|$.

$$f_{Z|W}(z|w) = \begin{cases} \frac{1}{2(2-|w|)}, & \text{para } -2+|w| < z < 2-|w| \text{ e } w \in (-2,2) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Isto indica que, dado $W = w$, Z segue uma distribuição uniforme no intervalo $(-2+|w|, 2-|w|)$.

Problema 5

Considere a *convolução* $f_X * f_Y$ entre as funções de densidade das variáveis aleatórias X e Y, i.e., a função de densidade da variável aleatória $Z = X + Y$. Mostre que o operador de convolução $(*)$ é:

1. comutativo: $f_X * f_Y = f_Y * f_X$
2. distributivo: $f_Z * (f_X + f_Y) = f_Z * f_X + f_Z * f_Y$
3. associativo: $(f_Z * f_X) * f_Y = f_Z * (f_X * f_Y)$

A convolução de duas funções integráveis g e h é definida como $(g * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)h(t-x)\,dx$. Se X e Y são v.a. independentes com funçõs de densidade f_X e f_Y, a função de densidade da soma $S = X + Y$ é $f_S = f_X * f_Y$.

(a): Comutatividade. Seja

$$(f_X * f_Y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(t-x)\,dx$$

Fazendo a mudança de variável $u = t - x$. Assim, $x = t - u$ e $dx = -du$. Os limites de integração se invertem: quando $x \to \infty$, $u \to -\infty$ e quando $x \to -\infty$, $u \to \infty$.

$$\begin{aligned}
(f_X * f_Y)(t) &= \int_{\infty}^{-\infty} f_X(t-u) f_Y(u)(-du) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(u) f_X(t-u)\, du \quad \text{(invertendo os limites e o sinal)} \\
&= (f_Y * f_X)(t)
\end{aligned}$$

Portanto, o operador de convolução é comutativo.

(b): Distributividade

$$\begin{aligned}
(f_Z * (f_X + f_Y))(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_Z(x)(f_X + f_Y)(t-x)\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_Z(x)[f_X(t-x) + f_Y(t-x)]\, dx \quad \text{(soma de funções)} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} [f_Z(x) f_X(t-x) + f_Z(x) f_Y(t-x)]\, dx \quad \text{(distributividade do produto)} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_Z(x) f_X(t-x)\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} f_Z(x) f_Y(t-x)\, dx \quad \text{(linearidade da integral)} \\
&= (f_Z * f_X)(t) + (f_Z * f_Y)(t)
\end{aligned}$$

Portanto, o operador é distributivo sobre a adição.

(c): Associatividade Queremos provar que $((f_Z * f_X) * f_Y)(t) = (f_Z * (f_X * f_Y))(t)$. Começamos pelo lado esquerdo. Seja $g = f_Z * f_X$, em que $g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Z(x) f_X(y-x)\, dx$.

$$\begin{aligned}
((f_Z * f_X) * f_Y)(t) = (g * f_Y)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y) f_Y(t-y)\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_Z(x) f_X(y-x)\, dx \right) f_Y(t-y)\, dy
\end{aligned}$$

Pelo Teorema de Fubini-Tonelli, podemos trocar a ordem de integração:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_Z(x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_X(y-x) f_Y(t-y)\, dy \right) dx$$

Analisamos agora a integral interna. Fazemos a substituição $u = y - x$, o que implica $y = u + x$ e $dy = du$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) f_Y(t-(u+x))\, du = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) f_Y((t-x)-u)\, du$$

Esta integral é, por definição, $(f_X * f_Y)(t-x)$. Substituindo de volta:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_Z(x)(f_X * f_Y)(t-x)\, dx$$

Esta expressão é a definição de $(f_Z * (f_X * f_Y))(t)$. Portanto, a associatividade é válida.