Resolução Detalhada da Prova de Probabilidade

Análise Estatística e Matemática

06 de julho de 2025

Sumário

Introdução

Este documento apresenta a resolução detalhada dos problemas propostos na avaliação. Cada questão é abordada com rigor matemático e estatístico, explicitando todas as etapas do raciocínio, desde a definição dos conceitos fundamentais até a obtenção do resultado final. A notação e a linguagem utilizadas são consistentes com a teoria de probabilidades e a estatística matemática, visando a clareza e a precisão técnica.

Problema 1. *pr-1 Seja $\Omega = \{a, b, c\}$ um espaço amostral, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ o conjunto de partes de Ω como sua σ-álgebra e $P(\{\omega\}) = \frac{1}{3}$ para todo $\omega \in \Omega$. Consideremos as variáveis aleatórias X e Y definidas em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ como*

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & se \quad \omega = a, \ ou \ \omega = b, \\ 0, & se \quad \omega = c \end{cases} \qquad e \qquad Y(\omega) = \begin{cases} \pi, & se \quad \omega = a, \\ \frac{1}{2}, & se \quad \omega = b, \\ -1, & se \quad \omega = c \end{cases}$$

Obtenha as distribuições condicionais acumuladas $F(X|Y)$ e $F(Y|X)$.

Resolução do Problema 1

Para obter as funções de distribuição acumulada (FDA) condicionais, $F(x|y) = P(X \leq x|Y = y)$ e $F(y|x) = P(Y \leq y|X = x)$, o primeiro passo é caracterizar a distribuição de probabilidade conjunta do par de variáveis aleatórias (X, Y).

1. Determinação da Função de Probabilidade Conjunta

A função de probabilidade conjunta, $p(x, y) = P(X = x, Y = y)$, é determinada avaliando os pares $(X(\omega), Y(\omega))$ para cada $\omega \in \Omega$ e sua respectiva probabilidade. Dado que $P(\{a\}) = P(\{b\}) = P(\{c\}) = 1/3$:

- Para $\omega = a$: Temos $X(a) = 1$ e $Y(a) = \pi$. A probabilidade deste evento é $P(\{a\}) = 1/3$. Portanto, $p(1, \pi) = P(X = 1, Y = \pi) = 1/3$.
- Para $\omega = b$: Temos $X(b) = 1$ e $Y(b) = 1/2$. A probabilidade deste evento é $P(\{b\}) = 1/3$. Portanto, $p(1, 1/2) = P(X = 1, Y = 1/2) = 1/3$.
- Para $\omega = c$: Temos $X(c) = 0$ e $Y(c) = -1$. A probabilidade deste evento é $P(\{c\}) = 1/3$. Portanto, $p(0, -1) = P(X = 0, Y = -1) = 1/3$.

Para todos os outros pares (x, y), a probabilidade conjunta é zero. A distribuição conjunta pode ser resumida na seguinte tabela, que também inclui as distribuições marginais (soma das linhas e colunas).

$X \backslash Y$	-1	1/2	π	$p_X(x)$
0	1/3	0	0	1/3
1	0	1/3	1/3	2/3
$p_Y(y)$	1/3	1/3	1/3	1

2. Determinação das Funções de Probabilidade Condicionais

A função de probabilidade condicional é dada por $p(x|y) = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)}$ e $p(y|x) = \frac{p(x,y)}{p_X(x)}$.

0.0.0.1 Condicional de X dado $Y = y$:

- Se $y = -1$: $p(x|-1) = \frac{p(x,-1)}{1/3}$. Assim, $p(0|-1) = 1$ e $p(1|-1) = 0$.
- Se $y = 1/2$: $p(x|1/2) = \frac{p(x,1/2)}{1/3}$. Assim, $p(0|1/2) = 0$ e $p(1|1/2) = 1$.
- Se $y = \pi$: $p(x|\pi) = \frac{p(x,\pi)}{1/3}$. Assim, $p(0|\pi) = 0$ e $p(1|\pi) = 1$.

0.0.0.2 Condicional de Y dado $X = x$:

- Se $x = 0$: $p(y|0) = \frac{p(0,y)}{1/3}$. Assim, $p(-1|0) = 1$ e $p(y|0) = 0$ para $y \neq -1$.
- Se $x = 1$: $p(y|1) = \frac{p(1,y)}{2/3}$. Assim, $p(1/2|1) = 1/2$ e $p(\pi|1) = 1/2$.

3. Obtenção das Funções de Distribuição Acumulada Condicionais

0.0.0.3 FDA Condicional $F(x|y) = P(X \leq x|Y = y)$: A partir das probabilidades condicionais, construímos a FDA para cada valor de y.

- Para $y = -1$: A massa de probabilidade está toda em $X = 0$.

$$F(x|-1) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 1, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

- Para $y = 1/2$: A massa de probabilidade está toda em $X = 1$.

$$F(x|1/2) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 1 \\ 1, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

- Para $y = \pi$: A massa de probabilidade está toda em $X = 1$.

$$F(x|\pi) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 1 \\ 1, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

0.0.0.4 FDA Condicional $F(y|x) = P(Y \leq y|X = x)$: Analogamente, para cada valor de x.

- Para $x = 0$: A massa de probabilidade está toda em $Y = -1$.

$$F(y|0) = \begin{cases} 0, & \text{se } y < -1 \\ 1, & \text{se } y \geq -1 \end{cases}$$

- Para $x = 1$: A massa de probabilidade está distribuída entre $Y = 1/2$ e $Y = \pi$.

$$F(y|1) = \begin{cases} 0, & \text{se } y < 1/2 \\ P(Y \leq y|X = 1) = p(1/2|1) = 1/2, & \text{se } 1/2 \leq y < \pi \\ P(Y \leq y|X = 1) = p(1/2|1) + p(\pi|1) = 1, & \text{se } y \geq \pi \end{cases}$$

Problema 2. *pr-3 Suponha que a distribuição conjunta das variáveis aleatórias discretas X e Y está dada por*

X╲Y	1	2	3	4
0	0,1	0	0	0
-1	0,1	0,1	0	0
-2	0,1	0,1	0,1	0
-3	0,1	0,1	0,1	0,1

Calcule:

1. $P(X \geq -1, Y \geq 1)$
2. *As distribuições marginais de X e Y e determine se X e Y são independentes.*
3. *Encontre a função de distribuição condicional de X dado Y.*

Resolução do Problema 2

Seja $p(x, y)$ a função de probabilidade conjunta dada na tabela.

Item (a): Cálculo de $P(X \geq -1, Y \geq 1)$

O evento $\{X \geq -1, Y \geq 1\}$ compreende os pares (x, y) tais que $x \in \{0, -1\}$ e $y \in \{1, 2, 3, 4\}$. A probabilidade é a soma das probabilidades conjuntas para esses pares.

$$\begin{aligned}
P(X \geq -1, Y \geq 1) &= \sum_{x \in \{0,-1\}} \sum_{y=1}^{4} p(x, y) \\
&= p(0, 1) + p(0, 2) + p(0, 3) + p(0, 4) \\
&\quad + p(-1, 1) + p(-1, 2) + p(-1, 3) + p(-1, 4) \\
&= (0,1 + 0 + 0 + 0) + (0,1 + 0,1 + 0 + 0) \\
&= 0,1 + 0,2 = 0,3
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathbf{P(X \geq -1, Y \geq 1) = 0,3}$.

Item (b): Distribuições Marginais e Independência

As distribuições marginais, $p_X(x)$ e $p_Y(y)$, são obtidas somando as probabilidades ao longo das linhas e colunas da tabela conjunta, respectivamente.

X ╲ Y	1	2	3	4	$p_X(x)$
0	0,1	0	0	0	0,1
-1	0,1	0,1	0	0	0,2
-2	0,1	0,1	0,1	0	0,3
-3	0,1	0,1	0,1	0,1	0,4
$p_Y(y)$	0,4	0,3	0,2	0,1	1,0

0.0.0.5 Distribuição Marginal de X: $p_X(0) = 0,1;\quad p_X(-1) = 0,2;\quad p_X(-2) = 0,3;\quad p_X(-3) = 0,4.$

0.0.0.6 Distribuição Marginal de Y: $p_Y(1) = 0,4;\quad p_Y(2) = 0,3;\quad p_Y(3) = 0,2;\quad p_Y(4) = 0,1.$

0.0.0.7 Verificação de Independência:

Duas variáveis aleatórias X e Y são independentes se, e somente se, $p(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$ para **todos** os pares (x, y). É suficiente encontrar um contra-exemplo. Consideremos o par $(x, y) = (0, 1)$:

- Da tabela, $p(0, 1) = 0,1$.
- O produto das marginais é $p_X(0) \cdot p_Y(1) = (0,1) \times (0,4) = 0,04$.

Como $p(0, 1) = 0,1 \neq 0,04 = p_X(0)p_Y(1)$, concluímos que as variáveis aleatórias X **e** Y **não são independentes**.

Item (c): Função de Distribuição Condicional de X dado Y

A FDA condicional $F(x|y) = P(X \leq x|Y = y)$ é construída a partir da PMF condicional $p(x|y) = p(x, y)/p_Y(y)$.

0.0.0.8 Caso 1: Y = 1 ($p_Y(1) = 0,4$)

$p(0|1) = \frac{0,1}{0,4} = \frac{1}{4}$; $p(-1|1) = \frac{0,1}{0,4} = \frac{1}{4}$; $p(-2|1) = \frac{0,1}{0,4} = \frac{1}{4}$; $p(-3|1) = \frac{0,1}{0,4} = \frac{1}{4}$. $F(x|1) = \begin{cases} 0, & x < -3 \\ 1/4, & -3 \leq x < -2 \\ 1/4 + 1/4 = 1/2, & -2 \leq x < -1 \\ 1/2 + 1/4 = 3/4, & -1 \leq x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$

0.0.0.9 Caso 2: Y = 2 ($p_Y(2) = 0,3$)

$p(-1|2) = \frac{0,1}{0,3} = \frac{1}{3}$; $p(-2|2) = \frac{0,1}{0,3} = \frac{1}{3}$; $p(-3|2) = \frac{0,1}{0,3} = \frac{1}{3}$.

$$F(x|2) = \begin{cases} 0, & x < -3 \\ 1/3, & -3 \leq x < -2 \\ 1/3 + 1/3 = 2/3, & -2 \leq x < -1 \\ 1, & x \geq -1 \end{cases}$$

0.0.0.10 Caso 3: Y = 3 ($p_Y(3) = 0,2$)

$p(-2|3) = \frac{0,1}{0,2} = \frac{1}{2}$; $p(-3|3) = \frac{0,1}{0,2} = \frac{1}{2}$. $F(x|3) = \begin{cases} 0, & x < -3 \\ 1/2, & -3 \leq x < -2 \\ 1, & x \geq -2 \end{cases}$

0.0.0.11 Caso 4: Y = 4 ($p_Y(4) = 0,1$)

$p(-3|4) = \frac{0,1}{0,1} = 1$. $F(x|4) = \begin{cases} 0, & x < -3 \\ 1, & x \geq -3 \end{cases}$

Problema 3. *pr-2 Considere um par de variáveis aleatórias discretas* (X, Y) *cuja função de distribuição de probabilidade conjunta é* F*, i.e.,* $F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$*,* $x, y \in \mathbb{R}$*. Sejam* F_X *e* F_Y *as funções de distribuição das variáveis aleatórias* X *e* Y*, respectivamente (distribuições marginais). Mostre que:*

$$P(X > x, Y > y) = 1 - F_X(x) - F_Y(y) + F(x, y).$$

Resolução do Problema 3

Desejamos provar a identidade $P(X > x, Y > y) = 1 - F_X(x) - F_Y(y) + F(x, y)$. Esta identidade é frequentemente chamada de função de sobrevivência conjunta. A prova se baseia na teoria de conjuntos e nos axiomas de probabilidade de Kolmogorov.

Sejam A e B os seguintes eventos:

- $A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) > x\}$
- $B = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) > y\}$

O nosso objetivo é calcular $P(A \cap B)$.

Consideremos os eventos complementares, A^c e B^c:

- $A^c = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$. Por definição da FDA marginal, $P(A^c) = P(X \leq x) = F_X(x)$.
- $B^c = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq y\}$. Por definição da FDA marginal, $P(B^c) = P(Y \leq y) = F_Y(y)$.

Pelo axioma da probabilidade do complemento, a probabilidade de um evento E é $P(E) = 1 - P(E^c)$. Aplicando isso ao evento $A \cap B$:

$$P(A \cap B) = 1 - P((A \cap B)^c)$$

Utilizando as Leis de De Morgan para conjuntos, sabemos que $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$. Substituindo na equação:

$$P(A \cap B) = 1 - P(A^c \cup B^c)$$

Agora, aplicamos o Princípio da Inclusão-Exclusão para a probabilidade da união de dois eventos:

$$P(A^c \cup B^c) = P(A^c) + P(B^c) - P(A^c \cap B^c)$$

Vamos identificar cada termo desta expressão:

- $P(A^c) = F_X(x)$.
- $P(B^c) = F_Y(y)$.
- $A^c \cap B^c = \{X \leq x \text{ e } Y \leq y\}$. A probabilidade deste evento é, por definição da FDA conjunta, $P(A^c \cap B^c) = P(X \leq x, Y \leq y) = F(x, y)$.

Substituindo estes termos de volta na fórmula da união:

$$P(A^c \cup B^c) = F_X(x) + F_Y(y) - F(x, y)$$

Finalmente, inserimos este resultado na expressão para $P(A \cap B)$:

$$P(A \cap B) = 1 - (F_X(x) + F_Y(y) - F(x, y))$$

Distribuindo o sinal negativo, obtemos a identidade desejada:

$$P(X > x, Y > y) = 1 - F_X(x) - F_Y(y) + F(x, y)$$

o que completa a demonstração. É importante notar que esta prova é geral e se aplica tanto a variáveis aleatórias discretas quanto contínuas.

Problema 4. *pr5 Sejam X e Y variáveis aleatórias com função de densidade de probabilidade conjunta dada por*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & se \quad -1 < x < 1, -1 < y < 1, \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases}$$

1. *Obtenha $P(X+Y>0)$ e $P(X>0)$.*
2. *Sejam $Z = X+Y$ e $W = X-Y$ funções lineares das varáveis aleatórias X e Y. Usando o método do Jacobiano obtenha a função de densidade conjunta de Z e W.*
3. *Obtenha a função de densidade (marginal) de W.*
4. *Obtenha a função de densidade condicional de Z dado W, i.e., $f_{Z|W}(z|w)$.*

Resolução do Problema 4

A função de densidade $f(x,y)$ descreve uma distribuição uniforme sobre o quadrado $S = [-1,1] \times [-1,1]$. A área desta região de suporte é $A_S = 2 \times 2 = 4$.

Item (a): Cálculo de Probabilidades

Como a distribuição é uniforme, a probabilidade de um evento $A \subseteq S$ é dada por $P(A) = \text{Área}(A)/\text{Área}(S)$.

0.0.0.12 Cálculo de $P(X+Y>0)$: O evento corresponde à região $R_1 = \{(x,y) \in S : x+y>0\}$, ou $y > -x$. A linha $y = -x$ divide o quadrado S em duas metades de área igual. A região $y > -x$ é a metade superior do quadrado. Portanto, a $\text{Área}(R_1) = \frac{1}{2}\text{Área}(S) = \frac{1}{2} \times 4 = 2$. A probabilidade é: $ P(X+Y>0) =

0.0.0.13 Cálculo de $P(X>0)$: O evento corresponde à região $R_2 = \{(x,y) \in S : x>0\}$. Esta região é o retângulo $[0,1] \times [-1,1]$, que é a metade direita do quadrado S. A área é $\text{Área}(R_2) = (1-0) \times (1-(-1)) = 1 \times 2 = 2$. A probabilidade é: $ P(X>0) =

Item (b): Método do Jacobiano

0.0.0.14 1. Transformação Inversa: Dada a transformação $Z = X+Y$ e $W = X-Y$, resolvemos para X e Y:

- $Z + W = (X+Y) + (X-Y) = 2X \implies X = \frac{Z+W}{2}$
- $Z - W = (X+Y) - (X-Y) = 2Y \implies Y = \frac{Z-W}{2}$

0.0.0.15 2. Jacobiano da Transformação Inversa: O Jacobiano J é o determinante da matriz de derivadas parciais de (x,y) em relação a (z,w):

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$$

O valor absoluto do Jacobiano é $|J| = 1/2$.

0.0.0.16 3. Nova Região de Suporte: O suporte original é $-1 < x < 1$ e $-1 < y < 1$. Substituímos X e Y:

- $-1 < \frac{z+w}{2} < 1 \implies -2 < z+w < 2$
- $-1 < \frac{z-w}{2} < 1 \implies -2 < z-w < 2$

Esta região S' no plano (z,w) é um quadrado rotacionado com vértices em $(2,0), (0,2), (-2,0), (0,-2)$.

0.0.0.17 4. Densidade Conjunta de (Z, W): A densidade é $f_{Z,W}(z,w) = f_{X,Y}(x(z,w), y(z,w)) \cdot |J|$.

$$f_{Z,W}(z,w) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Assim, a FDP conjunta de (Z, W) é:

$$f_{Z,W}(z,w) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & \text{se } (z,w) \in S' \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Item (c): Densidade Marginal de W

Para obter $f_W(w)$, integramos $f_{Z,W}(z,w)$ sobre z. Para um $w \in (-2,2)$ fixo, os limites de z são dados por $-2 < z + w < 2 \implies -2 - w < z < 2 - w$ e $-2 < z - w < 2 \implies w - 2 < z < w + 2$. Combinando: $\max(-2 - w, w - 2) < z < \min(2 - w, w + 2)$. Isto simplifica para $-2 + |w| < z < 2 - |w|$.

$$\begin{aligned} f_W(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Z,W}(z,w)\, dz &= \int_{-2+|w|}^{2-|w|} \frac{1}{8}\, dz \\ &= \frac{1}{8}[z]_{-2+|w|}^{2-|w|} = \frac{1}{8}\left((2 - |w|) - (-2 + |w|)\right) \\ &= \frac{1}{8}(4 - 2|w|) = \frac{2 - |w|}{4} \end{aligned}$$

A densidade marginal de W (uma distribuição triangular) é:

$$f_W(w) = \begin{cases} \frac{2-|w|}{4}, & \text{se } -2 < w < 2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Item (d): Densidade Condicional $f_{Z|W}(z|w)$

A densidade condicional é $f_{Z|W}(z|w) = \frac{f_{Z,W}(z,w)}{f_W(w)}$, para $f_W(w) > 0$.

$$f_{Z|W}(z|w) = \frac{1/8}{(2 - |w|)/4} = \frac{4}{8(2 - |w|)} = \frac{1}{2(2 - |w|)}$$

O suporte de z dado w é $-2 + |w| < z < 2 - |w|$.

$$f_{Z|W}(z|w) = \begin{cases} \frac{1}{2(2-|w|)}, & \text{para } -2 + |w| < z < 2 - |w| \text{ e } w \in (-2,2) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Isto indica que, dado $W = w$, Z segue uma distribuição uniforme no intervalo $(-2 + |w|, 2 - |w|)$.

Problema 5. *pr-4 Considere a convolução $f_X * f_Y$ entre as funções de densidade das variáveis aleatórias X e Y, i.e., a função de densidade da variável aleatória $Z = X + Y$. Mostre que o operador de convolução $(*)$ é:*

1. *comutativo:* $f_X * f_Y = f_Y * f_X$
2. *distributivo:* $f_Z * (f_X + f_Y) = f_Z * f_X + f_Z * f_Y$
3. *associativo:* $(f_Z * f_X) * f_Y = f_Z * (f_X * f_Y)$

Resolução do Problema 5

A convolução de duas funções integráveis g e h é definida como $(g * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)h(t-x)\,dx$. Se X e Y são V.A.s independentes com FDPs f_X e f_Y, a FDP da soma $S = X + Y$ é $f_S = f_X * f_Y$.

Item (a): Comutatividade

Desejamos provar que $(f_X * f_Y)(t) = (f_Y * f_X)(t)$.

$$(f_X * f_Y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(t-x)\,dx$$

Realizamos a mudança de variável $u = t - x$. Assim, $x = t - u$ e $dx = -du$. Os limites de integração se invertem: quando $x \to \infty$, $u \to -\infty$ e quando $x \to -\infty$, $u \to \infty$.

$$\begin{aligned}
(f_X * f_Y)(t) &= \int_{\infty}^{-\infty} f_X(t-u) f_Y(u)(-du) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(u) f_X(t-u)\,du \quad \text{(invertendo os limites e o sinal)} \\
&= (f_Y * f_X)(t)
\end{aligned}$$

Portanto, o operador de convolução é comutativo.

Item (b): Distributividade

Desejamos provar que $f_Z * (f_X + f_Y) = (f_Z * f_X) + (f_Z * f_Y)$.

$$\begin{aligned}
(f_Z * (f_X + f_Y))(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_Z(x)(f_X + f_Y)(t-x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_Z(x)[f_X(t-x) + f_Y(t-x)]\,dx \quad \text{(soma de funções)} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} [f_Z(x) f_X(t-x) + f_Z(x) f_Y(t-x)]\,dx \quad \text{(distributividade do produto)} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_Z(x) f_X(t-x)\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} f_Z(x) f_Y(t-x)\,dx \quad \text{(linearidade da integral)} \\
&= (f_Z * f_X)(t) + (f_Z * f_Y)(t)
\end{aligned}$$

Portanto, o operador é distributivo sobre a adição.

Item (c): Associatividade

Desejamos provar que $((f_Z * f_X) * f_Y)(t) = (f_Z * (f_X * f_Y))(t)$. Começamos pelo lado esquerdo. Seja $g = f_Z * f_X$, onde $g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Z(x) f_X(y-x)\,dx$.

$$\begin{aligned}
((f_Z * f_X) * f_Y)(t) = (g * f_Y)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y) f_Y(t-y)\,dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_Z(x) f_X(y-x)\,dx \right) f_Y(t-y)\,dy
\end{aligned}$$

Pelo Teorema de Fubini-Tonelli, podemos trocar a ordem de integração:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_Z(x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_X(y-x) f_Y(t-y)\, dy \right) dx$$

Analisamos a integral interna. Façamos a substituição $u = y - x$, o que implica $y = u + x$ e $dy = du$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) f_Y(t-(u+x))\, du = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) f_Y((t-x)-u)\, du$$

Esta integral é, por definição, $(f_X * f_Y)(t-x)$. Substituindo de volta:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_Z(x)(f_X * f_Y)(t-x)\, dx$$

Esta expressão é a definição de $(f_Z * (f_X * f_Y))(t)$. Portanto, a associatividade é válida.