UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DE DADOS

PROVA II - Probabilidade (PPGECD000000001)

Professor: Raydonal Ospina Martinez. **E-mail:** raydonal@castlab.org

Regras

Leia com atenção as perguntas. A prova deve ser claramente resolvida. Seja organizado. Pode fazer uso da calculadora e de materiais impressos, como livros, manuais ou quaisquer textos. É expressamente **proibido** o uso do computador e celular durante a prova.

Problema 1

Sejam X e Y variáveis aleatórias com função de densidade de probabilidade conjunta dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{se} \quad -1 < x < 1, -1 < y < 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Obtenha a função de densidade condicional de Y dado X, i.e., $f_{Y|X}(y|x)$.

Problema 2

Seja $\Omega = \{a, b, c\}$ um espaço amostral, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ o conjunto de partes de Ω como sua σ-álgebra e $P(\{\omega\}) = \frac{1}{3}$ para todo $\omega \in \Omega$. Consideremos as variáveis aleatórias X e Y definidas em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ como

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad \omega = a, \text{ ou } \omega = b, \\ 0, & \text{se} \quad \omega = c \end{cases} \qquad \text{e} \qquad Y(\omega) = \begin{cases} \pi, & \text{se} \quad \omega = a, \\ \frac{1}{2}, & \text{se} \quad \omega = b, \\ -1, & \text{se} \quad \omega = c \end{cases}$$

Obtenha $E(X|Y)$ e $E(X)$. **Dica:** Note que as variáveis X e Y são discretas.

Problema 3

Suponha que a distribuição conjunta das variáveis aleatórias X e Y está dada por

$X \diagdown Y$	1	2
1	0,1	0,2
2	0,4	0,3

Calcule o coeficiente de correlação entre X e Y^2, i.e. $\rho(X, Y^2)$.

Problema 4

Seja $\{Xn\}_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias tais que $X_n \sim \text{Exp}(n)$, i.e., para cada n, a variável aleatória X_n segue uma distribuição exponencial de parâmetro n. Demonstre que X_n converge em probabilidade para 0.

Problema 5

Seja $\{Xn\}_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias tais que

$$P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2} \quad \text{e} \quad P(X_n = n^2) = \frac{1}{n^2}.$$

Demonstre que X_n converge quase certamente (ache o limite X), mas não converge em r-ésima média para todo $r = 1, 2, \ldots$

BOA PROVA