**UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA**

**INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DE DADOS**

# PROVA III - Probabilidade (PPGECD000000001) - 24/07/2025

**Professor:** Raydonal Ospina Martinez.

## Regras

Leia com atenção as perguntas. **Todas as resoluções devem ser DETALHADAS.** Seja claro e organizado.

### Problema 1

Seja $X$ uma variável aleatória com distribuição de probabilidade $f(x) = P(X = x)$ e seja $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ um conjunto de Borel em $\mathbb{R}$ tal que $p = P(X \in A) > 0$. Definimos a função de distribuição de probabilidade condicional de $X$ dado o evento $(X \in A)$ como

$$f(x|A) = \frac{1}{p} f(x)\mathbb{I}_A(x) = \begin{cases} \frac{1}{p} f(x), & \text{se } x \in A, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para $f(x)$ definida por

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{2n+1}, & \text{se} \quad x \in \mathcal{M}, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

em que $\mathcal{M} = \{-n, -(n-1), \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, (n-1), n\}$ e $A = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n-1, n\}$. Compare $f(x)$ e $f(x|A)$ em termos dos valores esperados $E(aX + b)$ e $E(aX + b|A)$, com $a, b \in \mathbb{R}$ constantes conhecidas, respectivamente.
**Dica:** $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ e $\sum_{i=m}^{n} 1 = n + 1 - m$.

### Problema 2

Seja $X$ uma variável aleatória uniforme no intervalo (0,1) e $Y = X^2$. Calcular o coeficiente de correlação $\rho(X, Y)$. São $X$ e $Y$ independentes? Explique.

### Problema 3

Seja $X$ uma variável aleatória **não negativa** ($P(X \geq 0) = 1$) e seja $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ uma função **convexa** e **estritamente crescente**. Demonstre que para qualquer constante $\epsilon > 0$:

$$P(X \geq \epsilon) \leq \frac{\varphi^{-1}(E[\varphi(X)])}{\epsilon}$$

em que $\varphi^{-1}$ é a função inversa de $\varphi$.

### Problema 4

Suponha que as sequências de variáveis aleatórias $\{X_n\}_{n\geq 1}$ e $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ são tais que $X_n \xrightarrow{p} x$ e $Y_n \xrightarrow{p} y$, em que $x$ e $y$ são dois números reais fixos. Demonstre que:

$$X_n + Y_n \xrightarrow{p} x + y.$$

Aqui, ($\xrightarrow{p}$) indica convergência em probabilidade.

### Problema 5

Seja $X$ com distribuição uniforme discreta no conjunto $\{0, 1\}$. Demonstre que a seguinte sucessão de variáveis aleatórias converge em distribuição, mas não converge em probabilidade.

$$X_n = \begin{cases} X & \text{se } n \text{ é par,} \\ 1 - X & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

**BOA PROVA**