Soluções da Prova

Problema 1. Seja X uma variável aleatória com distribuição de probabilidade $f(x) = P(X = x)$ e seja $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ um conjunto de Borel em $\mathbb{R}$ tal que $p = P(X \in A) > 0$. Definimos a função de distribuição de probabilidade condicional de X dado o evento $(X \in A)$ como

$$f(x|A) = \frac{1}{p} f(x)\mathbb{I}_A(x)$$

Para $f(x)$ definida por

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{2n+1}, & \text{se} \quad x \in \mathcal{M}, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

em que $\mathcal{M} = \{-n, -(n-1), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n\}$ e $A = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Compare $f(x)$ e $f(x|A)$ em termos dos valores esperados $E(aX + b)$ e $E(aX + b|A)$, com $a, b \in \mathbb{R}$ constantes conhecidas, respectivamente.

Solução. 1. Calcular $E(aX + b)$: Primeiro, calculamos $E(X)$. Pela simetria da distribuição de X em torno de 0, temos $E(X) = 0$. Usando a linearidade da esperança:

$$E(aX + b) = aE(X) + b = a(0) + b = b.$$

2. Calcular $E(aX + b|A)$: Primeiro, calculamos $p = P(X \in A)$. O conjunto $A = \{0, 1, \ldots, n\}$ tem $n + 1$ elementos.

$$p = P(X \in A) = \sum_{x=0}^{n} P(X = x) = \sum_{x=0}^{n} \frac{1}{2n+1} = (n+1) \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{n+1}{2n+1}.$$

Agora, calculamos $E(X|A)$:

$$\begin{aligned} E(X|A) &= \sum_{x \in A} x \cdot f(x|A) = \sum_{x=0}^{n} x \cdot \frac{f(x)}{p} \\ &= \frac{1}{p} \sum_{x=0}^{n} x \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{\frac{n+1}{2n+1}} \cdot \frac{1}{2n+1} \sum_{i=1}^{n} i \\ &= \frac{2n+1}{n+1} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Usando a linearidade da esperança condicional:

$$E(aX + b|A) = aE(X|A) + b = a\frac{n}{2} + b.$$

Comparação:

$$E(aX + b) = b$$

$$E(aX + b|A) = a\frac{n}{2} + b$$

A esperança condicional ao evento A adiciona o termo $a\frac{n}{2}$ à esperança incondicional. Isso reflete o fato de que condicionamos a um conjunto de valores não negativos, deslocando a média para cima (assumindo $a > 0$).

Problema 2. Seja X uma variável aleatória uniforme no intervalo (0,1) e $Y = X^2$. Calcular o coeficiente de correlação $\rho(X, Y)$. São X e Y independentes? Explique.

Solução. 1. Cálculo do coeficiente de correlação $\rho(X, Y)$: A fórmula é $\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}$. Para $X \sim U(0, 1)$, $E(X^k) = \int_0^1 x^k dx = \frac{1}{k+1}$.

- $E(X) = 1/2$
- $E(Y) = E(X^2) = 1/3$
- $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X^3) - E(X)E(X^2) = \frac{1}{4} - (\frac{1}{2})(\frac{1}{3}) = \frac{1}{12}$.
- $\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{3} - (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{12}$.
- $\text{Var}(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = E(X^4) - (E(X^2))^2 = \frac{1}{5} - (\frac{1}{3})^2 = \frac{4}{45}$.

$$\rho(X, Y) = \frac{1/12}{\sqrt{(1/12)(4/45)}} = \frac{1/12}{\sqrt{1/135}} = \frac{\sqrt{135}}{12} = \frac{\sqrt{9 \cdot 15}}{12} = \frac{3\sqrt{15}}{12} = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

2. Independência: Não, X e Y não são independentes.

- **Explicação 1 (Covariância):** Se fossem independentes, sua covariância seria zero. Como $\text{Cov}(X, Y) = 1/12 \neq 0$, elas não são independentes.
- **Explicação 2 (Funcional):** Y é uma função determinística de X ($Y = X^2$). Saber o valor de X determina completamente o valor de Y. Variáveis independentes não possuem este tipo de relação.

Problema 3. Seja X uma variável aleatória e seja $\varphi : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ uma função convexa e monótona não decrescente tal que $E(\varphi(X)) < \infty$. Demonstre que para qualquer constante $\epsilon > 0$,

$$P(X \geq \epsilon) \leq \frac{E(\varphi(X))}{\varphi(\epsilon)}.$$

Solução. A prova combina a Desigualdade de Markov e a Desigualdade de Jensen em três etapas.

Etapa 1: Desigualdade de Markov. Como a variável aleatória X é **não negativa** por hipótese, podemos aplicar a Desigualdade de Markov:

$$P(X \geq \epsilon) \leq \frac{E[X]}{\epsilon} \qquad (1)$$

Agora, nosso objetivo é encontrar um limite superior para $E[X]$.

Etapa 2: Desigualdade de Jensen. Por hipótese, a função φ é **convexa**. A Desigualdade de Jensen afirma que:

$$\varphi(E[X]) \leq E[\varphi(X)]$$

Etapa 3: Combinando as desigualdades. Para isolar $E[X]$ da Desigualdade de Jensen, aplicamos a função inversa φ^{-1}. Como φ é **estritamente crescente**, sua inversa φ^{-1} também é estritamente crescente, o que preserva a direção da desigualdade:

$$\varphi^{-1}(\varphi(E[X])) \leq \varphi^{-1}(E[\varphi(X)])$$

$$E[X] \leq \varphi^{-1}(E[\varphi(X)]) \qquad (2)$$

Finalmente, substituímos o limite superior para $E[X]$ encontrado em (2) na desigualdade de Markov (1):

$$P(X \geq \epsilon) \leq \frac{E[X]}{\epsilon} \leq \frac{\varphi^{-1}(E[\varphi(X)])}{\epsilon}$$

Chegando diretamente ao resultado desejado:

$$P(X \geq \epsilon) \leq \frac{\varphi^{-1}(E[\varphi(X)])}{\epsilon}$$

o que completa a demonstração.

Problema 4. Suponha que $X_n \xrightarrow{p} x$ e $Y_n \xrightarrow{p} y$, em que x e y são dois números reais fixos. Demonstre que $X_n + Y_n \xrightarrow{p} x + y$.

Solução. Queremos mostrar que para qualquer $\epsilon > 0$, $P(|(X_n + Y_n) - (x + y)| > \epsilon) \to 0$. Pela desigualdade triangular, $|(X_n - x) + (Y_n - y)| \leq |X_n - x| + |Y_n - y|$. Se $|X_n - x| + |Y_n - y| > \epsilon$, então é necessário que $|X_n - x| > \epsilon/2$ ou $|Y_n - y| > \epsilon/2$. Isso implica que o evento $\{|(X_n + Y_n) - (x + y)| > \epsilon\}$ está contido na união $\{|X_n - x| > \epsilon/2\} \cup \{|Y_n - y| > \epsilon/2\}$. Usando a união de eventos (desigualdade de Boole):

$$P(|(X_n + Y_n) - (x + y)| > \epsilon) \leq P(|X_n - x| > \epsilon/2) + P(|Y_n - y| > \epsilon/2).$$

Pela definição de convergência em probabilidade, como $X_n \xrightarrow{p} x$ e $Y_n \xrightarrow{p} y$:

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - x| > \epsilon/2) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} P(|Y_n - y| > \epsilon/2) = 0.$$

Portanto, tomando o limite da desigualdade:

$$\lim_{n\to\infty} P(|(X_n + Y_n) - (x + y)| > \epsilon) \leq 0 + 0 = 0.$$

Como a probabilidade não pode ser negativa, o limite é 0.

Problema 5. Seja X com distribuição uniforme discreta no conjunto $\{0, 1\}$. Demonstre que a seguinte sucessão de variáveis aleatórias converge em distribuição, mas não converge em probabilidade.

$$X_n = \begin{cases} X & \text{se } n \text{ é par,} \\ 1 - X & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Solução. 1. Convergência em Distribuição: A distribuição de X é $P(X = 0) = 1/2$ e $P(X = 1) = 1/2$.

- Se n é par, $X_n = X$, então $P(X_n = 0) = 1/2$ e $P(X_n = 1) = 1/2$.
- Se n é ímpar, $X_n = 1 - X$, então $P(X_n = 0) = P(X = 1) = 1/2$ e $P(X_n = 1) = P(X = 0) = 1/2$.

Para todo n, a distribuição de X_n é a mesma: uma Bernoulli(1/2). Como a função de distribuição acumulada $F_n(t)$ é a mesma para todo n, ela converge trivialmente. Portanto, X_n converge em distribuição.

2. Não Convergência em Probabilidade: Para convergir em probabilidade, teríamos $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - Y| > \epsilon) = 0$ para alguma variável Y. Vamos testar o candidato $Y = X$. Escolha $\epsilon = 1/2$.

- Se n é par, $P(|X_n - X| > 1/2) = P(|X - X| > 1/2) = P(0 > 1/2) = 0$.
- Se n é ímpar, $P(|X_n - X| > 1/2) = P(|(1 - X) - X| > 1/2) = P(|1 - 2X| > 1/2)$. Se $X = 0$, $|1| > 1/2$. Se $X = 1$, $|-1| > 1/2$. A desigualdade é sempre verdadeira. Assim, a probabilidade é 1.

A sequência de probabilidades $P(|X_n - X| > 1/2)$ é $1, 0, 1, 0, \ldots$. Esta sequência não converge para 0. Logo, X_n não converge em probabilidade.