UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DE DADOS

PROVA II - Probabilidade (PPGECD000000001)

Professor: Raydonal Ospina Martinez. **E-mail:** raydonal@castlab.org

Regras

Recomendo que leiam atentamente as perguntas e reservem um tempo adequado para refletir sobre elas. Ressalto que todas as questões devem ser respondidas de forma detalhada, pois soluções ambíguas ou pouco claras serão penalizadas. Lembro ainda que não farei esforço para interpretar ou "adivinhar" o que o aluno quis escrever ou dizer. Por isso, é fundamental que sejam claros e organizados. Informo que a prova deverá ser entregue (digitalizada em formato PDF) no dia **26/06/2025** até as 21:00h (GMT-3 Horário de Brasília). Deverão encaminhar para o e-mail acima com assunto de envio (`Resposta Prova II - Mestrado - ''coloque aqui seu nome''`) e colocando seu nome.

Problema 1

Seja $\Omega = \{a, b, c\}$ um espaço amostral, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ o conjunto de partes de Ω como sua σ-álgebra e $P(\{\omega\}) = \frac{1}{3}$ para todo $\omega \in \Omega$. Consideremos as variáveis aleatórias X e Y definidas em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ como

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad \omega = a, \text{ ou } \omega = b, \\ 0, & \text{se} \quad \omega = c \end{cases} \qquad \text{e} \qquad Y(\omega) = \begin{cases} \pi, & \text{se} \quad \omega = a, \\ \frac{1}{2}, & \text{se} \quad \omega = b, \\ -1, & \text{se} \quad \omega = c \end{cases}$$

Obtenha as distribuições condicionais acumuladas $F(X|Y)$ e $F(Y|X)$
Dica: Note que as variáveis X e Y são discretas.

Problema 2

Suponha que a distribuição conjunta das variáveis aleatórias discretas X e Y está dada por

$X \diagdown Y$	1	2	3	4
0	0,1	0	0	0
-1	0,1	0,1	0	0
-2	0,1	0,1	0,1	0
-3	0,1	0,1	0,1	0,1

Calcule:

1. $P(X \geq -1, Y \geq 1)$
2. As distribuições marginais de X e Y e determine se X e Y são independentes.
3. Encontre a função de distribuição condicional de X dado Y.

Problema 3

Considere um par de variáveis aleatórias discretas (X, Y) cuja função de distribuição de probabilidade conjunta é F, i.e., $F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$, $x, y \in \mathbb{R}$. Sejam F_X e F_Y as funções de distribuição das variáveis aleatórias X e Y, respectivamente (distribuições marginais). Mostre que:

$$P(X > x, Y > y) = 1 - F_X(x) - F_Y(y) + F(x, y).$$

Problema 4

Sejam X e Y variáveis aleatórias com função de densidade de probabilidade conjunta dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{se} \quad -1 < x < 1, -1 < y < 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

1. Obtenha $P(X + Y > 0)$ e $P(X > 0)$.
2. Sejam $Z = X + Y$ e $W = X - Y$ funções lineares das varáveis aleatórias X e Y. Usando o método do Jacobiano obtenha a função de densidade conjunta de Z e W.
3. Obtenha a função de densidade (marginal) de W
4. Obtenha a função de densidade condicional de Z dado W, i.e., $f_{Z|W}(z|w)$.

Problema 5

Considere a *convolução* $f_X * f_Y$ entre as funções de densidade das variáveis aleatórias X e Y, i.e., a função de densidade da variável aleatória $Z = X + Y$. Mostre que o operador de convolução $(*)$ é:

1. comutativo: $f_X * f_Y = f_Y * f_X$
2. distributivo: $f_Z * (f_X + f_Y) = f_Z * f_X + f_Z * f_Y$
3. associativo: $(f_Z * f_X) * f_Y = f_Z * (f_X * f_Y)$

BOA PROVA