Resolução Detalhada da Prova de Probabilidade

Análise Estatística e Matemática

06 de julho de 2025

Sumário

Introdução

Este documento apresenta a resolução detalhada dos problemas propostos na avaliação. Cada questão é abordada com rigor matemático e estatístico, explicitando todas as etapas do raciocínio, desde a definição dos conceitos fundamentais até a obtenção do resultado final. A notação e a linguagem utilizadas são consistentes com a teoria de probabilidades e a estatística matemática, visando a clareza e a precisão técnica.

Problema 1. *pr-1 Seja $\Omega = \{a, b, c\}$ um espaço amostral, $F = P(\Omega)$ o conjunto de partes de Ω como sua σ-álgebra e $P(\{\omega\}) = \frac{1}{3}$ para todo $\omega \in \Omega$. Consideremos as variáveis aleatórias X e Y definidas em (Ω, F, P) como*

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & se \quad \omega = a, \ ou \ \omega = b, \\ 0, & se \quad \omega = c \end{cases} \qquad e \qquad Y(\omega) = \begin{cases} \pi, & se \quad \omega = a, \\ \frac{1}{2}, & se \quad \omega = b, \\ -1, & se \quad \omega = c \end{cases}$$

Obtenha as distribuições condicionais acumuladas $F(X|Y)$ e $F(Y|X)$.

Resolução do Problema 1

Para obter as funções de distribuição acumulada (FDA) condicionais, $F(x|y) = P(X \leq x|Y = y)$ e $F(y|x) = P(Y \leq y|X = x)$, o primeiro passo é caracterizar a distribuição de probabilidade conjunta do par de variáveis aleatórias (X, Y).

1. Determinação da Função de Probabilidade Conjunta

A função de probabilidade conjunta, $p(x, y) = P(X = x, Y = y)$, é determinada avaliando os pares $(X(\omega), Y(\omega))$ para cada $\omega \in \Omega$ e sua respectiva probabilidade. Dado que $P(\{a\}) = P(\{b\}) = P(\{c\}) = 1/3$:

- Para $\omega = a$: Temos $X(a) = 1$ e $Y(a) = \pi$. A probabilidade deste evento é $P(\{a\}) = 1/3$. Portanto, $p(1, \pi) = P(X = 1, Y = \pi) = 1/3$.
- Para $\omega = b$: Temos $X(b) = 1$ e $Y(b) = 1/2$. A probabilidade deste evento é $P(\{b\}) = 1/3$. Portanto, $p(1, 1/2) = P(X = 1, Y = 1/2) = 1/3$.
- Para $\omega = c$: Temos $X(c) = 0$ e $Y(c) = -1$. A probabilidade deste evento é $P(\{c\}) = 1/3$. Portanto, $p(0, -1) = P(X = 0, Y = -1) = 1/3$.

Para todos os outros pares (x, y), a probabilidade conjunta é zero. A distribuição conjunta pode ser resumida na seguinte tabela, que também inclui as distribuições marginais (soma das linhas e colunas).

$X \backslash Y$	-1	1/2	π	$p_X(x)$
0	1/3	0	0	1/3
1	0	1/3	1/3	2/3
$p_Y(y)$	1/3	1/3	1/3	1

2. Determinação das Funções de Probabilidade Condicionais

A função de probabilidade condicional é dada por $p(x|y) = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)}$ e $p(y|x) = \frac{p(x,y)}{p_X(x)}$.

0.0.0.1 Condicional de X dado $Y = y$:

- Se $y = -1$: $p(x|-1) = \frac{p(x,-1)}{1/3}$. Assim, $p(0|-1) = 1$ e $p(1|-1) = 0$.
- Se $y = 1/2$: $p(x|1/2) = \frac{p(x,1/2)}{1/3}$. Assim, $p(0|1/2) = 0$ e $p(1|1/2) = 1$.
- Se $y = \pi$: $p(x|\pi) = \frac{p(x,\pi)}{1/3}$. Assim, $p(0|\pi) = 0$ e $p(1|\pi) = 1$.

0.0.0.2 Condicional de Y dado $X = x$:

- Se $x = 0$: $p(y|0) = \frac{p(0,y)}{1/3}$. Assim, $p(-1|0) = 1$ e $p(y|0) = 0$ para $y \neq -1$.
- Se $x = 1$: $p(y|1) = \frac{p(1,y)}{2/3}$. Assim, $p(1/2|1) = 1/2$ e $p(\pi|1) = 1/2$.

3. Obtenção das Funções de Distribuição Acumulada Condicionais

0.0.0.3 FDA Condicional $F(x|y) = P(X \leq x|Y = y)$: A partir das probabilidades condicionais, construímos a FDA para cada valor de y.

- Para $y = -1$: A massa de probabilidade está toda em $X = 0$.

$$F(x|-1) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 1, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

- Para $y = 1/2$: A massa de probabilidade está toda em $X = 1$.

$$F(x|1/2) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 1 \\ 1, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

- Para $y = \pi$: A massa de probabilidade está toda em $X = 1$.

$$F(x|\pi) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 1 \\ 1, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

0.0.0.4 FDA Condicional $F(y|x) = P(Y \leq y|X = x)$: Analogamente, para cada valor de x.

- Para $x = 0$: A massa de probabilidade está toda em $Y = -1$.

$$F(y|0) = \begin{cases} 0, & \text{se } y < -1 \\ 1, & \text{se } y \geq -1 \end{cases}$$

- Para $x = 1$: A massa de probabilidade está distribuída entre $Y = 1/2$ e $Y = \pi$.

$$F(y|1) = \begin{cases} 0, & \text{se } y < 1/2 \\ P(Y \leq y|X = 1) = p(1/2|1) = 1/2, & \text{se } 1/2 \leq y < \pi \\ P(Y \leq y|X = 1) = p(1/2|1) + p(\pi|1) = 1, & \text{se } y \geq \pi \end{cases}$$

Problema 2. *pr-3 Suponha que a distribuição conjunta das variáveis aleatórias discretas X e Y está dada por*

$X \diagdown Y$	1	2	3	4
0	0,1	0	0	0
-1	0,1	0,1	0	0
-2	0,1	0,1	0,1	0
-3	0,1	0,1	0,1	0,1

Calcule:

1. $P(X \geq -1, Y \geq 1)$
2. *As distribuições marginais de X e Y e determine se X e Y são independentes.*
3. *Encontre a função de distribuição condicional de X dado Y.*

Resolução do Problema 2

Seja $p(x, y)$ a função de probabilidade conjunta dada na tabela.

Item (a): Cálculo de $P(X \geq -1, Y \geq 1)$

O evento $\{X \geq -1, Y \geq 1\}$ compreende os pares (x, y) tais que $x \in \{0, -1\}$ e $y \in \{1, 2, 3, 4\}$. A probabilidade é a soma das probabilidades conjuntas para esses pares.

$$\begin{aligned} P(X \geq -1, Y \geq 1) &= \sum_{x \in \{0,-1\}} \sum_{y=1}^{4} p(x, y) \\ &= p(0, 1) + p(0, 2) + p(0, 3) + p(0, 4) \\ &\quad + p(-1, 1) + p(-1, 2) + p(-1, 3) + p(-1, 4) \\ &= (0, 1 + 0 + 0 + 0) + (0, 1 + 0, 1 + 0 + 0) \\ &= 0, 1 + 0, 2 = 0, 3 \end{aligned}$$

Portanto, $\mathbf{P(X \geq -1, Y \geq 1) = 0, 3}$.

Item (b): Distribuições Marginais e Independência

As distribuições marginais, $p_X(x)$ e $p_Y(y)$, são obtidas somando as probabilidades ao longo das linhas e colunas da tabela conjunta, respectivamente.

$X \diagdown Y$	1	2	3	4	$p_X(x)$
0	0,1	0	0	0	0,1
-1	0,1	0,1	0	0	0,2
-2	0,1	0,1	0,1	0	0,3
-3	0,1	0,1	0,1	0,1	0,4
$p_Y(y)$	0,4	0,3	0,2	0,1	1,0

0.0.0.5 Distribuição Marginal de X: $p_X(0) = 0, 1;\quad p_X(-1) = 0, 2;\quad p_X(-2) = 0, 3;\quad p_X(-3) = 0, 4.$

0.0.0.6 Distribuição Marginal de Y: $p_Y(1) = 0, 4;\quad p_Y(2) = 0, 3;\quad p_Y(3) = 0, 2;\quad p_Y(4) = 0, 1.$

0.0.0.7 Verificação de Independência:
Duas variáveis aleatórias X e Y são independentes se, e somente se, $p(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$ para **todos** os pares (x,y). É suficiente encontrar um contra-exemplo. Consideremos o par $(x,y) = (0,1)$:

- Da tabela, $p(0,1) = 0,1$.
- O produto das marginais é $p_X(0) \cdot p_Y(1) = (0,1) \times (0,4) = 0,04$.

Como $p(0,1) = 0,1 \neq 0,04 = p_X(0)p_Y(1)$, concluímos que as variáveis aleatórias X **e** Y **não são independentes**.

Item (c): Função de Distribuição Condicional de X dado Y

A FDA condicional $F(x|y) = P(X \leq x|Y = y)$ é construída a partir da PMF condicional $p(x|y) = p(x,y)/p_Y(y)$.

0.0.0.8 Caso 1: Y = 1 ($p_Y(1) = 0,4$)
$p(0|1) = \frac{0,1}{0,4} = \frac{1}{4}$; $p(-1|1) = \frac{0,1}{0,4} = \frac{1}{4}$; $p(-2|1) = \frac{0,1}{0,4} = \frac{1}{4}$; $p(-3|1) = \frac{0,1}{0,4} = \frac{1}{4}$. $F(x|1) = \begin{cases} 0, & x < -3 \\ 1/4, & -3 \leq x < -2 \\ 1/4 + 1/4 = 1/2, & -2 \leq x < -1 \\ 1/2 + 1/4 = 3/4, & -1 \leq x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$

0.0.0.9 Caso 2: Y = 2 ($p_Y(2) = 0,3$)
$p(-1|2) = \frac{0,1}{0,3} = \frac{1}{3}$; $p(-2|2) = \frac{0,1}{0,3} = \frac{1}{3}$; $p(-3|2) = \frac{0,1}{0,3} = \frac{1}{3}$.
$F(x|2) = \begin{cases} 0, & x < -3 \\ 1/3, & -3 \leq x < -2 \\ 1/3 + 1/3 = 2/3, & -2 \leq x < -1 \\ 1, & x \geq -1 \end{cases}$

0.0.0.10 Caso 3: Y = 3 ($p_Y(3) = 0,2$)
$p(-2|3) = \frac{0,1}{0,2} = \frac{1}{2}$; $p(-3|3) = \frac{0,1}{0,2} = \frac{1}{2}$. $F(x|3) = \begin{cases} 0, & x < -3 \\ 1/2, & -3 \leq x < -2 \\ 1, & x \geq -2 \end{cases}$

0.0.0.11 Caso 4: Y = 4 ($p_Y(4) = 0,1$)
$p(-3|4) = \frac{0,1}{0,1} = 1$. $F(x|4) = \begin{cases} 0, & x < -3 \\ 1, & x \geq -3 \end{cases}$

Problema 3. *pr-2 Considere um par de variáveis aleatórias discretas* (X, Y) *cuja função de distribuição de probabilidade conjunta é* F*, i.e.,* $F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$*,* $x, y \in \mathbb{R}$*. Sejam* F_X *e* F_Y *as funções de distribuição das variáveis aleatórias* X *e* Y*, respectivamente (distribuições marginais). Mostre que:*

$$P(X > x, Y > y) = 1 - F_X(x) - F_Y(y) + F(x, y).$$

Resolução do Problema 3

Desejamos provar a identidade $P(X > x, Y > y) = 1 - F_X(x) - F_Y(y) + F(x, y)$. Esta identidade é frequentemente chamada de função de sobrevivência conjunta. A prova se baseia na teoria de conjuntos e nos axiomas de probabilidade de Kolmogorov.

Sejam A e B os seguintes eventos:

- $A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) > x\}$
- $B = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) > y\}$

O nosso objetivo é calcular $P(A \cap B)$.

Consideremos os eventos complementares, A^c e B^c:

- $A^c = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$. Por definição da FDA marginal, $P(A^c) = P(X \leq x) = F_X(x)$.
- $B^c = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq y\}$. Por definição da FDA marginal, $P(B^c) = P(Y \leq y) = F_Y(y)$.

Pelo axioma da probabilidade do complemento, a probabilidade de um evento E é $P(E) = 1 - P(E^c)$. Aplicando isso ao evento $A \cap B$:

$$P(A \cap B) = 1 - P((A \cap B)^c)$$

Utilizando as Leis de De Morgan para conjuntos, sabemos que $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$. Substituindo na equação:

$$P(A \cap B) = 1 - P(A^c \cup B^c)$$

Agora, aplicamos o Princípio da Inclusão-Exclusão para a probabilidade da união de dois eventos:

$$P(A^c \cup B^c) = P(A^c) + P(B^c) - P(A^c \cap B^c)$$

Vamos identificar cada termo desta expressão:

- $P(A^c) = F_X(x)$.
- $P(B^c) = F_Y(y)$.
- $A^c \cap B^c = \{X \leq x \text{ e } Y \leq y\}$. A probabilidade deste evento é, por definição da FDA conjunta, $P(A^c \cap B^c) = P(X \leq x, Y \leq y) = F(x, y)$.

Substituindo estes termos de volta na fórmula da união:

$$P(A^c \cup B^c) = F_X(x) + F_Y(y) - F(x, y)$$

Finalmente, inserimos este resultado na expressão para $P(A \cap B)$:

$$P(A \cap B) = 1 - (F_X(x) + F_Y(y) - F(x, y))$$

Distribuindo o sinal negativo, obtemos a identidade desejada:

$$P(X > x, Y > y) = 1 - F_X(x) - F_Y(y) + F(x, y)$$

o que completa a demonstração. É importante notar que esta prova é geral e se aplica tanto a variáveis aleatórias discretas quanto contínuas.