Probabilidade (PPGECD000000001)

Programa de Pós-Graduação em Estatística e Ciência de Dados (PGECD)

Sessão 10

Raydonal Ospina

Departamento de Estatística
Universidade Federal da Bahia
Salvador/BA

Motivação

- Por que estudar funções características?
  - Útil ter mais de uma maneira de representar um objeto matemático.
  - Vantagens: cálculo de momentos, cálculo da distribuição de uma soma de variáveis aleatórias independentes, útil na prova do Teorema Central do Limite.

Uma função geratriz de momento é uma outra representação alternativa da distribuição de uma variável aleatória. As vantagens desta representação são as mesmas da função característica, mas como a função característica é mais robusta (no sentido que ela sempre existe), nós focaremos no uso da mesma.

Nota 1

Até aqui, só tratamos com variáveis reais, mas o caso complexo é similar. Uma variável aleatória X é *complexa*, se pode ser escrita como $X = X_1 + iX_2$, onde $i = \sqrt{-1}$, e X_1 e X_2 são variáveis aleatórias reais. Logo, para verificar que uma função complexa é variável aleatória, precisamos verificar propriedades da imagem inversa nas suas duas partes. Para o valor esperado de X, exige-se que as duas partes sejam finitas. Assim, temos: $EX = EX_1 + iEX_2$, onde EX_1 e EX_2 são ambas finitas. Para efeitos práticos, quando realizando integração de funções complexas, podemos operar como se estivéssemos com funções reais (trata-se i como se fosse uma constante real).

Definição 1 (Função Característica)

A função característica ϕ_X *de uma variável aleatória X é dada por:*

$$\begin{aligned}\phi_X(t) &= Ee^{itX}\\ &= E\cos(tX) + iE\,sen(tX),\ onde\ i \doteq \sqrt{-1}.\end{aligned}$$

Note que como $\cos(tX)$ e $\operatorname{sen}(tX)$ são variáveis aleatórias limitadas, a esperança na definição acima é finita e, consequentemente, a função característica de qualquer variável aleatória é bem definida. Note também que de acordo com esta definição, a função de distribuição acumulada determina a função característica de uma variável aleatória.

No caso particular de uma variável aleatória discreta, temos:

$$\phi_X(t) = \sum_k e^{itx_k} p(x_k),$$

onde $p(x_k)$ é a função probabilidade de X.

Analogamente, se X for uma variável aleatória contínua, temos:

$$\phi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x)dx,$$

onde $f_X(x)$ é a função densidade de probabilidade de X.

A função característica de uma variável aleatória contínua é a transformada de Fourier da densidade de probabilidade de X.

Propriedades

P1. A função característica é limitada por 1: $|\phi_X(t)| \leq 1, \forall t \in R$.

Demonstração.

Como pela desigualdade de Jensen,

$$E^2 \cos(tx) \leq E \cos^2(tx) \text{ e } E^2 \operatorname{sen}(tx) \leq E \operatorname{sen}^2(tx),$$

temos

$$|\phi_X(t)| = \sqrt{E^2 \cos(tX) + E^2 \operatorname{sen}(tX)}$$
$$\leq \sqrt{E(\cos^2(tX) + \operatorname{sen}^2(tX))} = E1 = 1.$$

□

P2. A função característica assume o valor 1 no ponto 0: $\phi_X(0) = 1$.

Demonstração.

$\phi_X(0) = Ee^{i0X} = E1 = 1.$ □

P3. $\overline{\phi_X(t)} = \phi_X(-t)$, onde $\overline{c}$ é o complexo conjugado de c. (Se $c = x + iy$, o seu complexo conjugado é $\overline{c} = x - iy$.)

Demonstração.

$\phi_X(-t) = E\cos(-tX) + iE\,\text{sen}(-tX) = E\cos(tX) - iE\,\text{sen}(tX) = \overline{\phi_X(t)}$. □

P4. ϕ_X é uniformemente contínua na reta.

Demonstração.

Uma função ϕ é uniformemente contínua, se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $t, s \in R$ $|\phi(t) - \phi(s)| < \epsilon$ quando $|t - s| < \delta$. Logo,

$$\begin{aligned} |\phi(t) - \phi(s)| &= |E(e^{itx} - e^{isx})| \\ &\leq E|e^{isx}(e^{i(t-s)x} - 1)| = E|e^{i(t-s)x} - 1|. \end{aligned}$$

Seja $h(u) = |e^{iux} - 1|$. Como $0 \leq |e^{iux} - 1| \leq 2$, 2 é integrável, e $\lim_{u \to 0} h(u) = 0$, pelo teorema da convergência dominada, temos que $\lim_{u \to 0} Eh(u) = 0$. Então, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|u| < \delta$ implica que $Eh(u) < \epsilon$, ou seja, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|t - s| < \delta$ implica que $|\phi(t) - \phi(s)| \leq E|e^{i(t-s)x} - 1| < \epsilon$. □

P5. Se X e Y são independentes, então

$$\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t) \cdot \phi_Y(t), \forall t \in R.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \phi_{X+Y}(t) &= Ee^{it(X+Y)} = E(e^{itX} e^{itY}) \\ &= E(e^{itX})E(e^{itY}) = \phi_X(t) \cdot \phi_Y(t). \end{aligned}$$

$\square$

É fácil provar por indução que se $X_1, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes, então $\phi_{X_1+\ldots+X_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \phi_{X_k}(t), \forall t \in R$.

P6. A variável aleatória X tem distribuição simétrica em torno de 0 se, e somente se, $\phi_X(t)$ é real para todo $t \in R$.

Demonstração.

X é simétrica em torno de 0 se e somente se $P(X \leq x) = P(X \geq -x), \forall x \in R$. Como $X \geq -x \Leftrightarrow -X \leq x$, nós temos que $F_X = F_{-X}$, ou seja, $\phi_X = \phi_{-X}$. Como

$$\phi_{-X}(t) = Ee^{it(-X)} = Ee^{i(-t)X} = \phi_X(-t) = \overline{\phi_X(t)}.$$

Então, X é simétrica em torno de 0 se e somente se $\phi_X(t) = \overline{\phi_X(t)}$, ou seja, se $\phi_X(t)$ é real para todo $t \in R$. □

P7. Se $E|X|^n < \infty$, então $\phi_X^{(k)}(0) = i^k EX^k$ para $k \in \{1, \ldots, n\}$, de modo que a função característica é uma espécie de função geradora de momentos.

Demonstração.

Suponhamos que X seja integrável; queremos provar que $\phi'_X(t) = E(iXe^{itX})$.
Note que para $h \neq 0$, temos

$$\frac{\phi_X(t+h) - \phi_X(t)}{h} = E(e^{itX}\frac{(e^{ihX} - 1)}{h}).$$

Como $\frac{(e^{ihx}-1)}{h} \to ix$ quando $h \to 0$ (regra de L'Hopital), $\forall x \in R$, temos que o resultado decorre se pudermos trocar a ordem do limite e da esperança. Mas como para todo x,

$$|\frac{e^{ihx} - 1}{h}| = |\frac{\int_0^h ixe^{isx}ds}{h}| = |x| \cdot |\frac{\int_0^h e^{isx}ds}{h}| \leq |x|.$$

Portanto, como $|e^{itX}| = 1$, temos $|e^{itX}\frac{(e^{ihX}-1)}{h}| \leq |X|$.
Como X é integrável, o Teorema da Convergência Dominada implica que

$$\phi'_X(t) = \lim_{h\to 0}\frac{\phi_X(t+h) - \phi_X(t)}{h} = \lim_{h\to 0} E(e^{itX}\frac{(e^{ihX} - 1)}{h}) = E(\lim_{h\to 0} e^{itX}\frac{(e^{ihX} - 1)}{h}) = E(i$$

Logo, $\phi'_X(0) = iEX$. O restante da prova segue por indução em n. $\square$

P8. Se $Y = aX + b$, onde a e b são números reais constantes, $\phi_Y(t) = e^{itb}\phi_X(at)$.

Demonstração.

$\phi_Y(t) = Ee^{itY} = Ee^{it(aX+b)} = Ee^{itb}e^{itaX} = e^{itb}Ee^{i(at)X} = e^{itb}\phi_X(at)$. □

P9. $\phi_X(t)$ é positiva definida. Isto é, para todo $n = 1, 2, \ldots$, tem-se

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\phi_X(t_j - t_k)z_j\overline{z_k} \geq 0,$$

para quaisquer números reais $t_1, t_2, \ldots, t_n$ e complexos $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Demonstração.

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\phi_X(t_j - t_k)z_j\overline{z_k} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}E(e^{iX(t_j - t_k)})z_j\overline{z_k}$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}E(z_je^{iX(t_j)}\overline{z_k}e^{-iXt_k}) = E(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}z_je^{iX(t_j)}\overline{z_ke^{iXt_k}})$$

$$= E[(\sum_{j=1}^{n}z_je^{iX(t_j)})(\sum_{k=1}^{n}\overline{z_ke^{iXt_k}})] = E[(\sum_{j=1}^{n}z_je^{iX(t_j)})\overline{(\sum_{k=1}^{n}z_ke^{iXt_k})}] = E(|\sum_{j=1}^{n}z_je^{iX(t_j)}|^2) \geq 0$$

Portanto, ϕ_X é positiva definida. □

Os resultados a seguir conhecidos como *Fórmula de Inversão* e *Teorema da Unicidade* garantem que a função característica determina a função de distribuição de uma variável aleatória.

Teorema 1

Seja X uma variável aleatória qualquer, então sua função característica $\varphi_X(t)$ determina a função de distribuição de X, através da seguinte Fórmula de Inversão*:*

$$\tilde{F}(b) - \tilde{F}(a) = \lim_{c \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^{c} \frac{e^{-iat} - e^{-ibt}}{it} \varphi_X(t) dt;$$

onde $\tilde{F}(w) = \frac{1}{2}(F(w^+) + F(w^-)), \forall w \in \mathbb{R}$ e a, b, c são números reais tais que $c > 0$ e $a < b$.

Demostração

Note que se F for contínua em w, então $\tilde{F}(w) = F(w)$. A função $\frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}$ é definida para ser igual a $b-a$, quando $t=0$, coincidindo com seu limite quando $t \to 0$. Logo, ela será contínua para todo t real e limitada, pois:

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}\right| &= |e^{\frac{i(a+b)t}{2}}| \times \left|\frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}\right| \\
&= \left|\frac{e^{\frac{1}{2}i(b-a)t}-e^{\frac{1}{2}i(a-b)t}}{it}\right| = \left|\frac{2\,\mathrm{sen}[\frac{(b-a)t}{2}]}{t}\right| \leq b-a,
\end{aligned}
$$

onde a última desigualdade decorre do fato que $|\,\mathrm{sen} w| \leq w, \forall w \in \mathbb{R}$.
Denotando por $Int(c)$ a integral da fórmula da inversão, temos

$$
\begin{aligned}
Int(c) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c}\frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}\varphi_X(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c}\frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}E(e^{iXt})dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c}E\left(\frac{e^{-i(a-X)t}-e^{-i(b-X)t}}{it}\right)dt = E\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c}\frac{e^{-i(a-X)t}-e^{-i(b-X)t}}{it}dt\right],
\end{aligned}
$$

onde a última igualdade decorre da troca da ordem de integração que é justificada tendo em vista que o integrando é limitado conforme provamos acima. Portanto, trabalhando o termo entre colchetes, temos

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c}\frac{e^{-i(a-X)t}-e^{-i(b-X)t}}{it}dt\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c}\frac{1}{it}[\cos((X-a)t)+i\,\mathrm{sen}((X-a)t)\\
&-\cos((X-b)t)-i\,\mathrm{sen}((X-b)t)]dt\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{c}(\frac{\mathrm{sen}((X-a)t)-\mathrm{sen}((X-b)t)}{t})dt\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{c}\frac{\mathrm{sen}((X-a)t)}{t}dt-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{c}\frac{\mathrm{sen}((X-b)t)}{t}dt\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{c(X-a)}\frac{\mathrm{sen}(u)}{u}du-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{c(X-b)}\frac{\mathrm{sen}(u)}{u}du\\
&=g(c(X-a))-g(c(X-b)),
\end{aligned}
$$

onde g é a função dada por $g(w)=\frac{1}{\pi}\int_0^w\frac{\mathrm{sen}(u)}{u}du$, $w\in\mathbb{R}$. Logo, temos

$$
Int(c)=E[g(c(X-a))-g(c(X-b))].
$$

Como vamos passar ao limite para $c \to \infty$, precisamos verificar se será possível trocar a ordem entre limite e esperança. Como g é contínua e $\lim_{w \to \pm\infty} g(w) = \pm\frac{1}{2}$, temos que g é limitada. Então a troca de ordem do limite e da esperança é justificada pelo Teorema da Convergência Dominada. Seja $Y = \frac{1}{2} I_{a \leq X < b} + \frac{1}{2} I_{a < X \leq b}$. Temos que

$$\lim_{c \to \infty} g(c(X-a)) - g(c(X-b)) = Y.$$

Então,

$$\lim_{c \to \infty} Int(c) = E[\lim_{c \to \infty} g(c(X-a)) - g(c(X-b))] = EY.$$

Mas o valor esperado de Y é dado por:

$$\begin{aligned}
EY &= \frac{1}{2}P(X=a) + \frac{1}{2}P(X=b) + P(a < X < b) \\
&= \frac{1}{2}(F(a) - F(a^-)) + \frac{1}{2}(F(b) - F(b^-)) \\
&+ (F(b^-) - F(a)) \\
&= \frac{1}{2}(F(b) + F(b^-)) - \frac{1}{2}(F(a) + F(a^-)) \\
&= \tilde{F}(b) - \tilde{F}(a).
\end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{c \to \infty} Int(c) = \tilde{F}(b) - \tilde{F}(a)$, como queríamos demonstrar.

Agora podemos utilizar a fórmula da inversão para provar o Teorema da Unicidade.

Teorema 2

Teorema da Unicidade. *Se as variáveis aleatórias X e Y têm a mesma função característica, então elas têm a mesma distribuição.*

Demonstração

Por hipótese, X e Y têm a mesma função característica e, como consequência da Fórmula da Inversão, temos que para quaisquer a, b reais e $a < b$,

$$\tilde{F}_X(b) - \tilde{F}_X(a) = \tilde{F}_Y(b) - \tilde{F}_Y(a).$$

Tomando o limite quando $a \to -\infty$, temos que $\tilde{F}_X(a) \to 0$ e $\tilde{F}_Y(a) \to 0$. Portanto, $\tilde{F}_X(b) = \tilde{F}_Y(b), \forall b \in \mathbb{R}$. Seja $c < b$, pela monotonicidade de F_X e F_Y e pela definição de $\tilde{F}$, temos

$$F_X(c) \le \tilde{F}_X(b) \le F_X(b) \text{ e } F_Y(c) \le \tilde{F}_Y(b) \le F_Y(b).$$

Então pela continuidade à direita da função de distribuição, temos que

$$\lim_{b \downarrow c} \tilde{F}_X(b) = F_X(c) \text{ e } \lim_{b \downarrow c} \tilde{F}_Y(b) = F_Y(c).$$

Logo, $F_X(c) = F_Y(c), \forall c \in \mathbb{R}$ como queríamos demonstrar.

Note que o Teorema da Unicidade junto com a definição de função característica implicam que existe uma correspondência 1-1 entre funções características e funções de distribuições.

Exemplo 1

Se $\phi_X(t) = \frac{1}{1+t^2}$, calcule $VarX$.

Solução: Diferenciando ϕ_X, temos $\phi'_X(t) = \frac{-2t}{(1+t^2)^2}$. Diferenciando mais uma vez, $\phi''_X(t) = \frac{-2(1+t^2)^2+2t(2(1+t^2)2t)}{(1+t^2)^4}$. Portanto, $EX = \frac{\phi'_X(0)}{i} = 0$ e $EX^2 = \frac{\phi''_X(0)}{i^2} = -(-2) = 2$. Logo, $VarX = EX^2 - (EX)^2 = 2$.

Exemplo 2

Seja $\phi(t) = \cos(at)$, onde $a > 0$. Mostraremos que ϕ é função característica, achando a distribuição correspondente. Já que assume valores reais, se ϕ fosse função característica de alguma variável aleatória X, então por P6, X possuiria distribuição simétrica em torno de zero. Com efeito teríamos $\cos(at) = \phi(t) = E\cos(tX)$, pois a parte imaginária seria nula. Como $\cos(at) = \cos(-at)$, é evidente que uma distribuição simétrica concentrada nos dois pontos a e $-a$ corresponderia a função característica ϕ. Portanto, ϕ é função característica de X, se, e somente se, $P(X = a) = 1/2 = P(X = -a)$.

Exemplo 3

Sejam X_1 e X_2 duas variáveis aleatórias i.i.d. e seja $Y = X_1 - X_2$. Qual a função característica de Y?

Solução: Seja ϕ a função característica de X_1 e X_2. Por P8 e P3, temos que $\phi_{-X_2}(t) = \phi(-t) = \overline{\phi(t)}$. Então, como X_1 e X_2 são independentes, por P5, temos que

$$\phi_Y(t) = \phi(t)\phi_{-X_2}(t) = |\phi(t)|^2.$$

Caracterização

Teorema 3

Uma função contínua $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *com* $\psi(0) = 1$ *é função característica de alguma variável aleatória se, e somente se, ela for positiva definida.*

Demonstração.

Conforme propriedades já demonstradas, se for função característica, é contínua, positiva definida e aplicada em 0, resulta o valor 1. A prova da recíproca será omitida. □

Exemplo 4

Bernoulli. Suponhamos que $X \sim Bernoulli(p)$, onde $P(X = 1) = p = 1 - P(X = 0)$. Então,

$$\phi_X(t) = Ee^{itX} = pe^{it} + (1 - p).$$

Poisson. Suponhamos que $X \sim Poisson(\lambda)$. Então,

$$\begin{aligned} \phi_X(t) = Ee^{itX} &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{itn} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^n}{n!} = e^{\lambda(e^{it}-1)}. \end{aligned}$$

Exemplo 5

Uniforme. Suponhamos que $X \sim Uniforme(-a, a)$. Então, $f_X(x) = \frac{1}{2a}$ para $-a < x < a$, e $f_X(x) = 0$ caso contrário. Logo, se $t = 0$, então $\phi_X(0) = 1$, e para $t \neq 0$,

$$\phi_X(t) = Ee^{itX} = \int_{-a}^{a} \frac{e^{itx}}{2a} dx$$
$$= \frac{1}{2a}\left(\frac{e^{ita} - e^{-ita}}{it}\right) = \frac{\operatorname{sen}(ta)}{ta}.$$

Normal. Suponhamos que $X \sim N(0, 1)$. Então,

$$\phi_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{itx} e^{\frac{-x^2}{2}} dx = e^{\frac{-t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{(x-it)^2}{2}} dx = e^{\frac{-t^2}{2}}.$$

Exponencial. Suponhamos que $X \sim Exp(\alpha)$. Então,

$$\phi_X(t) = \int_0^\infty e^{itx} \alpha e^{-\alpha x} dx = \alpha \int_0^\infty e^{x(-\alpha+it)} dx$$
$$= \left[\frac{\alpha}{-\alpha + it} e^{x(-\alpha+it)}\right]_0^\infty = \frac{\alpha}{\alpha - it}.$$

Exemplo 6

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, seguindo o modelo de Poisson com parâmetro λ. Queremos obter a distribuição de $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.
Solução: Temos

$$
\begin{aligned}
\varphi_{X_1+\ldots+X_n}(t) &= E(e^{it(X_1+\ldots+X_n)}) \\
&= \prod_{j=1}^{n} E(e^{itX_j}) = e^{n\lambda(e^{it}-1)}.
\end{aligned}
$$

Portanto, $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ tem uma distribuição Poisson com parâmetro $n\lambda$.

Teorema da Continuidade de Levy

Queremos provar que $X_n \to^D X$ se, e somente se, $\phi_{X_n}(t) \to \phi_X(t), \forall t \in R$. Antes de provarmos a necessidade desta afirmação, considere a seguinte definição de convergência de funções de distribuição.

Definição 2

Seja $X, X_1, X_2, \ldots$ uma sequência de variáveis aleatórias com funções de distribuição acumuladas dadas respectivamente por $F, F_1, F_2, \ldots$. Diz-se que F_n converge fracamente *para F, se $X_n \to^D X$.*

Teorema 4 (Teorema de Helly-Bray.)

Sejam $F, F_1, F_2, \ldots$ funções de distribuição. Se F_n converge fracamente para F, então

$$\int g(x) dF_n(x) \to \int g(x) dF(x)$$

para toda função $g : R \to R$ contínua e limitada.

Demonstração.

Omitiremos a prova por ser muito extensa. Ler livro texto. $\square$

Nota 2 (lembrete)

A integral $\int g(x)dF(x)$ é a esperança de $g(X)$, onde X é uma variável aleatória com função de distribuição F, ela é calculada utilizando a integral de Lebesgue-Stieltjes. No caso de F ser discreta, essa integral é equivalente a:

$$\sum_i g(x_i)p(x_i),$$

e quando F for absolutamente contínua com função densidade de probabilidade f, essa integral é equivalente a:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx,$$

onde esta última integral é a integral de Riemann.

Consequência do Teorema de Helly-Bray

Como $\cos(tx)$ e $\text{sen}(tx)$ são funções contínuas e limitadas, tem-se que para t fixo

$$E(\cos(tX_n)) \rightarrow E(\cos(tX))$$

e

$$E(\text{sen}(tX_n)) \rightarrow E(\text{sen}(tX))$$

Logo, $\phi_{X_n}(t) \rightarrow \phi_X(t)$.

É fácil definir a função característica ϕ dada uma função de distribuição F: $\phi(t) = \int e^{itx} dF(x), \forall t \in R$. O próximo teorema implica a suficiência do nosso objetivo nesta seção, ou seja, se $\phi_{X_n} \rightarrow \phi_X$, então $X_n \rightarrow^D X$.

Teorema 5

Sejam $F_1, F_2, \ldots$ funções de distribuições e $\phi_1, \phi_2, \ldots$ suas funções características. Se ϕ_n converge pontualmente para um limite ϕ e se ϕ é contínua no ponto zero, então

(a) *existe uma função de distribuição F tal que $F_n \rightarrow F$ fracamente; e*

(b) *ϕ é a função característica de F.*

Demonstração.

Omitiremos a prova por ser muito extensa. Ler livro texto. □

Exemplo 7

Suponha que X_n e Y_n são independentes para cada $n \geq 0$ e que $X_n \to^D X_0$ e $Y_n \to^D Y_0$. Prove que $X_n + Y_n \to^D X_0 + Y_0$.

Solução: Pelo Teorema da Continuidade sabemos que $\phi_{X_n}(t) \to \phi_{X_0}(t)$ e que $\phi_{Y_n}(t) \to \phi_{Y_0}(t)$. Como X_n e Y_n são independentes temos que $\phi_{X_n+Y_n}(t) = \phi_{X_n}(t)\phi_{Y_n}(t)$. Portanto,

$$\begin{aligned} \lim_n \phi_{X_n+Y_n}(t) &= \lim_n(\phi_{X_n}(t)\phi_{Y_n}(t)) \\ &= \phi_{X_0}(t)\phi_{Y_0}(t) = \phi_{X_0+Y_0}(t). \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema da Continudade, temos que $X_n + Y_n \to^D X_0 + Y_0$.

Exemplo 8

Suponha que a variável aleatória X_n tenha distribuição Binomial, ou seja,

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k}, k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Se $p_n \to 0$ quando $n \to \infty$ de tal modo que $np_n \to \lambda > 0$, então

$$X_n \to^D Y,$$

onde $Y \sim Poisson(\lambda)$. Para verificar isto relembre que podemos representar uma variável aleatória Binomial como a soma de variáveis aleatórias Bernoulli i.i.d., então

$$\begin{aligned} \phi_{X_n}(t) &= Ee^{itX_n} = (1 - p_n + e^{it} p_n)^n \\ &= (1 + p_n(e^{it} - 1))^n = (1 + \frac{np_n(e^{it} - 1)}{n})^n \to e^{\lambda(e^{it} - 1)}, \end{aligned}$$

onde a expressão final é a função característica de uma variável aleatória $Poisson(\lambda)$. Portanto, pelo Teorema da Continuidade, $X_n \to^D Y$.

Soma de um Número Aleatório de Variáveis Aleatórias

Teorema 6

Se N é uma variável aleatória inteira não-negativa, $S = \sum_{i=0}^{N} X_i, X_0 = 0$, *onde* $\{X_i, i \geq 1\}$ *são i.i.d. com função característica comum* ϕ_X, *e elas são independentes de N que é descrita pela função característica* ϕ_N, *então*

$$\phi_S(t) = \phi_N(-i \log \phi_X(t)).$$

Exemplo 9

Suponha que $N \sim Poisson(\lambda)$ representa o número de clientes que são atendidos em um dado tempo T. Suponha ainda que com probabilidade p o i-ésimo cliente fica satisfeito com o atendimento. Assuma que os clientes ficam satisfeitos com o serviço de maneira independente e que N, é independente da probabilidade que clientes ficam satisfeitos. Determine a distribuição de probabilidade de S o número total de clientes satisfeitos no tempo T.

Exemplo

Solução: Seja $X_i \sim Bernoulli(p)$, $i \geq 1$, a variável aleatória que descreve se o i-ésimo cliente ficou ou não satisfeito com o atendimento. Então temos,

$$S = \sum_{i=0}^{N} X_i,$$

onde $X_0 = 0$. Desta forma, sabemos que

$$\phi_S(t) = \phi_N(-i \log \phi_X(t)),$$

onde $\phi_X(t) = pe^{it} + (1-p)$ e $\phi_N(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$. Substituindo temos:

$$\begin{aligned}\phi_S(t) &= e^{\lambda(e^{i(-i\log(pe^{it}+(1-p)))}-1)} \\ &= e^{\lambda(pe^{it}+(1-p)-1)} = e^{p\lambda(e^{it}-1)}.\end{aligned}$$

Pela unicidade da função característica, temos que $S \sim Poisson(p\lambda)$.

Funções Geratrizes de Momento

Definição 3

Uma função geratriz de momento $\hat{F}_X(t)$ *de uma variável aleatória* X *com função de distribuição* F_X *existe se,*

$$\hat{F}_X(t) := Ee^{tX} < \infty, \forall t \in I,$$

onde I *é um intervalo contendo 0 no seu interior.*

O problema de utilizar funções geratrizes de momento é que elas nem sempre existem. Por exemplo, a função geratriz de momento de uma variável aleatória com distribuição de Cauchy não existe. Pode-se provar que a existência da função geratriz de momento é equivalente a cauda da distribuição de X ser limitada exponencialmente, ou seja, $P(|X| > x) \leq Ke^{-cx}$, para algum $K > 0$ e $c > 0$. Se a função geratriz de momento existe, pode-se provar que ela também determina a função de distribuição.

Funções Contínuas Preservam Convergência

O Teorema de Slutsky que trata do comportamento da soma e do produto de variáveis aleatórias, uma convergindo em distribuição e outra em probabilidade.

Teorema 7

Sejam $\{X_n : n \geq 1\}$ e X variáveis aleatórias com funções de distribuição $\{F_n : n \geq 1\}$ e F, respectivamente. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, se X_n converge para X quase certamente, em probabilidade ou em distribuição, o mesmo ocorre com $g(X_n)$ para $g(X)$, no mesmo modo de convergência.

Demonstração.

Omitiremos a prova por ser muito extensa. Ler livro texto. □

Teorema de Slutsky

Teorema 8

Considere $\{X_n : n \geq 1\}$, $\{Y_n : n \geq 1\}$ *e* X *variáveis aleatórias tais que valem as convergências* $X_n \to^D X$ *e* $Y_n \to^P c$, *com* c *constante. Então,*

(i) $X_n + Y_n \to^D X + c$;

(ii) $X_n Y_n \to^D cX$;

(iii) *Se* $c \neq 0$, $\frac{X_n}{Y_n} \to^D \frac{X}{c}$, *desde que* $P(Y_n \neq 0) = 1$.

Demonstração.

Omitiremos a prova por ser muito extensa. Ler livro texto. □