Integral de Riemann-Stieltjes - (Tópico Especial)

Referência: Apostol, M. (1996). Mathematical Analysis. Addison-Wesley

Notação:

Uma partição P de um intervalo fechado $[a,b]$ é um conjunto de pontos (conjunto finito), por exemplo, $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, tal que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Uma partição P' de $[a,b]$ é mais fina que P (um refinamento de P) se $P \subseteq P'$. O símbolo $\Delta \alpha_k$ denotada a diferença $\Delta \alpha_k = \alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})$. Logo

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta \alpha_k = \alpha(b) - \alpha(a).$$

O conjunto de todas as possíveis partições de $[a,b]$ é denotado por $\mathcal{P}[a,b]$.

A norma de uma partição P é o comprimento do maior subintervalo de P e o denotamos por $\|P\|$. Note que $(P' \supseteq P)$ $P \subseteq P'$ implica $\|P'\| \leq \|P\|$, i.e., se a partição é mais fina menor será a sua norma.

Definição: Seja $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ uma partição de $[a,b]$ e seja t_k um ponto dentro do subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Uma soma da forma

$$S(P, f, \alpha) \doteq \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\, \Delta \alpha_k$$

se chama uma soma de Riemann-Stieltjes de f com respeito de α. Dizemos que f é Riemann-integrável respeito de α em $[a,b]$ e escrevemos "$f \in \mathcal{R}(\alpha)$ em $[a,b]$" se existir um número A que satisfaz a seguinte propriedade: Para cada $\varepsilon > 0$, existe uma partição P_ε (P depende de ε) de $[a,b]$ tal que, para cada partição P mais fina que P_ε e para cada escolha dos pontos t_k do intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, tem-se $|S(P, f, \alpha) - A| < \varepsilon$.

Digitalizado com CamScanner

Quando o número A existir, ele é único e é representado por $\int_a^b f\, d\alpha$ ou por $\int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$. Dizemos também que existe a integral de Riemann-Stieltjes $\int_a^b f\, d\alpha$. As funções f e α representam o integrando e o integrador respectivamente. No caso particular em que $\alpha(x) = x$ (identidade). A integral se chama integral de Riemann e a denotamos por $\int_a^b f\, dx$ ou $\int_a^b f(x)\, dx$. O valor numérico de $\int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$ depende exclusivamente de f, α, a e b e não depende do símbolo x.

- Propriedades lineares

É possível mostrar que a integral opera de forma linear tanto no integrando quanto no integrador. (Prova dos seguintes teoremas ver. Apostol (1996)).

Teorema: Se $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ e $g \in \mathcal{R}(\alpha)$ em $[a,b]$, então $c_1 f + c_2 g \in \mathcal{R}(\alpha)$ em $[a,b]$ (para todo par de constantes c_1 e c_2) tem-se
$$\int_a^b (c_1 f + c_2 g)\, d\alpha = c_1 \int_a^b f\, d\alpha + c_2 \int_a^b g\, d\alpha.$$

Teorema: Se $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ e $f \in \mathcal{R}(\beta)$ em $[a,b]$, então $f \in \mathcal{R}(c_1\alpha + c_2\beta)$ em $[a,b]$ (para todo par de constantes c_1 e c_2) e tem-se
$$\int_a^b f\, d(c_1\alpha + c_2\beta) = c_1 \int_a^b f\, d\alpha + c_2 \int_a^b f\, d\beta$$

Teorema: Suponhamos que $c \in (a,b)$, se alguma das dois integrais a continuação existir, então a terceira também existe e além disso tem-se
$$\int_a^c f\, d\alpha + \int_c^b f\, d\alpha = \int_a^b f\, d\alpha$$

Definição: Se $a < b$, definimos $\int_b^a f\, d\alpha = -\int_a^b f\, d\alpha$ sempre que existir $\int_a^b f\, d\alpha$. Definimos também $\int_a^a f\, d\alpha = 0$.

Digitalizado com CamScanner

Integração por partes

Teorema: Se $f \in R(\alpha)$ em $[a,b]$, então $\alpha \in R(f)$ em $[a,b]$ e tem-se

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) + \int_a^b \alpha(x)\,d f(x) = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a)$$

Mudança de variável numa integral de Riemann-Stieltjes

Teorema: Seja $f \in R(\alpha)$ em $[a,b]$ e seja g uma função contínua estritamente monótona e definida num intervalo S de extremos c e d. Suponhamos que $a = g(c)$ e $b = g(d)$. Sejam h e β as funções definidas por composição da seguinte maneira

$$h(x) = f(g(x)) \quad e \quad \beta(x) = \alpha(g(x)), \quad se \quad x \in S.$$

Então, $h \in R(\beta)$ em S e temos que $\int_a^b f\,d\alpha = \int_c^d h\,d\beta$, i.e.,

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(t)\,d\alpha(t) = \int_c^d f(g(x))\,d\{\alpha(g(x))\}$$

Redução da integral de Riemann-Stieltjes numa integral de Riemann.

O teorema a continuação diz que podemos reemplazar $d\alpha(x)$ por $\alpha'(x)\,dx$ na integral $\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)$ sempre que α possua uma derivada α' contínua.

Teorema: Suponhamos que $f \in R(\alpha)$ em $[a,b]$ e suponhamos que α possua uma derivada α' contínua em $[a,b]$. Então a integral de Riemann $\int_a^b f(x)\,\alpha'(x)$ existe e verifica-se

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\,\alpha'(x)\,dx$$

{funções escada como integradores} (*)

(*) **Teorema:** Dados $a < c < b$, definimos α em $[a,b]$ da seguinte forma: os valores $\alpha(a)$, $\alpha(b)$, $\alpha(c)$ são arbitrários: $\alpha(x) = \alpha(a)$ se $a \leq x < c$ e $\alpha(x) = \alpha(b)$ se $c < x \leq b$. Seja f uma função definida em $[a,b]$ de tal forma que pelo menos uma das funções f ou α seja contínua à esquerda de c e uma pelo menos seja contínua à direita de c. Então $f \in R(\alpha)$ em $[a,b]$ e

$$\int_a^b f\,d\alpha = f(c)\left[\alpha(c^+) - \alpha(c^-)\right].$$

Digitalizado com CamScanner

O teorema anterior diz que o valor da integral de Riemann-Stieltjes pode ser alterado mudando o valor de f num ponto. Por exemplo, Seja $\alpha(x)=0$ se $x\neq 0$, $\alpha(0)=-1$, $f(x)=1$, se $-1\leq x\leq 1$. Neste caso, $\int_{-1}^{1} f\,d\alpha = 0$. Mas se definimos f de tal forma que $f(0)=2$ e $f(x)=1$ se $x\neq 0$. Podemos ver que $\int_{-1}^{1} f\,d\alpha$ não existe.
De fato, consideremos uma partição que contém o valor zero (contém 0) como ponto para subdividir, i.e.,

$$S(P,f,\alpha) = f(t_k)[\alpha(x_k)-\alpha(0)] + f(t_{k-1})[\alpha(0)-\alpha(x_{k-2})]$$
$$= f(t_k) - f(t_{k-1}),$$

onde $x_{k-2}\leq t_{k-1}\leq 0\leq t_k\leq x_k$. Dependendo dos valores escolhidos de t_k, $S(P,f,\alpha)$ (a soma de Riemann) assume os valores 0, 1 ou -1.
Logo $\int_{-1}^{1} f\,d\alpha$ não existe. Contudo, numa integral de Riemann $\int_a^b f(x)\,dx$, podemos mudar os valores de f num número finito de pontos sem afetar a existência e o valor da integral. Para provar isto, basta verificar o caso em que $f(x)=0$ para todo $x\in[a,b]$, exceto para um ponto, chamemos ele de $x=c$. Para tal função temos que $|S(P,f)|\leq |f(c)|\,\|P\|$. Como podemos fazer $\|P\|$ tão pequeno quanto queramos temos que $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. ▲

- O integrador α do teorema anterior é um caso particular de uma classe importante de funções conhecidas como "funções escada". Estas funções são constantes em todo o intervalo salvo num número finito de descontinuidades de salto

Definição: (função escada): Uma função α definida em $[a,b]$ é dita de escada se existe uma partição $a=x_1<x_2<\dots<x_n=b$ de modo que α é constante em cada subintervalo aberto (x_{k-1},x_k). O número $\alpha(x_k^+)-\alpha(x_k^-)$ se chama o salto em x_k se $1<k<n$. O salto em x_1 é $\alpha(x_1^+)-\alpha(x_1)$ e em x_n é $\alpha(x_n)-\alpha(x_n^-)$.

Digitalizado com CamScanner

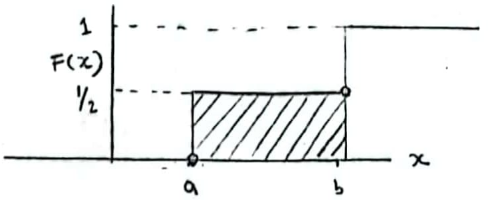
<u>Teorema:</u> (Redução de uma integral de Riemann-Stieltjes a uma soma finita). Seja α uma função de escada definida em $[a,b]$ com salto α_k em x_k, onde $x_1, \dots, x_n$ são tais que $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Seja f uma função definida em $[a,b]$ tal que f e α não são simultaneamente descontínuas à direita ou à esquerda de cada x_k. Então, $\int_a^b f\, d\alpha$ existe e tem-se

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, \alpha_k$$

- <u>Nota:</u> A função $[\![x]\!]$ (parte inteira de x) é uma função de escada e $[\![x]\!]$ é o único inteiro que satisfaz $[\![x]\!] \leq x < [\![x]\!] + 1$.

<u>Exemplo do teorema anterior:</u>

Seja F uma função de distribuição de uma variável aleatória discreta, tais que $P(X=a) = P(X=b) = 1/2$ (X assume unicamente os valores a e b)



$$F(x) = P(X = x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq a \\ 1/2 & \text{se } a < x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

- Seja φ uma função contínua em $[a,b]$, então

$\int_a^b \varphi\, dF = \varphi(b)\frac{1}{2}$. De fato,

$$\int_a^b \varphi\, dF = \sum_{k=1}^{n} \varphi(x_k)\left[F(x_k^+) - F(x_k^-)\right] =$$

$$= \varphi(x_1)\{F(x_1^+) - F(x_1^-)\} + \varphi(x_2)\{F(x_2^+) - F(x_2^-)\} + \dots + \varphi(x_n)\{F(x_n^+) - F(x_n^-)\}$$

Como F é discreta $F(x_i^+) - F(x_i^-) = F(x_i) - F(x_{i-1})$. Logo

$$= \varphi(x_0)\left[F(x_0) - F(x_{-1})\right] + \dots + \varphi(x_n)\left[F(x_n) - F(x_{n-1})\right]$$

$$= \varphi(a)\left[\cancel{F(a)}^{0} - \cancel{F(x_{-1})}^{0}\right] + \dots + \varphi(b)\{F(b) - \cancel{F(b^-)}^{0}\}$$

$$= 0 + 0 + \dots + \varphi(b)\, \cancel{F(b)}^{1/2}$$. Daí,

$$\int_a^b \varphi\, dF = \varphi(b)\frac{1}{2}$$

Digitalizado com CamScanner