Universidade Fedral da Bahia
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Estatística

NOTAS DE AULA
MAT236 - MÉTODOS ESTATÍSTICOS
1ª UNIDADE

Elaborada pelas professoras: Giovana Silva, Lia Moraes, Rosana Castro e Rosemeire Fiaccone

Revisada em 2011.1 - Monitora: Tatiana Felix da Matta

Revisada em 2013.1 - Profas Gecynalda Gomes e Silvia Regina

Revisada em 2016.1 - Monitor: Jackson

Revisada em 2019.2 - Profas Giovana Silva e Verônica Lima

Salvador-BA, 5 de agosto de 2019.

Sumário

1 Introdução **4**

1.1 O que é estatística e suas divisões 4

1.2 Por que precisamos aprender Estatística? 5

2 Probabilidade **8**

2.1 Breve histórico 8

2.2 Conceitos básicos 9

2.3 Operações com eventos 11

2.4 Como atribuir probabilidade a um evento? 12

2.5 Probabilidade condicional 16

2.6 Regra ou Teorema do produto 18

2.7 Regra da Probabilidade Total 19

2.8 Eventos Independentes 21

2.9 1ª LISTA DE EXERCÍCIOS 23

3 Variável Aleatória **35**

3.1 Conceitos Básicos 35

3.2 Distribuição de probabilidade de uma variável aleatória discreta 36

3.3 Distribuição de probabilidade de uma variável aleatória contínua 40

3.4 Função de distribuição acumulada (FDA) 42

3.5 Valor esperado (Esperança) de uma variável aleatória 44

3.5.1 Propriedades da Esperança 45

3.6 Variância e Desvio-padrão de uma variável aleatória 46

3.6.1 Variância de uma variável aleatória 46

3.6.2 Desvio-padrão de uma variável aleatória 47

3.7 2ª LISTA DE EXERCÍCIOS 48

4 Alguns Modelos Probabilísticos para Variáveis Aleatórias **56**

4.1 Variáveis Aleatórias Discretas 56

4.1.1 Distribuição de Bernoulli 56
4.1.2 Distribuição Binominal 57
4.1.3 Distribuição de Poisson 60
4.2 3ª LISTA DE EXERCÍCIOS 63
4.3 Variáveis Aleatórias Contínuas 68
4.3.1 Distribuição Exponecial 68
4.3.2 Distribuição Weibull 70
4.3.3 Distribuição Normal (ou Gaussiana) 72
4.4 4ª LISTA DE EXERCÍCIOS 81

1 Introdução

1.1 O que é estatística e suas divisões

Para muitos a Estatística não passa de conjuntos de tabelas de dados numéricos. Mas será que a estatística é só isso?

A Estatística originou-se com a coleta e construção de tabelas de dados para o governo. A coleta de dados entretanto, representa apenas um dos aspectos da Estatística. Atualmente, podemos adotar a seguinte definição para a Estatística:

A Estatística constitui-se num conjunto de técnicas e métodos científicos que tratam da coleta, *análise* e *interpretação* de informações numéricas, cujo objetivo principal é auxiliar na tomada de decisões ou tirar conclusões em situações de incerteza, a partir de informações numéricas.

A Teoria Estatística moderna se divide em dois grandes campos:

Estatística Descritiva - consiste num conjunto de métodos que ensinam a reduzir uma quantidade de dados bastante numerosa por um número pequeno de medidas, substitutas e representantes daquela massa de dados.

Estatística Indutiva ou Inferência Estatística - consiste em inferir (deduzir ou tirar conclusões a respeito das) propriedades de um universo a partir de uma amostra. O processo de generalização, que é característico do método indutivo, está associado a uma margem de incerteza. A medida da incerteza é tratada mediante técnicas e métodos que se fundamentam na Teoria das Probabilidades.

A Estatística Descritiva abrange métodos gráficos e numéricos, utilizados para resumir dados de maneira que características importantes da amostra possam ser observadas.

A disponibilidade de uma grande quantidade de dados e de métodos computacionais mais eficientes revigorou a área da Estatística denominada "Estatística Descritiva".

Na maioria das vezes não podemos investigar o fenômeno que estamos interessados em estudar para todos os elementos da população pois além do custo ser muito alto, o levantamento dos dados poderia levar muito tempo. Para resolver este problema devemos trabalhar com um subconjunto da população, chamado de AMOSTRA.

Se selecionarmos os elementos da amostra de acordo com critérios estatísticos, podemos conhecer as informações relativas à população através da amostra.

A inferência estatística procura com base nos dados amostrais tirar conclusões sobre a população. Considere o exemplo abaixo para ilustrar as definições dadas.

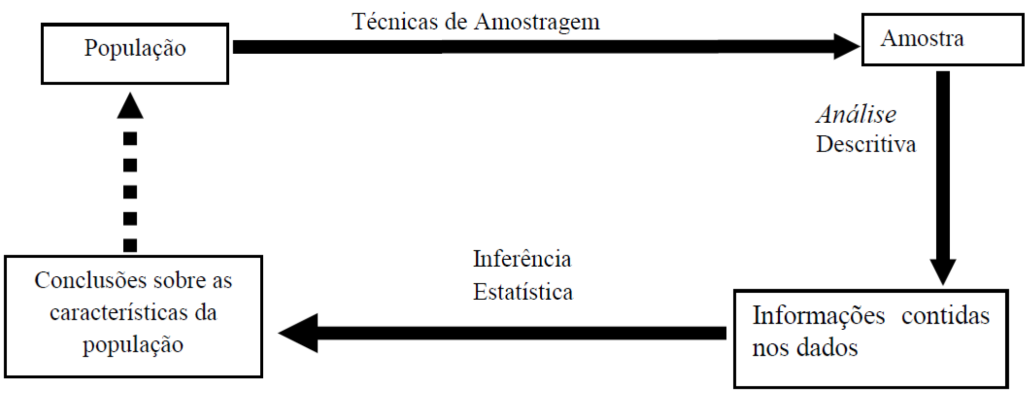
Exemplo: (Notas de Aula da Disciplina MAT116 - USP) Numa pesquisa eleitoral um Instituto de Pesquisa procura com base nos resultados de um levantamento aplicado a uma amostra da população prever o resultado da eleição. Considere o candidato "A":

a) Denomine por $\boldsymbol{p}$ a proporção de pessoas que votarão em "A" na eleição.

b) Denomine por $\hat{p}$ a proporção de pessoas no levantamento de opinião (amostra) que expressam intenção de voto em "A".

Podemos usar o valor de $\hat{p}$ para estimar a proporção $\boldsymbol{p}$ da população.

O esquema a seguir resume as etapas de um trabalho estatístico:



1.2 Por que precisamos aprender Estatística?

Quase toda atividade e experiência humana envolvem coleta e análise de algum tipo de informação (dados). Na coleta de dados relativos ao comportamento ou outras características de um grupo de indivíduos, amostras aleatórias de um processo ou resultados de repetitivas medições, sempre envolvem **variação**.

Métodos estatísticos representam as ferramentas básicas para compreender as variações, porque a análise estatística é a única base para tentar entender **variabilidade**.

Os métodos estatísticos são consciente ou inconscientemente usados em várias situações, especialmente na apresentação de informações oriundas de dados numéricos. Diversas vezes, apresentações são baseadas, principalmente, em algum tipo de técnica utilizando teorias matemáticas; porém durante a preparação e apresentação dos dados, métodos estatísticos são utilizados para definir a técnica de coleta de dados e chegar a uma conclusão através das informações coletadas. Os métodos estatísticos têm aplicações em:

- **Indústrias:** coleta de dados na linha de produção, para manter e controlar o processo produtivo, o que assegura o nível de produção e os padrões de qualidade; otimização do processo produtivo; detecção das variáveis que realmente influenciam o processo, viabilizando-se as experiências que possam levar a alterações efetivas nesse processo; planejamento de experimentos viáveis, com vistas à economia de observações e, portanto, de custo; planejamento de métodos de coleta e análise de dados para a exploração mineral;

- **Instituições públicas:** planejamento da coleta, do armazenamento e do processamento de informações; processamento de dados com o objetivo de sintetizar e divulgar resultados; montagem de tecnologia adequada de geração de indicadores econômicos; previsão de safras, projeção de demandas;

- **Empresas de pesquisa de opinião e mercado:** prestação de assessoria estatística no levantamento de audiências de programas de televisão, da popularidade de candidatos a cargos políticos; na avaliação da aceitação de novos produtos; na realização de pesquisas para determinação do perfil do consumidor e no planejamento e execução e pesquisa para determinação das características sócio-econômicas dos habitantes da região;

- **Bancos e companhias de seguro:** elaboração de previsões a serem utilizadas como instrumento gerencial; trabalho em associação com a atuária nos cálculos das probabilidades de morte, doença, roubo de carro, etc.; otimização de procedimentos de atendimento ao público;

- **Centros de pesquisa:** prestação de assessoria estatística em todas as fases de um projeto de pesquisa que envolva coleta, tratamento e análise de dados.

Os empregados de uma empresa devem tornar-se mais familiarizados com estatística. Eles devem entender e conhecer as técnicas estatísticas disponíveis, e adaptação de dados de experimentos para a análise estatística. Um profissional treinado em Estatística terá maior facilidade em identificar um problema em sua área de atuação, determinar os tipos de dados que irão contribuir para a sua análise, coletar estes dados e a seguir estabelecer conclusões e determinar um plano de ação para a solução do problema detectado. Qualquer um que derive informações a partir de dados está agindo como um estatístico.

Veja algumas aplicações de Estatística na solução de problemas práticos nos artigos a seguir:

- D. P. Pereira, (2008). "Estudo Comparativo entre o Índice de Acidentes no Trabalho na Construção Civil de Poços de Caldas e do Brasil".
- N. S. R. S. Santos, (2008). "Uma análise estatística da inclusão digital no Brasil: avanços no uso de computadores".
- M. L. M. M. Sundefeld e S. L. D. Gotlieb (1996). "Sistema computacional para índices de cárie dentária: banco de dados e análise".
- A. P. Neto (2010). "Intervalos de Confiança, Intervalos de Predição e Campo de arbítrio nas Avaliações de Imóveis Urbanos".
- L. F. D. Lopes, "Análise de regressão associada ao controle estatístico de processo aplicado na produção de cerâmicas".
- A. M. R. Fernandes, " Novas abordagens no sistema de análise de dados em mastologia".
- C. A. S. Miranda e T. C. N. Monteiro (1989). "Qualidade de água em sistemas de reservação e distribuição predial na cidade do Rio de Janeiro".

2 Probabilidade

2.1 Breve histórico

Diz–se geralmente que a teoria da probabilidade originou-se com Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665), devido à curiosidade de um cavalheiro Chevalier de Meré, jogador apaixonado, que em cartas discutiu com Pascal problemas relativos à probabilidade de ganhar em jogos de cartas. Despertado pelo assunto Pascal discutiu com Fermat sobre o que hoje chamaríamos de probabilidades finitas. Mas em verdade a teoria elementar das probabilidades já tinha sido objeto de atenção bem antes, uma vez que os jogos de azar sempre exerceram fascínio sobre os homens.

A primeira obra conhecida em que se estudam as probabilidades é o livro *De Ludo Aleae (Sobre os jogos de azar)* de Girolamo Cardano (1501-1576), publicado em 1663. Também Galileu (1564-1642) preocupou-se com as probabilidades, estudando os jogos de dados para responder a pergunta de um amigo.

A teoria das probabilidades passou a desenvolver-se de maneira mais organizada a partir do século XVII e importantes contribuições de ilustres matemáticos devem ser registradas. No famoso livro, *Ars Cnjectandi* de Jaime Bernoulli (1654-1705) encontramos um teorema de importância decisiva para a teoria das probabilidades, conhecido como a *Lei dos Grandes Números*, nome que lhe foi dado pelo matemático francês Siméon Poisson (1781-1840). Poderíamos citar muitos outros com importantes contribuições, mas certamente o matemático que mais contribuiu para a teoria das probabilidades foi Laplace (1749-1827). Seus inúmeros trabalhos sobre as probabilidades foram incorporados em seu monumental *Tratado Analítico das Probabilidades.*

Atualmente as teorias das probabilidades têm extrema importância nas mais diversas áreas desde a engenharia, medicina, epidemiologia, demografia, economia, administração, meteorologia, fotografias de satélites, marketing, predição de desastres naturais, ciências sociais entre outras.

Além das muitas aplicações formais, o conceito de probabilidade está no nosso dia a dia. Sempre ouvimos e falamos frases como: "Provavelmente vai chover amanhã", "É provável que o avião se atrase", "Há boas chances de que eu possa comparecer". Cada uma desta expressões está baseada no conceito de probabilidade de que certo evento ocorra.

2.2 Conceitos básicos

Fenômenos ou experimentos aleatórios (E): São aqueles em que o processo de experimentação está sujeito a incertezas, logo, não é possível controlar todas as circunstâncias relevantes e, portanto, não é possível prever com exatidão os resultados individuais.

- Características de um experimento aleatório:

  a) Poderá ser repetido um grande número de vezes sob as mesmas condições iniciais;

  b) Não podemos afirmar que um resultado particular ocorrerá, porém, podemos descrever o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento - as possibilidades de resultado;

  c) Quando o experimento é repetido um grande número de vezes, surgirá uma regularidade nos resultados. Esta regularidade, chamada de regularidade estatística, é que torna possível construir um modelo matemático preciso com o qual se analisará o experimento.

A **Teoria da Probabilidade** é utilizada para descrever matematicamente experimentos cujos resultados não podem ser completamente pré-determinados, ou seja, visa definir um modelo matemático que seja adequado à descrição e interpretação de fenômenos aleatórios.

Exemplo 1: Considere o experimento aleatório de jogar uma moeda uma única vez. Antes da moeda ser jogada não se sabe o resultado. Conhecem-se apenas os possíveis resultados: cara ou coroa. Admitindo-se que a moeda é honesta, cada resultado tem a mesma chance de ocorrer. Neste exemplo, modelos podem ser estabelecidos para quantificar as incertezas das diversas ocorrências.
Fazendo-se algumas suposições adequadas, é possível escrever distribuições de probabilidades (modelos probabilísticos) que representem muito bem as distribuições de frequências, que só são obtidas quando o fenômeno é observado.

Modelo probabilístico é definido por:

a) Um espaço amostral (Ω);

b) Uma probabilidade, P($\cdot$), para cada ponto amostral.

Espaço amostral (Ω): conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

Exemplos de experimentos aleatórios e seus respectivos espaços amostrais:

E_1: Jogar uma moeda e observar a face superior.

$\Omega_1 = \{$ Cara, Coroa $\}$

E_2: Jogar um dado e observar a face superior.

$\Omega_2 = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$

E_3: Determinar o tempo de vida útil de uma lâmpada.

$\Omega_3 = \{ t \in \Re \ / \ t \geq 0 \}$

Espaços amostrais podem ser finitos ou infinitos.

Evento: Qualquer subconjunto de um espaço amostral. Representado pelas letras latinas maiúsculas A, B, C,...

Exemplo 2: No lançamento de um dado consideremos o evento "ocorrer um número par".

A: ocorrer um número par, em que $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

A $= \{2, 4, 6\} \subset \Omega$

Exemplo 3: Vai chover no litoral baiano no fim de semana? $\Omega = \{$chove, não chove$\}$

Em geral, temos interesse em eventos particulares do experimento.

O evento A pode representar a ocorrência de chuva

A $= \{$chove$\} \subset \Omega$

Os conjuntos Ω e ϕ também são eventos:

Ω é o evento certo

ϕ é o evento impossível

Exercício de fixação:

1. Descreva o espaço amostral para cada um dos seguintes experimentos a seguir:

   a) Numa linha de produção conta-se o número de peças defeituosas num período de 1 hora;

   b) Mede-se a duração de lâmpadas, deixando-as acesas até que queimem;

   c) Lançar uma moeda três vezes, sucessivamente, e anotar a sequência de caras e coroas;

   d) Escolher ao acaso um ponto do círculo de raio um centrado na origem.

Respostas:

a) Resp.: Ω={0,1,2,...,N} em que N é o número máximo de peças que podem ser produzidas no período de 1 hora.

b) Resp.: Ω={ $t \in \Re$ / $0 \leq t \leq t_0$ } em que t_0 é o tempo máximo de duração da lâmpada acesa, até que ela se queime ou Ω={ $t \in \Re$ / $t \geq 0$ }.

c) Resp.: Ω={ (ca, ca, ca); (ca, ca, co); (ca, co, ca); (co, ca, ca); (ca, co, co); (co, ca, co); (co, co, ca); (co, co, co)}.

d) Resp.: Ω={ $(x, y) \in \Re^2; x^2 + y^2 \leq 1$ }.

2.3 Operações com eventos

Ao realizar um experimento aleatório diz-se que o evento A ocorreu se o resultado observado for um elemento do subconjunto A.

Dados dois eventos A e B de um mesmo espaço amostral:

- $A \cap B$ *é o evento em que A e B ocorrem simultaneamente;*
- $A \cup B$ *é o evento em que A ocorre ou B ocorre (ou ambos ocorrem);*
- A^c *ou* $\bar{A}$ *é o evento em que A não ocorre.*

Exemplo 4: Lançamento de um dado $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Evento B: representa sair face par => B = {2, 4, 6}

Evento C: representa sair uma face *ímpar* => C = {1, 3, 5}

Evento D: representa sair uma face maior que 3 => D = {4, 5, 6}

Evento E: representa sair face 1 => E = $\{1\}$

Evento $B \cap D$: representa sair uma face par e maior que 3 => $\{2,4,6\} \cap \{4,5,6\} = \{4,6\}$

Evento $B \cap C$: representa sair uma face par *e* ímpar => $\{2,4,6\} \cap \{1,3,5\} = \phi$

Evento $B \cup D$: representa sair uma face par *ou* maior que 3 => $\{2,4,6\} \cup \{4,5,6\} = \{2,4,5,6\}$

Evento $B \cup C$: representa sair uma face par *ou* ímpar => $\{2,4,6\} \cup \{1,3,5\} = \{1,2,3,4,5,6\}$.

O Evento $B^c = C$ e o Evento $C^c = B$

Se dois eventos quaisquer têm intersecção vazia, isto é, eles não podem ocorrer simultaneamente, dizemos que eles são mutuamente exclusivos ou disjuntos. No exemplo 4, os eventos B e C são **mutuamente exclusivos ou disjuntos**, visto que $B \cap C = \phi$.

2.4 Como atribuir probabilidade a um evento?

Calcular uma probabilidade é medir a incerteza ou associar um grau de confiança aos resultados possíveis de um experimento. Por exemplo, ao escolher, ao acaso, uma carta de um baralho comum (bem embaralhado), o que é mais provável, sair uma figura (K, Q, J) ou sair o dois de copas?

As probabilidades associam aos eventos um valor no intervalo [0,1]. Quanto maior o valor associado ao evento, maior a certeza de sua possibilidade de ocorrência.

Seja Ω um espaço amostral. Uma função P definida para todos os subconjuntos de Ω (chamados eventos) é chamada de probabilidade se:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$, para todo evento $A \subset \Omega$
2. $P(\Omega) = 1$
3. Se $A1, A2, ..., A_n$ forem, dois a dois, eventos mutuamente exclusivos, isto é, $(A_i \cap A_j) = \phi$ para todo $i \neq j$, então

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Existem várias maneiras de atribuir probabilidade a um evento do espaço amostral. Vamos estudar duas formas. Uma das formas é baseada em espaços amostrais finitos.

Um espaço amostral é equiprovável quando todos os elementos têm a mesma probabilidade de ocorrer, isto é, todos os seus elementos são igualmente prováveis.

Definição clássica: Seja A um evento associado ao espaço amostral finito Ω, no qual todos os resultados são igualmente possíveis (ou equiprováveis). Vamos definir a probabilidade do evento A, P(A) como o quociente entre o número de elementos em A e o número de elementos em Ω:

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega},$$

isto é, a razão entre os casos favoráveis ao evento e o total de casos possíveis.
Limitações:

- Dificuldade em enumerar #A e #Ω em alguns casos;
- Ω infinito;
- Modelo adequado apenas para a classe de fenômenos cujo espaço amostral é equiprovável.

Exemplo 5: Qual a probabilidade de obter um número par no lançamento de um dado?
$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
A = número par = $\{2, 4, 6\}$
$P(A) = \dfrac{3}{6}$
Obs.: Para calcular probabilidade utilizando a definição clássica, em geral utilizam-se os métodos de enumeração: combinações, arranjos e permutações (ver Apêndice).

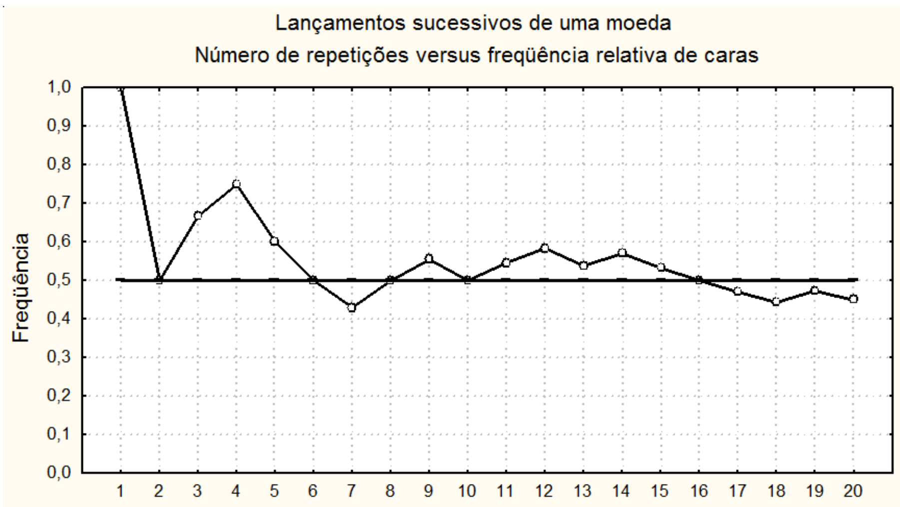
As limitações da definição clássica de probabilidade, que só se aplica a espaços amostrais finitos e equiprováveis, levaram a considerar outra forma de calcular probabilidade de um evento partindo da frequência relativa do evento ao se repetir o experimento, n vezes, sob as mesmas condições. Em linguagem matemática, quando n cresce, o limite da frequência relativa de ocorrência de A é igual a P(A), isto é,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{\#\text{de repetições que A ocorre}}{n} = P(A)$$

Exemplo 11: Suponha que vamos realizar um experimento de lançar 20 vezes uma moeda e observar o número de caras. A cada lançamento vamos considerar o número de caras que até então ocorreram *(n_a)* dividido pelo número de lançamentos *(n)*, ou seja, a frequência relativa de caras. Os resultados referentes a esse experimento encontram-se na tabela abaixo:

n	n_a	$f_a = \frac{n_a}{n}$	N	n_a	$f_a = \frac{n_a}{n}$
1	1	1	11	6	$\frac{6}{11}$
2	1	$\frac{1}{2}$	12	7	$\frac{7}{12}$
3	2	$\frac{2}{3}$	13	7	$\frac{7}{13}$
4	3	$\frac{3}{4}$	14	8	$\frac{8}{14}$
5	3	$\frac{3}{5}$	15	8	$\frac{8}{15}$
6	3	$\frac{3}{6}$	16	8	$\frac{8}{16}$
7	3	$\frac{3}{7}$	17	8	$\frac{8}{17}$
8	4	$\frac{4}{8}$	18	8	$\frac{8}{18}$
9	5	$\frac{5}{9}$	19	9	$\frac{9}{19}$
10	5	$\frac{5}{10}$	20	9	$\frac{9}{20}$

Vejamos o comportamento das frequências relativas por meio do gráfico a seguir:



A partir desta Figura vemos que a medida que aumenta o número de lançamentos, a frequência relativa se aproxima de 0,5. Em linguagem matemática dizemos que a frequência relativa “converge” para 0,5. Dificuldade do ponto de vista matemático: o número do limite real pode não existir.

Exercício de fixação:

1. (TRIOLA): Em uma pesquisa entre estudantes de uma faculdade, 1162 afirmaram que “colavam” nos exames, enquanto 2468 afirmaram não “colar” [com base em dados do Josephson Institute of Ethics (Instituto Josephson de Ética)]. Selecionando aleatoriamente um desses estudantes, determine a probabilidade deste estudante ter “colado” em um exame.Resp.: 0,3201.

Teoremas:

1) $P(\phi) = 0$

2) Se A^c é o evento complementar de A, então $P(A^c) = 1 - P(A)$

3) Sejam A e B dois eventos quaisquer, então:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Demonstração:

$$A \cup B = A \cup [B \cap A^c]$$
$$B = (A \cap B) \cup (B \cap A^c)$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap A^c)$$
$$-P(B) = -P(A \cap B) - P(B \cap A^c)$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

4) Se A, B e C forem três eventos quaisquer, então:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Generalização:

$$P(A_1 \cup ... \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j}^{n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<r}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_r) + ... + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap ... \cap A_n)$$

Exemplo 12: Se $P(A \cap B^c) = 0,2$ e $P(B^c) = 0,7$. Achar $P(A \cup B)$? (Use diagrama de Veen)

$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) \Rightarrow 0,2 = P(A) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A) = 0,2 + P(A \cap B)$

$P(B^c) = 1 - P(B) \Rightarrow 0,7 = 1 - P(B) \Rightarrow P(B) = 0,3$

$P(A \cup B) = 0,2 + 0,3 = 0,5$

Exercício de fixação:

1) Um lote é formado por 10 peças boas, 4 com defeitos menores e 2 com defeitos graves. Uma peça é escolhida ao acaso. Calcule a probabilidade de que:

a) a peça não tenha defeito grave? Resp.:0,875.

b) a peça não tenha defeito? Resp.:0,625.

c) a peça seja boa ou tenha defeito grave? Resp.:0,75.

2.5 Probabilidade condicional

Considere o exemplo abaixo:

Dados do Censo Demográfico de 91 publicado pelo IBGE relativos aos habitantes de Sergipe, na faixa etária entre 20 e 24 anos com relação às variáveis Sexo e Leitura.

Sexo	**Lê**	**Não Lê**	**Total**
Masculino	39.577	8.672	48.249
Feminino	46.304	7.297	53.601
Total	85.881	15.969	101.850

E: Um jovem entre 20 e 24 anos é escolhido ao acaso em Sergipe.

- Ω: conjunto de jovens de Sergipe, com idade entre 20 e 24 anos. $\#\Omega$=101.850.

Eventos de interesse:

- **M: "jovem sorteado é do sexo masculino"**

- **F: "jovem sorteado é do sexo feminino"**

- **L: “jovem sorteado sabe ler”**

- **M $\cap$ L: “jovem sorteado é do sexo masculino e sabe ler”**

- **M $\cup$ L: “jovem sorteado é do sexo masculino ou sabe ler”**

Podemos obter algumas probabilidades:

$$P(L) = \frac{\text{n}^{\text{o}}\text{ de jovens que sabem ler}}{\text{n}^{\text{o}}\text{ de jovens de }\Omega} = \frac{85.881}{101.850} = 0,843$$

$$P(M) = \frac{\text{n}^{\text{o}}\text{ de jovens do sexo masculino}}{\text{n}^{\text{o}}\text{ de jovens de }\Omega} = \frac{48.245}{101.850} = 0,473$$

$$P(F) = P(M^c) = 1 - P(M) = 1 - 0,473 = 0,527$$

$$P(M \cap L) = \frac{\text{n}^{\text{o}}\text{ de jovens do sexo masculino e que sabem ler}}{\text{n}^{\text{o}}\text{ de jovens de }\Omega} = \frac{39.557}{101.850} = 0,388$$

$$P(M \cup L) = P(M) + P(L) - P(M \cap L) = 0,473 + 0,843 - 0,388 = 0,928$$

No exemplo anterior, se soubermos que o jovem sorteado é do sexo masculino, qual é a probabilidade de que saiba ler? Temos uma ***informação parcial:*** o jovem é do sexo masculino.

Vamos designar a probabilidade de que o jovem sabe ler quando se sabe que o jovem é do sexo masculino por P (L|M) e denominá-la probabilidade condicional de L dado M.

É natural atribuirmos:

$$P(L|M) = \frac{\text{n}^{\text{o}}\text{ de jovens que sabem ler dentre aqueles do sexo masculino}}{\text{n}^{\text{o}}\text{ total de jovens do sexo masculino}} = \frac{39.577}{48.249} = 0,820$$

Note que:

$$P(L|M) = \frac{\dfrac{\text{n}^{\text{o}}\text{ de jovens do sexo masculino e que sabem ler}}{\text{n}^{\text{o}}\text{ total de jovens}}}{\dfrac{\text{n}^{\text{o}}\text{ de jovens do sexo masculino}}{\text{n}^{\text{o}}\text{ total de jovens}}}$$

$$P(M|L) = \frac{P(M \cap L)}{P(M)}$$

Por exemplo, a probabilidade de ser do sexo masculino dado que lê é dada por:

$$P(M|L) = \frac{P(M \cap L)}{P(L)} = \frac{39.577/101.850}{85.881/101.850} = 0,460$$

Definição de probabilidade condicional: Sejam A e B eventos de um experimento aleatório qualquer, com P(B) > 0. A probabilidade condicional de A dado B (denota-se por P(A|B)) é definida como:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

2.6 Regra ou Teorema do produto

Como consequência da definição de probabilidade condicional, podemos calcular a probabilidade da ocorrência conjunta de dois eventos A e B.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A|B).P(B)$$

Exemplo 13: Uma urna contém fichas numeradas de 1 a 4. Retira-se uma ficha da urna ao acaso e anota-se o número. Esta ficha então é recolocada na urna, e retira-se novamente uma ficha, ao acaso, da urna. Qual a probabilidade de ter saído a ficha com número 1, na primeira retirada, e de ser 5 a soma dos números das duas fichas retiradas?

Solução:
Evento A: sair o número 1 na primeira retirada $\Rightarrow P(A) = \frac{1}{4}$
Evento B: soma = 5
Evento B|A: soma = 5 | a primeira ficha é 1, se queremos que a soma seja 5, então é preciso que a segunda ficha seja o número 4 $\Rightarrow P(B|A) = \frac{1}{4}$

Pelo teorema do produto temos que,

$$P(A \cap B) = P(B|A).P(A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

Exemplo 14: Duas válvulas defeituosas se misturam com duas válvulas perfeitas. As válvulas são retiradas, uma a uma, sem reposição até que ambas defeituosas sejam encontradas. Qual a probabilidade de que a última válvula defeituosa seja encontrada no segundo ensaio?

Solução:
Evento A: sair uma válvula defeituosa $\Rightarrow P(A) = \dfrac{2}{4}$
Evento B: a última válvula é defeituosa
Evento B|A: sair a última válvula defeituosa | saiu uma válvula defeituosa $\Rightarrow P(B|A) = \dfrac{1}{3}$

Pelo teorema do produto temos que,

$$P(A \cap B) = P(B|A).P(A) = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{12}$$

De modo geral, considere 3 eventos A, B e C, tem-se que:

$$P(A \cap B \cap C) = P(C|A \cap B).P(A \cap B) = P(C|A \cap B)P(B|A)P(A)$$

Esta relação pode ser estendida para um número finito qualquer de eventos.

Exercício de fixação:

1) 1) As falhas na fundação de um grande edifício podem ser de dois tipos: A (capacidade de suportar) e B (fundação excessiva). Sabendo-se que P(A)=0,001, P(B)=0,008 e P(A|B)=0,1, determinar a probabilidade:

a) De haver falha na fundação? Resp.:0,0008.

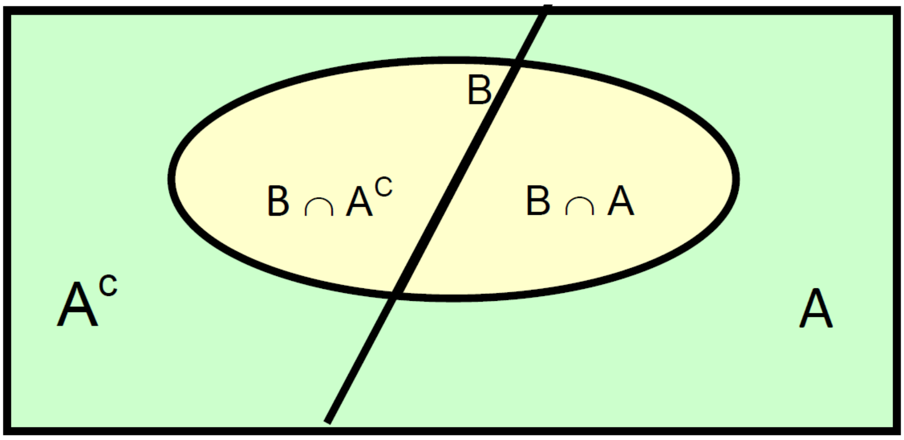
b) De ocorrer A e não B? Resp.:0,0002.

2.7 Regra da Probabilidade Total

Sejam A e B dois eventos de um experimento qualquer. Há duas maneiras de B ocorrer, considerando a ocorrência ou não do evento A: ou A e B ocorrem $(A \cap B)$ ou A^c e B ocorrem $(A^c \cap B)$.
Deste modo, $B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$, em que $A \cap B$ e $A^c \cap B$ são conjuntos disjuntos.

Então, $P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$.

Pela regra do produto $P(B) = P(A).P(B|A) + P(A^c)P(B|A^c)$



DEFINIÇÃO DE PARTIÇÃO:

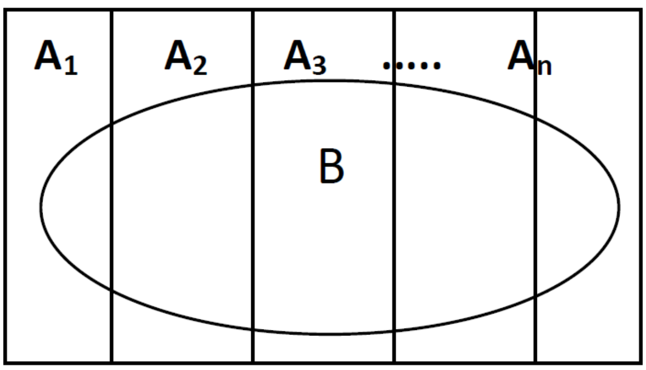
Tem-se uma **partição** de um espaço amostral em um número finito de eventos Ai (i = 1,2,...,n) se:

1) Se A_1, A_2,..., A_n forem, dois a dois, eventos mutuamente exclusivos, isto é, $(A_i \cap A_j) = \oslash$ para todo $i \neq j$.

2) $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$, isto é, os eventos A são exaustivos.

Regra da Probabilidade Total: se a sequência de eventos aleatórios $A_1 1$, A_2,..., A_n formar uma partição de Ω, então:

$$P(B) = \sum_{i}^{n} P(A_i \cap B) = \sum_{i}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$$



Exemplo 15: Um lote de 100 peças é composta de 20 peças defeituosas e 80 peças perfeitas, do qual extrairemos 2 peças sem reposição. Qual a probabilidade da segunda peça extraída ser defeituosa?

Solução:
Evento A: a primeira peça extraída é defeituosa
Evento B: a segunda peça extraída é defeituosa
Pela regra da probabilidade total temos que,

$P(B) = P(A).P(B|A) + P(A^c)P(B|A^c) = \dfrac{20}{100} \cdot \dfrac{19}{99} + \dfrac{80}{100} \cdot \dfrac{20}{99} = \dfrac{1}{5}.$

Exemplo 16: Em uma fábrica de parafusos são utilizadas n máquinas. Sejam $P(A_i)$ a probabilidade de um parafuso provir da i-ésima máquina, i = 1,2,...,n e $P(B|A_i)$ indica a probabilidade do parafuso ser defeituoso sabendo-se que foi produzido pela i–ésima máquina. Do total de parafusos produzidos pela fábrica, escolhe-se ao acaso um parafuso. Qual a probabilidade de que o parafuso seja defeituoso?

Solução: Se B representa o evento "parafuso escolhido defeituoso", pela regra da probabilidade total, temos que:

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + ... + P(B|A_n)P(A_n)$$

Podemos ainda estar interessados em saber a probabilidade da i-ésima máquina ter produzido o parafuso defeituoso.

2.8 Eventos Independentes

Dois eventos são ditos independentes quando a ocorrência de um deles não interfere na probabilidade de ocorrência do outro.

Em linguagem matemática, dados A, B $\subseteq \Omega$, A e B são ditos independentes, se e somente se:

$$P(A|B) = P(A) \text{ e } P(B|A) = P(B)$$

Nesse caso, temos que:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

Exemplo 19: A probabilidade de que A resolva um problema é de 2/3 e a probabilidade de que B resolva é de 3/4. Se ambos tentarem independentemente, qual a probabilidade do problema ser resolvido?

Solução:

A: A resolve

B: B resolve

A ∩ B: A e B resolvem

A ∪ B: A ou B resolvem => o problema é resolvido

Como são eventos independentes, P(A ∩ B) = P(A).P(B) e

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A).P(B) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{4} - \left(\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{4} - \dfrac{2}{4} = \dfrac{8+3}{12} = \dfrac{11}{12}.$

Generalizando:

Os eventos $A_1, A_2, ..., A_n \subseteq \Omega$, são independentes se e somente se a independência for verificada para todos os subconjuntos de dois ou mais eventos desta família.

- Para que três eventos sejam independentes é necessário verificar quatro igualdades:
  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
  $P(A \cap C) = P(A)P(C)$
  $P(B \cap C) = P(B)P(C)$
  $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$
  que corresponde à $\binom{4}{2} + \binom{4}{3} = 3 + 1 = 4$, igualdades a serem verificadas

- Para quatro eventos é necessário verificar onze igualdades que são:

$$\binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 6 + 4 + 1 = 11$$

- Para "n" eventos é necessário verificar:

$$\sum_{k=2}^{n} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2^n - n - 1 \qquad \text{igualdades}$$

Se $\{A_i\}$, i = 1, 2, 3,..., n, é uma família finita de eventos independentes, então:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Observar que:

$$\begin{cases} P(A \cap B) = P(B|A)P(A) \\ P(A \cap B) = P(A|B)P(B) \end{cases} \qquad \text{para eventos quaisquer (condicional)}$$

$$\{ \;\; P(A \cap B) = P(A)P(B) \qquad \text{para eventos independentes}$$

Como consequência dos resultados acima, têm-se que $\oslash$ e Ω são independentes de qualquer evento A, $\forall$ A $\subseteq \Omega$. Para ver isto note que:

1) $P(\oslash \cap A) = P(\oslash) = 0 = P(\oslash)P(A)$

2) $P(\Omega \cap A) = P(A) = P(\Omega)P(A)$

Exercício de fixação:

1) Uma máquina consiste de 4 componentes ligados em paralelo de tal forma que a máquina falha apenas quando todos os componentes falharem. Supondo que as falhas são independentes entre si e se cada componente tem respectivamente as probabilidade 0,1; 0,2; 0,3; e 0,4 de falhar quando a máquina é ligada, qual é a probabilidade da máquina não falhar? Resp.:0,9976.

2.9 1ª LISTA DE EXERCÍCIOS

1) Descrever o espaço amostral (S) e eventos associados a cada um dos experimentos a seguir:

E_1: Lançam-se dois dados perfeitos e observam-se os números nas faces voltadas para cima;

A_1: A soma das faces é sete;

E_2: Lançar uma moeda três vezes, sucessivamente, e anotar a sequência de caras (K) e coroas

(C);

A_2: Sair pelo menos duas caras;

E_3: Lançar uma moeda e um dado, simultaneamente, e registrar os resultados;

A_3: Obtenção de face impar no dado;

E_4: Lançar uma moeda três vezes, sucessivamente, e registrar o número de caras ocorrido;

A_4: Sair pelo menos duas caras;

E_5: Numa linha de produção conta-se o número de peças defeituosas num período de 1 hora;

A_5: Obter menos de 3 defeituosas

E_6: Mede-se a duração de lâmpadas, deixando-as acesas até que queimem;

A_6: O tempo de vida da lâmpada é inferior a 30 horas;

E_7: Um fabricante produz um determinado artigo. Da linha de produção são retirados 3 artigos e cada um é classificado como bom(B) ou defeituoso(D).

A_7: Pelo menos dois artigos são bons.

E_8:Um lote de dez peças contém três defeituosas. As peças são retiradas uma a uma, sem reposição, até que a ultima peça defeituosa seja encontrada. O número total de peças retiradas é registrado.

A_8: Menos de cinco peças foram retiradas.

E_9: Peças são fabricadas até que dez peças perfeitas sejam produzidas. O número total de peças fabricadas é anotado.

A_9: Quinze ou mais peças foram fabricadas.

Resp.:E_1: Ω_1 = {(1,1); (1,2); ... ; (1,6); (2,1); (2,2); ... ; (2,6);........; (6,1); (6,2); ... ; (6,6)} e A_1 = {(1,6); (2,5); (3,4); (4,3); (5,2); (6,1)}. E_2: Ω_2 = {KKK; KKC; KCK; CKK; KCC; CKC; CCK; CCC} e A_2 = {KKK, KKC, KCK, CKK}. E_3: Ω_3 = {(K,1); (K,2); ... ;(K,6); (C,1); (C,2); ... ; (C,6)} e A_3 = {(K,1); (K,3); (K,5); (C,1); (C,3); (C,5)}. E_4: Ω_4 = {0, 1, 2, 3} e A_4 = {2, 3}. E_5: Ω_5 = {0, 1, 2, 3, ... , N}, N é o n^o máximo de peças defeituosas no período de 1 h e A_5 = {0, 1, 2}. E_6: Ω_6 = {t: t $\geq$ 0} ou Ω_6 = {t: 0 $\leq$ t $\leq$ t_0} onde t_0 é o tempo máximo de vida da lâmpada e A_6 = {t: t < 30} ou A_6 = {t: 0 $\leq$ t < 30}. E_7: Ω_7 = {BBB, BBD, BDB, DBB, BDD, DBD, DDB, DDD} e A_7 = {BBB; BBD; BDB; DBB}. E_8: Ω_8 = {3, 4, 5, ... , 10} e A_8 = {3, 4}. E_9: Ω_9 = {10, 11, 12,...} e A_9 = {15, 16, 17,...}

2) Suponha duas urnas contendo, cada uma, quatro bolas numeradas de 1 a 4. Considera-se

o experimento que consiste, em retirar, ao acaso, uma bola de cada urna. Descreva o espaço amostral. Determine os seguintes eventos:

a) a soma do número de pontos é ímpar;

b) a bola extraída da primeira urna contém o número dois.

Resp.: Ω = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4)}. a) A = {(1,2), (1,4), (2,1), (2,3), (3,2), (3,4), (4,1), (4,3)}. b) B = {(2,1), (2,2), (2,3), (2,4)}

3) Sejam A, B e C três eventos quaisquer. Estabeleça uma expressão para os eventos abaixo:

a) A e B ocorrem;

b) A ou B ocorrem;

c) B ocorre, mas A não ocorre;

d) A não ocorre;

e) não ocorre A e não ocorre B;

f) A e B ocorrem, mas C não corre;

g) somente A ocorre, mas B e C não ocorrem.

Resp.: a) $A \cap B$. b) $A \cup B$. c) $\bar{A} \cap B$. d) $\bar{A}$. e) $\bar{A} \cap \bar{B}$. f) $A \cap B \cap \bar{C}$. g) $(A \cap \bar{B} \cap \bar{C})$.

4) Dados P(A) = 1/2; P(B) = 3/8; P(A ∩ B) = 1/8, calcule:

a) $P(A \cup B)$; b) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$; c) $P(\bar{A} \cup \bar{B})$; d) $P(A \cap \bar{B})$; e) $P(\bar{A} \cap B)$.

Resp.: a)0,75; b) 0,25; c) 0,875; d)0,375; e)0,25.

5) Uma empresa de fundos mútuos oferece a seus clientes diversos fundos: um de mercado, três de títulos diferentes (curto, médio e longo prazos), dois fundos de ações (moderado e de alto risco) e um misto. Dentre os usuários que possuem cotas em apenas um fundo, seguem as probabilidades de clientes dos diferentes fundos.

Mercado	0,20
Título curto prazo	0,15
Título médio prazo	0,10
Título longo prazo	0,05
Ação de alto risco	0,18
Ação de risco moderado	0,25
Misto	0,07

a) Qual a probabilidade de um indivíduo selecionado ao acaso possuir cotas do fundo misto?

b) Qual a probabilidade de um indivíduo selecionado ao acaso possuir cotas em um fundo de títulos?

c) Qual a probabilidade de um indivíduo selecionado ao acaso não possuir cotas em fundo de ações?

Resp.: a)0,07; b) 0,30; c) 0,57.

6) Certo tipo de motor elétrico falha se ocorrer uma das seguintes situações: emperramento dos mancais, queima dos enrolamentos, desgaste das escovas. Suponha que o emperramento seja duas vezes mais provável do que a queima, esta sendo quatro vezes mais provável do que o desgaste das escovas. Qual será a probabilidade de que a falha seja devida a cada uma dessas circunstâncias? Resp.: 8/13, 4/13 e 1/13

7) Uma urna U_1 contêm 5 bolas brancas e 2 pretas; outra urna U_2 contem 3 bolas brancas e 6 bolas pretas; e outra urna U_3 contem 4 bolas brancas e 4 bolas pretas. Tira-se uma bola de cada urna. Calcular a probabilidade de retirar uma bola branca e duas bolas pretas. Resp.: 8/21

8) Lança-se uma moeda viciada de modo que a probabilidade de cara(K) é igual a 2/3 e a probabilidade de coroa(C) é igual a 1/3. Se aparecer cara, então seleciona-se aleatoriamente um número dentre os de 1 a 9; se aparecer coroa, seleciona-se aleatoriamente um número dentre os de 1 a 5. Ache a probabilidade de um número par ser selecionado. Construa o diagrama em árvore. Resp.: 0,4296.

9) Suponha que A e B sejam eventos independentes associados a um experimento. Se a probabilidade de A ou B ocorrerem for igual a 0,6, enquanto a probabilidade de ocorrência de A for igual a 0,4 determine a probabilidade de ocorrência de B. Resp.:0,3333.

10) Se A e B são dois eventos relacionados com uma experiência E e são conhecidas as probabilidades P(A), P(B) e P(A ∩ B), deseja-se em função destas, as expressões das probabilidades dos seguintes eventos:

a) $(\bar{A} \cup \bar{B})$; b) $(\bar{A} \cap \bar{B})$; c) $(\bar{A} \cup B)$; d) $(\bar{A} \cap B)$.

Resp.: a) 1 - P(A ∩ B); b) 1 - P(A) - P(B) + P(A ∩ B); c) 1 - P(A) + P(A ∩ B); d) P(B) - P(A ∩ B).

11) Certo aparelho eletrônico tem duas lâmpadas que podem estar acesas ou apagadas, tendo sido observadas as seguintes probabilidades apresentada no quadro adiante. O quadro mostra por exemplo, que ambas as lâmpadas estavam simultaneamente apagadas 30% do tempo.

Lâmpada 1	Lâmpada 2	
	Acesa	Apagada
Acessa	0,15	0,45
Apagada	0,10	0,30

Pergunta-se:

a) O fato "Lâmpada 1 acesa" é independente de "Lâmpada 2 acesa"? Justifique a resposta.

b) O fato "Lâmpada 1 apagada" é independente de "Lâmpada 2 acesa"? Justifique a resposta.

Resp.: a)Sim; b)Sim.

12) Uma associação de indústrias transformadoras de resinas plásticas é composta de 20 empresas que produzem sacos plásticos (S), 10 que produzem garrafas (G), 8 que produzem utensílios domésticos (U) e 2 que se encarregam de brinquedos (B). Ao escolhermos uma empresa ao acaso, achar a probabilidade de que:

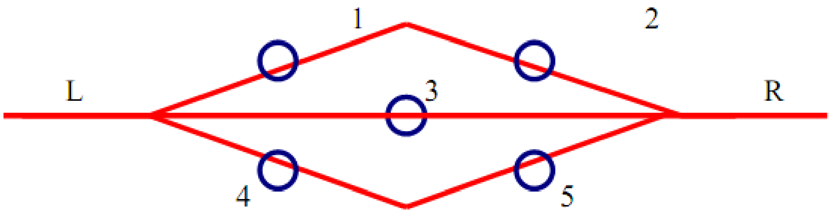
a) seja uma indústria que produza sacos plásticos ou utensílios domésticos;

b) seja uma indústria produtora de sacos plásticos ou brinquedos;

c) não seja uma indústria que produza garrafas. Resp.: a) 0,7; b) 0,55; c) 0,75.

13) Três alarmes estão dispostos de tal maneira que qualquer um deles funcionará independentemente, quando qualquer coisa indesejável ocorrer. Se cada alarme tem probabilidade 0,9 de trabalhar eficientemente, qual é a probabilidade de se ouvir o alarme quando necessário? Resp.: 0,999.

14) Suponha que todos os componentes da figura a seguir tenham a mesma confiabilidade (probabilidade de funcionar) p e funcionem independentemente, obtenha a confiabilidade do sistema.



Resp.: $p + 2p^2 - 2p^3 - p^4 + p^5$

15) Suponha que X represente o número de horas de atividades físicas por semana. Considere a tabela a seguir:

Sexo	Número de horas de atividades fisicas		
	$0 \leq X < 3$	$3 \leq X < 5$	$X \geq 5$
Feminino	22	8	7
Masculino	3	4	6

a) Qual é a probabilidade de sortear aleatoriamente uma menina com atividade física semanal na faixa de [3, 5) horas?

b) Calcule $P(X \geq 5)$.

c) Calcule a probabilidade de um indivíduo dedicar pelo menos 5 horas a atividade física, sabendo-se que ele é do sexo masculino?

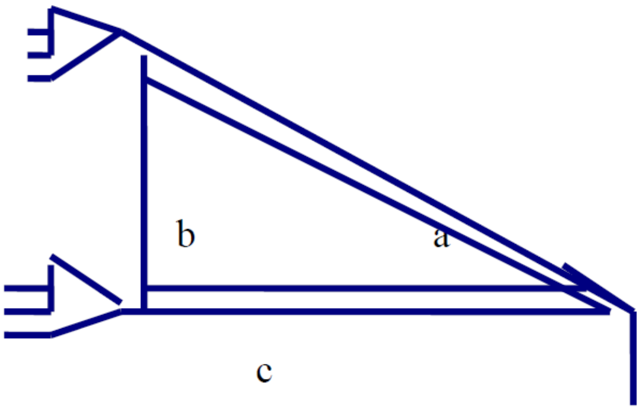
d) Calcule a probabilidade de um indivíduo dedicar pelo menos 5 horas a atividade física, sabendo-se que ele é do sexo feminino? Resp.: a) 0,16; b) 0,26; c) 0,462; d) 0,189.

16) Sejam A e B dois eventos associados a um experimento. Suponha que P(A) = 0,4, enquanto P(A ∪ B) = 0,7. Seja P(B) = p.

a) Para que valor de p, A e B serão mutuamente exclusivos?

b) Para que valor de p, A e B serão independentes? Resp.: a) 0,3; b) 0,5.

17) Sob a ação de uma força F, as probabilidades de falha nas barras a, b e c da estrutura mostrada na figura a seguir são respectivamente 0,06; 0,05 e 0,04. Se ocorrer a falha em qualquer uma das barras, isto leva a falha em toda a estrutura. Supondo que as falhas nas barras são estatisticamente independentes, ache a probabilidade de ocorrer a falha da estrutura.



Resp.: 0,1427.

18) Um sistema é composto de 3 componentes 1, 2 e 3, com confiabilidade 0,9; 0,8 e 0,7; respectivamente. O componente 1 é indispensável ao funcionamento do sistema; se 2 ou 3 não funcionam, o sistema funciona, mas com rendimento inferior. A falha simultânea de 2 e 3 implica o não funcionamento do sistema. Supondo que os componentes funcionem independentemente, calcular a confiabilidade do sistema. Resp.: 0,846.

19) Um processo industrial produz 4% de itens defeituosos. A experiência mostra que 25% dos itens defeituosos produzidos não são percebidos pelo inspetor de qualidade isto é, o item

não passa pela inspeção de qualidade. Os itens bons sempre são aceitos satisfatoriamente pela inspeção. Qual a probabilidade de na compra de um desses itens, este seja defeituoso? Resp.: 0,01.

20) Uma fábrica dispõe de 3 máquinas para fabricar o mesmo produto. Essas máquinas são antigas e apresentam frequentemente defeitos de funcionamento com as seguintes percentagens do tempo de utilização:

MÁQUINA	TEMPO DE UTILIZAÇÃO (%)
A	40
B	35
C	25

Verificam-se nas peças produzidas as seguintes porcentagens de peças defeituosas:

MÁQUINA	PEÇAS DEFEITUOSAS (%)
A	2
B	4
C	5

A gerência decide substituir uma das máquinas a fim de diminuir a porcentagem de peças defeituosas. Qual das três máquinas deve ser substituída? Resp.: Máquina B.

21) Um artigo manufaturado que não pode ser usado se for defeituoso, deve passar por duas inspeções antes de receber embalagem. A experiência mostra que um dos inspetores deixará passar 5% dos defeituosos, ao passo que o segundo inspetor deixará passar 4% dos tais artigos. Se os artigos sem defeito sempre passam pela inspeção e se 10% dos artigos processados são defeituosos, que percentagem dos artigos que passaram pelas duas inspeções são defeituosos? Resp.:0,02%.

22) Numa faculdade 30% dos homens e 20% das mulheres estudam matemática. Além disso, 45% dos estudantes são mulheres. Se um estudante selecionado aleatoriamente está estudando matemática, qual a probabilidade de que este estudante seja mulher? Resp.:0,3529.

23) A tabela a seguir apresenta informações de alunos de uma universidade quanto às variáveis: Período, Sexo, e Opinião sobre a Reforma Agrária. Com base na tabela adiante, determine a probabilidade de escolhermos:

Período	Sexo	Reforma Agrária		
		Contra	A favor	Sem opinião
Diurno	Feminino	2	8	2
	Masculino	8	9	8
Noturno	Feminino	4	8	2
	Masculino	12	10	1

a) Uma pessoa do sexo masculino e sem opinião sobre a reforma agrária?

b) Uma mulher contrária a reforma agrária?

c) Dentre os estudantes do noturno, um que seja a favor da reforma agrária?

d) Uma pessoa sem opinião, sabendo-se que ela é do sexo feminino?

Resp.: a)0,122; b)0,081; c)0,486; d)0,154.

24) Em uma prova caíram dois problemas. Sabe-se que 132 alunos acertaram o primeiro, 86 erraram o segundo, 120 acertaram os dois e 54 acertaram apenas um problema. Qual a probabilidade de que um aluno, escolhido ao acaso:

a) Não tenha acertado nenhum problema?

b) Tenha acertado apenas o segundo problema? Resp.: a) 0,298; b) 0,169.

25) Uma grande empresa tem dois departamentos de produção: Produtos Marítimos e Produtos para Oficinas. A probabilidade de que a divisão de Produtos Marítimos tenha no corrente ano fiscal, uma margem de lucros de no mínimo 10% é estimada em 0,30; a probabilidade de que a divisão de Equipamentos para Oficinas tenha uma margem de lucros de pelo menos 10% é 0,20; e a probabilidade de que ambas as divisões tenham uma margem de lucros de no mínimo 10% é 0,06. Determine a probabilidade de que a divisão de Equipamentos para Oficinas tenha uma margem de lucros de no mínimo 10% dado que a divisão de Produtos Marítimos tenha alcançado tal nível de lucro. Resp.: 0,2.

26) Suponha que temos duas urnas 1 e 2, cada uma com duas gavetas. A urna 1 contém uma moeda de ouro em uma gaveta e uma moeda de prata na outra gaveta; enquanto a urna 2 contém uma moeda de ouro em cada gaveta. Uma urna é escolhida ao acaso; a seguir uma de suas gavetas é aberta ao acaso. Verifica-se que a moeda encontrada nesta gaveta é de ouro. Qual a probabilidade de que a moeda provenha da urna 2? Resp.: 0,6667.

27) Três fábricas fornecem equipamentos de precisão para o laboratório de química de uma universidade. Apesar de serem aparelhos de precisão, existe uma pequena chance de subestimação ou superestimação das medidas efetuadas. A tabela a seguir apresenta o comportamento do equipamento produzido em cada fábrica:

Fábrica I	Subestima	Exata	Superestima
Probabilidade	0,01	0,98	0,01

Fábrica II	Subestima	Exata	Superestima
Probabilidade	0,005	0,98	0,015

Fábrica III	Subestima	Exata	Superestima
Probabilidade	0,00	0,99	0,01

As fábricas I, II, III fornecem, respectivamente, 20%, 30% e 50% dos aparelhos utilizados. Escolhemos, ao acaso, um desses aparelhos e perguntamos a probabilidade de:

a) Haver superestimação de medidas.

b) Sabendo que as medidas dão exatas, ter sido fabricado em III.

c) Ter sido produzido por I, dado que não subestima as medidas.

Resp.: a) 0,012; b) 0,503; c) 0,199.

28) Uma companhia produz circuitos integrados em três fábricas, I, II e III. A fábrica I produz 40% dos circuitos, enquanto a II e III produzem 30% cada uma. As probabilidades de que um circuito integrado produzido por estas fábricas não funcione são 0,01; 0,04 e 0,03; respectivamente. Escolhido um circuito da produção conjunta das três fábricas, Qual a probabilidade de o mesmo não funcionar? Resp.: 0,025.

29) Considere a situação do problema anterior, mas suponha agora que um circuito é escolhido ao acaso e seja defeituoso. Determinar qual a probabilidade de ele ter sido fabricado por I.

Resp.: 0,16.

30) Uma indústria química produz uma grande variedade de produtos usando quatro diferentes processos; a mão de obra disponível é suficiente somente para que apenas um processo seja executado num dado instante. O gerente da indústria sabe que a descarga de uma poluição perigosa no rio que passa em volta da mesma, depende do processo que está em operação. As probabilidades de ocorrer poluição perigosa para os vários processos, denotando por F uma descarga de poluição perigosa, são: P(F|A) = 0,40; P(F|B) = 0,05; P(F|C) = 0,30; P(F|D) = 0,10. Todos os outros produtos da fábrica são considerados inofensivos. Em um determinado mês sabe-se que em 20%, 40%, 30% e 10% do tempo respectivamente usam-se os processos A, B, C e D. Deseja-se saber qual a probabilidade de não termos uma descarga de poluição perigosa no determinado mês? Resp.: 0,8.

31) Dois processadores tipo A e B são colocados em teste por 50 mil horas. A probabilidade que um erro de cálculo aconteça em um processador do tipo A é de $\frac{1}{30}$, no tipo B, $\frac{1}{80}$ e em ambos, $\frac{1}{1000}$. Qual a probabilidade de que:

a) Pelo menos um dos processadores tenha apresentado erro?

b) Nenhum processador tenha apresentado erro?

c) Apenas o processador A tenha apresentado erro?

Resp.: a) 0,045; b) 0,955; c) 0,032.

32) O seguinte grupo de pessoas está numa sala: 5 homens maiores de 21 anos; 4 homens com menos de 21 anos de idade; 6 mulheres maiores de 21 anos e 3 mulheres menores de 21 anos. Uma pessoa é escolhida ao acaso. Define-se os seguintes eventos: A: a pessoa é maior de 21 anos; B: a pessoa é menor de 21 anos; C: a pessoa é homem e D: a pessoa é mulher. Calcule:

a) $P(B \cup D)$

b) $P(\bar{A} \cap \bar{C})$

c) $P(A \cap B)$

Resp.: a) 0,722; b) 0,167; c) 0,00.

33) Um sistema eletrônico consta de dois sub-sistemas, digamos A e B. De testes prévios sabe-se que: P(A falhe) = 0,20; P(A e B falhem) = 0,15 e P(B falhe sozinho) = 0,15. Calcule:

a) P(A falhe | B falhou)

b) P(A falhe sozinho)

Resp.: a) 0,5; b) 0,05.

34) Uma remessa de 30 arruelas contém 5 peças defeituosas e 25 perfeitas. Dez arruelas são escolhidas ao acaso (com reposição) e classificadas.

a) Qual a probabilidade de que sejam encontradas exatamente 3 peças defeituosas?

b) Qual a probabilidade de que se encontrem ao menos 2 peças defeituosas?

Resp.: a) 0,160; b) 0,515.

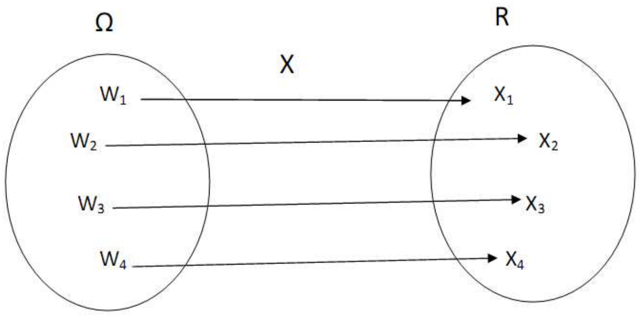
35) Duas lâmpadas queimadas foram acidentalmente misturadas com seis lâmpadas boas. Se vamos testando as lâmpadas, uma por uma, até encontrar duas defeituosas, qual é a probabilidade de que a última defeituosa seja encontrada no quarto teste? Resp.: 3/28.

36) A probabilidade de um homem viver, mais dez anos é 1/4 e a probabilidade de uma mulher viver mais dez anos é 1/3. Encontre a probabilidade de ambos estarem vivos dentro de dez anos e de ao menos um estar vivo dentro de dez anos. Resp.:1/12 e 1/2.

3 Variável Aleatória

3.1 Conceitos Básicos

Definição 1. Sejam E um experimento e Ω um espaço amostral associado ao experimento. Uma função X que associe a cada elemento $W_i \in \Omega$ um número real, $X(W_i)$, é denominada variável aleatória.



Uma variável aleatória X é, portanto, uma função cujo domínio é o espaço amostral e contra-domínio é conjunto dos números reais, ou seja, X: $\Omega \rightarrow R$.

Exemplo 1:

a) E: Lançamento de uma moeda. Assim, Ω = cara, coroa = w_1, w_2

$$\begin{cases} 1, & \textit{se } w = w_1, \text{ ou seja, se } \textit{der cara}, \\ 0, & \textit{se } w = w_2, \text{ ou seja, se } \textit{der coroa}, \end{cases}$$

b) E: Lançamento de duas moedas. Seja X o número de caras obtidas no experimento. Vamos denotar c: cara e k: coroa. Assim, $\Omega = \{ cc, ck, kc, kk \} = \{ w_1, w_2, w_3, w_4 \}$

$X(w_1) = 2; \quad X(w_2) = X(w_3) = 1; \quad X(w_4) = 0.$

c) E: Escolher um ponto ao acaso no intervalo [0,1] . Seja X o quadrado do valor escolhido. Assim $\Omega = [0,1]$, e $X(w) = w^2 \; \forall \; w \in \Omega$.

d) E: Escolher um ponto ao acaso no círculo unitário. Seja X a distância do ponto escolhido à origem. Assim, $\Omega = \{ (x,y) \; / \; x^2 + y^2 \leq 1 \}$ e $X(w) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Definição 2. Seja X uma variável aleatória. Se X assume valores em um conjunto finito ou infinito enumerável, então X é denominada variável aleatória discreta.

Exemplo 2: Sorteio de n indivíduos de uma população. Seja X o número de indivíduos do sexo masculino sorteados $\Rightarrow$ X(Ω) = {0, 1, 2, 3, ... , n}

Definição 3. Seja X uma variável aleatória. Se X assume valores em um conjunto infinito não enumerável, então X é denominada **variável aleatória contínua**.

Exemplo 3: Retirada ao acaso um parafuso da produção diária de uma fábrica e registro de seu diâmetro (em mm) e comprimento (em mm).
Suponha que esta fábrica produza parafusos com diâmetro entre 3 e 10 mm e comprimento entre 20 e 35 mm

$$\text{X = Diâmetro do parafuso} \Rightarrow X(\Omega) = [3, 10]$$

$$\text{Y = Comprimento do parafuso} \Rightarrow Y(\Omega) = [20, 35]$$

3.2 Distribuição de probabilidade de uma variável aleatória discreta

Seja X uma variável aleatória discreta que assume os valores x_1, x_2, ... ,x_n. A distribuição de probabilidades de X é o conjunto de pares de valores que associa a cada valor da variável x_i a probabilidade P(X = x_i):

$$(x_1, P(X = x_1)), (x_2, P(X = x_2)), ..., (x_n, P(X = x_n))$$

De maneira que,

a) $\sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i) = 1$

b) P(X = x) = p(x) $\geq$ 0

Exemplo 4: E: lançamento de um dado honesto. X: número da face observada $\Rightarrow$ X(Ω) = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. A distribuição de probabilidade (ou função de probabilidade) de X é dada por:

X	1	2	3	4	5	6
P(X = x)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Exemplo 5: Considere novamente o exemplo do lançamento de duas moedas. Seja X o número de caras:

Resultados(w)	X(w)	Probabilidade $P(X = x_i)$
(Cara, Cara)	2	$\frac{1}{4}$
(Cara, Coroa)	1	$\frac{1}{4}$
(Coroa, Cara)	1	$\frac{1}{4}$
(Coroa, Coroa)	0	$\frac{1}{4}$

Obtemos então,

$$P(X = 0) = \frac{1}{4}$$

$$P(X = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 2) = \frac{1}{4}$$

Exemplo 6: (Morettin e Bussab, 2006) Um empresário pretende estabelecer uma firma para montagem de um produto composto de uma esfera e um cilindro. As partes são adquiridas em fábricas diferentes, e a montagem consistirá em juntar as duas partes e pintá-las. O produto acabado deve ter o comprimento (definido pelo cilindro) e a espessura (definida pela esfera) dentro de certos limites, e isso só poderá ser verificado após a montagem. Para estudar a viabilidade do seu empreendimento, o empresário quer ter uma idéia da distribuição dos lucros por peça montada.

Sabe-se que cada componente pode ser classificado como BOM, LONGO ou CURTO, conforme sua medida esteja dentro da especificação, seja ela maior ou menor que a especificada. Além disso, foram obtidos dos fabricantes o preço de cada componente (5 unidades de dinheiro) e as probabilidades de produção de cada componente com as características BOM, LONGO e CURTO. Estes valores estão na tabela abaixo:

Distribuição da produção das fábricas A e B, de acordo com as medidas das peças produzidas.

Tabela 1: Distribuição da produção das fábricas A e B, de acordo com as medidas das peças produzidas.

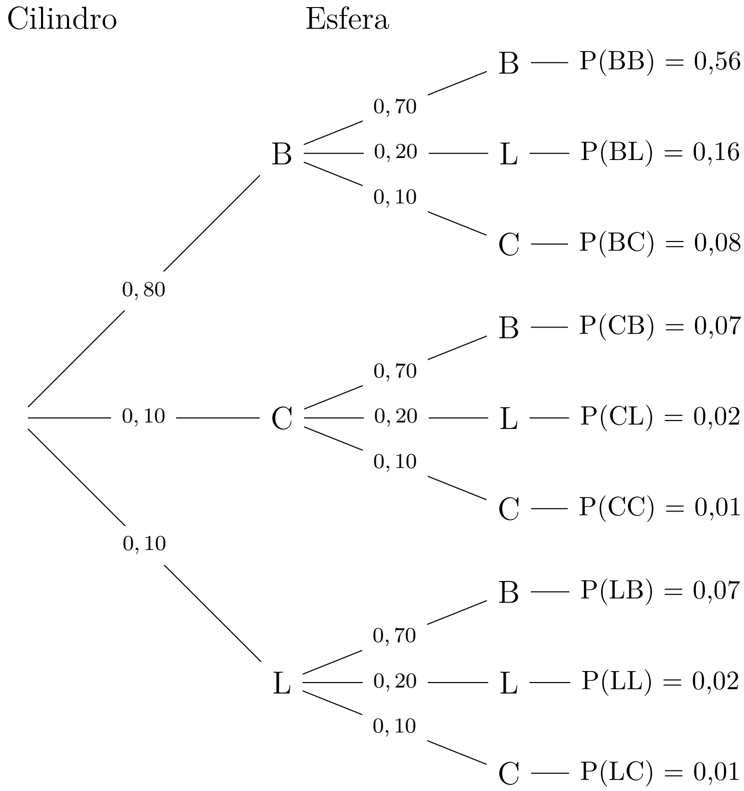
Produto	Fábrica A (Cilindro)	Fábrica B (Esfera)
Dentro das especificações → BOM(B)	0,80	0,70
Maior que as especificações → LONGO(L)	0,10	0,20
Menor que as especificações → CURTO(C)	0,10	0,10

Fonte: Retirada das especificações técnicas das fábricas A e B

Se o produto final apresentar algum componente com a característica C, ele será irrecuperável, e o conjunto será vendido como sucata ao preço de 5 unidades. Cada componente longo pode ser recuperado a um custo adicional de 5 unidades. Se o preço de venda de cada unidade é de 25 unidades, como seria a distribuição das frequências da variável X: lucro por conjunto montado?

A construção desta distribuição de frequências vai depender de certas suposições que faremos sobre o comportamento do sistema considerado. Em vista dessas suposições, estaremos trabalhando com um modelo da realidade, e a distribuição que obteremos será uma distribuição teórica, tanto mais próxima da distribuição de frequências real quanto mais fiéis à realidade forem as suposições.

Primeiramente, vejamos a construção do espaço amostral para a montagem dos conjuntos segundo as características de cada componente e suas respectivas probabilidades. Desde que os componentes vêm de fábricas diferentes, vamos supor que a classificação dos cilindros segundo suas características sejam eventos independentes; assim, obtemos a configuração abaixo.



O espaço amostral em questão está apresentado na tabela adiante, junto com as respectivas probabilidades.

Tabela 2: Distribuição de probabilidade das possíveis composições das montagens

Montagem	Probabilidade	Lucro por montagem (X)
BB	0,56	15
BL	0,16	10
BC	0,08	-5
LB	0,07	10
LL	0,02	05
LC	0,01	-5
CB	0,07	-5
CL	0,02	-5
CC	0,01	-5

Fonte: Informações no texto

Assim, com os dados da tabela acima, vemos que X pode assumir um dos seguintes valores:

$$X = \begin{cases} 15, & \text{se ocorrer o evento } A_1 = \{BB\} \\ 10, & \text{se ocorrer o evento } A_2 = \{BL, LB\} \\ 05, & \text{se ocorrer o evento } A_3 = \{LL\} \\ -5, & \text{se ocorrer o evento } A_4 = \{BC, LC, CB, CL, CC\} \end{cases}$$

Cada um desses eventos tem uma probabilidade associada, ou seja,

$P(A_1) = 0{,}56$; $P(A_2) = 0{,}23$; $P(A_3) = 0{,}02$; $P(A_1) = 0{,}19$

o que nos permite escrever a distribuição de probabilidade da variável X, que o empresário poderá usar para julgar a viabilidade econômica do projeto que ele pretende realizar.

x	P(X = x)
15	0,56
10	0,23
05	0,02
-5	0,19
Total	1,00

Exercício de fixação:

1) Seja X uma v.a. discreta com função de probabilidade dada por $P(X = k) = ck$, para $k = 1, 2, 3, 4$ e 5. Determine o valor da constante c. Resp.: 1/15.

2) Considere um lote de peças que contém 20% de defeituosas. Extraímos ao acaso três peças com reposição para análise. Seja X a variável aleatória que representa o número de peças defeituosas. Estabeleça a função de probabilidade de X.

Resp.:

x	0	1	2	3
P(X = x)	0,512	0,384	0,096	0,008

3.3 Distribuição de probabilidade de uma variável aleatória contínua

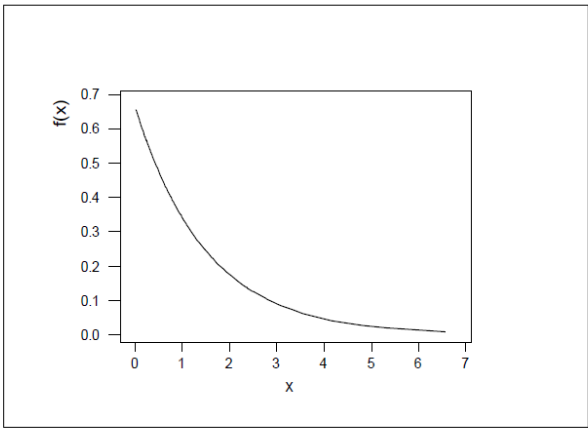
Seja X uma variável aleatória contínua. A distribuição de probabilidade é dada na forma de uma função, chamada de densidade de probabilidade e denotada por f(x).

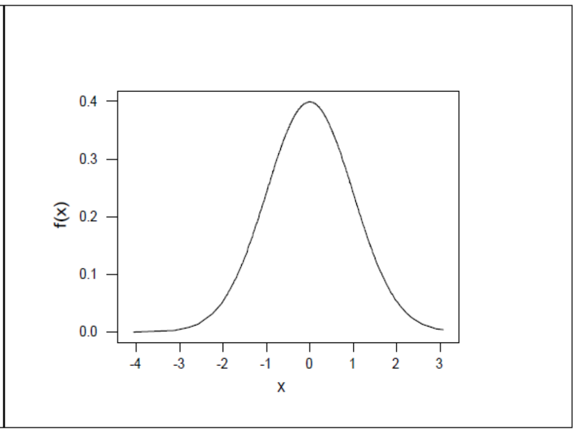
Uma função de densidade de probabilidade (fdp) satisfaz as seguintes condições:

a) $f(x) \geq 0, \forall x \in R$.

b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

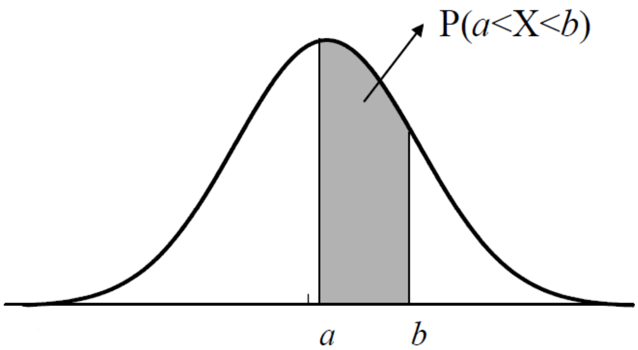
Exemplos de funções de densidade:





A função densidade, por definição, possui área sob a curva limitada pelo eixo x igual a 1 e a probabilidade de X tomar um valor entre a e b é obtida calculando-se a área compreendida entre esses dois valores. Isto é, para qualquer $a < b$ em R.

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$



Observações importantes para uma variável aleatória contínua:

1. Qualquer valor especificado de X tem probabilidade zero, isto é, $P(X = x_i) = 0$, pois:

$$P(X = x_i) = \int_{x_i}^{x_i} f(x)dx = 0$$

2. Assim, as probabilidades abaixo serão todas iguais, se X for uma variável aleatória contínua:

$$P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b)$$

Exemplo 7: Dada a seguinte função:

$$\text{f(X)} = \begin{cases} kx(1-x), & \text{para} 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

ache o valor de k para que f(x) seja uma função densidade de probabilidade.

Resolução

Para ser função densidade temos que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, então $\int_0^1 kx(1-x)dx = 1$

$$\text{k} \left[\int_0^1 xdx - \int_0^1 x^2dx \right] = \text{k} \left[\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 \right] = 1 \Rightarrow \text{k} = 6$$

Exercício de fixação:

1) Dada a função densidade de probabilidade $\text{f(x)} = \begin{cases} 2x, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

Determine:

a) P $\left(X \leq \frac{1}{2}\right)$; b) P $\left(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}\right)$; c) P $\left(X \leq \frac{1}{2} \Big| \frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}\right)$

Resp.: a) $\frac{1}{4}$; b) $\frac{1}{3}$; c) $\frac{5}{12}$

3.4 Função de distribuição acumulada (FDA)

Seja X uma variável aleatória, discreta ou contínua. Define-se a função de distribuição acumulada F da variável aleatória X como

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Se X for uma variável aleatória discreta

$$F(x) = \sum_{j:x_j \leq x} P(X = x_j)$$

em que o somatório é estendido a todos os valores x_j que satisfaçam à condição $x_j \leq$ x.

Se X for uma variável aleatória contínua com função densidade f(x),

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds$$

Podemos utilizar a função distribuição acumulada para calcular probabilidade da seguinte maneira:

$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$$

Exemplo 8: Considere um lote de peças que contém 20% de defeituosas. Extraímos ao acaso três peças com reposição para análise. Seja X a variável aleatória que representa o número de peças defeituosas. A função de probabilidade de X é:

$$P(X = x) = \binom{3}{x}(0,2)^x(0,8)^{3-x}, \quad x = 0, 1, 2, 3$$

e a função de distribuição acumulada de X é dada por:

$$\text{F(X)} = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 0,512, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 0,896, & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ 0,992, & \text{se } 2 \leq x < 3 \\ 1, & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

Exemplo 9: Supõe-se que o diâmetro X de um cabo elétrico é uma variável aleatória contínua, com função densidade f(x) = 6x (1 - x), $0 \leq$ x ≤ 1.

a) Obtenha a função de distribuição acumulada, F(x).

b) Calcule P(X $\leq$ 1/2 | 1/3 < X < 2/3), utilizando F(x).

Solução:

a) $\text{F(X)} = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ \int_0^x 6s(1-s)ds = 3x^2 - 2x^3, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$

b) $P\left(X \leq \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}\right) = \frac{P\left(\frac{1}{3} < X \leq \frac{1}{2}\right)}{P\left(\frac{1}{3} < X < \frac{2}{3}\right)} = \frac{F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(\frac{1}{3}\right)}{F\left(\frac{2}{3}\right) - F\left(\frac{1}{3}\right)} = 0,5$

3.5 Valor esperado (Esperança) de uma variável aleatória

Agora, falaremos sobre **medidas de tendência central** e **medidas de dispersão** (variabilidade) de uma distribuição de probabilidade. Estas medidas são muito importantes para compreender o comportamento de uma variável aleatória. A **média ou esperança** de uma distribuição, como o próprio nome diz, é a média dos valores da variável se observássemos a mesma repetindo o experimento um número muito grande de vezes.

Caso discreto:

Seja uma v. a. discreta X com a seguinte distribuição de probabilidades:

X	x_1	x_2	...	x_n	...
P(X = x)	p_1	p_2	...	p_n	...

O valor esperado de X é dado por:

$$E(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i.P(X = x_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i.p_i$$

Exemplo 10: Voltando ao exemplo 6, produto composto por uma esfera e um cilindro, uma pergunta que logo ocorreria ao empresário é qual o lucro médio por conjunto montado que ele espera conseguir.

Solução: Lucro médio = (0,56)(15) + (0,23)(10) + (0,02)(5) + (0,19)(-5) = 9,85 Isto é, caso sejam verdadeiras as suposições feitas para determinar a distribuição da variável aleatória, o empresário espera ter, em média, lucro de 9,85 unidades por conjunto montado.

Caso contínuo:

Seja X uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade f(x). O valor esperado de X é definido por:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)dx$$

Exemplo 11: Uma certa liga é formada, combinando a mistura fundida de dois metais. A liga resultante contém uma certa porcentagem de chumbo X, que pode ser considerada uma v.a. com função densidade:

$$f(x) = \frac{3}{5}.(10)^{-5}.x(100 - x), \quad 0 \leq x \leq 100$$

Então,

$$E(X) = \int_{0}^{100} x\frac{3}{5}.(10)^{-5}.x(100 - x)dx = 50$$

Isto significa que em média a liga contém 50% de chumbo.

3.5.1 Propriedades da Esperança

1. Dada uma constante a, temos:

$$\mathrm{E(a + X) = a + E(X)} \quad \mathrm{e} \quad \mathrm{E(a.X) = a.E(X)}$$

2. Sejam X_1, X_2, ... , X_n variáveis aleatórias:

$$E(X_1 + X_2 + ... + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_n)$$

3. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes. Então:

$$E(XY) = E(X).E(Y)$$

Exemplo 12: Suponha que L, o lucro líquido obtido na venda da liga do exemplo anterior (por unidade de peso), é a seguinte função da porcentagem de chumbo:

$L = C_1 + C_2.X$

Então o lucro esperado é:

$E(L) = E(C_1 + C_2.X) = C_1 + C_2(50)$

3.6 Variância e Desvio-padrão de uma variável aleatória

De modo geral, o desvio-padrão é mais importante e mais útil medida de variação. O desvio-padrão de um conjunto de valores é uma medida de variação dos valores em relação à média aritmética. A variância é o quadrado do desvio-padrão. Ou podemos dizer que o desvio-padrão é igual a raiz quadrada positiva da variância. Uma dificuldade com a variância é que ela não é expressa nas mesmas unidades dos dados originais, enquanto que o desvio-padrão tem a mesma unidade de medida dos dados originais. Assim se um conjunto de dados tem desvio-padrão de 3,00 dólares e uma variância de 9,00 dólares quadrado, temos que dólar quadrado é um conceito abstrato, logo a variância é difícil de ser compreendida.

3.6.1 Variância de uma variável aleatória

Seja X uma v.a. com esperança E(X). Define-se a variância de X por:

$$\mathrm{V(X) = E[X - E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2},$$

em que, para X discreta, temos,

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2.P(X = x_i)$$

e, para X contínua, temos,

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2.f(x)dx$$

Exemplo 13: Voltando ao exemplo 6, produto composto por uma esfera e um cilindro, calcule a variância.

X	W = X^2	P(X = x)	P(W = x^2)
15	225	0,56	0,56
10	100	0,23	0,23
05	25	0,02	0,02
-5	25	0,19	0,19
Total	375	1,00	1,00

$\mathrm{E(X^2)} = \sum_{i=1}^{3} x_i^2.P(W = x_i^2) = 225 \ . \ 0{,}56 + 100 \ . \ 0{,}23 + 25 \ . \ 0{,}21 = 154{,}25$

$\mathrm{V(X)} = 154{,}25 - (9{,}85)^2 = 57{,}23$

Exemplo 14: Para o exemplo 11, a variância é:

$\mathrm{E(X^2)} = \int_0^{100} x^2 \frac{3}{5}.(10)^{-5}.x(100 - x)dx = 3000$

$\mathrm{V(X)} = 3000 - (50)^2 = 500$

Propriedades da Variância

1. Dada uma constante a, temos:

$$\mathrm{V(X + a) = V(X)} \quad \text{e} \quad \mathrm{V(a.X) = a^2.V(X)}$$

2. Sejam X_1, X_2, ... , X_n, n variáveis aleatórias independentes. Então:

$$\mathrm{V}(X_1 + X_2 + ... + X_n) = \mathrm{V}(X_1) + \mathrm{V}(X_2) + ... + \mathrm{V}(X_n)$$

Exemplo 15: No exemplo 12, a variância de L é:

$\mathrm{V(L)} = C_2^2 \ \mathrm{V(X)} = C_2^2 \ (500)$

3.6.2 Desvio-padrão de uma variável aleatória

$$DP(X) = \sqrt{V(X)}$$

Exercícios de fixação

1) O tempo T, em minutos, necessário para um operário processar certa peça, é uma variável aleatória com a seguinte distribuição de probabilidade:

t	2	3	4	5	6	7
P(T = t)	0,1	0,1	0,3	0,2	0,2	0,1

a) Calcule o tempo médio de processamento. Resp.: E(T) = 4,6

b) Estabeleça a função de distribuição acumulada.

Resp.:

$$F(X) = \begin{cases} 0, & \text{para } t < 2 \\ 0,1, & \text{se } 2 \leq t < 3 \\ 0,2, & \text{se } 3 \leq t < 4 \\ 0,5, & \text{se } 4 \leq t < 5 \\ 0,7, & \text{se } 5 \leq t < 6 \\ 0,9, & \text{se } 6 \leq t < 7 \\ 1, & \text{se } t \geq 7 \end{cases}$$

c) Para cada peça processada, o operário ganha um fixo de 2,00 u.m. (unidade monetária), mas se ele processa a peça em menos de 6 minutos, ganha 0,50 u.m. por cada minuto poupado. Por exemplo, se ele processa a peça em 4 minutos, recebe a quantia adicional de 1,00 u.m. Encontre a distribuição, a média e a variância da v.a. G: quantia em u.m. ganha por peça.

g	4	3,5	3	2,5	2	2
P(G = g)	0,1	0,1	0,3	0,2	0,2	0,1

Resp.:

$$F(X) = \begin{cases} 0, & \text{para } G < 2 \\ 0,3, & \text{se } 2 \leq G < 2,5 \\ 0,5, & \text{se } 2,5 \leq G < 3 \\ 0,8, & \text{se } 3 \leq G < 3,5 \\ 0,9, & \text{se } 3,5 \leq G < 4 \\ 1, & \text{se } G \geq 4 \end{cases}$$

e E(X) = 2,75 VAR(X) = 0,4125

3.7 2ª LISTA DE EXERCÍCIOS

1) Uma urna contém 5 bolas de gude brancas e 3 pretas. Se 2 bolas de gude são extraídas aleatoriamente sem reposição e X denota o numero de bolas brancas obtidas, encontre a distribuição de probabilidades de X.

Resp.:

x	0	1	2
P(X = x)	3/28	15/28	5/14

2) O número de carros vendidos semanalmente num *stand* é uma variável aleatória X com a

seguinte função de probabilidade:

X	1	2	3	4
P(X = x)	c	$\frac{c}{2}$	$\frac{c}{3}$	$\frac{c}{4}$

a) Encontre o valor de c.

b) Determine a função de distribuição de X.

c) Calcule a probabilidade do número de carros vendidos não chegar a 4, sabendo que este valor é superior a 1.

d) Se os custos fixos semanais são de 30 unidades monetárias (u.m.) quando são vendidos 2 ou menos carros e 15 u.m. quando se vende mais de 2 carros e, além disso, por cada carro vendido há um lucro de 35 u.m., determine a função de distribuição da receita líquida semanal.

Resp.: a) 12/25; b)

X	1	2	3	4
P(X = x)	12/25	6/25	4/25	3/25

c) 10/13; d)

r	5	40	90	125
P(R = r)	12/25	6/25	4/25	3/25

3) Os valores abaixo representam a distribuição de probabilidade de D, a procura diária de certo produto. Calcule E(D) e V(D):

D	1	2	3	4	5
P(D = d)	0,1	0,1	0,3	0,3	0,2

a) Calcule E(D) e V(D);

b) Estabeleça a função de distribuição acumulada. Resp.: a) E(D) = 3,4; b) V(D) = 1,44;

c) $F(X) = \begin{cases} 0, & \text{se } d < 1 \\ 0,1, & \text{se } 1 \leq d < 2 \\ 0,2, & \text{se } 2 \leq d < 3 \\ 0,5, & \text{se } 3 \leq d < 4 \\ 0,8, & \text{se } 4 \leq d < 5 \\ 1, & \text{se } d \geq 5 \end{cases}$

4) O número de vendas realizadas por um agente de seguros diariamente é uma v.a. com função de probabilidade:

x	0	1	2	3	4
P(X = x)	w	z	t	z	w

a) Sabendo que em 10% dos dias as vendas são inferiores a um e que em 70% dos dias são superiores a um, determine w, z e t.

b) Determine o número médio de seguros vendidos diariamente.

c) Determine E[2X - 1] e V[2X - 1].

d) Determine a probabilidade de que, quando considerados dois dias, as vendas sejam superiores, em cada um deles, a duas unidades.

e) Se cada seguro é feito por 15000 unidades monetárias, determine a função de probabilidade da receita obtida com a venda dos seguros num dia.

f) Se num dia a receita for inferior a 50000 unidades monetárias, determine a probabilidade de que seja superior a 20000 unidades monetárias.

Resp.: a) w = 0,1; z = 0,2; t = 0,4; b) 2; c) E[2X ? 1] = 3; V[2X ? 1] = 4,8; d) 0,09; e)

R	0	15000	30000	45000	60000
P(R = r)	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

f) 0,667.

5) Considere a variável aleatória discreta com a seguinte função distribuição acumulada:

$$\text{F(X)} = \begin{cases} a, & \text{se } x < 0 \\ 1/6, & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ 1/4, & \text{se } 2 \leq x < 4 \\ b, & \text{se } 4 \leq x < 6 \\ c, & \text{se } x \geq 6 \end{cases}$$

a) Sabendo que P(X = 6) = 1/2, determine, justificando, os valores de a, b e c.

b) Calcule o valor esperado e a variância da variável aleatória $\text{Y} = \dfrac{2 - 3X}{4}$

Resp.: a) a=0, b=1/2, e c= 1; b) -2,625 e 2,797.

6) Uma organização financeira verificou que o lucro unitário (L) obtido numa operação de investimentos é dado pela seguinte expressão: L = 1,1V - 0,9C - 4,5. Sabendo-se que o preço de venda unitário (V) tem uma distribuição com média 50 u.m. e desvio-padrão de 2,0 u.m e que o preço de custo unitário (C) tem uma distribuição de média 45 u.m. e desvio-padrão de 1,5 u.m. Determinar a média e o desvio-padrão do lucro unitário. Assuma independência entre V e C. Resp.: E(L) = 10 e desvio-padrão = 2,58.

7) Um estudo do peso dos cérebros de homens suecos constatou que o peso X é uma variável aleatória, com média 1400 gramas e desvio-padrão de 20 gramas. Determine o número positivo a e o número b tais que Y = a.X + b tenha média 0 e desvio-padrão 1. Resp.: a = 1/20; b = -70.

8) Em uma determinada localidade, a distribuição de renda em mil u.m. é uma variável aleatória X com função densidade.

$$\text{f(x)} = \begin{cases} \frac{1}{10}x + \frac{1}{10}, & \text{para } 0 \leq x \leq 2 \\ -\frac{3}{40}x + \frac{9}{20}, & \text{para } 2 < x \leq 6 \\ 0, & \text{para } x < 0 \text{ ou } x > 6 \end{cases}$$

a) Qual a renda média nesta localidade?

b) Escolhida uma pessoa ao acaso, qual a probabilidade de sua renda ser superior a 3.000,00 u.m?

c) Estabeleça a função de distribuição acumulada. Resp.: a) 2,5; b) 0,3375;

$$\text{c) F(X)} = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{x^2}{20} + \dfrac{x}{10}, & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{-3x^2}{80} + \dfrac{9}{20}x - \dfrac{28}{80}, & \text{se } 2 < x \leq 6 \\ 1, & \text{se } x > 6 \end{cases}$$

9) Suponha que X seja uma variável aleatória com densidade:

$$\text{f(x)} = \begin{cases} k(1 - |x|), & \text{para } -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

a) Determine o valor de k.

b) Determine $P\left(\dfrac{1}{2} < X < \dfrac{2}{3}\right)$.

c) Determine $P\left(\dfrac{1}{2} < X < \dfrac{2}{3} | X > 0\right)$.

d) Determine a função de distribuição acumulada de X. Resp.: a) 1; b) 5/72; c) 5/36;

$$\text{d) F(X)} = \begin{cases} 0, & \text{se } x < -1 \\ x + x^2/2 + 1/2, & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ x - x^2/2 + 1/2, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

10) Seja X uma v.a. contínua, que representa o tempo necessário para a pintura de uma peça de automóvel, em horas, com função densidade de probabilidade dada por:

$$\mathrm{F(X)} = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 9x^2 - 8x^3, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Determine:

a) a probabilidade de gastar menos de meia hora para a pintura;

b) a probabilidade para que o tempo gasto se situe entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$h;

c) o tempo médio gasto na pintura da peça;

d) o desvio-padrão para o tempo gasto na pintura.

Resp.: a) 0,25; b) 0,3828; c) 0,65; d) 0,21.

11) A percentagem de álcool (100 X) em certo composto pode ser considerada uma variável aleatória, onde X tem a seguinte função densidade:

$$20x^3(1-x), \quad 0 < x < 1.$$

a) Estabeleça a função de distribuição acumulada.

b) Calcule P $\left(X \leq \dfrac{2}{3}\right)$.

c) Suponha que o preço de venda desse composto dependa do conteúdo de álcool. Especificadamente, se $\dfrac{1}{3} < X < \dfrac{2}{3}$, o composto é vendido por C_1 dólares/galão; caso contrário, é vendido por C_2 dólares/galão, determine o lucro médio por galão.

Resp.: a) $\mathrm{F(X)} = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 5x^4 - 4x^5, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{se } x > 1 \end{cases}$ b) 0,4609; c) C_1(0,4156) + C_2(0,5844).

12) Seja X uma variável aleatória contínua com função de distribuição acumulada dada por:

$$\mathrm{F(x)} = \begin{cases} ax, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ a, & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ -ax + 3a, & \text{se } 2 \leq x < 3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

a) Determine a constante a;

b) Se X_1, X_2, X_3 forem três observações independentes de X, qual será a probabilidade de, exatamente, um desses três números ser maior que 1,5? Resp.: a) a = 0,5; b)0,375.

13) Considere X uma v.a. contínua com função densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & \text{se } -1 < x < 0 \\ 1-x, & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determine a esperança matemática e a variância.

Resp.: E(x) = 0; Var(x) = $\frac{1}{6}$.

14) A quantidade de cerveja vendida diariamente numa feira (em milhares de litros) é uma variável aleatória com a seguinte função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} kx, & \text{se } 0 \leq x \leq 4 \\ k.(12-2x), & \text{se } 4 < x \leq 6 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

a) Obtenha o valor de k e de E[3x + 2].

b) Considere os acontecimentos abaixo e indique, justificando, se A e B são independentes:

A = "venda diária superior a 4000 litros"

B = "venda diária entre 3000 e 5000 litros"

Resp.: a) k = $\frac{1}{12}$ e E[3x+2] = 11,99; b) Não são independentes.

15) O tempo de vida, em horas, de um dispositivo, é dado pela função densidade.

$$f(t) = \frac{1}{50}.e^{-\left(\frac{t}{50}\right)}, \quad t \geq 0.$$

a) Qual a probabilidade de que um desses dispositivos dure mais de 25 horas e menos de 75 horas?

b) Sabendo-se que tal ocorreu, qual a probabilidade de que tenha durado mais de 50 horas?

Resp.: a) 0,3834; b) 0,3774.

16) Um dispositivo é constituído de 3 elementos independentes que falham numa experiência com probabilidade 0,1. Dê a distribuição de probabilidade da variável aleatória X = número de elementos que falham numa experiência. Resp.: X bin (3;0,1)

17) Na venda de certo produto tem-se duas opções:

i. Cobrar 1 u.m. por peça sem inspeção;

ii. Classificar o lote em produto de 1ª e 2ª mediante a seguinte inspeção: retiramos 5 peças do lote e se não encontrarmos mais do que uma defeituosa o lote será de 1ª qualidade, sendo de 2ª qualidade o lote que não satisfizer tal condição. O preço de venda é de 1,20 u.m. por peça do lote de 1ª e 0,80 u.m. por peça do lote de 2ª.

Sabendo-se que cerca de 10% das peças produzidas são defeituosas, analisar qual das duas opções é a mais vantajosa para o vendedor. Resp.: Opção B.

18) Determine o valor de c para que p(x) = $\begin{cases} c\left(\frac{2}{3}\right)^x, & \text{para } x = 1, 2, 3, ... \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$ seja uma função distribuição de probabilidade. Resp.: $\frac{1}{2}$.

19) Seja X uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ kx, & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 4(1-x), & \text{se } \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ 0, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

a) Determine k para que f(x) seja uma função densidade.

b) $P\left(\frac{1}{3} < X < \frac{3}{4}\right)$.

c) Determine a função de distribuição acumulada.

d) Determine c, tal que $P(X \leq c) = 0{,}5$

Resp.: a) 4; b) $\frac{47}{72}$; c) f(x) = $\begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 2x^2, & \text{se } 0 \le x < \frac{1}{2} \\ -2x^2 + 4x - 1, & \text{se } \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 1, & \text{se } x \ge 1 \end{cases}$ d) c = 0,5.

20) Suponha que a demanda (X) por certa peça, numa loja de autopeças, siga a seguinte distribuição:

$$P(X = k) = \frac{a.2^k}{k!}, \qquad k = 1, 2, 3, 4.$$

a) Encontre o valor de a.

b) Calcule a demanda esperada.

c) Qual é a variância da demanda? Resp.: a) $\frac{1}{6}$; b) E(X) = $\frac{19}{9}$; c) V(X) = $\frac{80}{81}$.

21) Seja X uma variável aleatória com função de densidade de probabilidade dada por:

$$\text{f(x)} = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 4x, & \text{se } 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 4(1 - x), & \text{se } \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0, & \text{se } x \ge 1 \end{cases}$$

a) Determine a função de distribuição acumulada.

b) Determine c, tal que P(X $\le$ c) = 0,5.

Resp.: a) F(X) = $\begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 2x^2, & \text{se } 0 \le x < \frac{1}{2} \\ -2x^2 + 4x - 1, & \text{se } \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 1, & \text{se } x \ge 1 \end{cases}$ b) c = 0,5.

22) A demanda diária de arroz em um supermercado, em centenas de quilos, é uma variável aleatória X com função densidade.

$$\text{f(x)} = \begin{cases} \frac{2}{3}\,x, & \text{se } 0 \le x < 1 \\ -\frac{x}{3} + 1, & \text{se } 1 \le x < 3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

a) Determine a função de distribuição acumulada.

b) Qual a probabilidade, em um dia escolhido ao acaso, a demanda ser superior a 150 kg?

c) Calcule a E(X) e V(X).

Resp.: a) $F(X) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{3}\ x, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ -\dfrac{x^2}{6} + x - \dfrac{1}{2}, & \text{se } 1 \leq x < 3 \\ 1, & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$ b) c = 0,375; c) $E(X) = \dfrac{4}{3}$ e $V(X) = \dfrac{7}{18}$

23) A variável aleatória contínua X tem função densidade:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

a) Se b for um número que satisfaça a $-1 < b < 0$, calcule $P\left(X > b \mid X < \dfrac{b}{2}\right)$

b) Calcule E(Y) e V(Y), em que $Y = 2X - \dfrac{3}{5}$.

Resp.: a) $\dfrac{-7b^3}{b^3+8}$; b) $E(Y) = \dfrac{-21}{10}$ e $V(Y) = \dfrac{3}{20}$.

4 Alguns Modelos Probabilísticos para Variáveis Aleatórias

Existem modelos probabilísticos que ocorrem com frequência na prática. Nas próximas seções, serão definidos alguns modelos, apresentando as condições que devem ser satisfeitas e algumas características, tais como, esperança, variância e como calcular probabilidade.

4.1 Variáveis Aleatórias Discretas

4.1.1 Distribuição de Bernoulli

Muitos experimentos são tais que os resultados possíveis apresentam ou não uma determinada característica.

Exemplos:

1. Uma peça é escolhida, ao acaso, de um lote contendo 500 peças: esta peça é defeituosa ou não.

2. Uma pessoa é escolhida, ao acaso, dentre 1000 pessoas, é ou não do sexo masculino.

3. Uma pessoa é escolhida, ao acaso, entre os moradores de uma cidade, e pergunta-se se ela diz SIM ou NÃO a um projeto governamental.

Em um experimento aleatório com apenas dois resultados possíveis podemos associar o valor 1, se sucesso ocorre e o valor 0, se fracasso ocorre. Um experimento deste tipo é chamado de ensaio de Bernoulli. Suponha que um sucesso ocorra com probabilidade *p*.

Seja X uma variável aleatória definida para este experimento. Então,

X	1	0
P(X = x)	p	1 - p = q

Função de distribuição de X: $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ q, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

Esperança de X: $E(X) = 1.p + 0.(1 - p) = p$

Variância de X: $V(X) = p - p^2 = p(1 - p)$, onde $E(X^2) = 1^2.p + 0^2.(1 - p) = p$

4.1.2 Distribuição Binominal

Consideremos n repetições independentes de ensaios de Bernoulli ($n \geq 2$). O modelo binomial fundamenta-se nas seguintes hipóteses:

a) n ensaios independentes e idênticos são realizados;

b) A probabilidade de "sucesso" é igual a "p" em cada ensaio e q é a probabilidade de fracasso sendo p + q = 1.

Seja a variável aleatória Y o número de sucessos nos n ensaios. Nestas condições dizemos que Y tem distribuição binomial com parâmetros n e p, onde os valores possíveis de y são 0, 1, 2, ... ,n:

n = número de repetições do experimento e

p = probabilidade de sucesso em cada repetição

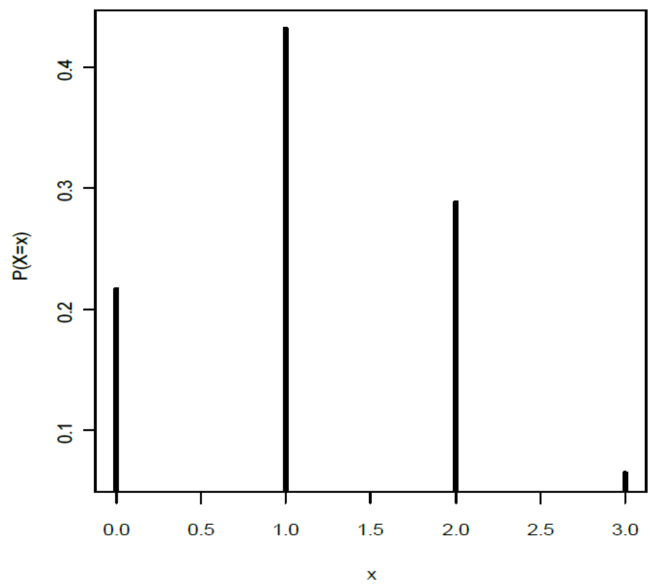
Notação: Y $\sim$ B(n,p)

$$P(Y=k) = \begin{cases} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k(1-p)^{n-k}, & \text{se } k = 0, 1, 2, ..., n \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Por meio do binômio de Newton, verifica-se que

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k(1-p)^{n-k} = [p + (1-p)]^n = 1$$

GRÁFICO A - GRÁFICO DA FUNÇÃO DE PROBABILIDADE DA DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL COM PARÂMETROS n = 3 e p = 0,4.



Exemplo 1: Uma usina hidroelétrica tem 5 geradores que funcionam independentemente, cada um com probabilidade 0,98 de estar em operação. Qual a probabilidade de que exatamente dois estejam em funcionamento em determinado instante?

Y = número de geradores em funcionamento

p = 0,98 = probabilidade de um gerador estar em funcionamento (a probabilidade de sucesso)

Entre os 5 estabelecimentos, ou seja, n = 5, qual a probabilidade de 2 terem tratores:

$P(Y = 2) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} (0.98)^2\ (1 - 0{,}98)^{5-2} = 10.(0{,}98)^2.(0{,}02)^3 = 0{,}000077$

- **Esperança e Variância da distribuição Binomial**

  Se Y tem distribuição binomial de parâmetros n e p, então:

$$\begin{cases} E(Y) = \sum_{k=0}^{n} k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k} = n.p, & \text{(média)} \\ Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = n.p.q, & \text{(variância)} \end{cases}$$

Em que $E(Y^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k \ (1 - p)^{n-k}$

Demonstração:

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{n} k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k \ (1 - p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k \ (1 - p)^{n-k}$$

Fazendo s = k - 1, tem-se:

$$E(Y) = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{n!}{(s)!(n-s-1)!} p^{s+1} \ (1 - p)^{n-s-1} = n.p \sum_{s=0}^{n-1} \begin{pmatrix} n-1 \\ s \end{pmatrix} p^s \ (1 - p)^{n-s-1} = n.p$$

Com variância: $V(X) = n.p.q \Rightarrow DP(X) = \sqrt{npq}$

Exemplo 2: Com os dados do exemplo anterior, calcular o número esperado de geradores em funcionamento, a variância e o desvio-padrão:

$E(X) = np = 5(0{,}98) = 4{,}9$

$Var(X) = npq = 5\ (0{,}98)\ (0{,}02) = 0{,}098$

$DP(X) = \sqrt{npq} = \sqrt{0{,}098} = 0{,}3130$

Exercício de fixação:

1) Das variáveis abaixo descritas, assinale quais são binomiais, e para estas dê os respectivos campos de definição e distribuição de probabilidades. Quando julgar que a variável não é binomial, aponte as razões de sua conclusão.

a) De uma urna com 10 bolas brancas e 20 pretas, vamos extrair, com reposição, cinco bolas.Seja X é o número de bolas brancas nas 5 extrações. b) Refaça o problema anterior, mas desta vez as n extrações são sem reposição. c) De 5 urnas com bolas pretas e brancas, vamos extrair de cada uma delas uma bola. Suponha que X é o número de bolas brancas obtidas no final. d) Em uma indústria existem 100 máquinas que fabricam determinada peça. Cada peça é classificada como sendo boa ou defeituosa. Escolhemos ao acaso um instante de tempo, e verificamos uma peça de cada uma das máquinas. Suponha que X seja o número de peças defeituosas.

Resp.: a) Binomial; b) Não é Binomial; c) Não é Binomial; d) Não é Binomial.

2) Um fabricante de peças de automóveis garante que uma caixa de suas peças conterá, no máximo, 2 defeituosas. Se a caixa contém 18 peças, e a experiência tem demonstrado que esse processo de fabricação produz 5% das peças defeituosas, qual a probabilidade de que uma caixa satisfaça a garantia? Resp.: 0,9419.

4.1.3 Distribuição de Poisson

Em muitos casos, conhece-se o número de sucessos, porém se torna difícil e, às vezes, sem sentido, determinar o número de fracassos ou o número total de provas. Por exemplo: automóveis que passam numa esquina. Pode-se num determinado intervalo de tempo anotar o número de carros que passaram, porém, o número de carros que deixaram de passar pela esquina não poderá ser determinado. Veremos que a distribuição de Poisson se aplica nestes casos.

A distribuição de Poisson é largamente usada quando se deseja contar o número de eventos de um certo tipo, que ocorrem em um intervalo de tempo, superfície, ou volume.

Exemplos:

1. número de falhas de um computador em um dia de operação;

2. número de defeitos num pneu;

3. número de buracos por quilometro em uma rodovia;

4. número de clientes que chegam a uma determinada agência bancária durante certo intervalo de tempo.

Seja a variável aleatória X o número de eventos de um certo tipo, que ocorrem em um intervalo de tempo, ou superfície, ou volume. Suponha que estes eventos ocorrem em instantes aleatórios de tempo ou de espaço e que as hipóteses abaixo sejam válidas:

1. o número de ocorrências de um evento em um intervalo de tempo, ou superfície, ou volume é independente do número de ocorrências do evento em qualquer outro intervalo disjunto.

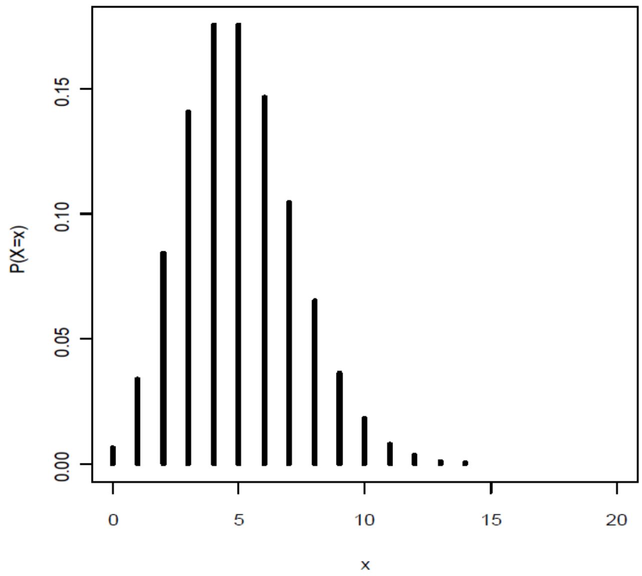
2. a probabilidade de duas ou mais ocorrências simultâneas é praticamente zero.

3. o número médio de ocorrências por unidade de tempo, ou superfície, ou volume, α, é constante ao longo do tempo, ou superfície, ou volume.

Nestas condições dizemos que X tem distribuição Poisson com parâmetro $\lambda = \alpha$t, α é o número médio de eventos por unidade de intervalo de tempo, ou superfície, ou volume.

Notação: X $\sim$ Poisson(λ) $\Rightarrow$ P(X = x) = $\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$, x = 0, 1, 2, ..., n.

GRÁFICO B - GRÁFICO DA FUNÇÃO DE PROBABILIDADE DA DISTRIBUIÇÃO POISSON COM PARÂMETROS $\lambda = 5$



$$\text{Se X tem distribuição Poisson com parâmetro } \lambda \Rightarrow \begin{cases} \text{E(Y)} = \lambda, & \text{(média)} \\ \text{Var(Y)} = \lambda, & \text{(variância)} \end{cases}$$

Demonstração:

1. Sabe-se que $E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} xP(X = x) = \sum_{x=0}^{\infty} x \, \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} x \, \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x(x-1)!} = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{(x-1)!}$

Fazendo x −1 = y, tem-se:

$E(X) = \sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{y+1}}{y!} = \lambda.e^{-\lambda}\sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!}$

Utilizando-se a fórmula de Maclaurin (caso particular da fórmula de Taylor),

$\sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!} = e^{\lambda}$,

obtém-se, $E(X) = \lambda$

2. De acordo com a definição de variância, tem-se:

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$, onde já vimos que, $[E(X)]^2 = \lambda^2$, e,

$E(X^2) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \, \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} x^2 \, \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x(x-1)!} = \sum_{x=1}^{\infty} x\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{(x-1)!}$

fazendo y = x - 1, tem-se:

$E(X^2) = \sum_{y=0}^{\infty} (y + 1) \, \frac{e^{-\lambda}\lambda^{y+1}}{y!} = \lambda\sum_{y=0}^{\infty} y \, \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!} + \lambda\sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!} = \lambda^2 + \lambda$

Logo,

$V(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2$, assim, $V(X) = \lambda$.

Se a variância é $\lambda \Rightarrow DP(X) = \sqrt{\lambda}$

Exemplo 3: Em média há duas chamadas por hora num certo telefone. Calcular a probabilidade de se receber no máximo 3 chamadas em duas horas e a probabilidade de nenhuma chamada em 90 minutos.

X: o número de chamadas telefônicas em duas horas

Então,

$\alpha = 2$ (número médio chamadas por hora)

t = 2 horas

$\lambda = \alpha t = 4$ (número médio chamadas em duas horas)

$P(X \leq 3) = \sum_{x=0}^{3} P(X = x) = \sum_{x=0}^{3} \dfrac{e^{-4}4^x}{x!} = 0{,}4331.$

Y: número de chamadas telefônicas 90 minutos

Então,

t = 90 minutos

$\alpha = \dfrac{2}{60}$ (número médio de chamadas por minuto)

$\lambda = \alpha t = \dfrac{2}{60} \,.\, 90 = 3$ (número médio chamadas em 90 minutos)

$P(Y = 0) = \dfrac{e^{-3}(3)^0}{0!} = 0{,}0498.$

Exercícios de fixação:

1) O número de petroleiros que chegam a uma refinaria em cada dia ocorre segundo uma distribuição de Poisson, com $\lambda = 2$. As atuais instalações podem atender, no máximo, a 3 petroleiros por dia. Se mais de 3 aportarem num dia, o excesso é enviado a outro porto.

a) Em um dia, qual a probabilidade de se enviar petroleiros para outro porto?

b) De quanto deverão ser aumentadas as instalações para permitir atender a todos os navios que chegarem pelo menos em 95% dos dias?

c) Qual o número médio de petroleiros que chegam por dia? Resp.: a) 0,1431; b) 2; c) 2.

4.2 3ª LISTA DE EXERCÍCIOS

1) Se $X \sim B(n,p)$, sabendo-se que $E(X) = 12$ e $\sigma^2 = 3$, determinar:

a) n; b) p; c) $P(X < 12)$; d) $P(X \geq 14)$; e) E(Z) e V(Z), onde $Z = \frac{X-12}{\sqrt{3}}$;

f) $P\left(Y \geq \frac{14}{16}\right)$, onde $Y = \frac{X}{n}$; g) $P\left(Y \geq \frac{12}{16}\right)$, onde $Y = \frac{X}{n}$.

Resp.: a) n = 16 e p=0,75; c) 0,3699; d) 0,1971; e) E(Z) = 0 e V(Z) = 1; f) 0,1971; g) 0,6301.

2) Uma fileira de luzes de Natal contém 20 lâmpadas ligadas em série, isto é, se uma delas falha, toda a fileira falhará. Cada lâmpada tem 0,02 de probabilidade de falhar durante um período de 3 anos. As lâmpadas falham independente umas das outras. Qual é a probabilidade de toda a fileira de lâmpadas permanecer sem falhar durante três anos? Resp.: 0,6676.

3) O número de partículas radioativas emitidas por uma fonte segue distribuição de Poisson com $\lambda = 0{,}5$ partículas por segundo.

a) Qual a probabilidade de a fonte emitir uma partícula em um segundo;

b) Qual a probabilidade de a fonte emitir mais de uma partícula em um segundo;

c) Qual a probabilidade de a fonte emitir uma partícula em três segundos;

d) Qual a probabilidade de a fonte emitir no máximo duas partículas em 3 segundos;

e) Uma chapa fotográfica é sensibilizada ao ser atingida por 3 ou mais partículas. Se 5 chapas são colocadas, uma após outra, durante 2 segundos cada uma em frente à fonte, qual a probabilidade de exatamente uma delas ser sensibilizada?

Resp.: a) 0,3033; b) 0,0902; c) 0,3347; d) 0,8088; e) 0,2873.

4) Seja X o número de peças defeituosas saídas de certa linha de produção. Sabe-se que, para determinado lote, X é binomial com média 240 e variância 48. Determine a distribuição de probabilidade de X e a probabilidade do lote não conter nenhuma peça defeituosa.

Resp.: n = 300; p = 0,8; $P(X = 0) = \binom{300}{0} \left(\frac{4}{5}\right)^0 \left(\frac{1}{5}\right)^{300}$

5) Um industrial fabrica peças, das quais $\frac{1}{5}$ são defeituosas. Dois compradores, A e B, classificaram as peças adquiridas em categorias I e II, pagando 1,20 u.m. e 0,80 u.m. respectivamente do seguinte modo:

Comprador A: retira uma amostra de 5 peças; se encontrar mais que uma defeituosa, classifica como II.

Comprador B: retira uma amostra de 10 peças; se encontrar mais que duas defeituosa, classifica como II.

Em média, qual comprador oferece maior lucro? Resp.: Comprador A.

6) Numa via de mão única que termina numa ponte, quer se estudar o tráfego. Encontra-se que esse volume é de 120 veículos/hora, em média. Assume-se que a chegada de veículos constitui um processo de Poisson. Ache a probabilidade de que:

a) num período de um minuto mais de três veículos cheguem ao pedágio;

b) em 3 minutos cheguem mais do que 1 veículo. Resp.: a) 0,1429; b) 0,9826.

7) Numa linha adutora de água, de 60 km de extensão, o número de vazamento no período de um mês é em média 4. Qual é a probabilidade de ocorrer, durante o mês, pelo menos um vazamento num setor de 3 km de extensão? Resp.: 0,1813.

8) Um fabricante afirma que apenas 5% de todas as válvulas que produz tem duração inferior a 20 h. Uma indústria compra semanalmente um grande lote de válvulas desse fabricante, mas sob a seguinte condição: ela aceita o lote se, em 10 válvulas escolhidas ao acaso, no máximo uma tiver duração inferior a 20 horas; caso contrário o lote é rejeitado.

a) Se o fabricante de fato tem razão, qual a probabilidade de um lote ser rejeitado? b) Suponha agora que o fabricante esteja mentindo, isto é, na verdade a proporção de válvulas com duração inferior a 20 h é de 10%. Qual a probabilidade do lote ser aceito, segundo o critério acima? Resp.: a) 0,0861; b) 1 - 0,2639;

9) Certa fábrica produz fusíveis elétricos, dos quais 15% são defeituosos. Achar a probabilidade de que, numa amostra de 10 fusíveis selecionados ao acaso, tenhamos:

a) nenhum defeituoso.

b) pelo menos um defeituoso.

c) no máximo um defeituoso. Resp.: a) 0,1969; b) 0,8031; c) 0,5443.

10) Um fabricante de peças de automóveis garante que uma caixa de suas peças conterá no

máximo duas defeituosas. Se a caixa contém 18 peças, e a experiência tem demonstrado que este processo de fabricação produz 5% das peças defeituosas, qual a probabilidade de que uma caixa satisfaça a garantia? Resp.: 0,9419.

11) Certa companhia aérea chegou à conclusão de que 4% das pessoas que compram passagens não comparecem ao embarque. De modo a obter maior aproveitamento nas vendas, passou a adotar o critério de vender 77 passagens para um vôo com 75 lugares. Determine a probabilidade de que todas as pessoas que compareçam encontrarão lugar no citado vôo. Resp.: 0,8185.

12) Em um certo tipo de fabricação de fita magnética, ocorrem cortes a uma taxa de 1 por 2.000 cm. Qual a probabilidade de que um rolo com 2.000 cm tenha:

a) nenhum corte?

b) no máximo dois cortes?

c) pelo menos dois cortes? Resp.: a) 0,3679; b) 0,9197; c) 0,2642.

13) Numa determinada estrada ocorrem em média 2 acidentes para cada 100km. Qual a probabilidade de que:

a) em 250 km ocorram pelo menos 3 acidentes?

b) em 300 km ocorram 5 acidentes? Resp.: a) 0,8753; b) 0,1606.

14) Uma fonte mineral contém um número médio de quatro bactérias por cm^3 de água. Dez tubos de ensaio, de 1 cm^3, são enchidos com este líquido. Supondo que a distribuição de Poisson é aplicável, encontre a probabilidade:

a) de que todos os 10 tubos de ensaio apresentem bactérias, isto é, contenham ao menos uma bactéria cada;

b) de que exatamente oito tubos de ensaio apresentem bactérias. Resp.: a) (0,9816); b) 0,013.

15) Uma fábrica produz tecidos com média de 2,2 defeitos por jarda quadrada. Determine as seguintes probabilidades:

a) não mais de 4 defeitos numa jarda quadrada;

b) nenhum defeito em duas jardas quadradas;

c) duas jardas quadradas cada uma com dois defeitos. Resp.: a) 0,9275; b) 0,0123; c) 0,0719.

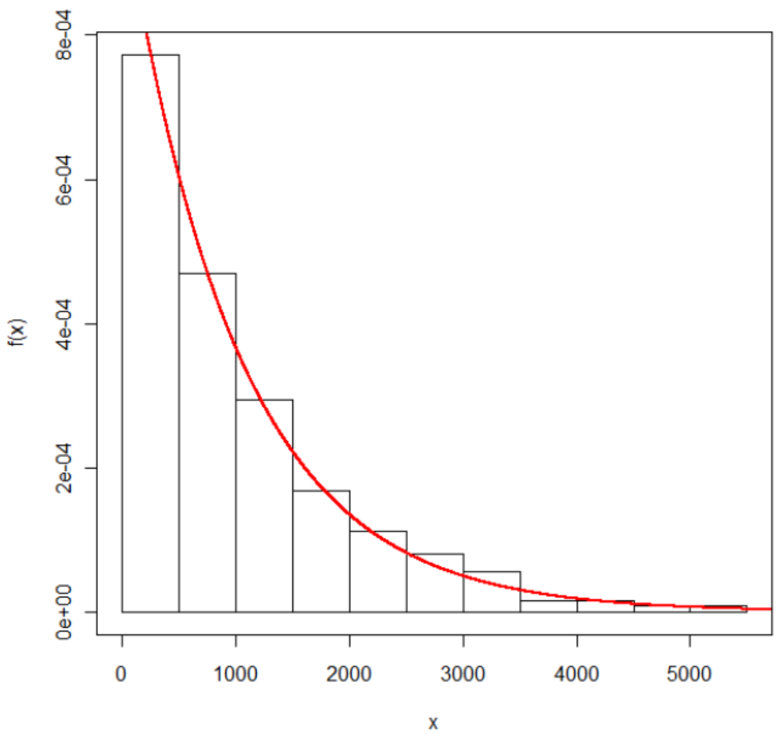
4.3 Variáveis Aleatórias Contínuas

4.3.1 Distribuição Exponencial

Esta distribuição é bastante utilizada na teoria da confiabilidade para modelar os tempos de espera entre ocorrências de eventos em um Processo de Poisson. Em geral este modelo probabilístico é também utilizado para modelar tempo de espera em uma fila, tempo de sobrevivência de um grupo de pacientes após o início de um tratamento e tempo de vida de material eletrônico.

O histograma a seguir foi construído a partir de dados provenientes de uma distribuição exponencial. A curva desenhada sobre o histograma representa a função densidade de uma distribuição exponencial. Vemos que este gráfico é do tipo assimétrico positivo.

GRÀFICO C - GRÁFICO DA FUNÇÃO DENSIDADE DA DISTRIBUIÇÃO EXPONECIAL COM PARÂMETRO $\alpha = 1000$



Uma variável aleatória contínua X, que assume valores não-negativos, terá uma distribuição exponencial com parâmetro $\alpha > 0$, se sua fdp for dada por:

$$\text{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha}.e^{-\frac{1}{\alpha}x}, & \text{para } x \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Notação: X $\sim$ exp(α)

Propriedades:

1. A função de distribuição é dada por:

   $$\text{F(x)} = \text{P(X} \leq \text{x)} = \int_0^x \frac{1}{\alpha}.e^{-\frac{1}{\alpha}x}ds = \begin{cases} 0, & \text{para } x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{x}{\alpha}}, & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$$

   Portanto, P(X > x) $= e^{-\frac{1}{\alpha}x}$

2. E(X) $= \int_0^\infty x\frac{1}{\alpha}.e^{-\frac{1}{\alpha}x}dx = \alpha$

3. V(X) = E(X²) – E²(X) = $2\alpha^2$ - α^2 = α^2 em que E(X²) $= \int_0^\infty x^2\frac{1}{\alpha}.e^{-\frac{1}{\alpha}x}dx = \alpha^2$.

4. P(X > s + t|X > s) $= \dfrac{P(X > s + t \text{ e } X > s)}{P(X > s)} = \dfrac{P(X > s + t)}{P(X > s)} = \dfrac{e^{-\frac{1}{\alpha}(s+t)}}{e^{-\frac{1}{\alpha}s}} = e^{-\frac{1}{\alpha}t}$ para quaisquer s,t > 0.

Este último resultado mostra que a distribuição exponencial apresenta a propriedade de "não possuir memória". Isto significa que a probabilidade de "sobreviver" mais t unidades de tempo é a mesma, quer já se tenham passado s unidades de tempo, ou 0 unidades. Ou seja, não há envelhecimento. Esta hipótese é frequentemente razoável para a vida de materiais eletrônicos.

Exemplo 5: Uma lâmpada tem a duração de acordo com a densidade exponencial com $\alpha =$ 1000.

Determinar:

a) a probabilidade de que essa lâmpada queime antes de 1.000 horas;

b) a probabilidade de que ela queime depois de sua duração média;

c) a variância da distribuição do tempo de duração dessa lâmpada.

Solução: Seja T o tempo de duração da lâmpada:

a) P(T < 1.000) = $\int_0^{1000} \frac{1}{1000}.e^{-\frac{1}{1000}t}dt$ = 1 - 0,3679 = 0,6321

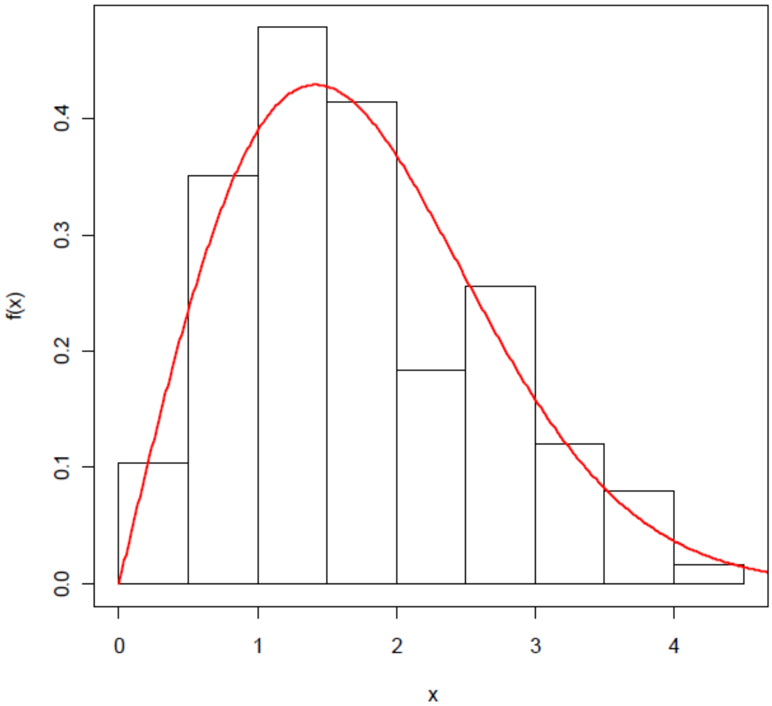
b) P(T > 1000) = 0,3679

c) V(T) = $(1000)^2$

4.3.2 Distribuição Weibull

A distribuição Weibull tem uma aplicação importante em Teoria de Confiabilidade. O histograma a seguir foi construído a partir de dados provenientes de uma distribuição Weibull. A curva desenhada sobre o histograma representa a função densidade desta distribuição, que também é do tipo assimétrico positivo.

GRÀFICO D - GRÁFICO DA FUNÇÃO DENSIDADE DA DISTRIBUIÇÃO WEIBULL COM PARÂMETROS $\alpha = 2$ E $\gamma = 2$



Uma variável aleatória contínua X, que assume valores não-negativos, terá uma distribuição Weibull com parâmetros $\gamma > 0$ e $\alpha > 0$, se sua fdp for dada por:

$$\text{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{\gamma}{\alpha^{\gamma}}.x^{y-1} exp\left\{-\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)^{\gamma}\right\}, & \text{para } x \geq 0 \\ 0 \quad , & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Propriedades:

1. $\text{E(X)} = \alpha\Gamma\left(\dfrac{1}{\gamma} + 1\right)$

2. $\text{V(X)} = \alpha^2 \left\{\Gamma\left(\dfrac{2}{\gamma} + 1\right) - \left[\Gamma\left(\dfrac{1}{\gamma} + 1\right)\right]^2\right\}$

3. $\text{F(x)} = \begin{cases} 0 \quad , & \text{para } x \leq 0 \\ 1 - exp\left\{-\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)^{\gamma}\right\}, & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$

4. Se $\gamma = 1$ tem-se $\text{f(x)} = \dfrac{1}{\alpha}.e^{-\frac{x}{\alpha}}$. Portanto, a distribuição exponencial é um caso particular da distribuição Weibull.

Obs: O símbolo Γ denota a função gama, que é dada por:

$$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} x^{k-1}e^{-x}dx, \quad \text{definida para k} > 0$$

Pode-se mostrar que se k for um número inteiro positivo, obtém-se que Γ(k) = (k - 1)!

Exemplo 7: O tempo de vida, em horas, de um componente eletrônico segue a distribuição Weibull com α = 0,4 e γ = 0,5.

a) Qual é a vida média?

b) Calcule a variância do tempo de vida desse componente.

c) Qual é a probabilidade do tempo de vida desse componente ultrapassar 30 horas?

Solução: T: tempo de vida do componente eletrônico em horas:

a) E(T) = (0,4)Γ(3) = 0,8

b) V(T) = $(0{,}4)^2$ { Γ(5) - $[\Gamma(3)]^2$ } = 3,2

c) $P(T > 30) = exp\left\{-\left(\frac{30}{0,4}\right)^{0,5}\right\} = 0{,}000173$

4.3.3 Distribuição Normal (ou Gaussiana)

Existem várias distribuições teóricas que podem ser usadas para representar fenômenos reais. Dentre estas, uma das mais importantes é a distribuição normal. A seguir faremos um breve estudo desta distribuição.

Importância da distribuição normal:

1. Representa com boa aproximação as distribuições de frequências observadas de muitos fenômenos naturais e físicos;

2. Distribuições importantes, como por exemplo, a binomial e Poisson, podem ser aproximadas pela normal, simplificando o cálculo de probabilidades;

3. A distribuição amostral das médias (e proporções) em grandes amostras se aproxima da distribuição normal, o que nos permite fazer estimações e testes estatísticos.

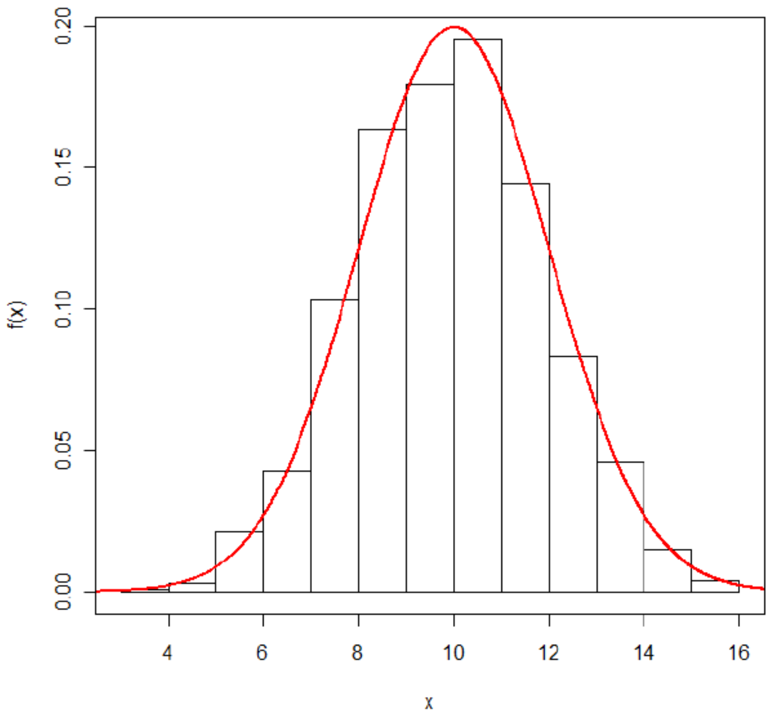
Uma variável aleatória X, que assume valores em R, tem distribuição normal com parâmetros μ e σ^2 se sua função de densidade probabilidade é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right], \quad -\infty < x < \infty, \;\; -\infty < \mu < \infty \text{ e } \sigma > 0$$

Notação X $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

O histograma a seguir foi construído a partir de dados provenientes de uma distribuição normal. A curva desenhada sobre o histograma representa a função densidade de uma distribuição normal. Vemos que este gráfico é do tipo simétrico.

GRÀFICO E - GRÁFICO DA FUNÇÃO DENSIDADE DA DISTRIBUIÇÃO NORMAL COM PARÂMETROS $\mu = 10$ e $\gamma^2 = 4$



É importante ressaltar a diferença que existe entre o histograma e a curva: o histograma é uma representação da distribuição dos elementos (dados) de uma amostra extraída de uma população, enquanto a curva representa a distribuição teórica que melhor se aproxima do histograma observado.

Propriedades:

1. E(X) = μ e V(X) = σ^2 ($\sigma \rightarrow$ desvio-padrão);

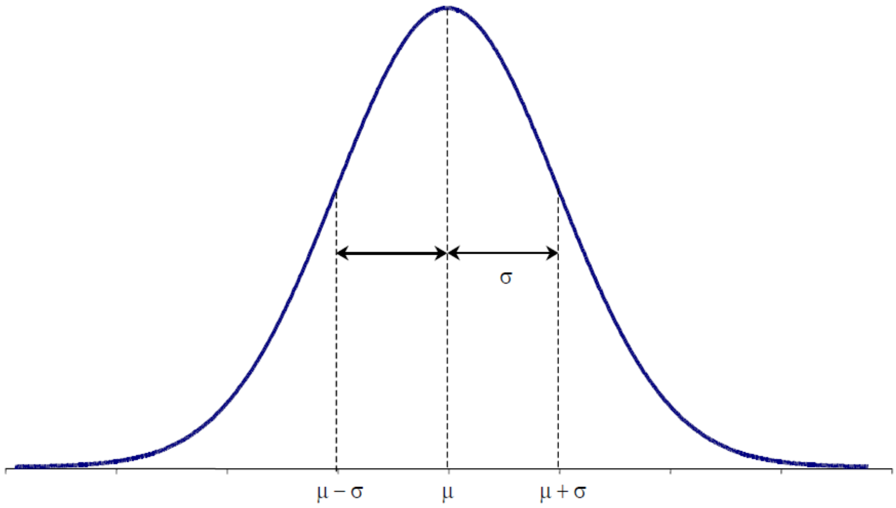
2. A curva normal é simétrica com relação a sua média μ, ou seja:

   - f(μ + x) = f(μ - x);
   - P(μ - x $\leq$ X $\leq$ μ) = P(μ $\leq$ X $\leq$ x + μ);
   - P(X > μ) = P(X < μ) = 0,5.

3. A moda e a mediana de X são iguais a μ;

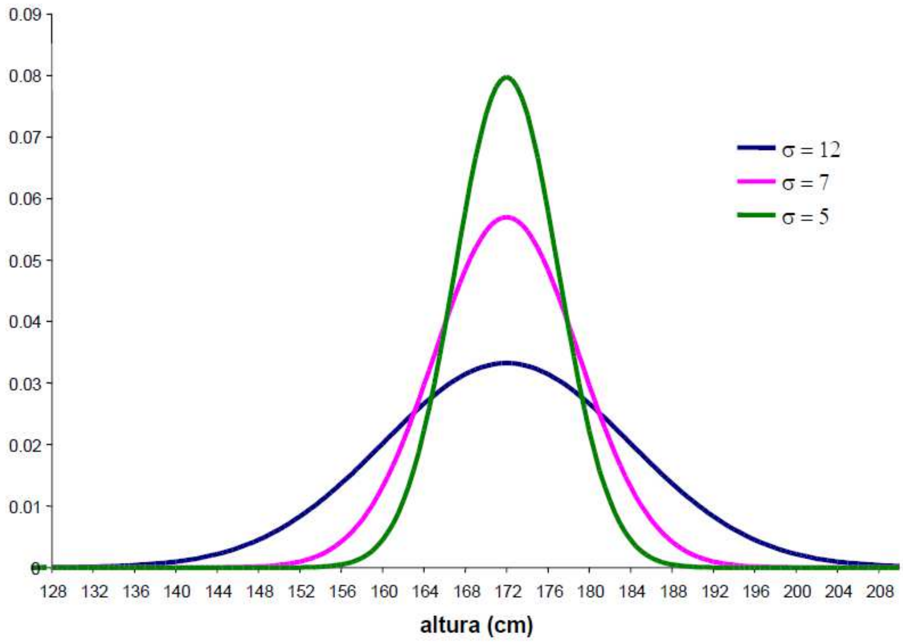
4. A distância entre μ e os pontos de inflexão da curva é igual a σ;

GRÀFICO E - DISTRIBUIÇÃO NORMAL N(μ, σ^2)

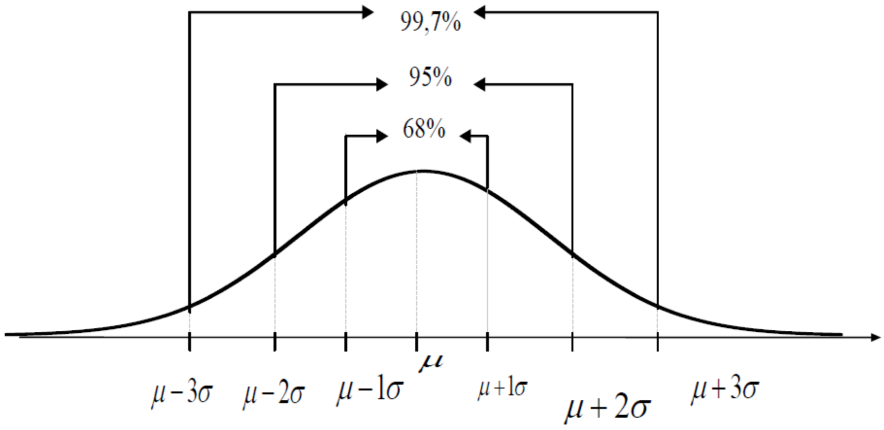


Exemplos de curvas da distribuição normal para diferentes valores dos parâmetros:

GRÀFICO G - MESMA MÉDIA, DESVIOS PADRÃO DISTINTOS (μ = 172cm)



Uma aplicação da distribuição normal segue na figura abaixo:



Essa figura mostra como a média e o desvio-padrão estão relacionados com a proporção dos dados que se enquadram em determinados limites. Assim, temos que:

- Cerca de 68% dos valores estão a $\pm$ 1 desvio-padrão a contar da média;
- Cerca de 95% dos valores estão a $\pm$ 2 desvios-padrão a contar da média;
- Cerca de 99,7% dos valores estão a $\pm$ 3 desvios-padrão a contar da média.

Como obter essas proporções será visto a seguir.

Cálculo das probabilidades de uma distribuição normal:

A probabilidade de uma variável aleatória normal X assumir valores entre dois números a e b (a < b) é igual à área sob a curva no intervalo [a,b], isto é,

$$P(a < X < b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]dx$$

Esta probabilidade pode ser obtida através de uma transformação na variável aleatória X como veremos a seguir.

A distribuição normal possui um importante propriedade que permite que qualquer variável aleatória com esta distribuição possa ser transformada em uma outra variável com distribuição normal com parâmetros $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$.

Teorema:

Se X $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ então a variável transformada Z = $\dfrac{(X-\mu)}{\sigma}$ tem distribuição N(0,1), isto é,

f(z) = $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$, $\quad$ -∞ < z < ∞.

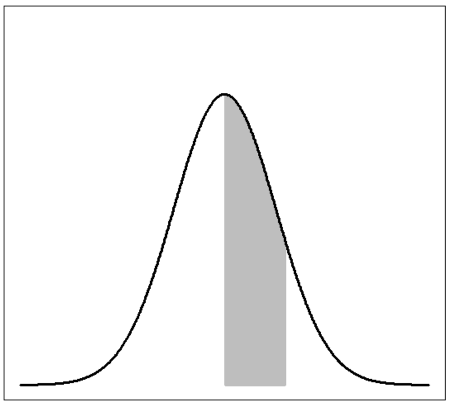
Portanto, P(X $\leq$ a) = P $\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma} \leq \dfrac{a-\mu}{\sigma}\right)$ = P(Z $\leq$ z) com Z = $\dfrac{(X-\mu)}{\sigma}$

As probabilidades para a distribuição normal (0,1) também chamada de Normal Padrão ou Normal Padronizada estão tabeladas. Pelo exposto acima vemos que através desta tabela podemos obter as probabilidades para qualquer outra distribuição normal.

Há vários tipos de tabelas que nos fornece as probabilidades para a distribuição normal padrão. Faremos uso do tipo que está em anexo. Essa tabela fornece a área sob a curva no intervalo de zero até o ponto z, isto é, P(0 $\leq$ Z $\leq$ z). Os elementos dessa tabela são:

- Na primeira coluna encontra-se a parte inteira e a primeira casa decimal do valor de z;
- A primeira linha refere-se à segunda casa decimal do valor de z;
- As probabilidades são encontradas no cruzamento das linhas com as colunas.

Graficamente, a probabilidade fornecida pela tabela é a seguinte:



A área sombreada no gráfico corresponde à seguinte probabilidade:

$$P(0 < Z < z) = \int_0^z f(z)dz$$

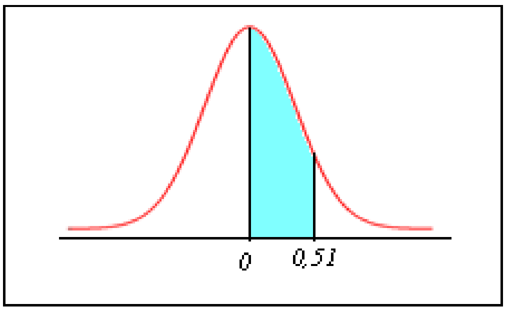
Como a curva normal padrão é uma função simétrica em relação à 0:

- f(z) = f(-z);
- P(-z $\leq$ Z $\leq$ 0) = P(0 $\leq$ Z $\leq$ z);
- P(Z > 0) = P(Z < 0) = 0,5.

Exemplos de uso da tabela da distribuição normal padrão:

- Calcule P(0 $\leq$ Z $\leq$ 0,51)

  A área que representa esta probabilidade é:

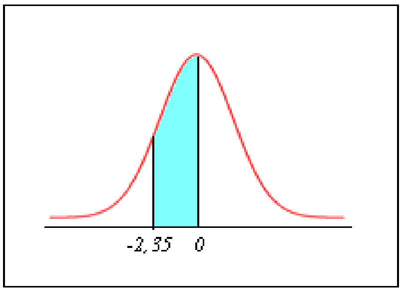


A seguir, como obter essa probabilidade na tabela da distribuição normal padrão:

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000000	0.0039894	0.0079783	0.0119665	0.0159534	0.0199388	0.0239222	0.0279032	0.0318814	0.0358564
0.1	0.0398278	0.0437953	0.0477584	0.0517168	0.0556700	0.0596177	0.0635595	0.0674949	0.0714237	0.0753454
0.2	0.0792597	0.0831662	0.0870644	0.0909541	0.0948349	0.0987063	0.1025681	0.1064199	0.1102612	0.1140919
0.3	0.1179114	0.1217195	0.1255158	0.1293000	0.1330717	0.1368307	0.1405764	0.1443088	0.1480273	0.1517317
0.4	0.1554217	0.1590970	0.1627573	0.1664022	0.1700314	0.1736448	0.1772419	0.1808225	0.1843863	0.1879331
0.5	0.1914625	**0.1949743**	0.1984682	0.2019440	0.2054015	0.2088403	0.2122603	0.2156612	0.2190427	0.2224047
0.6	0.2257469	0.2290691	0.2323711	0.2356527	0.2389137	0.2421539	0.2453731	0.2485711	0.2517478	0.2549029

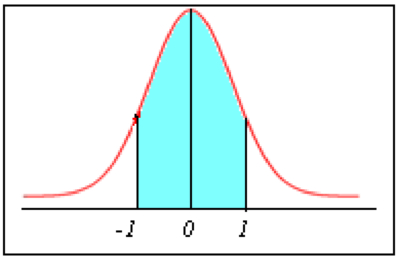
- Calcule P(-2,35 $\leq$ Z $\leq$ 0)

  A área que representa esta probabilidade é:

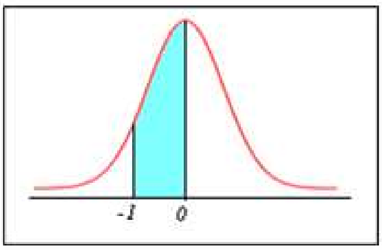


- Calcule P(-1 $\leq$ Z $\leq$ 1)

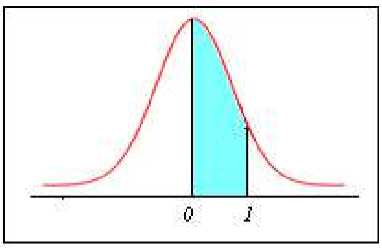
  A área que representa esta probabilidade é:



Esta área pode ser separada em duas subáreas, que são:



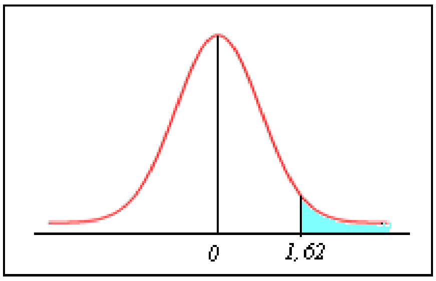
e



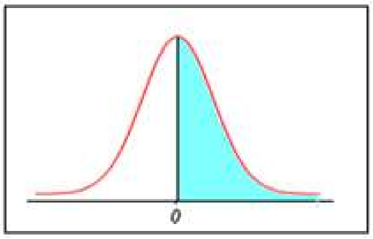
$$P(-1 \leq Z \leq 1) = P(-1 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1) = 0{,}3413 + 0{,}3413 = 0{,}6826$$

- Calcule P(Z $\geq$ 1,62)

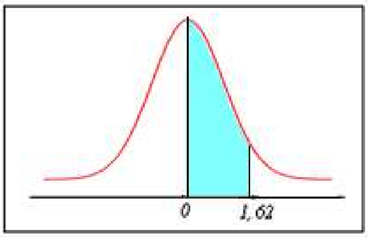
  A área que representa esta probabilidade é:



Esta área pode ser pensada da seguinte forma:



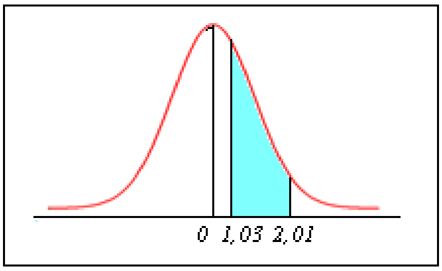
-



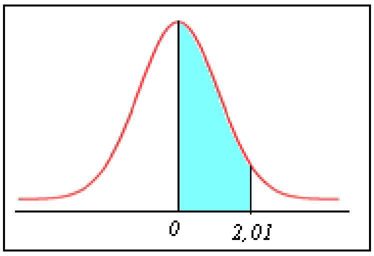
P(Z $\geq$ 1,62) = 0,5 - P(0 $\leq$ Z $\leq$ 1,62) = 0,5 - 0,4474 = 0,0526

- Calcule P(1,03 $\leq$ Z $\leq$ 2,01)

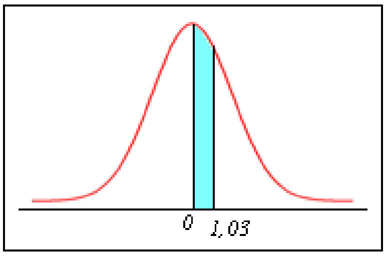
  A área que representa esta probabilidade é:



Esta área pode ser pensada da seguinte forma:

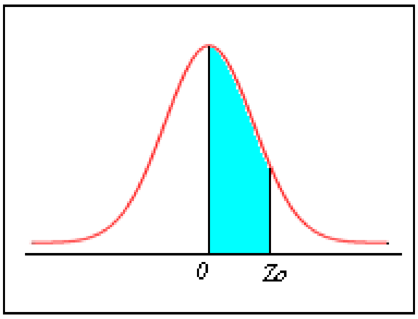


-



$$P(1{,}03 \leq Z \leq 2{,}01) = P(0 \leq Z \leq 2{,}01) - P(0 \leq Z \leq 1{,}03)$$

- Determine z tal que $P(0 \leq Z \leq z_0) = 0{,}395$ A área que representa esta probabilidade é:



Para encontrar o ponto z_0, que corresponda à probabilidade $P(0 \leq Z \leq z_0) = 0{,}395$, procure no meio da tabela da curva normal padrão o valor da área exata ou o mais próximo possível da requerida. Neste caso, o ponto procurado é 1,25. Logo, $z_0 = 1{,}25$.

Exemplos:

1) Usando a tabela da normal padrão podemos obter:

$P(0 \leq Z \leq 1) = 0{,}3413$

$P(-2{,}55 \leq Z \leq 1{,}2) = 0{,}4946 + 0{,}3849 = 0{,}8795$

$P(Z \geq 1{,}93) = 0{,}5 - 0{,}4732 = 0{,}0268$

A característica da qualidade de interesse, associada a um processo que está sob controle estatístico, é normalmente distribuída com média 100 e desvio-padrão 5. As especificações estabelecidas para esta característica da qualidade são 95 ± 10.

a) Qual e a proporção de não-conformidade referente a esta característica?

b) Qual e a proporção de não-conformidade referente a esta característica, se o processo passasse a operar centrado no valor 95, chamado valor nominal da especificação?

Solução:

a) $P(X > 105) + P(X < 85) = P\left(Z > \dfrac{105-100}{5}\right) + P\left(Z < \dfrac{85-100}{5}\right)$
$= P(Z > 1) + P(Z < -3) = (0{,}5 - 0{,}3413) + (0{,}5 - 0{,}4987) = 0{,}1600$

b) $\mu = 95$
$P(X > 105) + P(X < 85) = P\left(Z > \dfrac{105-95}{5}\right) + P\left(Z < \dfrac{85-95}{5}\right)$
$= P(Z > 2) + P(Z < -2) = 2(0{,}5 - 0{,}4772) = 0{,}0456$

4.4 4ª LISTA DE EXERCÍCIOS

1) Seja Z uma variável aleatória com distribuição normal padrão. Determine o valor de z:

a) $P(Z < z) = 0{,}09$

b) $P(-1{,}71 < Z < z) = 0{,}25$

c) $P(-z < Z < z) = 0{,}90$

d) $P(-z < Z < z) = 0{,}99$ Resp.: a)-1,34; b) -0,54; c) 1,64; d) 2,58.

2) Sejam z_1 e z_2, simétricos, dois particulares valores de Z. Determine-os tais que:

a) $P(z_1 \leq Z \leq z_2) = 0{,}9216$

b) $P(z_1 \leq Z \leq z_2) = 0{,}8858$ Resp.: a) -1,76 e 1,76; b) -1,58 e 1,58.

3) Suponha que as amplitudes de vida de dois aparelhos elétricos, D_1 e D_2, tenham distribuição N(42,36) e N(45,9), respectivamente. Se o aparelho é para ser usado por um período, no mínimo, de 45 horas, qual aparelho deve ser preferido? Resp.: R: D_2.

4) Uma enchedora automática de garrafas de refrigerante está regulada para que o volume

médio de líquido em cada garrafa seja de 1.000 cm^3 e o desvio-padrão de 10 cm^3. Pode-se admitir que a distribuição da variável seja normal.

a) Qual a probabilidade de encontrarmos garrafas em que o volume de líquido seja menor que 990 cm^3?

b) Qual a probabilidade de encontrarmos garrafas em que o volume de líquido não se desvie da média em mais que dois desvios-padrão? Resp.: a) 0,1587; b) 0,9545.

5) Uma empresa produz televisores e garante a restituição da quantia paga se qualquer televisor apresentar algum defeito grave no prazo de 6 meses. Ela produz televisores do tipo A comum e do tipo B luxo, com um lucro respectivo de 1.000 u.m. e 2.000 u.m. caso não haja restituição, e com um prejuízo de 3.000 u.m. e 8.000 u.m. se houver restituição. Suponha que o tempo para a ocorrência de algum defeito grave seja, em ambos os casos, uma variável aleatória com distribuição normal, respectivamente, com médias 9 meses e 12 meses, e variâncias 4 $meses^2$ e 9 $meses^2$. Se tivesse que planejar uma estratégia de marketing para a empresa, você incentivaria as vendas dos aparelhos do tipo A ou do tipo B? Resp.: Tipo B

6) Suponha que o diâmetro médio dos parafusos produzidos por uma fabrica é de 0,25 polegadas e o desvio-padrão 0,02 polegadas. Um parafuso é considerado defeituoso se seu diâmetro é maior que 0,28 polegadas ou menor que 0,20 polegadas. Suponha distribuição normal.

a) Encontre a probabilidade de parafusos defeituosos.

b) Qual deve ser a medida mínima para que tenhamos no máximo 12% de parafusos defeituosos? Resp.:a) 0,072; b) 0,2178.

7) A duração de certos tipos de amortecedores, em km rodados é normalmente distribuída, com duração média de 5000 km e desvio-padrão de 1000 km.

a) Qual a probabilidade de um amortecedor escolhido ao acaso durar entre 4500 e 6350 km?

b) Se o fabricante desejasse fixar uma garantia de quilometragem, de tal forma que se a duração do amortecedor fosse inferior a garantia, o amortecedor seria trocado, de quanto deveria ser esta garantia para que somente 1% dos amortecedores fossem trocados? Resp.: a) 0,60295; b)

2670 km.

8) Suponha que T, a duração até falhar de uma peça, seja normalmente distribuída com E(T) = 90 horas e desvio-padrão de 5 horas. Quantas horas de operação devem ser consideradas, a fim de que a probabilidade da peça não falhar durante este período seja igual a 0,90. Resp.: 96,4 horas.

9) Suponha que a duração de vida de um dispositivo eletrônico seja exponencialmente distribuída. Sabe-se que a probabilidade desse dispositivo durar mais de 100 horas de operação é de 0,90. Quantas horas de operação devem ser levadas em conta para conseguir-se uma probabilidade de 0,95? Resp.: 48,68 horas.

10) A duração de vida de um satélite é uma variável aleatória exponencialmente distribuída, com duração de vida esperada igual a 1,5 anos. Se três desses satélites forem lançados simultaneamente, qual será a probabilidade de que ao menos dois deles ainda venham a estar em órbita depois de 2 anos? Resp.: 0,1719.

11) Suponha que n componentes, que funcionem independentemente, sejam ligados em série. Admita que a duração até falhar, de cada componente, seja normalmente distribuída, com esperança de 50 horas e desvio-padrão de 5 horas.

a) Se n=4, qual será a probabilidade de que o sistema ainda esteja a funcionar depois de 52 horas de operação?

b) Se n componentes forem instalados em paralelo, qual deverá ser o valor de n, para que a probabilidade de falhar durante as primeiras 55 horas seja aproximadamente igual a 0,01?

Resp.: a) 0,014; b) 27.

12) Estudos meteorológicos indicam que a precipitação pluviométrica mensal em períodos de seca numa certa região pode ser considerada como seguindo a distribuição Normal de média 30mm e variância $16mm^2$.

a) Qual a probabilidade de que a precipitação pluviométrica mensal no período da seca esteja entre 24mm e 38mm?

b) Qual seria o valor da precipitação pluviométrica de modo que exista apenas 10% de chance de haver uma precipitação inferior a esse valor?

c) Construa um intervalo central em torno da média que contenha 80% dos possíveis valores de precipitação pluviométrica. Resp.: a) 0,9104; b) 24,88; c) [24,88; 35,12].

13) Se a altura de 300 estudantes é normalmente distribuída com média igual a 172,72cm e variância 49,5cm^2. a) Quantos estudantes têm altura superior a 182,88cm?
b) Qual a altura que separa os estudantes em dois grupos de forma que um deles seja formado pelos 30% mais altos? Resp.: a)22; b) 176,41.

14) Suponha que as notas de um vestibular tenham distribuição normal com média 60 e desvio-padrão de 15 pontos.

a) Se você prestou este vestibular e obteve nota igual a 80 pontos, qual a sua posição em termos de unidades de desvios-padrão, com relação a média das notas? b) Se foram considerados aprovados os candidatos que obtiveram nota mínima correspondente a 1 desvio-padrão acima da média, qual a nota mínima de aprovação na escala original? Resp.: a) 1,333; b) 75.

15) Em uma fábrica de chocolate verifica-se que os "bombons" são acondicionados automaticamente em caixas com aproximadamente 1 Kg. Verifica-se que 25,14% das caixas tem peso inferior a 1 Kg. A máquina de acondicionamento foi regulada aumentando-se o peso médio da caixa de 3g e verificou-se então que a porcentagem com peso inferior a 1 Kg foi de 12,5%. Admitir distribuição normal.

a) Calcular a média e o desvio-padrão. b) De quanto deve ser novamente aumentado o peso médio para que essa porcentagem caia para 4%? Resp.: a) média = 1,0042 Kg e desvio = 0,0063 Kg b) 0,006825 g.

16) Experimentam-se três elementos que trabalham independentemente entre si. A duração de trabalho sem falhas dos elementos tem respectivamente para o 1º, 2º e 3º. as seguintes funções densidades:

$$f_1(t) = 0,1e^{-0,1t} \quad f_2(t) = 0,2e^{-0,2t} \quad f_3(t) = 0,3e^{-0,3t}$$

Ache a probabilidade que no intervalo de tempo (0, 10).

a) Falhe ao menos um elemento

b) Falhem não menos que dois elementos Resp.: a) 0,9975; b) 0,9301.

17) Um componente eletrônico tem distribuição exponencial, com média de 50 horas. Suposta uma produção de 10000 unidades, quanto deles espera-se que durem entre 45 e 55 horas? Resp.: 737.

18) O tempo de vida de certo dispositivo eletrônico é de 4.000 h e segue uma distribuição exponencial. Determine a probabilidade de que:

a) um dispositivo esteja funcionando no final de 2.000 h, dado que está funcionando no final de 1.000 h;

b) num conjunto de 4 dispositivos, somente um queime antes de 3.000 h de funcionamento. Resp.: a) 0,7788; b) 0,2224.

19) Dois dispositivos eletrônicos com lei de falhas exponencial com média respectivamente 5h e 10h são ligados em paralelos formando um único sistema e funcionando independentemente. Determinar:

a) A probabilidade de cada um dos dispositivos após 20 horas;

b) A probabilidade do sistema todo após 20 horas; Resp.: a) $\alpha = \frac{1}{10}$; 0,135 e $\alpha = \frac{1}{5}$; 0,0183; b) 0,1512.

20) Sabe-se que T, tempo de operação sem falhas de um componente segue a distribuição de Weibull.

a) Se $\alpha = 2000$ e $\gamma = 0{,}5$, determine R(22), E(T) e V(T).

b) Se $\alpha = 2000$ e $\gamma = 1{,}5$, determine t para que $P(T > t) = 0{,}90$.

Resp.: a) $P(T > 22) = 0{,}9004$; E(T) = 4000 horas e V(T) = 80000000 horas; b) 446,15 horas.

21) Seja X uma variável aleatória com distribuição Weibull com $\alpha = 200$ e $\gamma = 3$.

a) Suponha que X represente o tempo de vida de um componente. Determine a probabilidade desse componente para durar mais de 50 horas.

b) Determine a probabilidade de que o componente dure mais que 250 horas, uma vez que já esteja em funcionamento por 200 horas.

c) Determine a duração esperada do componente. Use os seguintes fatos: $\Gamma(1{,}3) = 0{,}8975$.

Resp.: a) 0,9845; b)0,3855; c)179,5.

22) Sabe-se que o tempo de falha (em anos) de certo transistor tem distribuição exponencial com $\alpha = 20$ anos.

a) Que proporção desse transistor sobreviverá a 6 anos de uso?

b) Este transistor será utilizado em um produto cujo fabricante irá estipular certo período de garantia. Qual tempo de garantia passível de ser estipulado, caso o fabricante concorde em arcar com o custo de no máximo 5% de falhas neste período?

c) Se o fabricante desejar estipular um período de garantia de 2 anos, qual a proporção esperada de falhas associadas ao transistor neste período? Resp.: a) 0,7408; b) aprox. 1 ano; c) 0,0952.

23) A densidade do tempo de falha para um pequeno sistema de computador tem distribuição de Weibull, com $\gamma = \dfrac{1}{4}$ e $\alpha = 200$.

a) Que proporção dessas unidades sobreviverá a 1000 horas de uso?

b) Qual o tempo médio de falha? Resp.: a) 0,2242; b) 480.

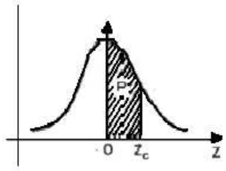
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. MEYER, Paul L. **Probabilidade:** aplicações à estatística. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1983. 426.

2. MONTGOMERY, Douglas C.; RUNGER, George C.; HUBELE, Norma Faris. **Estatística aplicada à engenharia.** Rio de Janeiro: LTC, 2004. 335 p.

3. MORETTIN, Pedro Alberto; BUSSAB, Wilton de Oliveira. **Estatística básica.** 5. ed. São Paulo: Saraiva, 2006. 526 p.

Distribuição Normal Padrão*: Valores de p tais que $P(0 \leq Z \leq z_c) = p$



.

Z	Segunda decimal de z_c									
	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

APÊNDICE

Resumo de algumas técnicas sistemáticas de enumeração.

- **Princípios básicos da multiplicação**

  Dados dois eventos, o primeiro dos quais pode ocorrer de **m** maneiras distintas e o segundo pode ocorrer de **n** maneiras distintas, então os dois eventos conjuntamente podem ocorrer de **m.n** maneiras distintas.

  Exemplo 6: Uma bandeira é formada por 7 listras que devem ser coloridas usando apenas as cores verde, azul e cinza. Se cada listra deve ter apenas uma cor e não se pode usar cores iguais em listras adjacentes, de quantos modos se pode colorir a bandeira?

  Solução: Colorir a bandeira equivale a escolher a cor de cada listra. Há 3 modos de escolher a cor da primeira listra e, a partir daí, 2 modos de escolher a cor de cada uma das outras 6 listras. A resposta é $3\text{x}2^6 = 192$.

- **Permutações**

  Uma coleção de n objetos diferentes pode ser ordenada de **n!** maneiras distintas. Portanto, o número de permutações de n objetos diferentes é dado por $\mathbf{P}_n\mathbf{=n!}$ (Essa regra de permutação, traduz o fato de que o primeiro objeto pode ser escolhido de **n** maneiras diferentes, o segundo objeto pode ser escolhido de **n-1** maneiras distintas, e assim por diante).

  Exemplo 7: De quantos modos podemos arrumar em fila 5 livros diferentes de Matemática, 3 livros diferentes de Estatística e 2 livros diferentes de Física, de modo que livros de uma mesma matéria permaneçam juntos?

  Solução: Podemos escolher a ordem das matérias de 3! Modos. Feito isso, há 5! Modos de colocar os livros de Matemática nos lugares que lhe foram destinados, 3! Modos para os de Estatísticas e 2! Modos para os de Física. A resposta é: 3!5!3!2!= 6 x 120 x 6 x 2 = 8640.

- **Arranjos**

  É o número de maneiras de escolher p objetos dentre n objetos diferentes (sem repetição), sendo a ordem importante, e permutar os escolhidos ($0 \leq p \leq n$). Portanto, o número de arranjos é dado por: $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$

  Exemplo 8: No planejamento de um programa noturno da rede de televisão NBC, devem ser escolhidos 6 shows dentre 30 disponíveis. Quantas programações diferentes são possíveis?

  Solução: Devemos selecionar p = 6 dentre n = 30 programas disponíveis. Aqui a ordem tem importância, por que os espectadores variam no decorrer do tempo. Logo devemos calcular o número de arranjos $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!} = \dfrac{30!}{(30-6)!} = 427518000$.

- **Combinação**

  É o número de maneiras de selecionar **p** objetos distintos dentre **n** objetos distintos dados, sem considerarmos a ordem. Cada seleção de **p** objetos é chamada de uma combinação simples de classe **p** dos **n** objetos. Representamos o número de combinações simples de classe **p** de **n** elementos por C_n^p ou $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$. Assim o número de combinações de **p** objetos extraídos de um conjunto de **n** objetos diferentes é $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$. (Basta notar que selecionar **p** entre os **n** objetos equivale a dividir os **n** objetos em um grupo de **p** objetos, que são selecionados, e um grupo de **n-p** objetos, que são os não-selecionados.)

  Exemplo 9: Com 5 homens e 4 mulheres, quantas comissões de 5 pessoas, com exatamente 3 homens, podem ser formadas?

  Solução: Para formar a comissão devemos escolher 3 dos 5 homens e 2 das 4 mulheres. Há $C_5^3.C_4^2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \dfrac{5!}{3!2!}.\dfrac{4!}{2!2!} = 60$

  Exemplo 10: Um lote é formado de 2 artigos perfeitos e 1 defeituoso. Dois artigos são selecionados ao acaso:

  a) Quantos lotes de 2 artigos diferentes podem ser formados sem considerarmos a ordem?

Solução: Trata-se aqui do número de combinações de p = 2 artigos a serem selecionados dentre 3. Temos $C_3^2 = \dfrac{3!}{2!1!} = 3$, ($P_1P_2$, DP_1, P_2D)

b) Quantos lotes de 2 artigos diferentes podem ser formados considerando a ordem?

Solução: Aqui, desejamos o número de sequências (ou permutações) de p = 2 artigos a serem escolhidos dentre os 3. Temos $A_3^2 = \dfrac{3!}{1!} = 6$, ($P_1P_2$, P_2P_1, D_1P_1, P_1D_1, D_1P_2, P_2D_1).

Exercícios:

1) Três garotos e 3 garotas sentam-se em fila. Encontre a probabilidade das 3 garotas sentarem juntas. Resp.: 0,2.

2) Um lote é formado de 10 artigos bons, 4 com defeitos menores e 2 com defeitos graves. Dois artigos são escolhidos (sem reposição) ache a probabilidade de que:

a) Ambos tenham defeitos graves?

b) Exatamente um seja perfeito? Resp.: a) 0,00833; b) 0,5.

3) Um produto é montado em 3 estágios. No primeiro estágio, existem 5 linhas de montagem; no segundo estágio, existem 4 linhas de montagem e no terceiro estágio, existem 6 linhas de montagem. De quantas maneiras diferentes poderá o produto se deslocar durante o processo de montagem? Resp.: 120.

4) Um inspetor visita 6 máquinas diferentes durante um dia. A fim de evitar que os operários saibam quando ele os irá inspecionar, o inspetor varia a ordenação de suas visitas. De quantas maneiras isto poderá ser feito? Resp.: 720.

5) Um mecanismo complexo pode falhar em 15 estágios. De quantas maneiras poderá falhar em exatamente 3 desses estágios? Resp.: 455.

6) Em uma sala, 10 pessoas estão usando emblemas numerados de 1 até 10. Três pessoas são escolhidas ao acaso e convidadas a saírem da sala simultaneamente. O número de seu emblema

é anotado.

a) Qual é a probabilidade de que o menor número de emblema seja cinco?

b) Qual é a probabilidade de que o maior número de emblema seja cinco? Resp.: a) 0,0833; b) 0,05.

Exercícios Complementares

1) Suponha que uma caixa contenha 5 bolas (1 preta e 4 brancas). Retira-se aleatoriamente uma bola de cada vez (com reposição) até que saia 4 vezes a bola preta. Seja X o número de retiradas necessárias até que isto ocorra. Determine os possíveis valores de X e sua função de probabilidade. Resp.: $P(X = x) = \begin{pmatrix} x-1 \\ 3 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{5}\right)^4 \left(\frac{4}{5}\right)^{x-4}$, x = 4, 5, 6, ...

2) A probabilidade de que um bit seja transmitido com erro por um canal de transmissão digital é 0,1. Assuma que as transmissões sejam ensaios independentes.

a) Seja X o número de bits transmitidos até que ocorra o primeiro erro. Determine a distribuição de X.

b) Determine a probabilidade de se precisar observar mais que 5 ensaios de transmissão.

c) Determine a probabilidade de se precisar observar mais que 5 ensaios de transmissão, após já se ter observado 3 ensaios, sem que ocorresse erro.

d) Determine o número esperado de ensaios até o primeiro erro.

e) Seja Y o número de transmissões até a ocorrência do quarto erro. Determine a distribuição de Y.

f) Determine a probabilidade de se precisar observar no máximo 6 ensaios de transmissão.

g) Determine o número esperado do número de ensaios até o quarto erro.

Resp.: a) $P(X = x) = 0{,}9^{x-1}\, 0{,}1$; x= 1,2,3,... (distribuição geométrica); b) 0,6561; c) 0,81; d) 10; e) $P(X = x) = \begin{pmatrix} y-1 \\ 4-1 \end{pmatrix} 0{,}9^{y-4}\, 0{,}1^4$ (distribuição binomial negativa); f) 0,0012; g) 4,4444.

3) A probabilidade de um bem sucedido lançamento de foguete é 0,8. Suponha que tentativas de lançamento sejam feitas até que tenham ocorrido 3 lançamentos bem sucedidos.

a) Qual é a probabilidade de que exatamente 6 tentativas sejam necessárias?

b) Qual é a probabilidade de que menos de 6 tentativas sejam necessárias?

c) Se cada tentativa de lançamento custa 5.000 u.m. e se um lançamento falho custa500 u.m. adicionais, determine o custo esperado da operação.

d) Suponha agora que as tentativas sejam feitas até que três lançamentos consecutivos sejam bem sucedidos. Responda novamente as perguntas (a) e (b) nesse caso.

Resp.: a) 0,0409; b)0,9421; c) 19.125; d)0,0041 e 0,6349.

$\Big|_0^1$