Slides Semana 5

Distribuição Exponencial

Definição: Seja X uma variável aleatória contínua assumindo valores não negativos. Dizemos que X tem distribuição exponencial com parâmetro λ se sua função de densidade é dada por:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \qquad \text{para } x > 0 \text{ e } \lambda > 0$$

e neste caso denotamos $X \sim \exp(\lambda)$.

Se X for uma variável aleatória contínua assumindo valores não negativos cujas probabilidades são dadas pela densidade, então $f(x)$ representa de fato uma verdadeira função de densidade de probabildiade, isto é i) $f(x) \geq 0$ e $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

A verificação de (i) é imediata, já que todas as quantidades envolvidas em $f(x)$, quando X segue uma distribuição exponencial, são positivas. Para verificarmos (ii), fazemos

$$\int_0^{\infty} f(x)dx = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}dx.$$

Fazendo: $v = -\lambda x$ temos $dv = -\lambda dx$ e $\frac{-dv}{\lambda} = dx$. Se $x = 0$ então $v = 0$, e se $x \to \infty$ então $v \to -\infty$. Logo, ao substituirmos estas variáveis temos que:

$$\lambda \int_0^{-\infty} e^v \frac{-dv}{\lambda} = \lambda \int_{-\infty}^0 e^v \frac{dv}{\lambda} = \int_{-\infty}^0 e^v dv = e^v \mid_{-\infty}^0 = 1 - 0 = 1$$

mostrando que a função constitui uma verdadeira função de densidade de probabilidade.

Uma outra forma de verificar a propriedade ii) de uma maneira mais direta, é utilizar as propriedades da *função gama*. A função gama é definida por:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \qquad \text{para } \alpha > 0$$

e esta função satisfaz algumas importantes propriedades de fácil comprovação

1. $\Gamma(0) = 1$ (por definição) e $\Gamma(1) = 1$ (fazendo $\alpha = 1$ na função gamma.
2. $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$.
3. se $\alpha = n$ inteiro, então $\Gamma(n) = (n-1)!$

Assim,

$$\int_0^\infty f(x)dx = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}dx = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda x}dx.$$

Assumindo que $v = \lambda x$ temos $dv = \lambda dx$ e $\frac{dv}{\lambda} = dx$. Se $x = 0$ então $v = 0$, e se $x \to \infty$ então $v \to \infty$.
Daí,

$$\lambda \int_0^\infty e^{-v}\frac{dv}{\lambda} = \lambda \int_0^\infty e^{-v}\frac{dv}{\lambda} = \int_0^\infty e^{-v}dv = \Gamma(1) = 1;$$

novamente fazendo $\alpha = 1$ na equação obtemos o resultado.

Falta de memória A distribuição exponencial possui uma característica muito interessante denominada *falta de memória da distribuição*, isto significa que

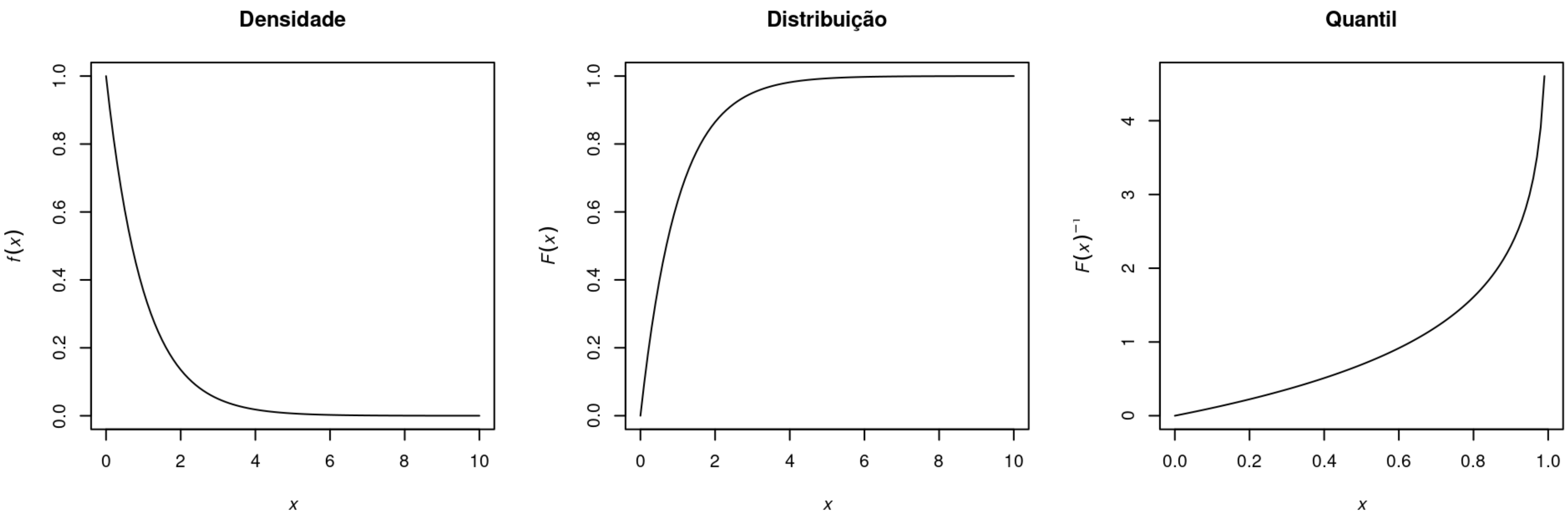
$$P(X \geq s + t | X > s) = P(X \geq t),$$

em que s e t são números reais positivos quaisquer.

Para demonstrar essa propriedade observemos que

$$
\begin{aligned}
P(X \geq s+t | X > s) &= \frac{P[X \geq s+t, X > s]}{P[X > s]} = \frac{P[X \geq s+t]}{P[X > s]} \\
&= \frac{\displaystyle\int_{(s+t)}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx}{\displaystyle\int_{s}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx} = \frac{-e^{-\lambda x}\Big|_{s+t}^{\infty}}{-e^{-\lambda x}\Big|_{s}^{+\infty}} \\
&= \frac{-e^{-\lambda(s+t)}}{-e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda s - \lambda t + \lambda s} \\
&= e^{-\lambda t}.
\end{aligned}
$$

Suponhamos que X seja uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro $\lambda = 1$. O gráficos da função de densidade, da função de distribuição e da função quantil são apresentados na Figura a seguir



Valor esperado e variância da distribuição exponencial: Seja X uma variável aleatória contínua com distribuição exponencial com parâmetro λ. No caso de uma variável aleatória contínua sabemos que o esperado de X é calculado por

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Para a distribuição exponencial com parâmetro λ, o valor esperado $E(X)$, é:

$$E(X) = \int_{0}^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

Neste caso, podemos resolver a integral de duas formas: por partes ou usando as propriedades da função gama. Aqui, utilizaremos a função gama, por ser um cálculo mais simples e elegante. Fazendo: $u = \lambda x$ temos $x = \frac{1}{\lambda}$ e $du = \lambda dx$ implica que $dx = \dfrac{du}{\lambda}$. Assim, se substituímos estes valores temos que

$$E(X) = \int_{0}^{\infty} \frac{u}{\lambda} e^{-u} du = \frac{1}{\lambda} \int_{0}^{\infty} u e^{-u} du.$$

Usando a função gama, identificamos que $\alpha - 1 = 1$, o que implica que $\alpha = 2$. Logo,

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty} ue^{-u}du = \frac{1}{\lambda}\Gamma(2) = \frac{1}{\lambda}.\,1! = \frac{1}{\lambda}.$$

Assim, se $X \sim \exp(\lambda)$ temos que

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

A *variância* de X é dada por:

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2,$$

em que

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx,$$

para o caso em que X segue uma distribuição exponencial com parâmetro λ, temos que:

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x}dx.$$

Usando a mesma substituição anterior, temos:

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^{\infty} \left(\frac{u}{\lambda}\right)^2 e^{-u} du = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 \int_0^{\infty} u^2 e^{-u} du.$$

Agora, se usamos a função gama, identificamos $\alpha - 1 = 2$, o que implica que $\alpha = 3$. Daí:

$$E(X^2) = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 \int_0^{+\infty} u^2 e^{-u} du = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 \Gamma(3) = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 2! = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Daí,

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Logo, se $X \sim \exp(\lambda)$, então:

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Função Geradora de Momentos da distribuição exponencial: Seja X uma variável aleatória contínua com função de densidade $f(x)$. A *função geradora de momentos* da variável X é definida por

$$M_X(t) = E\left(e^{(tx)}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx.$$

Para o caso de X ter uma distribuição exponencial com parâmetro λ termos que

$$M_X(t) = \int_0^{\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{-x(\lambda - t)} dx,$$

que possui solução finita unicamente se $\lambda - t > 0$. Assim,

$$M_X(t) = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-x(\lambda - t)} dx = \left.\frac{\lambda - e^{-x(\lambda - t)}}{\lambda - t}\right|_0^{\infty} \qquad \text{se } \lambda - t > 0.$$

Logo, se $X \sim \exp(\lambda)$, então:

$$M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \qquad \text{se } \lambda > t.$$

Calculando a primeira derivada obtemos:

$$M_X'(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t} = \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2}.$$

Para $t = 0$ obtemos

$$M_X(0) = \frac{\lambda}{(\lambda - 0)^2} = \frac{\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda} = E(X).$$

Calculando agora a segunda derivada, temos:

$$M_X''(t) = \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2} = \frac{2(\lambda - t).\,\lambda}{9\lambda - t)^2} = \frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3}.$$

Assim, para $t = 0$,

$$M_X''(0) = \frac{2\lambda}{\lambda^3} = \frac{2}{\lambda^2} = \mathrm{E}(X^2).$$

Portanto,

$$M_X''(0) - (M_X'(0))^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} = Var(X),$$

ou seja, a variância de uma variável aleatória X com distribuição exponencial com parâmetro λ envolvem a primeira e segunda derivadas de $M_X(t)$.

Nota (Parametrização alternativa) Uma parametrização comumente usada para definir a função densidade de probabilidade de uma distribuição é

$$f(x;\beta) = \begin{cases} \frac{1}{\beta}e^{-x/\beta}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

em que $\beta > 0$ é um parâmetro de escala da distribuição e é o recíproco do parâmetro taxa denominado por λ.

Nesta especificação, β é um parâmetro de sobrevivência no sentido de que se uma variável aleatória X é a duração de tempo em que um dado indivíduo ou sistema biológico ou mecânico consegue sobreviver, isto é, se $X \sim \exp(\beta)$, então $E(X) = \beta$, o que significa que a duração esperada de sobrevivência de um indivíduo ou sistema é β unidades de tempo.

A parametrização envolvendo o parâmetro λ (taxa) surge no contexto de eventos que chegam (ou acontecem) a uma taxa λ, isto é, quando o tempo entre os eventos (que pode ser modelado com uma distribuição exponencial) tem uma média $\beta = 1/\lambda$.

Definição: A função quantil (inversa da função da distribuição acumulada) de uma variável aleatória $X \sim \exp(\lambda)$ é

$$F^{-1}(p; \lambda) = \frac{-\log(1-p)}{\lambda}, \qquad 0 \leq p < 1.$$

Logo, podemos observar que a mediana da distribuição é

$$\log(2)/\lambda.$$

Exemplo (Magalhães e Lima, 2002)

O intervalo de tempo em minutos entre emissões consecutivas de uma fonte radioativa é uma variável aleatória com distribuição exponencial com parâmetro $\lambda = 0,2$. Qual é a probabilidade de haver uma emissão em um intervalo inferior a 2 minutos? Note que nosso problema pode ser traduzido como:

$$P(X < 2) = \int_0^2 0,2e^{-0,2x} dx = -e^{-0,2x}\Big|_0^2 = -e^{-0,4} + 1 = 0,33.$$

Calculemos agora a probabilidade do intervalo ser superior ou igual a 7 minutos, sabendo-se que ele é superior ou igual a 5 minutos.

$$P(X \geq 7|X \geq 5) = \frac{(X \geq 7, X \geq 5)}{P(X \geq 5)} = \frac{P(X \geq 7)}{P(X \geq 5)} = \frac{\displaystyle\int_7^{+\infty} 0,2e^{-0,2x}\,dx}{\displaystyle\int_5^{+\infty} 0,2e^{-0,2x}\,dx} = \frac{e^{-1,4}}{e^{-1}} = 0,67.$$

Note que $P(X \geq 2)$ pode ser calculada pelo seu complementar $P(X < 2)$ que vale 0,67, veja que a igualdade de valores sugere que: $P(X \geq 7|X \geq 5) = P(X \geq 2)$. Assim, o intervalo ser maior ou igual a 5, faz com que a probabilidade dele ser maior ou igual a 7 possa ser calculada através de uma translação de tempo, ou seja, podemos assumir que a origem do tempo é 5 e, portanto, a diferença $7 - 5 = 2$, seja o tempo a ser considerado para o cálculo da probabilidade desejada, essa propriedade já estudada neste capítulo é a *falta de memória*.

Exemplo A duração em horas X de um certo componente eletrônico é uma variável aleatória com função de densidade dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{100}e^{-x/100}, \text{ para } x \in [0, \infty).$$

Qual é a probabilidade de que o componente funcione pelo menos 200 horas? Para este exemplo, temos que

$$P(X \geq 200) = 1 - P(X < 200) = 1 - \frac{1}{100}\int_0^{200} e^{-x/100}dx = e^{-2}.$$

Distribuição Weibull

A distribuição Weibull é bastante utilizada em ciência aplicadas. Além disso, tem muitas características como a existência da função de distribuição cumulativa (c.d.), momentos e entropia, etc.

Dizemos que uma variável aleatória não negativa X tem uma distribuição Weibull com o parâmetro vetorial $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta)$, denotado por $X \sim \mathrm{Weibull}(\boldsymbol{\theta})$, se sua função de densidade de probabilidade for dada por

$$f(x; \boldsymbol{\theta}) = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right], \quad x \geqslant 0;\ \alpha, \beta > 0,$$

em que α é o parâmetro de forma e β é um parâmetro escalar.

Se $X \sim \mathrm{Weibull}(\boldsymbol{\theta})$ então a distribuição Weibull satisfaz as seguintes propriedades

1. **Comportamento Assintótico.** O comportamento $f(x; \boldsymbol{\theta})$ quando $x \to 0$ ou $x \to \infty$ é da forma

$$\lim_{x \to 0} f(x; \boldsymbol{\theta}) = \begin{cases} \infty & \text{para} \quad 0 < \alpha < 1, \\ \dfrac{1}{\beta} & \text{para} \quad \alpha = 1, \\ 0 & \text{para} \quad \alpha > 1, \end{cases}$$

##

$$\lim_{x \to \infty} f(x; \boldsymbol{\theta}) = 0 \quad \forall \alpha > 0.$$

2. **Monotonicidade, unimodalidade, concavidade e convexidade** O ponto x é a moda da densidade Weibull se e somente se é a solução da equação

Um simples cálculo mostra que

$$\frac{\mathrm{d}^2 f(x;\boldsymbol{\theta})}{\mathrm{d}x^2} = \frac{f(x;\boldsymbol{\theta})}{x^2}\left[\alpha^2\left(\frac{x}{\beta}\right)^{2\alpha} - 3\alpha(\alpha-1)\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha} + (\alpha-1)(\alpha-2)\right].$$

Note que

$$\frac{\mathrm{d}^2 f(x_0;\boldsymbol{\theta})}{\mathrm{d}x^2} = -\alpha(\alpha-1) < 0, \quad \alpha > 1,$$

e

$$\frac{\mathrm{d}^2 f(x;\boldsymbol{\theta})}{\mathrm{d}x^2} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = x_{\pm} = \beta\left[\frac{3(\alpha-1) \pm \sqrt{(\alpha-1)(5\alpha-1)}}{2\alpha}\right]^{1/\alpha}.$$

Desta forma as seguintes propriedades são obtidas:

Para $\alpha > 1$,

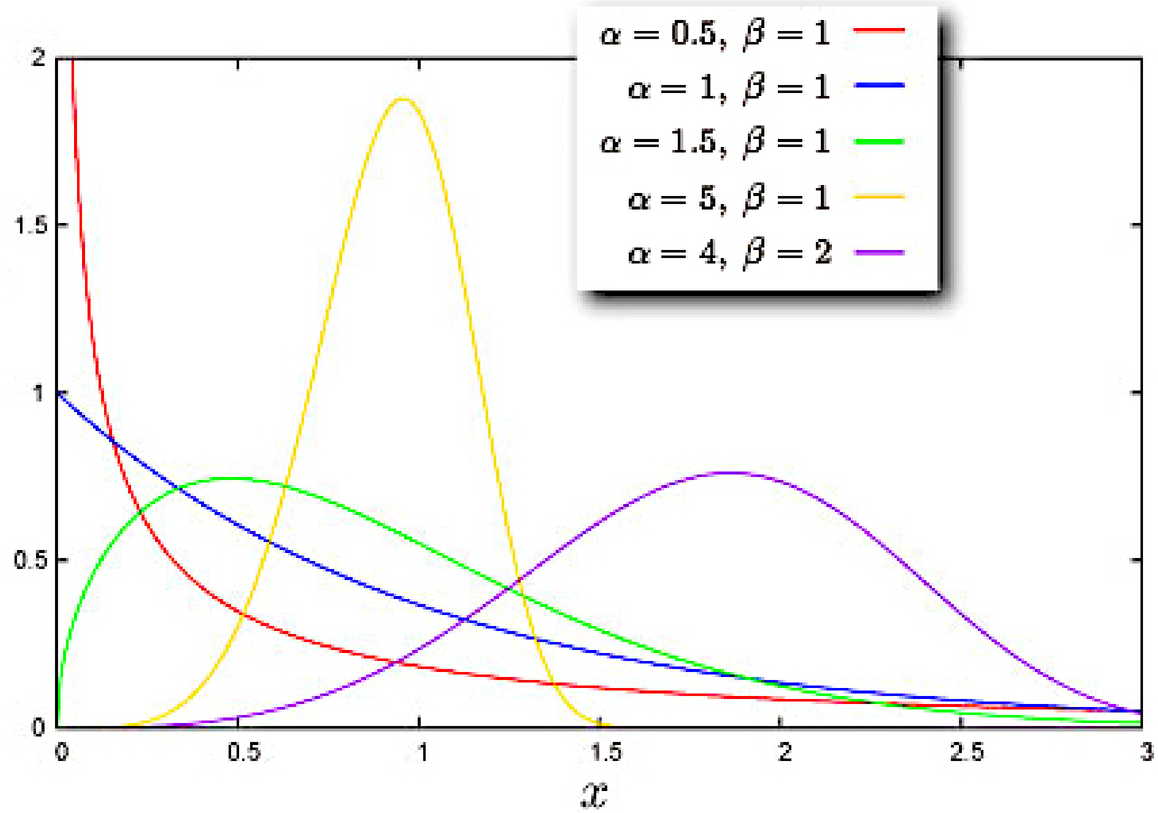
- $f(x;\boldsymbol{\theta})$ aumenta quando $x \to x_0$ e decresce quando $x \to x_0$ decresce

- O ponto x_0 é a única moda da densidade Weibull.
- Para $\alpha \neq 2$, os pontos de inflecção $x_{\pm}$ satisfacem a desiguldade $x_{-} < x_{+}$. Além disso, $f(x_0; \boldsymbol{\theta})$ é convexa em $(0, x_{-}) \cup (x_{+}, \infty)$ e é concava em (x_{-}, x_{+}).
- Para $\alpha = 2$, $x_{-} = 0$ e $x_{+} = 6\beta/4$. Então $f(x_0; \boldsymbol{\theta})$ é concava $(0, x_{+})$ e convexa no intervalo (x_{+}, ∞).
- Para $\alpha \leqslant 1$,
- $f(x_0; \boldsymbol{\theta})$ decresce monotonicamente e é convexa
- A moda não existe

A função distribuição acumulada da distribuição de Weibull é

$$F(x; \alpha, \beta) = 1 - e^{-(x/\beta)^{\alpha}}$$

Distribuição de Weibull para diferentes parâmetros



Momentos

Aplicando o teorema de Fubini podemos obter a função geradora de momentos $M_X(t) = E[\exp(tX)]$ que pode ser escrita como

$$M_X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\beta t} & \text{para } \alpha = 1 \text{ and } |t| < 1/\beta, \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta t)^n}{n!} \Gamma\left(1 + \frac{n}{\alpha}\right) & \text{para } \alpha > 1 \text{ and } t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Em particular, o n-ésimo momento de X é dado por

$$E(X^n) = \beta^n \Gamma\left(1 + \frac{n}{\alpha}\right).$$

Logo a média e a variância de uma variável aleatória seguindo a distribuição de Weibull podem ser expressas como

$$E(X) = \beta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$$

$$Var(X) = \beta^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\right)^2 \right].$$

Nota A distribuição Weibull tem aplicações na área de confiabilidade e análise de sobrevivência. A distrbuição Weibull tem como caso particular a distribuição Exponencial.

Algunas plicações são na modelagem de:

1. Duração de uma cirurgia.
2. Quantidade de resíduos industriais na água.
3. Altura do nível da água de um rio após as chuvas.
4. Tempo para eclosão de larvas de insetos.
5. Tempo para aparecimento de sintomas de doença em frutos.
6. Produtividade de leite de um rebanho.
7. Intervalo de tempo entre corridas de táxi.

Exemplo: duração de atendimentos

A duração do atendimento de cada cliente no caixa de um supermercado tem distribuição de Weibull com parâmetro de forma $\beta = 7$ e parâmetro de escala $\alpha = 4$.

1. Qual a média e variância da duração dos atendimentos?
2. Qual a probabilidade de um atendimento durar menos de 5 minutos?
3. Aplicam-se as expressões para média e variância

$$E(X) = 7\Gamma\left(1 + \frac{1}{4}\right) = 6,345$$

$$Var(X) = 7^2\left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{4}\right) - \left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{4}\right)\right)^2\right] = 3,168$$

4. Cálculamos a probabilidade

$$P(Y \leq 5) = \int_0^5 \frac{4}{7}\left(\frac{x}{7}\right)^{4-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{7}\right)^4\right] dx = F(5;4,7) - F(0;4,7) = 0,229$$