Slides Semana 3

VALOR ESPERADO OU ESPERANÇA MATEMÁTICA

Integral de Riemann (Bônus)

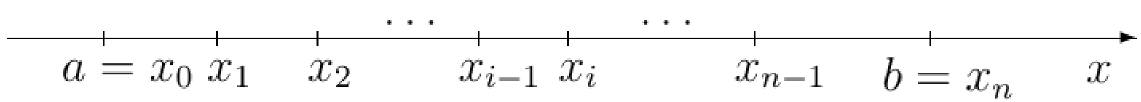
Fonte: APOSTILA-(Calculo 1). Preparado pelas professoras Marcia Federson e Gabriela Planas.

Definição: Seja $[a, b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo limitado e fechado. Dizemos que

$$\mathcal{P}: \ a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b \ ,$$

onde $n \in \mathbb{N}$, é uma **partição** ou **divisão** de $[a, b]$. Neste caso, escrevemos $\mathcal{P} = (x_i)$.

Uma partição $\mathcal{P}$ de $[a, b]$ divide o intervalo em n intervalos.

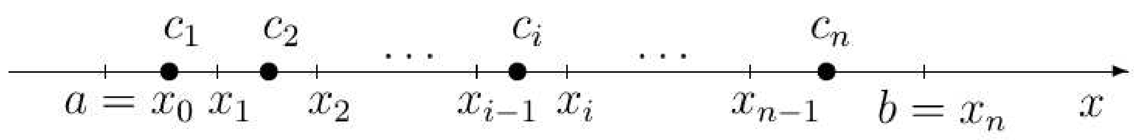


Para cada $i = 1, \ldots, n$, definimos $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ que é o "tamanho" ou comprimento do intervalo $[x_{i-1} \ , \ x_i]$. Definimos, também,

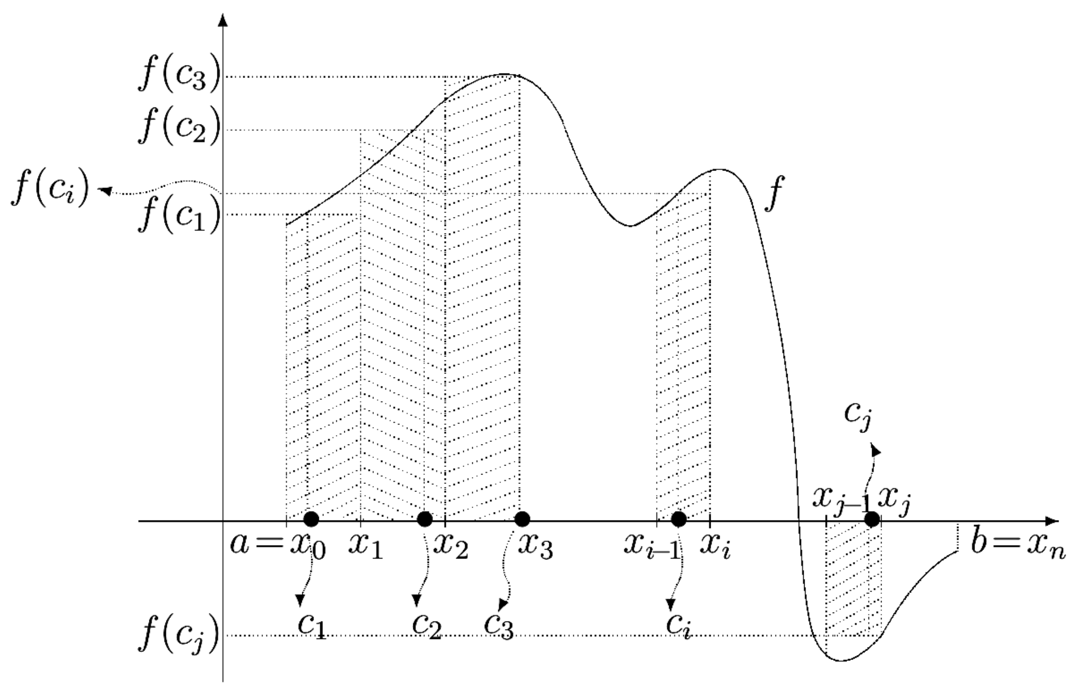
$$\Delta_{\mathcal{P}} = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$$

que é o ``tamanho máximo" ou comprimento máximo que um intervalo $[x_{i-1} \ , \ x_i]$ pode ter.

Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $\mathcal{P} = (x_i)$ uma partição de $[a, b]$. Para cada índice i seja c_i um número em $[x_{i-1}\ ,\ x_i]$ escolhido arbitrariamente.



Consideremos a figura seguinte.

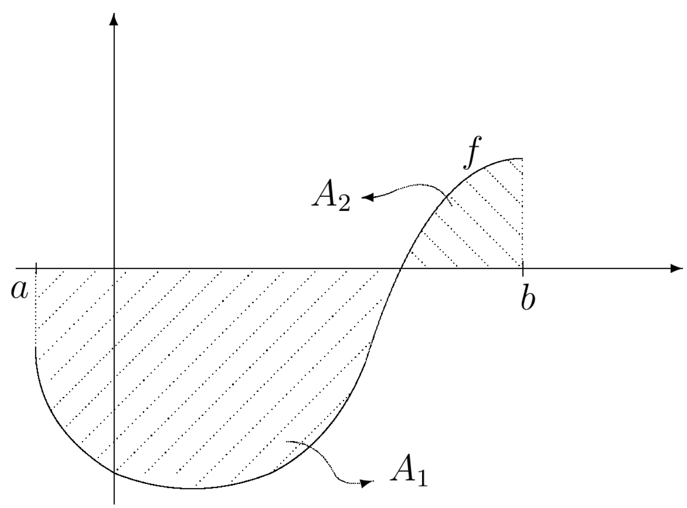


Definição: A **soma de Riemann** de f em relação a $\mathcal{P}$ é dada por

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

Observação: A soma de Riemann é igual a soma das áreas dos retângulos que estão acima do eixo x menos a soma das áreas dos retângulos que estão abaixo do eixo x.. Portanto a soma de Riemann é a diferença entre a soma das áreas dos retângulos que estão acima do eixo x e a soma das áreas dos retângulos que estão abaixo do eixo x.

Consideremos a figura seguinte



Sejam f uma função contínua definida em $[a, b]$ e $\mathcal{P} = (x_i)$ uma partição tal que $\Delta_{\mathcal{P}} = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$ seja suficientemente pequeno. Então a área $A = A_2 - A_1$, pode ser aproximada pela soma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i,$$

ou seja,

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \ .$$

Fazendo $\Delta_{\mathcal{P}} \longrightarrow 0$, temos

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \ \longrightarrow \ A$$

e, portanto,

$$\lim_{\Delta_{\mathcal{P}} \longrightarrow 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = A.$$

Definição: Uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é **Riemann integrável** ou simplesmente **integrável**, se existir um número $A \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{\Delta_P \mathcal{P} 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = A$$

em que ${P} = (x_i) $ é uma partição de $[a, b]$ e $c_i \in [x_{i-1}\ ,\ x_i]$.

Definição: (Escrevendo o limite acima com ε's e δ's temos) Uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ será dita **integrável**, se existir $A \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$, exista $\delta > 0$ tal que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i - A \right| < \varepsilon$$

para toda partição de $[a, b]$ com $\Delta_{\mathcal{P}} < \delta$, qualquer que seja a escolha de $c_i \in [x_{i-1}\ ,\ x_i]$. Neste caso, escrevemos

$$A = \int_a^b f(x)\, dx$$

que é chamada **integral definida** ou simplesmente **integral** de f em relação a x,, no intervalo $[a, b]$.

Propriedades da Integral de Riemann

Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções integráveis. Valem as seguintes propriedades

- A integral é única, isto é, f tem no máximo uma integral definida.
- A integral é **linear**, isto é, para todo $k \in \mathbb{R}$, a função $f + kg$ é integrável e

$$\int_a^b (f + kg)(x)\, dx = \int_a^b \left[f(x) + kg(x)\right]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + k \int_a^b g(x)\, dx\,.$$

- A integral é positiva, isto é, se $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$, então $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \geq 0$. Em particular, se $g(x) \leq f(x)$ para todo $x \in [a, b]$, então

$$\int_a^b g(x)\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx\,.$$

- A integral é aditiva, isto é, se existirem as integrais $\int_a^c f(x)\, dx$ e $\int_c^b f(x)\, dx$, com $c \in [a, b]$, então existirá a integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ e

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx\ .$$

  Isto quer dizer que se f for integrável em todos os subintervalos de um intervalo $[a, b]$, então f será integrável em $[a, b]$. Em particular, quando $c = a$, teremos $\displaystyle\int_a^a f(x)\, dx = 0$.

Teorema [Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo]: Seja f uma função contínua em $[a, b]$, então a função g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)\, dt, \qquad a \leq x \leq b$$

é diferenciável em (a, b) e $g'(x) = f(x)$.

Exemplo: Ache a derivada da função $g(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{1 + t^2}\, dt$. Note que $f(t) = \sqrt{1 + t^2}$ é contínua, então, pelo teorema anterior $g'(x) = \sqrt{1 + x^2}$.

Uma **primitiva** ou **antiderivada** de f em um intervalo I é uma função derivável em I tal que $F'(x) = f(x),$ para todo $x \in I$.

Fórmulas de algumas primitivas:

$(a) \quad \int c\,dx = cx + k;$

$(b) \quad \int e^x\,dx = e^x + k;$

$(c) \quad \int x^\alpha\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1},\ \alpha \neq -1;$

$(d) \quad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + k;$

$(e) \quad \int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln x + k \quad x > 0;$

$(f) \quad \int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln(-x) + k \quad x < 0;$

$(g) \quad \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + k;$

$(h) \quad \int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + k;$

$(i) \quad \int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + k;$

$(j) \quad \int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + k;$

$(k) \quad \int \sec x \operatorname{tg} x\,dx = \sec x + k;$

$(l) \quad \int \dfrac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + k;$

Regra da Substituição para integrais:

$$\int f(g(x))g'(x)\, dx = \int f(u)\, du$$

Exemplo: Encontre $\int 2x\sqrt{1+x^2}\, dx$. Note que se fazemos a substituição $u = 1 + x^2$, então sua diferencial é $du = 2xdx$. Pela Regra da Substituição,

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\, dx = \int \sqrt{1+x^2}2x\, dx = \int \sqrt{u}\, du = \frac{2}{3}u^{3/2} + k = \frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} + k.$$

Regra da Substituição para Integrais Definidas. Se g' for contínua em $[a, b]$ e f for contínua na variação de $u = g(x)$, então

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du.$$

Exemplo: Calcule $\int_{1/2}^{1} \sqrt{2x-1}\, dx$. Fazendo $u = 2x - 1$, temos $du = 2\, dx$ ou $\frac{1}{2}\, du = dx$. Quando $x = 1/2,\ u = 0$; quando $x = 1,\ u = 1$. Assim,

$$\int_{1/2}^{1} \sqrt{2x-1}\, dx = \int_0^1 \sqrt{u}\frac{1}{2}\, du = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{u}\, du = \frac{1}{2}\frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

fórmula de integração por partes:

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx, .$$

Notação alternativa: Tomando ,$u = f(x)$, e $v = g(x)$, temos

$$du = f'(x)\,dx \quad \text{e} \quad dv = g'(x)\,dx$$

e podemos re-escrever () como

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Exemplo: Calcule $\int x \text{ sen } x\, dx$. Suponha $f(x) = x$ e $g'(x) = \text{sen } x$. Então, $f'(x) = 1$ e $g(x) = -\cos x$. Assim

$$\int x \text{ sen } x\, dx = x(-\cos x) - \int 1(-\cos x)\,dx = -x\,\cos x + \text{sen } x + k.$$

Centro de Massa

Consideremos uma fina placa (chamada de *lâmina*) com densidade uniforme ρ que ocupa uma região A do plano. Desejamos encontrar o ponto P no qual a placa se equilibra horizontalmente. Esse ponto é chamado *centro de massa* da placa ou *centróide* de A. Suponha que a região A seja da forma

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\ a \leq x \leq b\,,\ 0 \leq y \leq f(x)\right\}\ ,$$

em que f é uma função definida e contínua em $[a, b]$, com $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$.

Seja $\mathcal{P} = (x_i)$ uma partição de $[a, b]$ e escolhamos o ponto c_i como sendo ponto médio do intervalo $[x_{i-1}\ ,\ x_i]$, que é $c_i = \dfrac{x_i + x_{i-1}}{2}$. Isto determina uma aproximação poligonal a A.

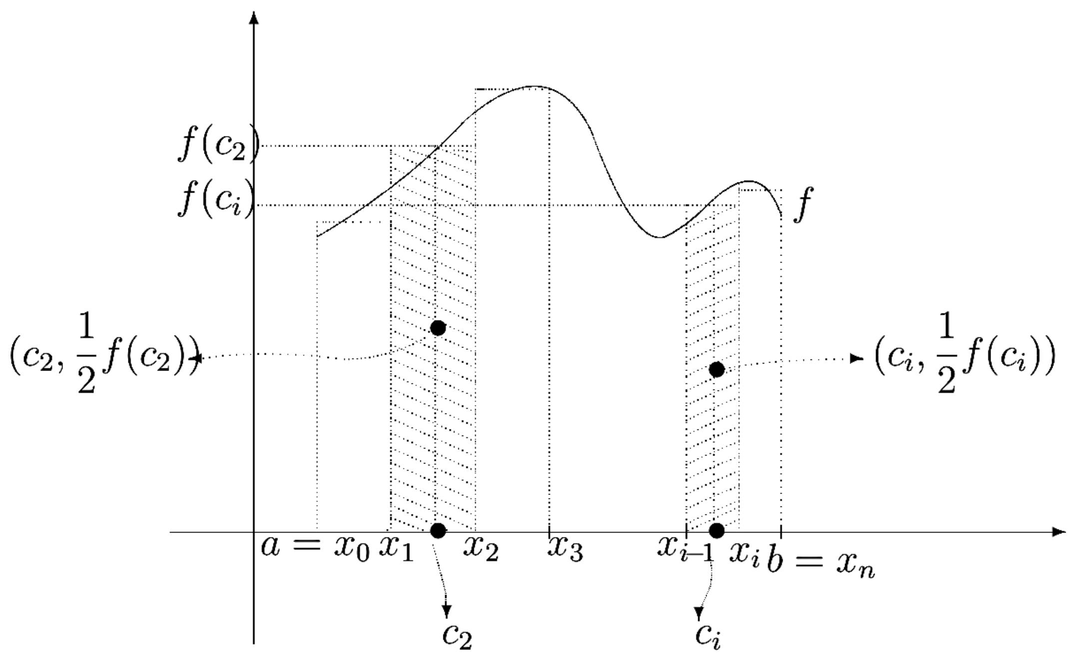
O centro de massa do retângulo hachurado R_i na figura seguinte é seu centro $\left(c_i\ ,\ \dfrac{f(c_i)}{2}\right)$.

Sua área é $f(c_i)\Delta x_i$; assim sua massa é

$$m_i = \rho\,\underbrace{\Delta x_i}_{\text{base}}\,\underbrace{f(c_i)}_{\text{altura}}$$

O centro de massa dos retângulos R_1 , R_2 ... R_n será dado por

$$
\begin{aligned}
(x_c, y_c) &= \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} c_i\, m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{f(c_i)}{2}\, m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \right) = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} c_i \rho\, f(c_i) \Delta x_i}{\sum_{i=1}^{n} \rho\, f(c_i)\Delta x_i} \; \frac{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\rho f(c_i)\Delta x_i}{\sum_{i=1}^{n} \rho\, f(c_i)\Delta x_i} \right) \\
&= \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} c_i\, f(c_i)\Delta x_i}{\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i} \; \frac{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f^2(c_i)\Delta x_i}{\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i} \right).
\end{aligned}
$$



Daí, fazendo $\Delta_{\mathcal{P}} = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta x_i \to 0$, obtemos o **centro de massa** da região A

$$
\begin{aligned}
(x_c, y_c) &= \left(\frac{\int_a^b x\, f(x)\, dx}{\int_a^b f(x)\, dx} \,,\, \frac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\, dx}{\int_a^b f(x)\, dx} \right) \\
&= \left(\frac{1}{\text{área } A} \int_a^b x\, f(x)\, dx \,,\, \frac{1}{\text{área } A} \frac{1}{2} \int_a^b f^2(x)\, dx \right).
\end{aligned}
$$

Exemplo: Calcule o centro de massa da região limitada pelas curvas $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$ e $x = \pi/2$. A área da região é: $\text{Área } A = \int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = \text{sen } x\Big|_0^{\pi/2} = 1$; assim,

$$
x_c = \frac{1}{\text{área } A} \int_0^{\pi/2} x\, f(x)\, dx = \int_0^{\pi/2} x\, \cos x\, dx = x \,\text{sen } x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \text{sen } x\, dx = \frac{\pi}{2} - 1,
$$

$$
\begin{aligned}
y_c = \frac{1}{\text{área } A} \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} f^2(x)\, dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos(2x))\, dx \\
&= \frac{1}{4} \left(x + \frac{1}{2} \text{sen } (2x) \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}.
\end{aligned}
$$

Portanto o centro de massa é $\left(\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{8} \right)$.

Valos esperado

- O valor esperado ou **centro de massa** é um parâmetro μ de uma medida de probabilidade, função de distribuição, ou função probabilidade, também conhecido como média.
- Um operador linear em um conjunto de variáveis aleatórias que retorna um valor típico da variável aleatória interpretado como uma medida de localização da variável aleatória.
- média do resultado de repetidos experimentos independentes no longo prazo.
- preço justo de um jogo com pagamentos descritos por X.

Definição (Valor esperado caso discreto) Se X é uma variável aleatória discreta assumindo valores $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ com probabilidade $\{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$, i.e., $p_j = P(X = x_j)$ respectivamente. A variável aleatória X possui valor esperado se $\sum_i |x_i| \, p_i < \infty$. Logo, sua esperança é dada pela fórmula

$$E(X) = \sum_{i:x_i<0} x_i p_i + \sum_{i:x_i\geq 0} x_i p_i,$$

desde que pelo menos um dos somatórios seja finito. Em caso os dois somatórios não sejam finitos, a esperança não existe.

Nota: Integrabilidade é equivalente à integrabilidade absoluta, i.e., $\mathrm{E}(g(X)) < \infty$ (existe), se, e somente se, $|\mathrm{E}(g(X))| < \infty$. Em particular se $\mathrm{E}(X) < \infty,$ a variável aleatória X é integrável.

Exemplo: Considere que um dado é lançado 1000 vezes. Uma maneira de calcular este resultado médio seria somar todos os resultados e dividir por 1000. Uma maneira alternativa seria calcular a fração $p(k)$ de todos os lançamentos que tiveram resultado igual a k e calcular o resultado médio através da soma ponderada:

$$1p(1) + 2p(2) + 3p(3) + 4p(4) + 5p(5) + 6p(6).$$

Quando o número de lançamentos se torna grande as frações de ocorrência dos resultados tendem a probabilidade de cada resultado.

Intuitivamente, $E(X)$ é uma 'média' dos valores que a variável aleatória X assume, sendo cada um desses valores ponderados pela probabilidade da variável aleatória X assumir tal valor.

Exemplo: Uma companhia de seguros determina o prêmio anual do seguro de vida de maneira a obter um lucro esperado de 1% do valor que o segurado recebe em caso de morte. Encontre o valor do prêmio anual para um seguro de vida no valor de R$200 mil assumindo que a probabilidade do cliente morrer naquele ano é 0.02.

- A: prêmio anual e X: lucro da companhia no ano para o cliente

Então,

$$X = \begin{cases} A, & \text{se o cliente sobrevive} \\ A - 200000, & \text{se o cliente morre} \end{cases}$$

- $\mathbb{E}(X) = A \times P(\text{sobreviver}) + (A - 200000) \times P(\text{morrer})$
- $\mathbb{E}(X) = A \times 0.98 + (A - 200000) \times 0.02$, logo $\mathbb{E}(X) = A - 4000$

Companhia quer lucro esperado de 1% do valor recebido em caso de morte: R$2000. Neste caso, $\mathbb{E}(X) = 2000 = A - 4000$. Portanto, $A = R\$6000$ é o valor do prêmio anual.

Exemplo: Se $X \in \{1, 2, \ldots, n\}$ for uma variável aleatória com distribuição de probabilidade aleatória uniforme com parâmetro n, temos que sua esperança é dada por: Onde utilizamos a fórmula da soma dos primeiros n termos de uma progressão aritmética.

Exemplo: Seja X uma variável aleatória com valores em $\mathbb{Z}$. Suponhamos que

$$p_j = P(X = j) = \begin{cases} \frac{c}{j^2} & \text{se } j \neq 0, \\ 0 \text{ se} j = 0, \end{cases}$$

em que $c > 0$ é uma constante tal que $\sum_j \frac{c}{j^2} = 1$. Logo, o valor esperado de X não existe. De fato

$$\sum_j |j| \, P(X = j) = \infty.$$

Definição: (Valor esperado caso absolutamente contínuo) Seja X uma variável aleatória real com função de densidade f. Dizemos que X possui valor esperado se $\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, f(x)dx < \infty$. Em tal situação se define o valor esperado de X como:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Nota: Se X é uma variável aleatória real cujo valor esperado existe, então

$$E(X) = \int_{0}^{\infty} (1 - F(x))dx - \int_{-\infty}^{0} F(x)dx,$$

em que F denota a função de distribuição da variável aleatória X.

Exemplo: Seja X uma variável aleatória com função de densidade $f(x) = 2x$, para $x \in (0, 1)$ sendo zero fora desse intervalo. O valor esperado de X é

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{0}^{1} x\, 2x\, dx = \frac{2}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Exemplo: Seja X uma variável aleatória com função de densidade

$$f(x) = \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + x^2)}; \; x \in \mathbb{R} \text{ e } \alpha > 0 \text{ constante.}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \, f(x)dx = \frac{2\alpha}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{x}{\alpha^2 + x^2} dx = \infty,$$

isto é, o valor esperado de X não existe.

Esperança de funções de variáveis aleatórias: Seja X uma variável aleatória e seja $g(\cdot)$ uma função real tal que $g(X)$ é uma variável aleatória. O valor esperado de $g(X)$, denotado por $E(g(X))$, é definido como:

- $$E(g(X)) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)\mathbb{P}(X = x_i),$$

  se X é uma variável aleatória discreta que assume os valores $x_1, x_2, \ldots$

- $$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx,$$

  se X é uma variável aleatória contínua com função densidade $f_X(x)$.

Propriedades do valor esperado: Sejam $X, X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias. Temos que:

- Se $P(X \geq 0) = 1$ e $E(X)$ existe, então, $E(X) \geq 0$.
- $E(\alpha) = \alpha$ para toda constante α.
- Se X é limitada, isto é, se existe uma constante $0 < M < \infty$, tal que $P(|X| \leq M) = 1$ então $E(X)$ existe.
- (Linearidade) Se α e β são constantes e se g e h são funções tais que $E(g(X))$ e $E(h(X))$ existem então $E(\alpha g(X) + \beta h(X))$ existe e tem-se que:

  $$E(\alpha g(X) + \beta h(X)) = \alpha E(g(X)) + \beta E(h(X)).$$

  podendo esse resultado ser estendido para a soma de n variáveis aleatórias, isto é,

  $$E(X_1 + \ldots + X_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i).$$

- Sejam g e h funções tais que $E(g(X))$ e $E(h(X))$ existem. Se $g(x) \leq h(x)$ para todo x então, $E(g(X)) \leq E(h(X))$. Em particular tem-se que $|E(X)| \leq E\,|X|$.

- Se $g(x) = x^r$, com r inteiro positivo, então $\mu'_r = \mathrm{E}X^r$, se existir é chamado de momento ao redor de zero de ordem r ou r-ésimo **momento ao redor de zero** da variável aleatória X e neste caso

$$\mu'_r = E(X^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)dx \text{ (caso contínuo);} \qquad \sum_{j=1}^{\infty} x_j^r p_j \text{ (caso discreto)}$$

- Seja $g(x) = (x - \gamma)^r$, em que γ é um número real e r é um inteiro positivo, então se $\mathrm{E}(X - \gamma)^r$ é chamado **momento de ordem r ao redor de γ.** Em particular, se $\gamma = \mathrm{E}X$, então

$$\mu_r = \mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)^r$$

é chamado de **momento central de ordem n.** Quando $r = 2$ temos que

$$\mu_2 = \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)^2 = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$$

é a **variância** e

$$\sigma = \sqrt{\mu_2}$$

é o **erro padrão** (estas quantidades são medidas de dispersão da variável aleatória ao redor de sua média).

Variância

Considere as seguintes v.a.'s:

$$U = 0, \text{ com probabilidade } 1$$

$$V = \begin{cases} -1, & \text{com prob. } 1/2 \\ 1, & \text{com prob. } 1/2 \end{cases} \quad \text{e} \quad W = \begin{cases} -10, & \text{com prob. } 1/2 \\ 10, & \text{com prob. } 1/2 \end{cases}$$

Claramente, para estas três variáveis aleatórias seus respectivos valores esperados são:

$$E(U) = E(V) = E(W) = 0$$

No entanto, claramente os valores que as três variáveis assumem são bem diferentes (dispersos)

A **variância** é uma medida quantitativa do quanto os dados estão dispersos em torno de sua média.

Definiçao: Seja X uma variável aleatória e $\mu = E(X)$ seu respectivo valor esperado. Temos que a variância de X, denotada por σ^2 ou $Var(X)$, é definida por

$$\sigma^2 = Var(X) = E(X - E(X))^2.$$

Das propriedades do valor esperado é fácil ver que

$$
\begin{aligned}
Var(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2 - 2XE(X) + (E(X))^2) \\
= E(X^2) - 2E(XE(X)) + (E(X))^2 \\
= E(X^2) - 2E(X)E[X) + (E(X))^2 \\
= E(X^2) - 2(E(X))^2(E(X))^2 \\
= E(X^2) - (E(X))^2,
\end{aligned}
$$

Propriedades da variância. Seja X uma variável aleatória com $E(X) < \infty$, seja α um número real. Então

- $Var(X) \geq 0.$
- $Var(\alpha) = 0$, para toda constante α.
- $Var(\alpha X) = \alpha^2 Var(X).$
- $Var(X + \alpha) = Var(X)$
- Sejam $X, X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatória *independentes* então

$$Var\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i).$$

Exemplo: Considere uma variável aleatória X tal que

$$P(X = m - a) = P(X = m + a) = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow E(X^k) = \frac{1}{2}[(m-a)^k + (m+a)^k].$$

$$E(X) = m, E(X^2) = \frac{1}{2}[2m^2 + 2a^2] = m^2 + a^2, Var(X) = a^2.$$

Este exemplo, mostra que podemos encontrar uma variável aleatória bem simples possuindo qualquer esperança e variância predeterminadas.

Exemplo (Caso discreto): O tempo T, em minutos, necessário para um operário processar certa peça é uma v.a. com a seguinte distribuição de probabilidade:

T	2	3	4	5	6	7
$P(T = t)$	0.1	0.1	0.3	0.2	0.2	0.1

1. Calcule o tempo médio de processamento.

2. Cada peça processada paga ao operador $\$2.00$ mas, se ele processa a peça em menos de 6 minutos, ganha $\$0.50$ por minuto poupado. Por exemplo, se ele processa a peça em 4 minutos, ganha um bônus de $\$1.00$. Encontre a distribuição, a média e a variância da v.a. S: quantia paga por peça.

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5^a edição, pág 140.

1. Tempo médio de processamento

$$
\begin{aligned}
E(T) &= \sum_{t=2}^{7} tP(T=t) \\
&= 2 \times 0.1 + 3 \times 0.1 + 4 \times 0.3 + 5 \times 0.2 + 6 \times 0.2 + 7 \times 0.1 = 4.6
\end{aligned}
$$

2. Podemos trocar os valores na tabela do tempo, pelo total ganho por peça. Note, contudo, que o operário receberá $\$2.00$ no evento $\{T=6\} \cup \{T=7\}$, logo somamos suas probabilidades. Seja S a v.a. "ganho final".

S	$\$4.00$	$\$3.50$	$\$3.00$	$\$2.50$	$\$2.00$
$P(S=s)$	0.1	0.1	0.3	0.2	0.3

Obtemos a média e a variância de S através da definição:

$$
\begin{aligned}
E(S) &= \sum_s sP(S=s) \\
&= 4 \times 0.1 + 3.5 \times 0.1 + 3 \times 0.3 + 2.5 \times 0.2 + 2 \times 0.3 = 2.75
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(S^2) &= \sum_s s^2 P(S=s) \\
&= 16 \times 0.1 + 12.25 \times 0.1 + 9 \times 0.3 + 6.25 \times 0.2 + 4 \times 0.3 = 7.975
\end{aligned}
$$

Então,

$$Var(S) = 7.975 - (2.75)^2 = 0.4125$$

Exemplo: Para a seguinte função de densidade f_X, calcular $E(X)$ e $Var(X)$:

$$f_X(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1, \\ 2 - x & 1 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 x(2-x) dx = 1,$

Note que pela definição de momento central de uma variável aleatória para $r = 2$ temos

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2 f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x-1)^2 f_X(x)dx = \frac{1}{6}.$$

Exemplo (Caso contínuo): Voltando para o nosso exemplo da distribuição triangular (caso contínuo) em que a função de densidade é da forma

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0, \\ 4x & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1/2, \\ 4(1-x) & \text{se} \quad 1/2 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{se} \quad x > 1. \end{cases}$$

Calcule a esperança, a variância e a f.d.a. da variável aleatória X com a densidade triangular em $[0, 1]$.

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5^a edição, pág 171.

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = \int_0^{1/2} x4xdx + \int_{1/2}^{1} x4(1-x)dx \\
&= \left[\frac{4x^3}{3}\right]_0^{1/2} + \left[\frac{2}{3}x^2(3-2x)\right]_{1/2}^{1} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mathbb{E}(X))^2 f_X(x)dx \\
&= \int_0^{1/2} \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 4xdx + \int_{1/2}^{1} \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 4(1-x)dx \\
&= \left[x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^{1/2} + \left[-x^4 + \frac{8}{3}^3 - \frac{5}{2}x^2 + x\right]_{1/2}^{1} \\
&= \frac{1}{24}.
\end{aligned}
$$