Slides Semana 2

Princípio da Soma e do Produto

Nota: Propriedades da probabilidade condicional

Seja B um evento tal que $P(B) > 0$. Então

1. $P(\emptyset|B) = 0;$
2. $P(\Omega|B) = 1;$
3. $P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$
4. $P(A \cup C|B) = P(A|B) + P(C|B) - P(A \cap C|B);$
5. Se $A \cap C = \emptyset$, então
$$P(A \cup C|B) = P(A|B) + P(C|B);$$
6. Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são mutuamente exclusivos, temos então que
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i|B\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i|B).$$

Como vimos, a mais importante consequência da definição de probabilidade condicional é obtida ao se escrever:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) \quad (1),$$

ou equivalentemente,

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) \quad (2).$$

Chamamos, algumas vezes, (1) e (2) de **Teorema da multiplicação de probabilidades**, podendo ser generalizado à probabilidade da interseção de n eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ por meio de probabilidades condicionais sucessivas.

Regra de multiplicação: Consideremos uma sequência finita de eventos aleatórios $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tais que os eventos condicionais $A_i|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{i-1}$ tenham probabilidades positivas. Então temos que a probabilidade de acontecerem todos os eventos é

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)\ldots P(A_n| \cap_{i=1}^{n-1} A_i).$$

Prova: Use indução. Note também que

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)\frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)}\frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} \dots \frac{P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)}{P(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)}.$$

e usando a definição de probabilidade condicional, podemos reescrever o lado direito da igualdade acima como

$$P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots P(A_n| \cap_{i=1}^{n-1} A_i)$$

o qual verifica a regra.

Exemplo: Num jogo de cartas, três cartas, são retiradas sem substituição de um baralho (52 cartas). Qual a probabilidade de que nenhuma das cartas retiradas seja um ouro? Note que qualquer carta tem a mesma probabilidade de ser retirada. Agora definamos o evento

$$A_i = \{\text{a } i\text{-ésima carta não é ouro}\},$$

para $i = 1, 2, 3$. Desejamos obter obter $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$. Lembremos que cada naipe possui 13 cartas.

As probabilidades condicionais deste experimento são

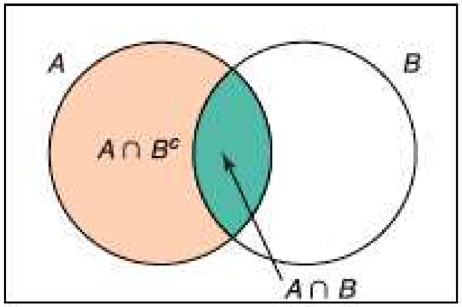
$$\begin{aligned} P(A_1) &= \frac{39}{52}, \\ P(A_2|A_1) &= \frac{38}{51}, \\ P(A_3|A_1 \cap A_2) &= \frac{37}{50}. \end{aligned}$$

Logo, pela regra da multiplicação

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{39}{52} \times \frac{38}{51} \times \frac{37}{50} \approx 0,41.$$

Considere dois eventos quaisquer A e B. Para que um elemento esteja em A, há duas possibilidades: O elemento está em A e em B, ou o elemento está em A, mas não está em B.

Portanto, podemos escrever $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$, sendo que B e B^c formam uma partição de Ω. Neste caso, como os eventos são disjuntos temos:



$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$$

E sabemos que:

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B)$$

$$P(A \cap B^c) = P(A \mid B^c)P(B^c)$$

Então reescrevemos:

$$P(A) = P(A \mid B)P(B) + P(A \mid B^c)P(B^c)$$

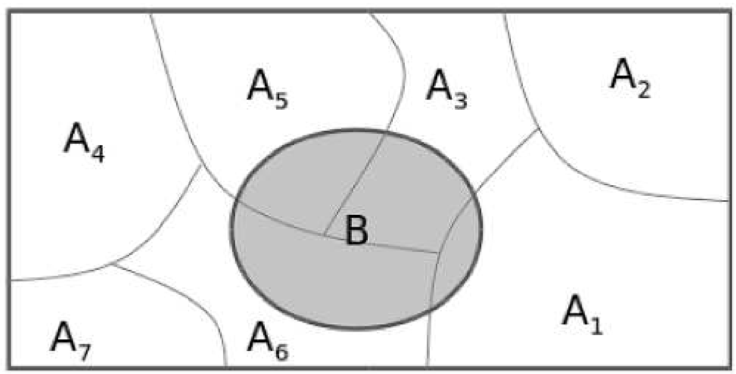
Interpretação: a probabilidade do evento A é uma média ponderada de $P(A \mid B)$ e $P(A \mid B^c)$. O peso de cada probabilidade condicional é a probabilidade do evento que está sendo levado em conta ao calcular a probabilidade condicional de A.

Utilizando o seguinte teorema pode-se obter uma probabilidade (incondicional) de uma probabilidade condicional.

Teorema das Probabilidades Totais. Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos dois a dois disjuntos que formam uma partição do espaço amostral, isto é, $_{i=1}^nA_i=$ e assuma que $P(A_i) > 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Então, para qualquer evento B, temos que

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B) \\ &= P(A_1)P(B|A_1) + \cdots + P(A_n)P(B|A_n) = \sum_i P(A_i)P(B|A_i). \end{aligned}$$

Uma representação esquemática do teorema anterior pode ser vista no gráfico da Figura abaixo.



Prova: Para demonstrarmos o teorema anterior basta observarmos (ajudado pelo gráfico da Figura anterior) que a sequência de eventos $A_1, A_2, \ldots$ formam uma partição. Então, para qualquer $B \subset \Omega$, segue que, $B = \bigcup_i (A_i \cap B)$ e como os A_i são disjuntos dois a dois temos que $B \cap A_i$ também são disjuntos logo concluímos que

$$P(B) = \sum_i P(A_i \cap B) = \sum_i P(A_i)P(B|A_i).$$

Interpretação do Teorema da Probabilidade Total Os eventos $A_1, A_2, \ldots$ são possíveis causas e o evento A é um efeito particular associado a uma causa, $P(B|A_i)$ especifica a relação estocástica entre a causa A_i e o efeito B.

Nota: Seja $\{D, D^c\}$ uma partição do espaço amostral, onde D é o evento que um dado indivíduo possui uma certa doença. Seja A o evento que determinado teste para o diagnóstico da doença deu positivo. Então, $P(A|D^c)$ indica o *falso positivo* e $P(A^c|D)$ representa o *falso negativo*.

- Estas probabilidades determinam a qualidade do teste, quanto menores as probabilidades de falso negativo e falso positivo melhor a qualidade do teste.

Caso as probabilidades $P(D), P(A|D), P(A|D^c)$ sejam conhecidas pode-se usando o Teorema da Probabilidade Total obter a probabilidade incondicional de determinado exame dar positivo $P(A)$.

Regra de Bayes

Geralmente, o que se busca é saber se dado que o resultado do exame deu positivo qual a probabilidade de que o indivíduo esteja doente. Pode-se obter esta probabilidade utilizando a famosa **fórmula de Bayes**:

$$
\begin{aligned}
P(D|A) &= \frac{P(A \cap D)}{P(A \cap D) + P(A \cap D^c)} \\
&= \frac{P(A|D)P(D)}{P(A|D)P(D) + P(A|D^c)P(D^c)}.
\end{aligned}
$$

Teorema de Bayes (regra de Bayes) Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e $A_1, A_2, \ldots,$ uma partição finita de Ω, então é satisfeita para cada $B \in \mathcal{F}$ com $P(B) > 0$ a fórmula:

$$
P(A_n|B) = \frac{P(B|A_n)P(A_n)}{\sum_j P(B|A_j)P(A_j)}, \quad \text{para todo} \quad n.
$$

Prova: Note que usando o teorema de multiplicação

$$
P(A_n|B) = \frac{P(A_n \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_n)P(A_n)}{\sum_j P(B|A_j)P(A_j)}.
$$

Interpretação: Suponhamos que os eventos $A_1, A_2, ...$ são todas as possíveis causas, mutuamente excludentes de um evento B. Sob a suposição de que o evento B tenha sido observado, a fórmula de Bayes permite conhecer qual dessas causas é a mais provável de haver produzido o evento B.

Exemplo: Companhia de Seguros

Uma companhia de seguros acredita que as pessoas podem ser divididas em duas categorias:

1. aquelas que estão mais sujeitas a acidentes.
2. aquelas que não estão mais sujeitas a acidentes.

Os dados indicam que uma pessoa da categoria 1
terá um acidente durante o período de um ano com probabilidade 0.1.
A probabilidade para todas as outras pessoas é 0.05.

Suponha que a probabilidade de um novo cliente pertencer à categoria 1 seja 0.2.

Qual a probabilidade de que o novo cliente tenha um acidente durante o primeiro ano? E se um novo cliente tem um acidente durante o primeiro ano, qual é a probabilidade de que ele pertença à categoria 1?

Pergunta: Qual a probabilidade de que o novo cliente tenha um acidente durante o primeiro ano?

Considere os eventos:

A = {o novo cliente tem um acidente durante o primeiro ano}
B = {o novo cliente pertence à categoria 1}
B^c = {o novo cliente pertence à categoria 2}

Pelo Teorema das Probabilidades Totais:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \mid B)P(B) + P(A \mid B^c)P(B^c) \\ &= 0.1 \times 0.2 + 0.05 \times 0.8 = 0.06 \end{aligned}$$

Pergunta: Se um novo cliente tem um acidente durante o primeiro ano, qual é a probabilidade de que ele pertença à categoria 1?

A = {o novo cliente tem um acidente durante o primeiro ano}
B = {o novo cliente pertence à categoria 1}

Pelo Teorema de Bayes:

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \mid B)P(B)}{P(A)} = \frac{0.1 \times 0.2}{0.06} = \frac{1}{3}$$

Exemplo: Fabricação defeituosa

Um fabricante produz televisores LED em três fábricas A, B e C, que respondem, respectivamente, por 40%, 35% e 25% de sua produção total. Registros históricos da produção indicam que 2% da produção da fábrica A é defeituosa, assim como 1% da de B, e 3% da fábrica C. Escolhemos um televisor aleatoriamente, e ele é defeituoso. Qual a probabilidade dele ter sido produzido na fábrica B?

Chamemos por B o evento **fabricado em** B e def o evento ser defeituoso o qual pode vir de qualquer uma das 3 fábricas (e só de uma!). Logo, os eventos são mutuamente excludentes. Portanto,

$$P(def) = P(A)P(def|A) + P(B)P(def|B) + P(C)P(def|C).$$

Agora,

$$P(B|def) = \frac{(B \cap def)}{P(def)} = \frac{P(B)P(def|B)}{P(def)}$$

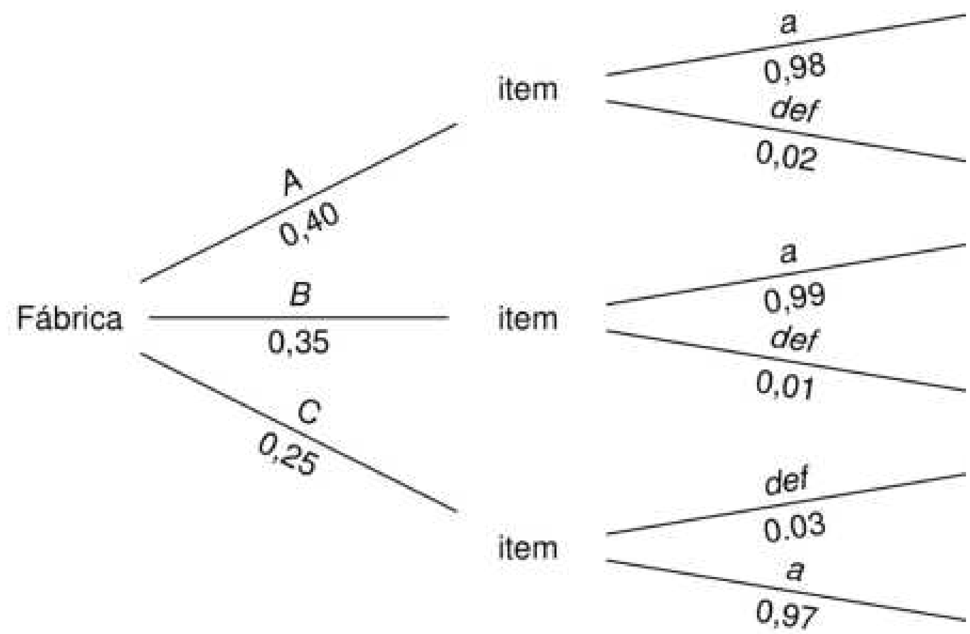
De acordo com os dados fornecidos no problema temos

$$P(def) = (0,40 \times 0,02) + (0,35 \times 0,01) + (0,25 \times 0,03) = 0,019$$

Desta forma,

$$P(B|def) = \frac{0,35 \times 0,01}{(0,40 \times 0,02) + (0,35 \times 0,01) + (0,25 \times 0,03)} = 0,184.$$

A visualização deste problema é simplificada pela visualização do diagramas em árvore apresentado na Figura abaixo



Variáveis aleatórias

Considere o experimento aleatório do lançamento de duas moedas. Sabemos que o espaço amostral nesse caso é

$$\Omega = \{CC, CK, KC, KK\}, \text{ em que } C \text{ representa cara e } K \text{ coroa.}$$

Podemos estar interessados no número de caras que pode ocorrer nos dois lançamentos. Portanto, é natural definirmos uma função de Ω em $\mathbb{R}$ que associa a cada ponto de Ω o seu número de caras: Seja X a função definida no espaço amostral que é igual ao número de caras nos dois lançamentos. Temos então:

Esp. Amostral	Valores de X
CC	2
CK	1
KC	1
KK	0

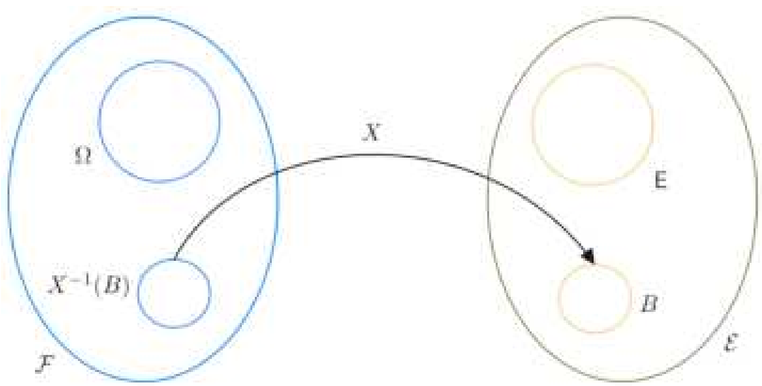
A função que associa cada ponto do espaço amostral ω a um número real é denominada **variável aleatória.**

Informalmente, uma variável aleatória é um quantitativo numérico de um possível resultado de um experimento aleatório.

Como esse possível resultado é determinado pelo experimento alaetório, podemos atribuir probabilidades aos valores das variáveis aleatórias.

Definição (Variável aleatória real): Seja $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ um espaço de probabilidade arbitrário. Uma variável aleatória real X é uma função cujo domínio é Ω e cujo contradomínio é um conjunto não-vazio de números reais, tal que para todo conjunto Borel $B \in \mathcal{E}$, satisfaz-se que a imagem inversa

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathfrak{F}$$



Resultado: A σ-álgebra de Borel é gerada pelos intervalos da forma $(-\infty, x]$ com $x \in \mathbb{R}$, então tem-se que X é uma variável aleatória real, se, e somente se, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se que

$$X^{-1}((-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathfrak{F}.$$

Definição: (Evento aleatório) Seja X uma variável aleatória definida sobre o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ e com valores num espaço mensurável $(\Omega', \mathfrak{F}')$. Definimos

$$\{X \in B\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}, \quad \text{para todo } B \in \mathfrak{F}'.$$

Definição: Informalmente, uma *variável aleatória (v. a.)* X é uma função definida num espaço amostral Ω que assume valores nos reais, isto é,

$$\begin{aligned} X: \quad & \Omega \to \mathbb{R} \\ & \omega \mapsto X(\omega). \end{aligned}$$

Exemplo: Um dado é lançado ao acaso uma vez. Neste caso o espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Se observamos o número da face obtida no lançamento podemos definir a variável aleatória X como:

$$\begin{aligned} X: \quad & \Omega \to \mathbb{R} \\ & \omega \mapsto X(\omega) = \omega. \end{aligned}$$

A variável aleatória aqui definida atribui a cada elemento ω do espaço amostral Ω um número real $X(\omega)$ da seguinte forma

$X:$	ω	$\rightarrow$	$\mathbb{R}$
	1	$\mapsto$	$X(1) = 1$
	2	$\mapsto$	$X(2) = 2$
	3	$\mapsto$	$X(3) = 3$
	4	$\mapsto$	$X(4) = 4$
	5	$\mapsto$	$X(5) = 5$
	6	$\mapsto$	$X(6) = 6$

Logo, dizemos que a variável aleatória assume valores em $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Variáveis aleatórias discretas e contínuas

1. Número de arranhões em uma superfície;
2. Número de lançamentos de um dado até aparecer o número 3;
3. Número de bits transmitidos que foram recebidos com erro;
4. corrente elétrica, comprimento, pressão, temperatura, peso, voltagem.

Os exemplos 1, 2 e 3 os valores assumidos pelas v.a.'s correspondentes pertencem a um conjunto enumerável de números (inteiros não negativos). Já no exemplo 4, as v. a.'s correspondentes assumem valores reais (não negativos).

As v.a.'s descritas nos exemplos 1, 2, e 3 são chamadas **variáveis aleatórias discretas** e as descritas em 4 são chamadas de **variáveis aleatórias contínuas**.

Definição:

- Uma v.a. é **discreta** se assume valores em um conjunto finito ou enumerável de valores.
- Uma v.a. é **contínua** se assume valores em $\mathbb{R}$ ou em um intervalo de $\mathbb{R}$.

Função de probabilidade (função de frequência)

Seja X uma variável aleatória discreta que assume os valores $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. A função de probabilidade $p_X(\cdot)$ é definida como

$$\begin{aligned} p_X(x_j) :&\Omega \to [0,1] \\ &x_j \mapsto P(X = x_j). \end{aligned}$$

Temos ainda que se X assume os valores $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, então $p_X(\cdot)$ satisfaz as seguintes propriedades:

- $p_X(x_j) \geq 0, \ \forall j = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$.
- $\sum_{j=1}^{\infty} p_X(x_j) = \sum_{j=1}^{\infty} P(X = x_j) = 1$

Exemplo Suponha que a variável aleatória X discreta assume as seguintes probabilidades

x	-1	0	1	2
$p_X(x)$	$\frac{1}{3}$	K	$\frac{1}{2}$	$4K$

Determine o valor de K de modo que $p_X(\cdot)$ seja uma função de probabilidade.

Exemplo: Vendedor

Um vendedor de revistas visita cada casa duas vezes.

Com anos de experiência, ele acredita que a probabilidade de uma venda logo na primeira visita é 0.3.

Já na segunda visita, ele acredita que a probabilidade de venda seja 0.6. Ele acredita também que o resultado em cada visita seja independente.

Qual é a distribuição de probabilidade da v.a. X: número de vendas feitas em uma casa?

Considere os eventos:

- V_1 = {venda na primeira visita}
- V_2 = {venda na segunda visita}

Espaço amostral do fenômeno aleatório:

$$\Omega = \{(V_1^c \cap V_2^c), (V_1 \cap V_2^c), (V_1^c \cap V_2), (V_1 \cap V_2)\}$$

Então, a v.a. X pode assumir os valores 0, 1 ou 2.

Temos $X = 0$ se nenhuma venda ocorrer nas duas visitas.

$$\begin{aligned} P(X=0) =& P(V_1^c \cap V_2^c) \overset{ind}{=} P(V_1^c)P(V_2^c) \\ =& [1-P(V_1)][1-P(V_2)] = (1-0.3)(1-0.6) = 0.28 \end{aligned}$$

- $X = 1$ quando ocorre uma venda apenas na primeira visita **ou** uma venda apenas segunda visita.

Então,

$$\begin{aligned} P(X=1) =& P[(V_1 \cap V_2^c) \cup (V_1^c \cap V_2)] \\ =& P(V_1 \cap V_2^c) + P(V_1^c \cap V_2) \\ \overset{ind}{=}& P(V_1)P(V_2^c) + P(V_1^c)P(V_2) \\ =& (0.3)(1-0.6) + (1-0.3)(0.6) \\ =& 0.54 \end{aligned}$$

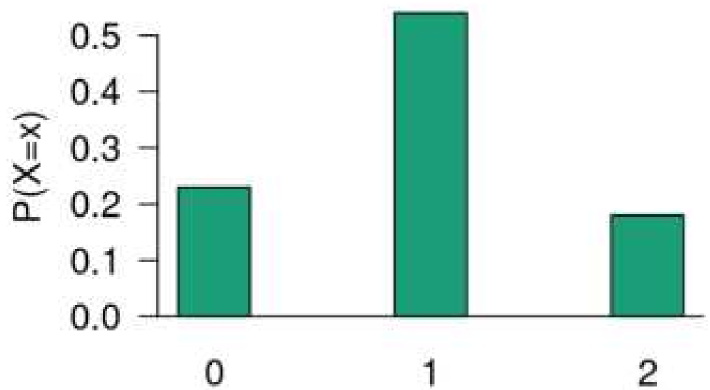
- $X = 2$ quando ocorre uma venda nas duas visitas.

$$\begin{aligned} P(X=2) =& P(V_1 \cap V_2) \\ \overset{ind}{=}& P(V_1)P(V_2) = (0.3)(0.6) = 0.18 \end{aligned}$$

Logo a v.a. X satisfaz a propriedade:

$$\sum_{i=0}^{2} P(X=i) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$
$$= 0.28 + 0.54 + 0.18 = 1$$

X	0	1	2
$P_X(x) = P(X=x)$	0.28	0.54	0.18



A altura de cada barra representa a probabilidade da v.a assumir o valor $X = x$.

Função de distribuição acumulada

Definição (Função de distribuição:) Seja X uma variável aleatória real. A função $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$, definida por

$$F_X(x) = P(X \in (-\infty, x]) = P(X \leq x)$$

é chamada de função de distribuição ou função de distribuição acumulada da variável aleatória X.

- Se X é uma variável aleatória discreta cujos possíveis valores são $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, em que $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots$, então a função de distribuição acumulada de X, F_X, é uma função escada tal que:
- Ela é Constante nos intervalos $[x_{i-1}, x_i)$;
- O tamanho do salto em x_i é igual a $p_X(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i)$.

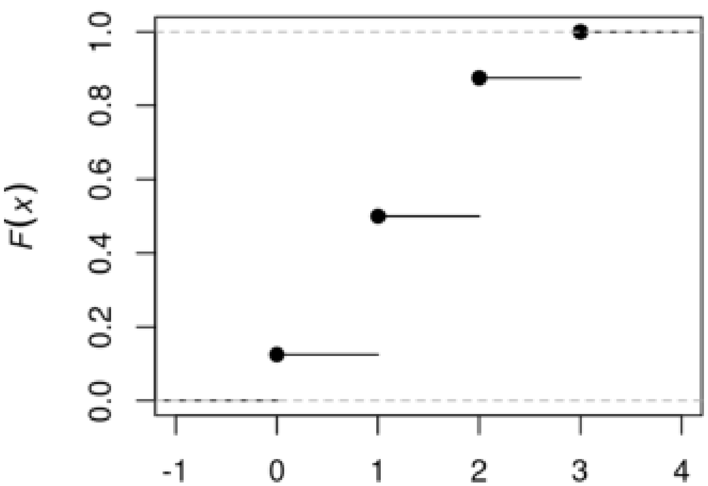
Exemplo: Suponhamos que se atira ao acaso uma moeda corrente três vezes consecutivas. O espaço amostrale é o produto cartesiando $\{Cara, Coroa\} \times \{Cara, Coroa\} \times \{Cara, Coroa\}$ $\Omega = \{(Cara, Cara, Cara), \ldots (Coroa, Coroa, Coroa)\}$. Definimos

$$X = \text{número de caras obtidas.}$$

Note que $X = \{0, 1, 2, 3\}$

A função de distribuição F_X da variável aleatória X está dada por

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } \; x < 0, \\ \frac{1}{8}, & \text{se } \; 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{se } \; 1 \leq x < 2, \\ \frac{7}{8}, & \text{se } \; 2 \leq x < 3, \\ 1, & \text{se } \; x \geq 3. \end{cases}$$



Exemplo: Vacinação

Um grupo de 1000 crianças foi analisado para determinar a efetividade de uma vacina contra um tipo de alergia. As crianças recebiam uma dose de vacina e após um mês passavam por um novo teste. Caso ainda tivessem tido alguma reação alérgica, recebiam outra dose. A variável de interesse é X = número de doses.

Doses (X)	1	2	3	4	5
Frequência	245	288	256	145	66

Uma criança é sorteada ao acaso, qual a probabilidade dela ter recebido 2 doses?

$$P(X = 2) = \frac{288}{1000} = 0.288$$

Distribuição de Probabilidade de X

Doses (X)	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0.245	0.288	0.256	0.145	0.066

Qual a probabilidade da criança ter recebido até duas doses?

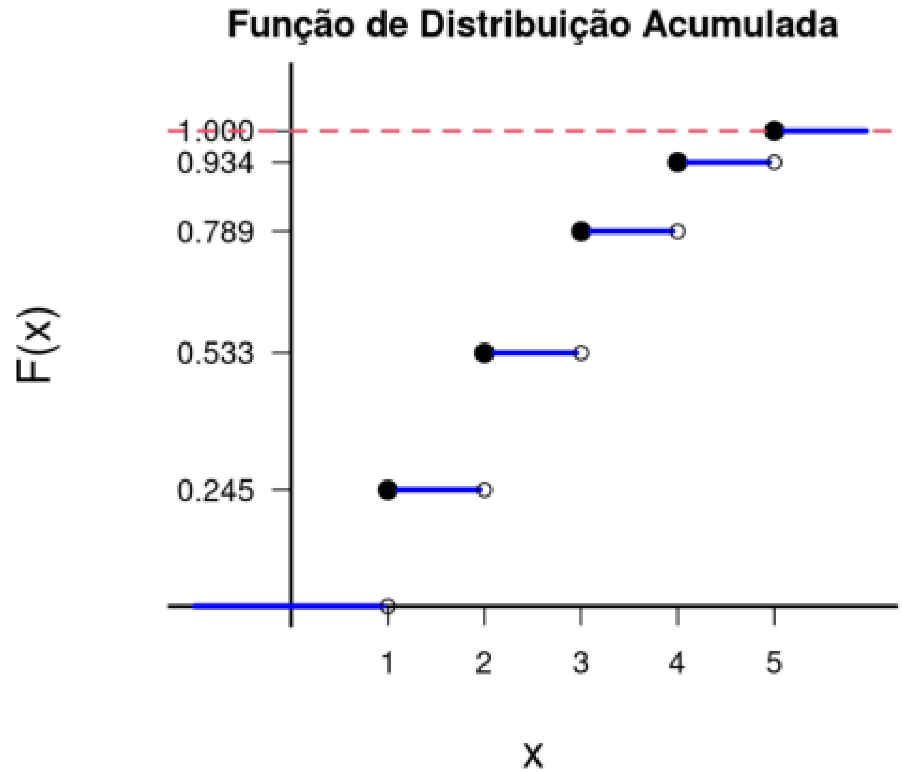
$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= 0.245 + 0.288 \\ &= 0.533 \end{aligned}$$

Note que a f.d.a. de $X =$ número de doses é definida para qualquer valor real, logo:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 0.245 & 1 \leq x < 2 \\ 0.533 & 2 \leq x < 3 \\ 0.789 & 3 \leq x < 4 \\ 0.934 & 4 \leq x < 5 \\ 1 & x \geq 5 \end{cases}$$

Função de distribuição acumulada (f.d.a.) do número de doses (X)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 0.245 & 1 \leq x < 2 \\ 0.533 & 2 \leq x < 3 \\ 0.789 & 3 \leq x < 4 \\ 0.934 & 4 \leq x < 5 \\ 1 & x \geq 5 \end{cases}$$



Variável aleatória absolutamente contínua

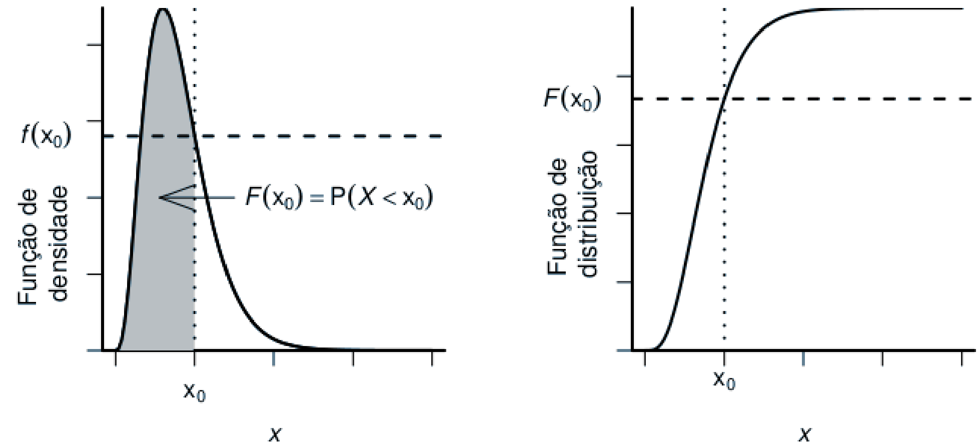
Definição: Seja X uma variável aleatória real. Dizemos que X é absolutamente contínua, se, e somente se, existe uma função $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ que é Riemman integrável, tal que

$$F(x) = F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

a função f se chama de **função de densidade** de X. Dado que $F(x) \to 1$ quando $x \to \infty$ então $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt = 1.$

Nota: Para o caso de funções limitadas, se f é uma função definida num intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e $\mathcal{P} : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ é uma partição arbitrária de $[a, b]$. Dizemos que a função f é Riemann integrável no intervalo $[a, b]$, se existir (e for finito) o limite seguinte: $\lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\epsilon_i)\Delta x_i$, independentemente da partição $\mathcal{P}$ do intervalo $[a, b]$, ou de como os pontos ϵ_i pertencentes aos subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ são escolhidos, em que $|\mathcal{P}|$ é o comprimento do maior intervalo contido na partição $\mathcal{P}$ e $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

No gráfico da Figura ao lado podemos observar a função de distribuição representada como a área embaixo da curva da função de densidade (painel esquerdo) e como uma função nos valores x (painel direito).



Podemos verificar que a função f satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

2. $f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$ para todo x onde F seja derivável.

3. $\int_a^b f(x)dx = P(a \leq X \leq b)$.

A propriedade 2 implica que:

$$2(\Delta x)f(x) \approx F(x + \Delta x) - F(x - \Delta x) = P(x - \Delta x < X \leq x + \Delta x)$$

isto é, a probabilidade de que X esteja num intervalo de comprimento pequeno ao redor de x é igual a $f(x)$ pelo comprimento do intervalo.

A função de densidade de probabilidade satisfaz as seguintes propriedades: $f_X(x) \geq 0 \; \forall x$ e tudo o que se deseja saber sobre X pode ser respondido em termos de f_X. Por exemplo, a probabilidade de eventos definidos em termos das correspondentes variáveis aleatórias:

$$P(X \in B) = \int_B f_X(x)dx.$$

Temos então que

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx.$$

Alem disso,

$$P(X = a) = \int_a^a f_X(x)dx = 0.$$

Assim, a probabilidade de uma variável aleatória contínua assumir um valor específico qualquer é zero. Portanto, para uma variável aleatória contínua X, temos que

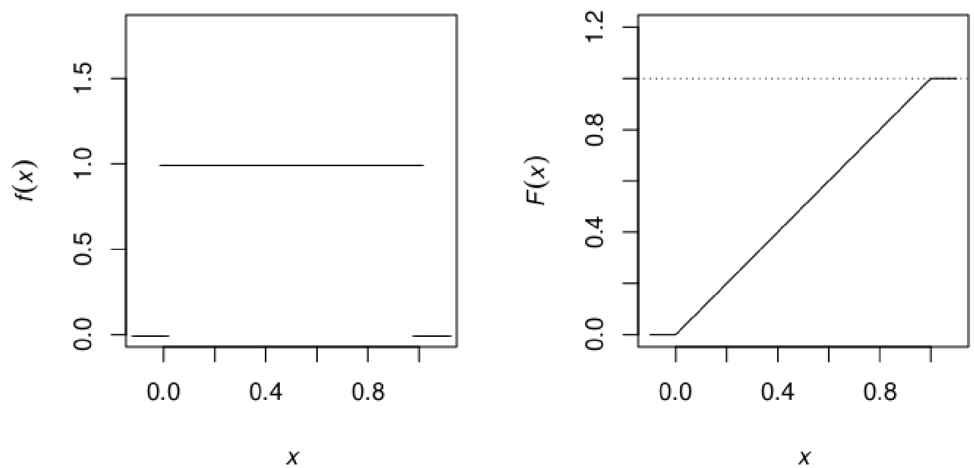
$$\mathbb{P}(X < a) = \mathbb{P}(X \leq a) = F_X(a) = \int_{-\infty}^a f_X(x)dx.$$

Exemplo

Seja X uma variável aleatória contínua cuja função de distribuição é dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ x & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{se } x \geq 1. \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é uma função de densidade para X. Para este exemplo, os gráficos de $f(x)$ e $F(x)$ aparecem na Figura abaixo.



Exemplo

Uma variável aleatória X tem distribuição triangular no intervalo $[0, 1]$ se sua f.d.p. for dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0, \\ Cx & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1/2, \\ C(1-x) & \text{se} \quad 1/2 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{se} \quad x > 1. \end{cases}$$

1. Qual valor deve ter a constante C?
2. Faça o gráfico de $f_X(x)$.
3. Determine $P(X \leq 1/2)$, $P(X > 1/2)$ e $P(1/4 \leq X \leq 3/4)$.

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5^a edição, pág 166.

Solução: 1. Devemos escolher C de modo que $f(x)$ satisfaça:

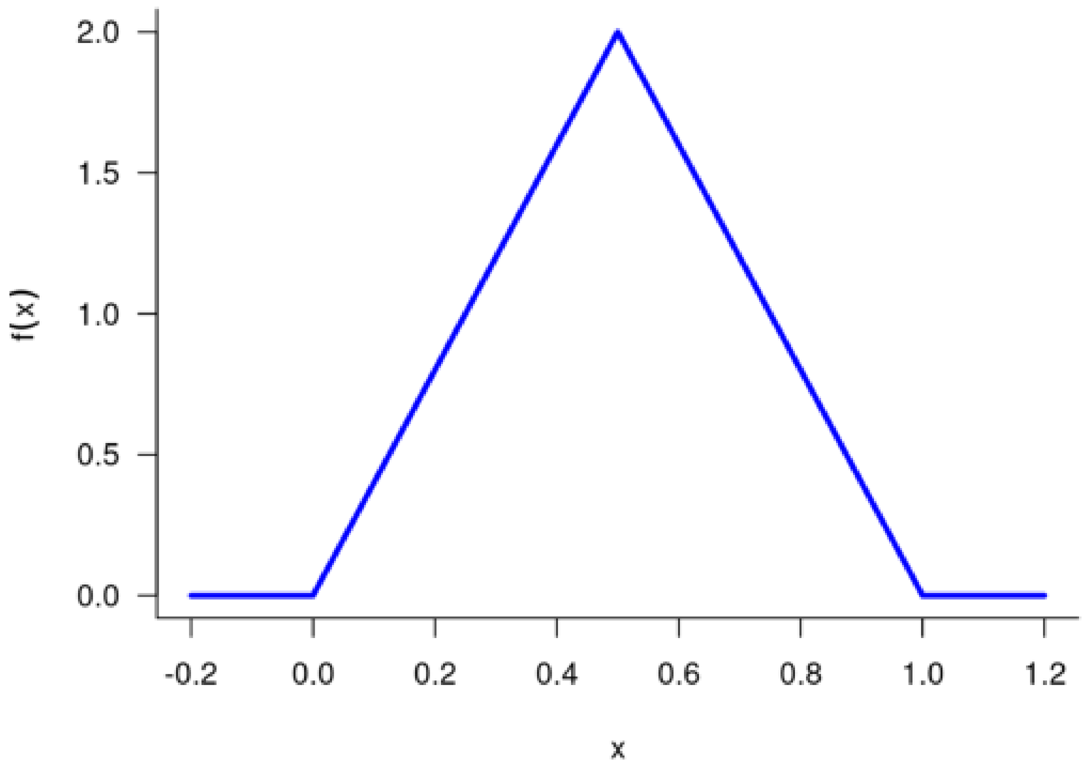
- $f_X(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$; e
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$.

Pela primeira condição, temos que $C > 0$. Agora, para que C satisfaça a segunda condição, devemos integrar $f_X(x)$:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx &= \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1/2} Cxdx + \int_{1/2}^{1} C(1-x)dx + \int_{1}^{\infty} 0dx \\
&= C\int_{0}^{1/2} xdx + C\int_{1/2}^{1} (1-x)dx = C\left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{1/2} + \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{1/2}^{1}\right) \\
&= C\left(\frac{1}{8} + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right) = \frac{C}{4} \\
&\Rightarrow \frac{C}{4} = 1
\end{aligned}$$

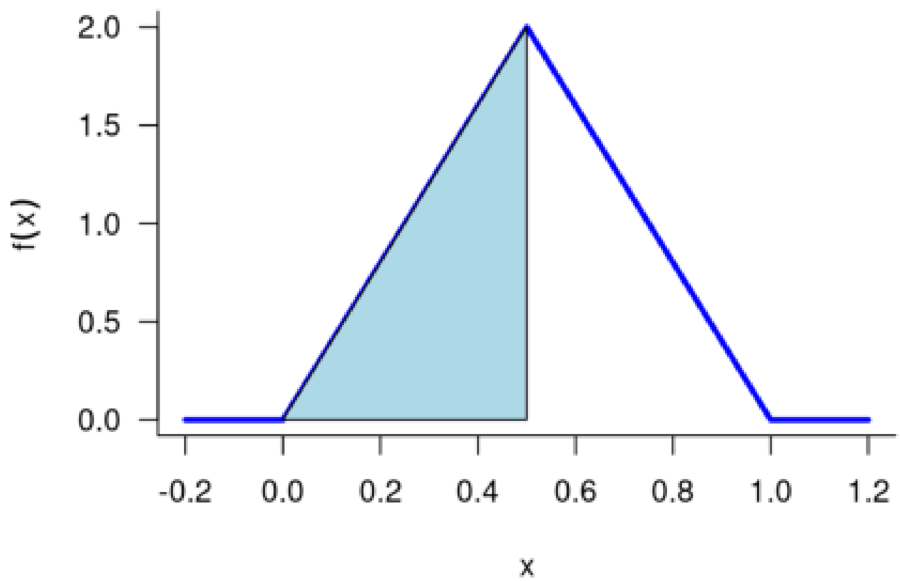
$$\therefore C \text{ deve ser igual a 4.}$$

2 A função de densidade $f_X(x)$:



3 Para encontrarmos as probabilidades dos eventos, basta integrar nas regiões correspondentes:

$$P(X \leq 1/2) = \int_0^{1/2} f_X(x)dx = \int_0^{1/2} 4xdx = 1/2\,.$$



Note que $P(X > 1/2) = 1 - P(X \leq 1/2) = 1 - 1/2 = 1/2$

$$P(1/4 \leq X \leq 3/4) = \int_{1/4}^{3/4} f_X(x)dx = \int_{1/4}^{1/2} 4xdx + \int_{1/2}^{3/4} 4(1-x)dx = \frac{3}{4}\,.$$