



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA  
PROVA I — MATD44 — 17/06/2025



**Professor:** Raydonal Ospina

**Regras:** A prova é individual. Leia com atenção as perguntas. A prova deve ser claramente resolvida.

**I** ▶ **(Plano amostral geral)** Seja  $\mathcal{U} = \{1, 2, 3\}$  uma população finita de tamanho  $N = 3$  e  $\mathbf{Y} = \{1, 2, 3\}$  o vetor da característica populacional renda bruta (mensal em salários mínimos) familiar. Suponha que o seguinte plano amostral é implementado  $p(s_1) = p(\{1, 2\}) = \frac{1}{2}$ ,  $p(s_2) = p(\{1, 3\}) = \frac{1}{4}$  e  $p(s_3) = p(\{2, 3\}) = \frac{1}{4}$ .

- Determine as probabilidades de inclusão de primeira e segunda ordem. Determine se o plano amostral induzido pelo esquema de amostragem proposto é mensurável?
- Forneça a distribuição de probabilidades do estimador de Horvitz-Thompson  $\hat{t}_\pi$  para o total populacional da renda bruta (mensal em salários mínimos) familiar.
- Determine a variância do estimador de Horvitz-Thompson  $\hat{t}_\pi$  para o total populacional da renda bruta (mensal em salários mínimos) familiar sob este plano amostral.

**2** ▶ **(Plano amostral AAS)** Uma amostra aleatória simples e sem substituição de 5 pessoas foi selecionada de uma população de 100 trabalhadores da empresa LInCaTech. Foram coletadas as informações sobre a Renda mensal em miles de reais (Renda) e o sexo do trabalhador. Com as informações da tabela 1 estime:

- A renda média dos trabalhadores. Estabeleça um intervalo de 95% para a renda média.
- A renda total dos trabalhadores. Estabeleça um intervalo de 95% para a renda total.

ID	Sexo	Renda
1	Fem	1
2	Mas	2
3	Fem	3
4	Fem	4
5	Mas	5

Tabela 1: Tabela de Informações dos empregados na amostra

**3** ▶ **(Amostragem Bernoulli)** Seja  $s$  uma amostra obtida de um plano amostral de tipo Bernoulli com probabilidades de inclusão  $\pi_k = \pi$  para todo  $k \in \mathcal{U}$  (população). Seja  $n_s$  o tamanho de amostra da amostra  $s$ . Mostre que a probabilidade condicional de se obter  $s$  dado  $n_s$  é a mesma que a probabilidade obtida por uma amostragem aleatória simples sem substituição de tamanho fixado  $n_s$  de  $N$  (Tamanho da população).

**4** ▶ **(Amostragem Sistemática)** Suponha uma população de 7 elementos cujos valores para a característica de interesse sejam dados por  $\mathbf{Y} = \{1, 3, 5, 7, 6, 4, 2\}$ . Calcular a variância do estimador de Horvitz-Thompson para o total populacional em um plano amostral sistemático com  $a = 2$  grupos. Para esse caso específico, o plano amostral sistemático é mais eficiente do que o plano amostral aleatório simples sem reposição? Explique.

**5** ▶ **(Amostragem estratificada)** A Tabela 2 contém as informações do gasto mensal em serviços públicos de uma amostra aleatória estratificada de 120 famílias na cidade de Salvador a qual foi geograficamente dividida em três estratos: Norte, Centro e Sul.

Estatísticas	Estratos		
	Norte (1)	Centro (2)	Sul (3)
$N_h$	4000	6000	10000
$W_h$	0,3	0,2	0,5
$n_h$	40	36	44
$\bar{y}_h$	1,2	2,4	0,6
$\bar{Y}_h$	9600	7200	6000
$s_h^2$	0,36	1,21	0,04
$\text{Var}(\bar{y}_h)$	0,000993	0,004404	0,000226

Tabela 2: Informações do gasto familiar mensal em serviços públicos (em salários mínimos) a partir de uma amostra aleatória simples estratificada na cidade de Salvador.

Estime o gasto total de toda a população e estabeleça um intervalo de confiança de 95% para o total populacional.

BOA PROVA