Documentation Projet: Pricing d'Options Financières

SOLTANI Rayen, NY AVOTRA Eliasy

April 29, 2025

Contents

1 Introduction

Ce projet a pour objectif de mettre en application les notions théoriques étudiées dans le cour de "Applied Mathematics for Finance" du Master 2 Gestion de Portefeuille de l'IAE Paris-Est dispensé par Monsieur Al-Wakil.

Nous avons choisi de travailler sur les trois modèles vu en cours:

- Le modèle de **Black-Scholes** (option européenne uniquement)
- L'**Arbre Binomial de Cox-Ross-Rubinstein** (options européennes et américaines)
- La **Méthode de Monte Carlo** (option européenne)

2 Modèle de Black-Scholes

2.1 Formule générale

Pour une **option Call européenne**, le prix théorique C est donné par :

$$C = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) \tag{1}$$

Pour une **option Put européenne** :

$$P = K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1) \tag{2}$$

où :

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \tag{3}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} \tag{4}$$

2.2 Interprétation des paramètres

- S_0 : Prix du sous-jacent aujourd'hui
- K : Prix d'exercice (strike)
- T : Temps à maturité (en années)
- r : Taux d'intérêt sans risque (continu)
- σ : Volatilité du sous-jacent
- $N(\cdot)$: Fonction de répartition de la loi normale standard

3 Arbre Binomial de Cox-Ross-Rubinstein (CRR)

3.1 Structure de l'arbre

L'arbre binomial modélise le prix du sous-jacent par une série de montées et descentes possibles à chaque pas de temps.

- Facteur de hausse : $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$
- Facteur de baisse : $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1/u$
- Probabilité neutre au risque :

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} \tag{5}$$

3.2 Calcul du prix

Le prix de l'option est obtenu par :

1. Construction de l'arbre des prix de l'actif
2. Calcul des payoffs aux nœuds terminaux
3. Remontée de l'arbre par actualisation des valeurs :

$$\text{Valeur du nœud} = e^{-r\Delta t}(p \times \text{Valeur du nœud haut} + (1-p) \times \text{Valeur du nœud bas}) \tag{6}$$

Pour une option américaine, on prend à chaque nœud :

$$\text{Valeur} = \max(\text{Payoff immédiat}, \text{Valeur de continuation})$$

4 Méthode de Monte Carlo

4.1 Principe général

La méthode Monte Carlo simule de nombreux chemins possibles pour le prix du sous-jacent à l'échéance selon :

$$S_T = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma\sqrt{T}Z\right) \tag{7}$$

où $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ est un tirage aléatoire de loi normale standard.

4.2 Prix de l'option

Le prix de l'option est donné par :

$$\text{Prix} = e^{-rT}\mathbb{E}[\text{Payoff}] \tag{8}$$

$$\text{Payoff Call} = \max(S_T - K, 0) \qquad \text{Payoff Put} = \max(K - S_T, 0)$$

La moyenne est prise sur toutes les simulations.

5 Les Grecques (Greeks)

5.1 Introduction

Les **Greeks** mesurent la sensibilité du prix de l'option à différentes variables de marché.

5.2 Définitions et Formules

- **Delta** : Sensibilité du prix de l'option au prix du sous-jacent.

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S_0}$$

- **Gamma** : Sensibilité du Delta au prix du sous-jacent.

$$\Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S_0^2}$$

- **Vega** : Sensibilité du prix de l'option à la volatilité du sous-jacent.

$$\text{Vega} = \frac{\partial C}{\partial \sigma}$$

- **Theta** : Sensibilité du prix de l'option au passage du temps.

$$\Theta = \frac{\partial C}{\partial T}$$

- **Rho** : Sensibilité du prix de l'option au taux sans risque.

$$\text{Rho} = \frac{\partial C}{\partial r}$$

5.3 Interprétation intuitive

- **Delta** : Variation approximative du prix de l'option pour une variation de 1 unité du sous-jacent.
- **Gamma** : Mesure la convexité ; variation du Delta.
- **Vega** : Variation du prix de l'option pour une variation de 1% de la volatilité.
- **Theta** : Perte de valeur de l'option par jour qui passe.
- **Rho** : Variation du prix de l'option pour une variation de 1% du taux sans risque.