Résolution analytique du problème

Noms : Desmarquet Timothé / Audren Nino
Groupe : MI1-G

Équation de Schrödinger indépendante du temps :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x)}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x) = E\Psi(x)$$

avec $V(x)$:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \\ -V_0 & \text{pour } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{pour } x > a \end{cases}$$

Région 1 :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi_1(x)}{\partial x^2} = E\Psi_1(x) \Rightarrow \frac{\partial^2\Psi_1(x)}{\partial x^2} = -k^2\Psi_1(x)$$

où $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$, donc $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$.

Solution générale :

$$\Psi_1(x) = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx}$$

Région 2 :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi_2(x)}{\partial x^2} - V_0\Psi_2(x) = E\Psi_2(x) \Rightarrow \frac{\partial^2\Psi_2(x)}{\partial x^2} = -K^2\Psi_2(x)$$

où $K = \frac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar}$.

Solution générale :

$$\Psi_2(x) = A_2 e^{iKx} + B_2 e^{-iKx}$$

Région 3 :

Même équation que région 1, mais sans onde incidente :

$$\Psi_3(x) = A_3 e^{ikx}$$

Conditions aux bords :

À $x = 0$:

$$
\begin{aligned}
\Psi_1(0) = \Psi_2(0) &\Rightarrow A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \quad (1) \\
\frac{\partial \Psi_1}{\partial x}(0) = \frac{\partial \Psi_2}{\partial x}(0) &\Rightarrow ikA_1 - ikB_1 = iKA_2 - iKB_2 \\
&\Rightarrow k(A_1 - B_1) = K(A_2 - B_2) \quad (2)
\end{aligned}
$$

À $x = a$:

$$
\begin{aligned}
\Psi_2(a) = \Psi_3(a) &\Rightarrow A_2 e^{iKa} + B_2 e^{-iKa} = A_3 e^{ika} \quad (3) \\
\frac{\partial \Psi_2}{\partial x}(a) = \frac{\partial \Psi_3}{\partial x}(a) &\Rightarrow iKA_2 e^{iKa} - iKB_2 e^{-iKa} = ikA_3 e^{ika} \\
&\Rightarrow K(A_2 e^{iKa} - B_2 e^{-iKa}) = kA_3 e^{ika} \quad (4)
\end{aligned}
$$

Calcul de la transmission $T = \left|\frac{A_3}{A_1}\right|^2$:

À partir de (3) :

$$B_2 e^{-iKa} = A_3 e^{ika} - A_2 e^{iKa}$$

Injection dans (4) :

$$
\begin{aligned}
K(A_2 e^{iKa} - (A_3 e^{ika} - A_2 e^{iKa})) &= kA_3 e^{ika} \\
2KA_2 e^{iKa} &= (k + K) A_3 e^{ika} \\
A_2 &= \frac{k + K}{2K} A_3 e^{i(ka - Ka)} \quad (5)
\end{aligned}
$$

Puis :

$$
\begin{aligned}
B_2 e^{-iKa} &= A_3 e^{ika} - A_2 e^{iKa} \\
&= A_3 e^{ika} - \frac{k + K}{2K} A_3 e^{i(ka - Ka)} e^{iKa} \\
&= A_3 e^{ika} \left(1 - \frac{k + K}{2K}\right) \\
&= A_3 e^{ika} \left(\frac{K - k}{2K}\right) \\
B_2 &= \frac{K - k}{2K} A_3 e^{i(ka + Ka)} \quad (6)
\end{aligned}
$$

Utilisation de (1) et (2) :

$$
\begin{aligned}
A_1 + B_1 &= A_2 + B_2 \\
A_1 - B_1 &= \frac{K}{k}(A_2 - B_2)
\end{aligned}
$$

Addition :

$$2A_1 = A_2\left(1+\frac{K}{k}\right) + B_2\left(1-\frac{K}{k}\right)$$
$$2kA_1 = (k+K)A_2 + (k-K)B_2$$

Substitution de (5) et (6) :

$$2kA_1 = \frac{A_3}{2K}\left[(k+K)^2 e^{i(ka-Ka)} - (k-K)^2 e^{i(ka+Ka)}\right]$$
$$= \frac{A_3}{2K}e^{ika}\left[(k+K)^2 e^{-iKa} - (k-K)^2 e^{iKa}\right]$$

Développement :

$$(k^2+2kK+K^2)e^{-iKa} - (k^2-2kK+K^2)e^{iKa}$$
$$= (k^2+K^2)(e^{-iKa} - e^{iKa}) + 2kK(e^{-iKa} + e^{iKa})$$

Avec les identités d'Euler :

$$e^{-iKa} - e^{iKa} = -2i\sin(Ka), \quad e^{-iKa} + e^{iKa} = 2\cos(Ka)$$

Donc :

$$2kA_1 = \frac{A_3}{2K}e^{ika}\left[-2i(k^2+K^2)\sin(Ka) + 4kK\cos(Ka)\right]$$
$$\frac{A_1}{A_3} = e^{ika}\left[\cos(Ka) - i\frac{k^2+K^2}{2kK}\sin(Ka)\right]$$

Ainsi :
Comme $|e^{ika}|^2 = e^{ika}\cdot e^{-ika} = 1$, on a $|e^{ika}|^2 = 1$.

$$T = \left|\frac{A_3}{A_1}\right|^2 = \frac{1}{\left|\frac{A_1}{A_3}\right|^2} = \frac{1}{\cos^2(Ka) + \left(\frac{k^2+K^2}{2kK}\right)^2\sin^2(Ka)}$$

Utilisation de $\cos^2(Ka) = 1 - \sin^2(Ka)$:

$$T = \frac{1}{1+\sin^2(Ka)\left[\left(\frac{k^2+K^2}{2kK}\right)^2 - 1\right]}$$

$$T = \frac{1}{1+\sin^2(Ka)\left[\frac{(k^2-K^2)^2}{4k^2K^2}\right]} = \frac{4k^2K^2}{4k^2K^2 + (k^2-K^2)^2\sin^2(Ka)}$$

Quand la transmission est maximale :

La transmission est maximale ($T = 1$) lorsque :

$$\sin^2(Ka) = 0 \Rightarrow Ka = n\pi \Rightarrow K = \frac{n\pi}{a}$$

$$\frac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar} = \frac{n\pi}{a} \Rightarrow E + V_0 = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2} \Rightarrow E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2} - V_0$$

Ces énergies correspondent aux résonances, avec transmission parfaite (sans réflexion).