线性代数——第一周作业解答

刘思齐老师；廖汶锋、乐永琪、杜若甫助教

October 8, 2023

习题 0.2.2 经典逻辑的基本公理之一是排中律，即对任意命题 A，A 不能既不真又不假。反证法可以看作排中律的推论，即如果我们发现 A 不能是错的，那么 A 就只能是对的。因此，想要证明命题 A 真，不妨挑一个命题 B，先证明 $B \Rightarrow A$，再证明 $(\neg B) \Rightarrow A$. 那么 A 就必须是真的了。给定命题：存在两个无理数 a、b，满足 a^b 是一个有理数。请先假设 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 是有理数，再假设 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 是无理数，对两种情形讨论来证明这个命题。

解： 取命题 A 为 "存在两个无理数 a、b，满足 a^b 是一个有理数"，而命题 B 为 "$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 是有理数"。
情况 1： 证明 $B \Rightarrow A$
取 $a = b = \sqrt{2}$，则推导出命题 A 成立；
情况 2： 证明 $(\neg B) \Rightarrow A$
取 $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$、$b = \sqrt{2}$，则推导出 $a^b = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = 2 \in \mathbb{Q}$，即命题 A 成立。
所以存在两个无理数 a、b，满足 a^b 是一个有理数。

习题 0.3.1 判断下列映射是否为单射、满射、双射，并写出双射的逆映射：

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   $x \mapsto x + 1$
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   $x \mapsto 2x$
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   $x \mapsto 3$
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   $x \mapsto x^2$
5. $f : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$
   $x \mapsto x^2$
6. $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$
   $x \mapsto e^x$
7. $f : \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$
   $x \mapsto \sin x$

解：

序号	单射	满射	双射	双射的逆映射
1.	√	√	√	$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x - 1$
2.	√	√	√	$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x/2$
3.	×	×	×	×
4.	×	×	×	×
5.	√	×	×	×
6.	√	√	√	$f^{-1} : (0, +\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln x$
7.	√	√	√	$f^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right],\ x \mapsto -(\pi + \arcsin x)$

习题 0.3.4　下列 $\mathbb{R}$ 上的变换，哪些满足交换律 $f \circ g = g \circ f$?

1. $f(x) = x + 1$，$g(x) = 2x$
2. $f(x) = x^2$，$g(x) = x^3$
3. $f(x) = 2^x$，$g(x) = 3^x$
4. $f(x) = 2x + 1$，$g(x) = 3x + 2$
5. $f(x) = 2x + 1$，$g(x) = 3x + 1$
6. $f(x) = \sin x$，$g(x) = \cos x$

解：

序号	$f \circ g$	$g \circ f$	满足交换律?
1.	$2x+1$	$2x+2$	$\times$
2.	x^6	x^6	$\surd$
3.	2^{3^x}	3^{2^x}	$\times$
4.	$6x+5$	$6x+5$	$\surd$
5.	$6x+3$	$6x+4$	$\times$
6.	$\sin(\cos x)$	$\cos(\sin x)$	$\times$

习题 0.3.9　给定映射 h、g 和 $f = g \circ h$，证明，若 f 是双射，则 h 是单射，g 是满射。

解： 记 $h : X \to Y$、$g : Y \to Z$，则有 $f : X \to Z$。
步骤 1： 证明：h 是单射
因为 f 是单射，所以对于任意 x_1、$x_2 \in X$ 且 $x_1 \neq x_2$ 来说，都有 $g \circ h(x_1) \neq g \circ h(x_2)$。
另一方面，在映射 g 之下，$g \circ h(x_1)$ 和 $g \circ h(x_2)$ 的原像分别为 $h(x_1)$ 和 $h(x_2)$，所以必定有 $h(x_1) \neq h(x_2)$，从而推导出 h 是单射。
步骤 2： 证明：g 是满射
因为 f 是满射，所以对于任意 $z \in Z$，都存在 $x \in X$，使得 $f(x) = z$。
同时，因为 $z = f(x) = g(h(x))$ 且 $h(x) \in Y$，所以 g 是满射。

习题 1.1.2　如果平面上的向量 $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ 共线，那么 $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ 是否共线?

解：情况 1： $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$
此时，必然存在一个实数 λ 满足

$$\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

所以有

$$\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix}$$

因此，$\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix}$ 三者共线。

情况 2： $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \mathbf{0}$

显然 $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 三者共线。

习题 1.1.5　判断下列映射是否为线性映射：

1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x+1$
2. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x$
3. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$
4. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1$
5. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$
6. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2^x$
7. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x+y \\ y-x \\ 2x \end{bmatrix}$
8. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x+1 \\ y-x \\ 2x \end{bmatrix}$

解：

序号	满足线性映射的条件?	解释
1.	×	$f(0) = 1 \neq 0$
2.	√	$\begin{aligned} f(ax+by) &= 2(ax+by) \\ &= a\cdot(2x) + b\cdot(2y) \\ &= af(x) + bf(y) \end{aligned}$
3.	√	$\begin{aligned} f(ax+by) &= 0 \\ &= a\cdot 0 + b\cdot 0 \\ &= af(x) + bf(y) \end{aligned}$
4.	×	$f(0) = 1 \neq 0$
5.	×	$4 = f(2) \neq 2f(1) = 2$
6.	×	$f(0) = 1 \neq 0$
7.	√	$\begin{aligned} f\left(a\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} (ax_1+bx_2)+(ay_1+by_2) \\ (ay_1+by_2)-(ax_1+bx_2) \\ 2(ax_1+bx_2) \end{bmatrix} \\ &= a\begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ y_1-x_1 \\ 2x_1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} x_2+y_2 \\ y_2-x_2 \\ 2x_2 \end{bmatrix} \\ &= af\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\right) + bf\left(\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$
8.	×	$f\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$

习题 1.1.8 设 $\mathbf{x_1}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$、$\mathbf{x_2}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$、$\mathbf{x_3}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$、$\mathbf{b_1}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$、$\mathbf{b_2}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$、$\mathbf{b_3}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$，是否存在线性映射 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$，满足 $f(\mathbf{x_i})=\mathbf{x_i}$，$i=1,2,3$?

解： 如果存在这样的线性映射，那么会推导出

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\mathbf{b_2}&=f(\mathbf{x_2})\\&=f(\mathbf{x_1}+\mathbf{x_3})\\&=f(\mathbf{x_1})+f(\mathbf{x_3})\\&=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

推导出矛盾，所以不存在满足原题的线性映射。