

# 线性代数——第二周作业解答

刘思齐老师；廖汶锋、乐永琪、杜若甫助教

October 8, 2023

习题 1.1.10 给定三维向量  $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ , 定义

1. 二者点积为  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

2. 二者叉积为  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} := \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix}$

那么给定  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ , 映射  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{b} \mapsto \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  和  $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{b} \mapsto \mathbf{a} \times \mathbf{b}$  是否线性映射?

解: 对于任意  $x, y \in \mathbb{R}$  和  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$  来说

1. 点积映射

$$\begin{aligned} f(x\mathbf{b} + y\mathbf{c}) &= a_1(xb_1 + yc_1) + a_2(xb_2 + yc_2) + a_3(xb_3 + yc_3) \\ &= x(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + y(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) \\ &= xf(\mathbf{b}) + yf(\mathbf{c}) \end{aligned}$$

所以  $f$  是线性映射。

2. 叉积映射

$$\begin{aligned} g(x\mathbf{b} + y\mathbf{c}) &= \begin{bmatrix} a_2(xb_3 + yc_3) - a_3(xb_2 + yc_2) \\ a_3(xb_1 + yc_1) - a_1(xb_3 + yc_3) \\ a_1(xb_2 + yc_2) - a_2(xb_1 + yc_1) \end{bmatrix} \\ &= x \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} a_2c_3 - a_3c_2 \\ a_3c_1 - a_1c_3 \\ a_1c_2 - a_2c_1 \end{bmatrix} \\ &= xg(\mathbf{b}) + yg(\mathbf{c}) \end{aligned}$$

所以  $g$  也是线性映射。

**习题 1.1.11** 给定平面上任意面积为 1 的三角形，经过下列变换之后，其面积是否确定？如果是，面积为多少？（不需严谨证明，猜测答案即可。）

1. 旋转变换；
2. 反射变换；
3. 对  $x_2$  投影的投影变换；
4.  $x_1$  方向拉伸 3 倍， $x_2$  方向不变的伸缩变换；
5. 把  $x_1$  方向的 3 倍加到  $x_2$  方向上，保持  $x_1$  方向不变的错切变换。

**解：**对于旋转变换、反射变换和投影变换三者，三角形的面积显然变成 1、1 和 0；对于伸缩变换和错切变换，三角形面积变成了 3 和 1，在附录将给出证明，作为选读材料。

**习题 1.2.1** 将下列向量  $\mathbf{b}$  写成矩阵和向量乘积的形式：

1.  $\mathbf{b} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} ;$
2.  $\mathbf{b} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} ;$
3.  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2b+a+c \\ c-b \\ a+b+c \\ a+b \end{bmatrix} ;$
4.  $\mathbf{b} = f \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \right)$ ，其中  $f: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$  是线性变换，满足  $f(\mathbf{e}_k) = k\mathbf{e}^{6-k}$ ， $k = 1, 2, \dots, 5$ ；

5. 假设如果某天下雨，则第二天下雨概率为 0.8；如果当天不下雨，则第二天下雨概率为 0.3。已知当天有一半的概率会下雨，令  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ ，其两个分量分别是明天下雨和不下雨的概率。

**解：**

1.  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$
2.  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \\ 3 & 3 \\ 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$
3.  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$
4.  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$
5.  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$

**习题 1.2.2** 判断下列矩阵和向量的乘积是否良定义。在可以计算时，先将其写成列向量的线性组合，再进行计算：

$$6. \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$7. \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$8. \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix};$$

$$9. \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix};$$

$$10. \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}。$$

解：

$$6. \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$7. \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$8. \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$9. \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -5 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$10. \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**习题 1.2.3** 设  $A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ 。对任意自然数  $i$ , 令  $\mathbf{u}_{i+1} = A\mathbf{u}_i$ ,  $\mathbf{v}_{i+1} = A\mathbf{v}_i$ 。

1. 对  $i = 1, 2, 3, 4$ , 计算  $u_i, v_i$ ;
2. 猜测  $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{u}_i, \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{v}_i$ ;
3. 任取初始向量  $\mathbf{w}_0$ , 猜测极限  $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{w}_i$ , 其中  $\mathbf{w}_{i+1} = A\mathbf{w}_i$ ; 不同初始向量得到的极限在同一条直线上吗?

解:

1. 计算  $\mathbf{u}_i$  和  $\mathbf{v}_i$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \mathbf{u}_2 &= \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{bmatrix} & \mathbf{u}_3 &= \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.3 \end{bmatrix} & \mathbf{u}_4 &= \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.65 \\ 0.35 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{bmatrix} & &= \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.3 \end{bmatrix} & &= \begin{bmatrix} 0.65 \\ 0.35 \end{bmatrix} & &= \begin{bmatrix} 0.625 \\ 0.375 \end{bmatrix} \\ \mathbf{v}_1 &= \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} & \mathbf{v}_2 &= \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.7 \\ 2.3 \end{bmatrix} & \mathbf{v}_3 &= \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.05 \\ 1.95 \end{bmatrix} & \mathbf{v}_4 &= \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.225 \\ 1.775 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1.7 \\ 2.3 \end{bmatrix} & &= \begin{bmatrix} 2.05 \\ 1.95 \end{bmatrix} & &= \begin{bmatrix} 2.225 \\ 1.775 \end{bmatrix} & &= \begin{bmatrix} 2.3125 \\ 1.6875 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2. 猜测  $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{u}_i, \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{v}_i$ :

自行计算  $i = 5, 6, 7, 8$  的结果, 会发现  $\mathbf{u}_i$  趋向于  $\begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix}$ , 而  $\mathbf{v}_i$  趋向于  $\begin{bmatrix} 2.4 \\ 1.6 \end{bmatrix}$

因此猜测  $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix}$ ,  $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} 2.4 \\ 1.6 \end{bmatrix}$ 。

3. 猜测  $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{w}_i$ :

根据 2. 的推测, 发现第一行元素和第二行元素之比趋近  $3:2$ , 且两元素的总和不变, 所以对于任意  $\mathbf{w}_0$  来说,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{w}_0 = \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{w}_0 \right) \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

并且所有向量的极限都在  $y = \frac{2}{3}x$  的直线上。

(\* 对于  $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{w}_0$  的详细计算, 笔者会放在附录中, 同学们选读)

**习题 1.2.5** 计算下列线性映射  $f$  的表示矩阵：

$$2. f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}, \text{ 其中点积的定义见习题 1.1.10;}$$

$$3. f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \times \mathbf{x}, \text{ 其中点积的定义见习题 1.1.11;}$$

$$4. f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, f \left( \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 + x_2 \end{bmatrix}$$

$$5. f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, f \left( \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

**解：**记表示矩阵为  $A$

$$\begin{array}{ll} 2. A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} & 3. A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ 4. A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & 5. A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

**习题 1.2.7** 设  $xy$  平面  $\mathbb{R}^2$  上的变换  $f$  是下列三个变换的复合：先绕原点逆时针旋转  $\frac{\pi}{6}$ ；然后进行一个保持  $y$  坐标不变，同时将  $y$  坐标的两倍加到  $x$  坐标上的错切；最后再沿着直线  $x + y = 0$  反射。

1. 证明  $f$  是线性变换；
2. 计算  $f(\mathbf{e}_1)$  和  $f(\mathbf{e}_2)$ ；
3. 写出  $f$  的表示矩阵；
4. 计算  $f \left( \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right)$ 。

**解：**

1. 证明  $f$  是线性变换：

先证明以下引理：考虑任意两个线性变换  $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  和  $h: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ ，任取  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$  和  $a, b \in \mathbb{R}$ ，其复合变换  $g \circ h$  也是线性变换。

证明:

$$\begin{aligned} g \circ h(ax + by) &= g(ah(\mathbf{x}) + bh(\mathbf{y})) \\ &= ag(h(\mathbf{x})) + bg(h(\mathbf{y})) \\ &= ag \circ h(\mathbf{x}) + bg \circ h(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

证毕

因为旋转变换、错切变换和反射变换都是线性变换，结合引理可知，三者的复合变换必定是线性变换。

2. 计算  $f(\mathbf{e}_1)$  和  $f(\mathbf{e}_2)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &\xrightarrow{\text{逆时针旋转 } \frac{\pi}{6}} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{错切}} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{沿着直线 } x+y=0 \text{ 反射}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{bmatrix} = f(\mathbf{e}_1) \\ \mathbf{e}_2 &\xrightarrow{\text{逆时针旋转 } \frac{\pi}{6}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{错切}} \begin{bmatrix} \sqrt{3} - \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{沿着直线 } x+y=0 \text{ 反射}} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} - \sqrt{3} \end{bmatrix} = f(\mathbf{e}_2) \end{aligned}$$

3. 写出  $f$  的表示矩阵  $A$ :

$$A = \begin{bmatrix} f(\mathbf{e}_1) & f(\mathbf{e}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 & \frac{1}{2} - \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

4. 计算  $f\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}\right)$ :

$$\begin{aligned} f\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}\right) &= A \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2\sqrt{3} - \frac{3}{2} \\ -\frac{11}{2}\sqrt{3} - 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## 附录

**习题 1.1.11** 对顶点坐标为  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$  的三角形来说, 其面积  $S$  是

$$S = \frac{1}{2} \left| \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \right| = 1$$

对于题中的伸缩变换来说, 变换后的面积是 (矩阵之积的行列式等于矩阵行列式之积)

$$S' = \frac{1}{2} \left| \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3x_1 & 3x_2 & 3x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \right| = \left| \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| S = 3$$

而对于错切变换来说

$$S' = \frac{1}{2} \left| \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 3x_1 + y_1 & 3x_2 + y_2 & 3x_3 + y_3 \end{bmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \right| = 1$$

**习题 1.2.3** 考虑任意  $\mathbf{w}_0 = \begin{bmatrix} w_{01} \\ w_{02} \end{bmatrix}$ , 并记  $\mathbf{w}_n = \begin{bmatrix} w_{n1} \\ w_{n2} \end{bmatrix}$ 。

首先注意

$$w_{(n+1)1} + w_{(n+1)2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{w}_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} A \mathbf{w}_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{w}_n = w_{n1} + w_{n2}$$

所以可以记  $S = w_{01} + w_{02}$ ,  $\mathbf{w}_n = \begin{bmatrix} w_{n1} \\ S - w_{n1} \end{bmatrix}$ 。

然后就可以考察  $w_{n1}$  的递推公式

$$\begin{aligned} w_{(n+1)1} &= 0.5w_{n1} + 0.3S \\ \Leftrightarrow w_{(n+1)1} - 0.6S &= 0.5(w_{n1} - 0.6S) \\ \Leftrightarrow w_{n1} &= 0.6S + 0.5^{n-1}(w_{01} - 0.6S) \end{aligned}$$

所以

$$\mathbf{w}_n = \begin{bmatrix} 0.6S + 0.5^{n-1}(w_{01} - 0.6S) \\ 0.4S - 0.5^{n-1}(w_{01} - 0.6S) \end{bmatrix}$$

当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\mathbf{w}_n \rightarrow \begin{bmatrix} 0.6S \\ 0.4S \end{bmatrix}$ , 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{w}_n = \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{w}_0 \right) \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix}$ 。