线性代数——第二周作业解答

廖汶锋助教

October 18, 2023

习题 1.1.10 给定三维向量 $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$，定义

1. 二者**点积**为 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} := a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
2. 二者**叉积**为 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} := \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix}$

那么给定 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$，映射 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$，$\boldsymbol{b} \mapsto \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ 和 $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$，$\boldsymbol{b} \mapsto \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 是否线性映射?

解： 对于任意 x、$y \in \mathbb{R}$ 和 $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$、$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ 来说

1. 点积映射

$$\begin{aligned} f(x\boldsymbol{b} + y\boldsymbol{c}) &= a_1(xb_1 + yc_1) + a_2(xb_2 + yc_2) + a_3(xb_3 + yc_3) \\ &= x(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + y(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) \\ &= xf(\boldsymbol{b}) + yf(\boldsymbol{c}) \end{aligned}$$

   所以 f 是线性映射。

2. 叉积映射

$$\begin{aligned} g(x\boldsymbol{b} + y\boldsymbol{c}) &= \begin{bmatrix} a_2(xb_3 + yc_3) - a_3(xb_2 + yc_2) \\ a_3(xb_1 + yc_1) - a_1(xb_3 + yc_3) \\ a_1(xb_2 + yc_2) - a_2(xb_1 + yc_1) \end{bmatrix} \\ &= x \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} a_2c_3 - a_3c_2 \\ a_3c_1 - a_1c_3 \\ a_1c_2 - a_2c_1 \end{bmatrix} \\ &= xg(\boldsymbol{b}) + yg(\boldsymbol{c}) \end{aligned}$$

   所以 g 也是线性映射。

习题 1.1.11　给定平面上任意面积为 1 的三角形，经过下列变换之后，其面积是否确定？如果是，面积为多少？（不需严谨证明，猜测答案即可。）

1. 旋转变换；
2. 反射变换；
3. 对 x_2 投影的投影变换；
4. x_1 方向拉伸 3 倍，x_2 方向不变的伸缩变换；
5. 把 x_1 方向的 3 倍加到 x_2 方向上，保持 x_1 方向不变的错切变换。

解： 对于旋转变换、反射变换和投影变换三者，三角形的面积显然变成 1、1 和 0；对于伸缩变换和错切变换，三角形面积变成了 3 和 1，在附录将给出证明，作为选读材料。

习题 1.2.1　将下列向量 $\boldsymbol{b}$ 写成矩阵和向量乘积的形式：

1. $\boldsymbol{b} = 2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$；

2. $\boldsymbol{b} = 5\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix}5\\4\\3\\2\\1\end{bmatrix}$；

3. $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix}2b+a+c\\c-b\\a+b+c\\a+b\end{bmatrix}$；

4. $\boldsymbol{b} = f\left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{bmatrix}\right)$，其中 $f:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^5$ 是线性变换，满足 $f(\boldsymbol{e_k}) = k\boldsymbol{e_{6-k}}$，$k=1,2,\cdot,5$；

5. 假设如果某天下雨，则第二天下雨概率为 0.8；如果当天不下雨，则第二天下雨概率为 0.3。已知当天有一半的概率会下雨，令 $\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^2$，其两个分量分别是明天下雨和不下雨的概率。

解：

1. $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\4\\5\end{bmatrix}$

2. $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix}1&5\\2&4\\3&3\\4&2\\5&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}$

3. $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix}1&2&1\\0&-1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$

4. $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix}0&0&0&0&5\\0&0&0&4&0\\0&0&3&0&0\\0&2&0&0&0\\1&0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{bmatrix}$

5. $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix}0.8&0.3\\0.2&0.7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.5\\0.5\end{bmatrix}$

习题 1.2.2 判断下列矩阵和向量的乘积是否良定义。在可以计算时，先将其写成列向量的线性组合，再进行计算：

6. $\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$；

7. $\begin{bmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$；

8. $\begin{bmatrix}1&1&0\\3&2&1\\7&4&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}$；

9. $\begin{bmatrix}1&3&7\\1&2&4\\0&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}$；

10. $\begin{bmatrix}1&3&7\\1&2&4\\0&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-3\\-1\end{bmatrix}$。

解：

6. $$\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}=1\begin{bmatrix}1\\4\\7\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}2\\5\\8\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}3\\6\\9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

7. $$\begin{bmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}=1\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}7\\8\\9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

8. $$\begin{bmatrix}1&1&0\\3&2&1\\7&4&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}=1\begin{bmatrix}1\\3\\7\end{bmatrix}-1\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}-1\begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

9. $$\begin{bmatrix}1&3&7\\1&2&4\\0&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}=1\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}-1\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}-1\begin{bmatrix}7\\4\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9\\-5\\-4\end{bmatrix}$$

10. $$\begin{bmatrix}1&3&7\\1&2&4\\0&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-3\\-1\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}7\\4\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

习题 1.2.3 设 $A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{u_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{v_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$。对任意自然数 i，令 $\boldsymbol{u_{i+1}} = A\boldsymbol{u_i}$，$\boldsymbol{v_{i+1}} = A\boldsymbol{v_i}$。

1. 对 $i = 1,2,3,4$，计算 u_i，v_i；
2. 猜测 $\lim\limits_{i\to\infty} \boldsymbol{u_i}$，$\lim\limits_{i\to\infty} \boldsymbol{v_i}$；
3. 任取初始向量 $\boldsymbol{w_0}$，猜测极限 $\lim\limits_{i\to\infty} \boldsymbol{w_i}$，其中 $\boldsymbol{w_{i+1}} = A\boldsymbol{w_i}$；不同初始向量得到的极限在同一条直线上吗?

解:

1. 计算 $\boldsymbol{u_i}$ 和 $\boldsymbol{v_i}$

$$\boldsymbol{u_1} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{u_2} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.3 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{u_3} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.65 \\ 0.35 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{u_4} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.65 \\ 0.35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.625 \\ 0.375 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.7 \\ 2.3 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.7 \\ 2.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.05 \\ 1.95 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{v_3} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.05 \\ 1.95 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.225 \\ 1.775 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{v_4} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.225 \\ 1.775 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.3125 \\ 1.6875 \end{bmatrix}$$

2. 猜测 $\lim\limits_{i\to\infty} \boldsymbol{u_i}$，$\lim\limits_{i\to\infty} \boldsymbol{v_i}$：

   自行计算 $i = 5,6,7,8$ 的结果，会发现 $\boldsymbol{u_i}$ 趋向于 $\begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix}$，而 $\boldsymbol{v_i}$ 趋向于 $\begin{bmatrix} 2.4 \\ 1.6 \end{bmatrix}$

   因此猜测 $\lim\limits_{i\to\infty} \boldsymbol{u_i} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix}$，$\lim\limits_{i\to\infty} \boldsymbol{v_i} = \begin{bmatrix} 2.4 \\ 1.6 \end{bmatrix}$。

3. 猜测 $\lim\limits_{i\to\infty} \boldsymbol{w_i}$：

   根据 2. 的推测，发现第一行元素和第二行元素之比趋近 $3:2$，且两元素的总和不变，所以对于任意 w_0 来说，

$$\lim_{i\to\infty} \boldsymbol{w_0} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{w_0} \right) \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

   并且所有向量的极限都在 $y = \frac{2}{3}x$ 的直线上。

（* 对于 $\lim\limits_{i\to\infty} \boldsymbol{w_0}$ 的详细计算，笔者会放在附录中，同学们选读）

习题 1.2.5　计算下列线性映射 f 的表示矩阵：

2. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$，$f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\cdot\boldsymbol{x}$，其中点积的定义见习题 1.1.10；

3. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$，$f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\times\boldsymbol{x}$，其中叉积的定义见习题 1.1.11；

4. $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$，$f\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4+x_2\end{bmatrix}$

5. $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$，$f\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x_4\\x_2\\x_3\\x_1\end{bmatrix}$

解：记表示矩阵为 A

2. $A=\begin{bmatrix}1&2&3\end{bmatrix}$　　3. $A=\begin{bmatrix}0&-3&2\\3&0&-1\\-2&1&0\end{bmatrix}$

4. $A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix}$　　5. $A=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$

习题 1.2.7　设 xy 平面 $\mathbb{R}^2$ 上的变换 f 是下列三个变换的复合：先绕原点逆时针旋转 $\frac{\pi}{6}$；然后进行一个保持 y 坐标不变，同时将 y 坐标的两倍加到 x 坐标上的错切；最后再沿着直线 $x+y=0$ 反射。

1. 证明 f 是线性变换；
2. 计算 $f(\boldsymbol{e_1})$ 和 $f(\boldsymbol{e_2})$；
3. 写出 f 的表示矩阵；
4. 计算 $f\left(\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\right)$。

解：

1. 证明 f 是线性变换：

   先证明以下引理：考虑任意两个线性变换 $g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ 和 $h:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$，任取 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m$ 和 a、$b\in\mathbb{R}$，其复合变换 $g\circ h$ 也是线性变换。

证明：

$$
\begin{aligned}
g \circ h(a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}) &= g(ah(\boldsymbol{x}) + bh(\boldsymbol{y})) \\
&= ag(h(\boldsymbol{x})) + bg(h(\boldsymbol{y})) \\
&= ag \circ h(\boldsymbol{x}) + bg \circ h(\boldsymbol{y})
\end{aligned}
$$

证毕

因为旋转变换、错切变换和反射变换都是线性变换，结合引理可知，三者的复合变换必定是线性变换。

2. 计算 $f(\boldsymbol{e_1})$ 和 $f(\boldsymbol{e_2})$：

$$
\boldsymbol{e_1} \xmapsto{\text{逆时针旋转}\frac{\pi}{6}} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \xmapsto{\text{错切}} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \xmapsto{\text{沿着直线}x+y=0\text{反射}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{bmatrix} = f(\boldsymbol{e_1})
$$

$$
\boldsymbol{e_2} \xmapsto{\text{逆时针旋转}\frac{\pi}{6}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \xmapsto{\text{错切}} \begin{bmatrix} \sqrt{3} - \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \xmapsto{\text{沿着直线}x+y=0\text{反射}} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} - \sqrt{3} \end{bmatrix} = f(\boldsymbol{e_2})
$$

3. 写出 f 的表示矩阵 A：

$$
A = \begin{bmatrix} f(\boldsymbol{e_1}) & f(\boldsymbol{e_2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 & \frac{1}{2} - \sqrt{3} \end{bmatrix}
$$

4. 计算 $f\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}\right)$：

$$
\begin{aligned}
f\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}\right) &= A \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -2\sqrt{3} - \frac{3}{2} \\ -\frac{11}{2}\sqrt{3} - 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

附录

习题 1.1.11 对顶点坐标为 (x_i, y_i)，$i = 1, 2, 3$ 的三角形来说，其面积 S 是

$$S = \frac{1}{2}\left|\det\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{bmatrix}\right| = 1$$

对于题中的伸缩变换来说，变换后的面积是（矩阵之积的行列式等于矩阵行列式之积）

$$S' = \frac{1}{2}\left|\det\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 3x_1 & 3x_2 & 3x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{bmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\det\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\det\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{bmatrix}\right| = \left|\det\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right| S = 3$$

而对于错切变换来说

$$S' = \frac{1}{2}\left|\det\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3\\ 3x_1 + y_1 & 3x_2 + y_2 & 3x_3 + y_3\end{bmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\det\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{bmatrix}\right| = 1$$

习题 1.2.3 考虑任意 $\boldsymbol{w_0} = \begin{bmatrix}w_{01}\\ w_{02}\end{bmatrix}$，并记 $\boldsymbol{w_n} = \begin{bmatrix}w_{n1}\\ w_{n2}\end{bmatrix}$。

首先注意

$$w_{(n+1)1} + w_{(n+1)2} = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{w_{n+1}} = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}A\boldsymbol{w_n} = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{w_n} = w_{n1} + w_{n2}$$

所以可以记 $S = w_{01} + w_{02}$，$\boldsymbol{w_n} = \begin{bmatrix}w_{n1}\\ S - w_{n1}\end{bmatrix}$。

然后就可以考察 w_{n1} 的递推公式

$$\begin{aligned}&w_{(n+1)1} = 0.5w_{n1} + 0.3S\\ \Leftrightarrow &w_{(n+1)1} - 0.6S = 0.5(w_{n1} - 0.6S)\\ \Leftrightarrow &w_{n1} = 0.6S + 0.5^{n-1}(w_{01} - 0.6S)\end{aligned}$$

所以

$$\left[\boldsymbol{w_n} = \begin{bmatrix}0.6S + 0.5^{n-1}(w_{01} - 0.6S)\\ 0.4S - 0.5^{n-1}(w_{01} - 0.6S)\end{bmatrix}\right]$$

当 $n \to \infty$ 时，$\boldsymbol{w_n} \to \begin{bmatrix}0.6S\\ 0.4S\end{bmatrix}$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{w_n} = \left(\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{w_0}\right)\begin{bmatrix}0.6\\ 0.4\end{bmatrix}$。