

# 线性代数——第一周作业解答

廖汶锋助教

October 18, 2023

**习题 0.2.2** 经典逻辑的基本公理之一是排中律，即对任意命题  $A$ ， $A$  不能既不真又不假。反证法可以看作排中律的推论，即如果我们发现  $A$  不能是错的，那么  $A$  就只能是对的。因此，想要证明命题  $A$  真，不妨挑一个命题  $B$ ，先证明  $B \Rightarrow A$ ，再证明  $(\neg B) \Rightarrow A$ 。那么  $A$  就必须是真的了。给定命题：存在两个无理数  $a, b$ ，满足  $a^b$  是一个有理数。请先假设  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  是有理数，再假设  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  是无理数，对两种情形讨论来证明这个命题。

**解：**取命题  $A$  为“存在两个无理数  $a, b$ ，满足  $a^b$  是一个有理数”，而命题  $B$  为“ $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  是有理数”。

**情况 1：**证明  $B \Rightarrow A$

取  $a = b = \sqrt{2}$ ，则推导出命题  $A$  成立；

**情况 2：**证明  $(\neg B) \Rightarrow A$

取  $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 、 $b = \sqrt{2}$ ，则推导出  $a^b = \sqrt{2}^{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = 2 \in \mathbb{Q}$ ，即命题  $A$  成立。

所以存在两个无理数  $a, b$ ，满足  $a^b$  是一个有理数。

**习题 0.3.1** 判断下列映射是否为单射、满射、双射，并写出双射的逆映射：

1.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x + 1$$

2.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto 2x$$

3.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto 3$$

4.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^2$$

5.  $f: (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^2$$

6.  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$

$$x \mapsto e^x$$

7.  $f: [-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$

$$x \mapsto \sin x$$

**解：**

序号	单射	满射	双射	双射的逆映射
1.	✓	✓	✓	$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x - 1$
2.	✓	✓	✓	$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x/2$
3.	×	×	×	×
4.	×	×	×	×
5.	✓	×	×	×
6.	✓	✓	✓	$f^{-1}: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln x$
7.	✓	✓	✓	$f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}], x \mapsto -(\pi + \arcsin x)$

**习题 0.3.4** 下列  $\mathbb{R}$  上的变换, 哪些满足交换律  $f \circ g = g \circ f$ ?

1.  $f(x) = x + 1, g(x) = 2x$
2.  $f(x) = x^2, g(x) = x^3$
3.  $f(x) = 2^x, g(x) = 3^x$
4.  $f(x) = 2x + 1, g(x) = 3x + 2$
5.  $f(x) = 2x + 1, g(x) = 3x + 1$
6.  $f(x) = \sin x, g(x) = \cos x$

解:

序号	$f \circ g$	$g \circ f$	满足交换律?
1.	$2x + 1$	$2x + 2$	×
2.	$x^6$	$x^6$	√
3.	$2^{3^x}$	$3^{2^x}$	×
4.	$6x + 5$	$6x + 5$	√
5.	$6x + 3$	$6x + 4$	×
6.	$\sin(\cos x)$	$\cos(\sin x)$	×

**习题 0.3.9** 给定映射  $h, g$  和  $f = g \circ h$ , 证明, 若  $f$  是双射, 则  $h$  是单射,  $g$  是满射。

解: 记  $h: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ , 则有  $f: X \rightarrow Z$ 。

**步骤 1:** 证明:  $h$  是单射

因为  $f$  是单射, 所以对于任意  $x_1, x_2 \in X$  且  $x_1 \neq x_2$  来说, 都有  $g \circ h(x_1) \neq g \circ h(x_2)$ 。

另一方面, 在映射  $g$  之下,  $g \circ h(x_1)$  和  $g \circ h(x_2)$  的原像分别为  $h(x_1)$  和  $h(x_2)$ , 所以必定有  $h(x_1) \neq h(x_2)$ , 从而推导出  $h$  是单射。

**步骤 2:** 证明:  $g$  是满射

因为  $f$  是满射, 所以对于任意  $z \in Z$ , 都存在  $x \in X$ , 使得  $f(x) = z$ 。

同时, 因为  $z = f(x) = g(h(x))$  且  $h(x) \in Y$ , 所以  $g$  是满射。

**习题 1.1.2** 如果平面上的向量  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$  与  $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$  共线, 那么  $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$  与  $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$  是否共线?

解: 情况 1:  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$

此时, 必然存在一个实数  $\lambda$  满足

$$\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

所以有

$$\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix}$$

因此,  $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$  与  $\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix}$  三者共线。

情况 2:  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \mathbf{0}$

显然  $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ 、 $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$  与  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  三者共线。

习题 1.1.5 判断下列映射是否为线性映射:

1.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x + 1$$

2.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto 2x$$

3.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto 0$$

4.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto 1$$

5.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^2$$

6.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto 2^x$$

7.  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x + y \\ y - x \\ 2x \end{bmatrix}$$

8.  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x + 1 \\ y - x \\ 2x \end{bmatrix}$$

解:

序号	满足线性映射的条件?	解释
1.	×	$f(0) = 1 \neq 0$
2.	√	$f(ax + by) = 2(ax + by)$ $= a \cdot (2x) + b \cdot (2y)$ $= af(x) + bf(y)$
3.	√	$f(ax + by) = 0$ $= a \cdot 0 + b \cdot 0$ $= af(x) + bf(y)$
4.	×	$f(0) = 1 \neq 0$
5.	×	$4 = f(2) \neq 2f(1) = 2$
6.	×	$f(0) = 1 \neq 0$
7.	√	$f\left(a \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} (ax_1 + bx_2) + (ay_1 + by_2) \\ (ay_1 + by_2) - (ax_1 + bx_2) \\ 2(ax_1 + bx_2) \end{bmatrix}$ $= a \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ y_1 - x_1 \\ 2x_1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} x_2 + y_2 \\ y_2 - x_2 \\ 2x_2 \end{bmatrix}$ $= af\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\right) + bf\left(\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right)$
8.	×	$f\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$

**习题 1.1.8** 设  $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 、 $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 、 $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 、 $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 、 $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 、 $\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，是否存在线性映射

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ，满足  $f(\mathbf{x}_i) = \mathbf{b}_i$ ， $i = 1, 2, 3$ ？

**解：**如果存在这样的线性映射，那么会推导出

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \mathbf{b}_2 = f(\mathbf{x}_2) \\ &= f(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_3) \\ &= f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_3) \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

推导出矛盾，所以不存在满足原题的线性映射。