

Bachelor-Arbeit zum Thema „Modenanregung in *Yukawa*-Bällen“

Philipp Hacker

25. Juni 2015

Institut für Physik
mathematisch-naturwissenschaftliche Fakultät
Universität Greifswald



Erst-Gutachter: Prof. Dr. André Melzer

Zweit-Gutachter: Prof. Dr. Lutz Schweikhard

Bearbeitungszeitraum: 01.03.2015 bis 12.07.2015

Inhaltsverzeichnis

0	Motivation	3
1	Physikalische Grundlagen	4
1.1	Kapazitiv gekoppelte Radiofrequenz-Plasmen	4
1.1.1	Verschiebungsstrom	5
1.1.2	<i>self-bias</i>	5
1.2	Grenzschichten einer Entladung	7
1.2.1	Child-Langmuir-Gesetz	8
1.2.2	Bohm-Kriterien	9
1.3	Aufladung von Staubpartikeln	10
1.3.1	OML-Modell	11
1.3.2	Neutralgas-Ionen-Stöße	12
1.4	Staub-Dynamik	13
1.4.1	Gravitation und elektrische Feldstärke	14
1.4.2	Abschirmung und Polarisationskräfte	14
1.4.3	Ionen-Neutralgasreibung	15
1.4.4	Neutralgasreibung	17
1.4.5	Thermophoretische Kraft	17
1.4.6	Kraft durch <i>Laser</i> -Einstrahlung	17
1.4.7	Einfang und Gleichgewicht	18
1.5	Finite Yukawa-Cluster	20
1.5.1	Struktur	21
1.5.2	Dynamik- und Modenanalyse	22
1.5.3	Fluidmoden	24
2	Durchführung	25
3	Auswertung	26
4	Literatur	27
5	Anhang	28

0 Motivation

1 Physikalische Grundlagen

1.1 Kapazitiv gekoppelte Radiofrequenz-Plasmen

Der in diesem Versuch genutzte Aufbau entspricht dem eines kapazitiv gekoppelten Niederdruck-Radiofrequenz-Plasmas.

Ein Plasma ist ein quasineutrales Gas aus freien Ladungsträgern und, dem Ionisierungsgrad der Entladung entsprechend, neutralen Atomen oder Molekülen. Die Spezies der Ladungen sind im allgemeinen Elektronen und Ionen, wobei der Begriff quasineutral die Bedingung $n_e = n_i$ der Dichten auf einer speziellen Längenskala fordert (siehe unten). Für ein Plasma gibt es verschiedene physikalischen Kenngrößen, welche in Tabelle 1 inklusive ihrer Bedeutungen einmal zusammengefasst wurden.

Befindet sich ein Fremdteilchen, ein Festkörper oder eine weitere Ladungsträgerspezies in der Entladung, so spricht man von komplexen Plasmen. Für das Experiment dieser Arbeit ist dies der Fall, da hierbei in das Plasma homogene Melamin-Formaldehyd-Partikel in der Größenordnung einiger μm eingebracht werden. Diese erfahren, in Abhängigkeit der Parameter, verschiedenste Wechselwirkungen mit den Entladungsspezies und externen Feldern.

Größe	Zusammenhang	Bedeutung
Debye-Länge	$\lambda_{D,j}^2 = \frac{\varepsilon_0 k_B T_j}{n_j e^2}$ $\lambda_D^2 = (\lambda_{D,e}^{-2} + \lambda_{D,i}^{-2})^{-1}$	die Distanz um eine Probekladung, ab welcher die Quasineutralität gilt und gleichzeitig, wann die Ladung vollständig abgeschirmt ist
Plasmafrequenz	$\omega_{p,j}^2 = \frac{n_j e^2}{\varepsilon_0 m_j} = \frac{v_{th,j}}{\lambda_{D,j}} = \frac{1}{\tau_j}$	obere Grenze der Zeitskala für die Wechselwirkung mit externen Kräften bzw. Feldern; Inverse der Abschirmungszeit
thermische Geschwindigkeit	$v_{th,j}^2 = \frac{k_B T_j}{m_j}$	mittlere Geschwindigkeit aus der Definition der kinetischen Gastheorie
mittlerer Teilchenabstand	$\bar{b} = \frac{h}{m_j v_{th,j}}$	gemittelter Teilchenabstand, entspricht thermischer de-Broglie-Wellenlänge
Yukawa-Potential	$\Phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon \vec{r} } e^{-\frac{ \vec{r} }{\lambda_D}}$	elektrostatisches Wechselwirkungspotential einer Probekladung Q in einem Plasma (Vergleich Pionen-Austausch)

Tabelle 1: Plasmaphysikalische Kenngrößen. Der Index j bestimmt die Ladungsträgerspezies mit den entsprechenden Massen und Ladungen.

Wie bereits erwähnt greift dieses Experiment auf die Erzeugung einer Gasentladung zurück. Hierbei ist der Versuch wie ein horizontal ausgerichteter, paralleler Plattenkondensator angeordnet (siehe Abb. 2a), wobei das Dielektrikum das Plasma sei, die untere Elektrode mit einem Signal im MHz-Bereich betrieben wird und die andere auf Massepotential liegt. Das elektrische Feld resultiert hierbei aus den Oberflächenladungen der Elektroden, wobei mit unterschiedlichen rf -Signalen (*radio frequency*) auch verschiedene Betriebsregime realisiert, e.g. Ladungsträger erzeugt bzw. vernichtet werden.

Die rf -Spannung sorgt weiterhin für die nötige Homogenität des Plasmas, da aufgrund dessen (wie im γ -Regime) ein Verschiebungsstrom zwischen Entladungsvolumen und Elektrode fließt (siehe Abschn.

1.1.2) und damit die Kontaktierung dieser sehr isotrop gestaltet. In Aufbauten, in welchen die Flächen der Elektroden nicht gleich sind, fließt wegen der unterschiedlichen Potentialverläufe in den Randschichten (siehe Abschn. 1.2) zusätzlich eine Gleichspannung, die sogenannte *self-bias* - siehe Abschn. 1.1.2. Das ist insbesondere der Fall für das Experiment dieser Arbeit, da hier die gesamte Kammer als Elektrode zur Masse dient und die andere entsprechend kapazitiv an die Erregung gekoppelt ist.

1.1.1 Verschiebungsstrom

Die Elektronen eines Plasmas über einer *rf*-getriebenen Elektrode können, aufgrund ihrer Beweglichkeit und hohen Plasmafrequenz $\omega_{p,e}$ der Anregung problemlos folgen. Die Ionen sollen in diesem Fall als stationär betrachtet werden, da $\omega_{p,i} \ll \omega_{p,e}$. Nimmt man an, dass die Randschicht der Dicke a frei von Elektronen ist (siehe Abschn. 1.2) und die Ionendichte dort konstant $n_{0,i}$ ist, so folgt für das elektrische Feld der positiven Raumladungszone an der Kammerwand $E_0 = -en_{0,i}a/\varepsilon_0$ - siehe Abb. 1. Lädt sich die Entladungsbegrenzung nun stärker negativ auf, so dehnt sich die Randschicht als Folge dessen aus und wandert dabei mit der Geschwindigkeit $v = ds_1/dt$ in das Plasmavolumen hinein. Dies führt zum bereits erwähnten Verschiebungsstrom in der Randschicht $j_V = -en_{0,i}v$, welcher zusammen mit dem Strom der, aus der Schicht „verdrängten“ Elektronen $j_L = -en_{0,i}v$ die Kontinuität im Plasma erhält.

Da im Hauptvolumen der Entladung die Quasineutralität erhalten ist, dh. $n_e = n_{0,i}$, müssen die zusätzlichen Elektronen aus der pos. Ladungszone in $x \in [0, s_1 + ds_1]$ in den Teil des Plasmas, in welchem zu diesem Zeitpunkt die Randschicht schrumpft und $ds_1 = -ds_2$ gilt. Daraus folgt wiederum, dass die Randschichten eines harmonisch getriebenen Plasmas sinusoidal um eine Gleichgewichtsdicke s_0 schwingen und während einer jeden Schwingung einmal vollständig verschwinden, e.g. $s_{1/2,max} = s_0$. Letztendlich ergibt sich daraus ein Spannungsabfall über das Plasma aus den Potentialdifferenzen der Randschichten $U_{1/2}$:

$$\Delta U = U_1 - U_2 = -\frac{2en_{0,i}s_0}{\varepsilon_0} \exp(i\omega t) . \quad (1)$$

1.1.2 *self-bias*

Einem Plasma kann man eine, für *rf*-Spannungen der Frequenz ω nicht verschwindende Impedanz Z_P zuordnen. Für das Entladungsvolumen der Permittivität ε_P , der Kapazität C_P auf der Querschnittsfläche A und Dicke b , in welcher die freien Elektronen mit der Frequenz $\nu_{e,N}$ mit den Neutralgasatomen stoßen, gilt:

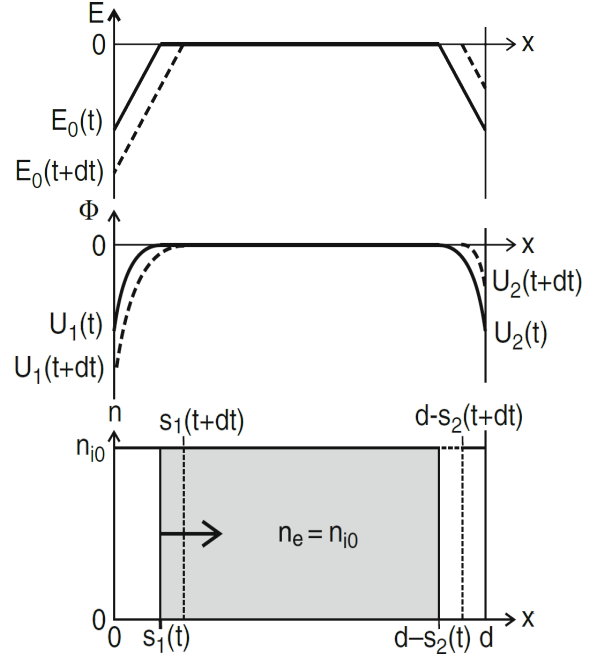


Abb. 1: Verlauf der Dichten, des elektrischen Feldes und des zug. Potentials (eindimensional) in einer Entladung mit zwei gegenüberliegenden Randschichten.

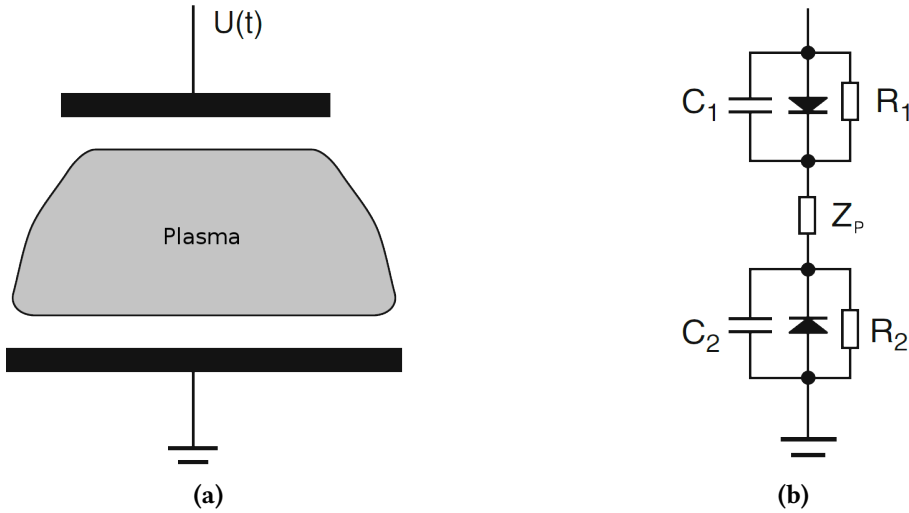


Abb. 2: (a): Schema eines Plasmas mit ungleichen Elektrodenflächen. Die obere ist hierbei kleiner und gleichzeitig mit dem *rf*-Signal betrieben. (b): Ersatzschaltbild einer Entladung mit der *bulk*-Impedanz Z_p (Hauptvolumen) und den Randschichten: eine Diode als Symbol für den „Elektronenfluss“ aus der Schicht hinaus, der Widerstand R_j als Ionenstrom und die Kapazität C_j der pos. Raumladungszone.

$$\varepsilon_P = 1 - \frac{\omega_{P,e}^2}{\omega(\omega - i\nu_{e,N})} \quad C_P = \varepsilon_P C_0 = \varepsilon_P \varepsilon_0 \frac{A}{b} \quad (2)$$

$$Z_P = \left(i\omega C_P + \frac{1}{\frac{1}{\omega_{P,e}^2 C_0} (\nu_{e,N} + i\omega)} \right)^{-1} \quad (3)$$

Die Induktivität $i\omega / (\omega_{P,e}^2 C_0)$ des „elektronischen Schaltkreises“ der Entladung gibt die Trägheit der Elektronen in Bezug auf ein Signal ω wieder, wohingegen der reelle Widerstand $\nu_{e,N} / (\omega_{P,e}^2 C_0)$ der Neutralgasreibung entspricht. Zusammen mit den Randschichten ergibt sich das Ersatzschaltbild eines Plasmas in Abb. 2b.

Betrachtet man zuerst den Fall hoher Anregungsfrequenzen, so kann man die Impedanz des *bulk* (siehe Gl. (3)) vernachlässigen und es dominieren die Kapazitäten C_j . Es folgt für die Spannung U über die Entladung und das Plasmapotential Φ_P :

$$U(t) = U_{GS} + U_{rf} \sin(\omega t) \quad \Phi_P(t) = \overline{\Phi_P} + \Phi_{rf} \sin(\omega t) \quad (4)$$

Wie bereits erwähnt, verschwindet die Randschicht vollständig während einer Anregungsperiode. Als Folge dessen stellt sich Φ_P auf das Potential der Elektrode ein, woraus wiederum ein Elektronenstrom auf diese folgt. Es entsteht sozusagen ein Kurzschluss in der Region der Randschicht, wenn das Plasmapotential negativ im Vergleich zur Elektrode wird. Es folgt somit mit Gl. (4) zusammen:

$$\Phi_{P,max} = \overline{\Phi_P} + \Phi_{rf} \geq U_{GS} + U_{rf} \quad \Phi_{P,min} = \overline{\Phi_P} - \Phi_{rf} \geq 0. \quad (5)$$

Liegt die getriebene Elektrode ohne zwischengeschalteten „Puffer“ direkt an der *rf*-Signalquelle, so gilt zumindest für eine Ungleichung aus (5) die Gleichheit. Wird hingegen die Elektrode kapazitiv

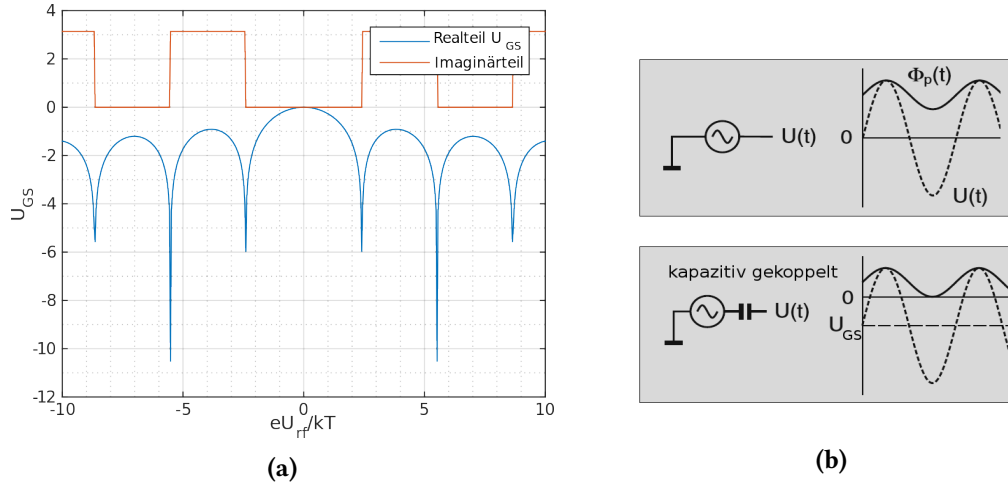


Abb. 3: (a): Gleichspannungsanteil *self-bias* bei gegebenen Spannungen der Anregung U_{rf} , siehe Gl. (7).
(b): Schema des Potential- und Spannungsverlauf einer direkt und kapazitiv gekoppelten *rf*-Elektrode.

gekoppelt, dh. zwischen diese und den Generator ein Kondensator geschaltet, so kann in einer Periode der *rf*-Anregung kein Nettostrom von der Quelle fließen. Deswegen gibt es gleiche Elektronenströme auf beide Elektroden, was zur Folge hat, dass das minimale Plasmapotential das Massepotential wird und das maximale zu dem der Anregung. Für den Gleichspannungsanteil, *self-bias* U_{GS} und das mittlere Plasmapotential $\overline{\Phi_P}$ folgt:

$$\overline{\Phi_P} = \frac{1}{2} (U_{GS} + U_{rf}) \quad U_{GS} = \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} U_{rf} . \quad (6)$$

Diese Zusammenhänge gelten allgemein für dieses Experiment.

Ist die Frequenz klein respektive üblicher Zeitskalen der Entladung, so wird der Strom aus den verdrängten Elektronen j_L größer als der Verschiebungsstrom durch die Randschichtschwankung j_V . Demzufolge wird der Strom aus Elektronen auf die getriebenen Elektrode, im Vergleich zu dem aus Ionen, durch einen Maxwell-Faktor in Abhängigkeit der angelegten Spannung verkleinert. Die Impedanz der Randschicht über der Elektrode ist demnach wesentlich größer als die der anderen bzw. der Wände. Mit den Gl. (4) und (5) folgt, dass das Plasmapotential näherungsweise verschwindet und deswegen nur die Kontinuität für den Strom auf die getriebene Elektrode erhalten sein muss. Der *self-bias* bei kleinen Anregungsfrequenzen ergibt sich in Gl. (7) (J_0 Bessel-Funktion).

$$U_{GS} = \frac{k_B T_e}{e} \ln \left[J_0 \left(\frac{e U_{rf}}{k_B T_e} \right) \right] \quad (7)$$

In Abb. 3a ist der Spannungsverlauf beispielhaft dargestellt. Der *self-bias* verschwindet demnach nie für Elektroden Spannungen $U_{rf} \neq 0$ und ist damit eine feste Größe in einer Radiofrequenz-Entladung, welche über kapazitive Bauteile betrieben werden.

1.2 Grenzschichten einer Entladung

Im Hauptvolumen eines Plasmas werden die Neutralgasatome durch Wechselwirkungen mit den Elektronen zur Fluoreszenz angeregt. Die Grenzschichten von Gasentladung zu Metallen sind jedoch dunkler, als das eigentliche Plasma. Dies ist somit auf einen Elektronenmangel zurückzuführen, ähnlich wie

in Abschn. 1.1.1 argumentiert. Die Quasineutralität kann dort somit nicht mehr gelten. Es folgt, dass eine Randschicht automatisch eine positive Raumladungszone ist.

Auf Grund der wesentlich größeren Beweglichkeit μ_e und thermischen Geschwindigkeit $v_{th,e}$, wird eine Wand in einem Plasma häufiger von Elektronen getroffen, als von den korrespondierenden Ionen. Betrachtet man nur die Oberfläche dieser, so kann man dessen Aufladung und damit auch das Potential Φ als negativ annehmen.

1.2.1 Child-Langmuir-Gesetz

Die negative Aufladung einer Wand in einem Plasmas soll nun eine große Potentialbarriere gegen thermische Elektronen erzeugen, e.g. $|\Phi(0) - \Phi(-d)| \ll k_B T_e / e$. Die Betrachtung in einer Dimension soll hier genügen - es lässt sich leicht der dreidimensionale Zusammenhang daraus erweitern. Die Elektronendichte $n_e(x)$ geht mit dem Boltzmann-Faktor $f_B(\Phi)$ („boltzmann-artige“ Elektronen) wie

$$n_e(x) = n_e(-d) f_B(\Phi) = n_e(-d) \exp\left(\frac{e(\Phi(x) - \Phi(-d))}{k_B T_e}\right). \quad (8)$$

Die Elektronendichte fällt damit exponentiell in Richtung der Wand ab. Das bedeutet, dass nur noch vorrangig Ionen ungehindert einströmen können. Es ist anzunehmen, dass die Randschichtausdehnung $d \ll \lambda_{mfp}$ die mittlere freie Weglänge des Plasma ist und die Ionen stoßfrei darin eintreten.

An der Grenze zur Vorschicht (siehe Abb. 4a) haben die Ionen die Geschwindigkeit $v_{I,0}$ und das Potential der Wand verschwindet gerade an dieser Stelle. Für den Dichteverlauf der Ionen folgt:

$$n_I(x) = n_I(-d) \left(1 - \frac{2e\Phi(x)}{m_I v_{I,0}^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

Nimmt man weiterhin an, dass die kinetische Energie $m_I v_{I,0}^2 / 2 \ll |e\Phi(x)|$ die Beschleunigung in der Randschicht ist, folgt somit die Bestimmungsgleichung (10) für $\Phi(x)$ nach Poisson. Um dabei das korrekte Potential in der Grenzschicht zu erhalten, muss die Rückwirkung der Ionen auf dieses beachtet werden.

$$\Delta\Phi \cong -\frac{en_I(-d)}{\epsilon_0} \left(-\frac{2e\Phi(x)}{m_I v_{I,0}^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (10)$$

Die klassische Lösung nach *Langmuir* für das eindimensionale $\Phi(x)$ erhält man aus Gl. (10), wobei der ungestörte Ionenstrom geschrieben wurde als $j_I = n_I(-d) e v_{I,0}$.

$$\Phi(x) = \left(\left(\frac{3}{4}(x+d)\right)^4 \left(\frac{j_I}{\epsilon_0}\right)^2 \frac{m_I}{2e}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (11)$$

Die Auflösung von Gl. (11) nach dem Ionenstrom j_I ergibt das *Child-Langmuir-Gesetz* (Gl. (12)). Dieses gibt nunmehr an, wie der Ionenstrom in der Randschicht von den Eigenschaften des ungestörten Plasmas abhängt. Umgekehrt bedeutet das, dass die Grenzregion auf Variationen des Potentials und der Parameter mit Veränderungen der Schichtdicke reagiert und damit versucht, den Einschränkungen der positiven Raumladungszone und dessen Ionenstrom nach dem *Child-Langmuir-Gesetz* zu genügen.

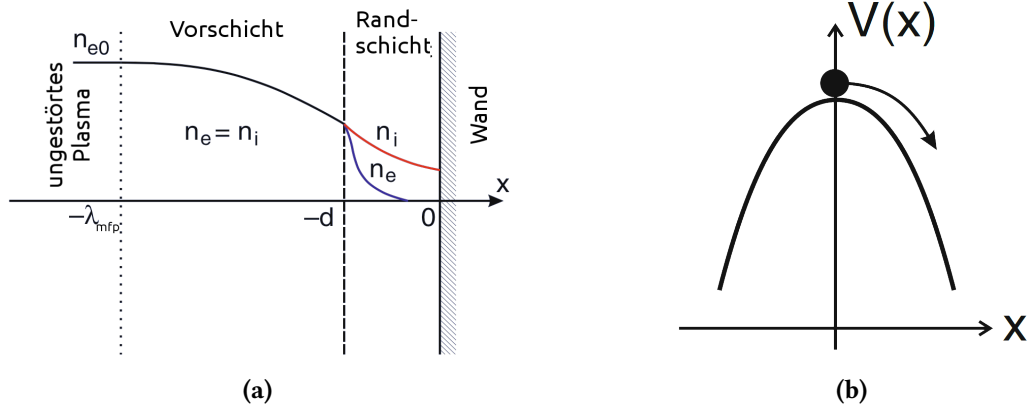


Abb. 4: (a): Dichten-Verlauf in der Grenzsicht zu einer Metalloberfläche. In einer bestimmten Entfernung d zur Wand fällt die Elektronendichte praktisch auf 0, woraus die lokale Aufhebung der Quasineutralität folgt. (b): (Eindimensionales) Harmonisches Potential mit extremaler Instabilität. Kleine Auslenkungen sorgen für große Kräfte.

$$j_I = \frac{4}{9} \varepsilon_0 \left(\frac{2e (\Phi(-d) - \Phi(0))^3}{m_i d^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

1.2.2 Bohm-Kriterien

In Abschnitt (1.2.1) wurde das Verhalten der Dichten der Ladungsträger in einer Grenzsicht diskutiert. Diese erfüllen, in einem Abstand d zur Wand in einem Plasma, die Eigenschaft der Quasineutralität, welche weiterhin im Hauptvolumens gilt, nicht mehr. Es damit kein Kriterium für die Elektronen, welches sie daran hindert, auch aus weiten Teilen des Plasmas auf die Wand einzuströmen. Man stellt sich somit die Frage: Warum dehnt sich die Randschicht nicht in die gesamte Entladung aus? Wieso ist der Bereich der Elektronenerschöpfung für eine Kombination der Plasmaparameter konstant?

Um dieses Problem zu Lösen, stellt man sich ein (mechanisches) Ein-Teilchen-Problem vor, bei welchem eine Gleichgewichtsanalyse vorgenommen wird. Das Potential habe ein Extremum - maximal oder minimal - an welchem die Punktmasse sich befindet. Für den vorliegenden Fall des Randschicht-Problems sind nur Potentiale mit umgekehrt-parabelartigen Maxima interessant (siehe Abb. 4b), womit aus einer kleinen Störung eine große Kraft auf das Teilchen folgt. In diesem Fall kann man also von einer Instabilität sprechen.

Der Bezug zur Plasmarandschicht wird deutlich, wenn man die Differentialgleichung des mechanischen Problems mit der Poissongleichung des Potentials in der Rand- bzw. Vorschicht - siehe Gl. (13) vergleicht. Dabei stellt $\Psi(\Phi)$ ein Pseudopotential dar, welches in seiner Bedeutung vergleichbar mit der mechanischen Variante $V(\vec{r})$ ist.

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = - \frac{dV}{d\vec{r}} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta_{\vec{r}} \Phi = - \frac{d\Psi}{d\Phi} = f(\Phi) \stackrel{\text{Poisson}}{=} \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (13)$$

Damit eine Instabilität vorliegen kann, muss die, aus einer Störung des Pseudopotentials resultierende Kraft mit der Entfernung zum Gleichgewicht anwachsen. Die mathematisch äquivalente Formulierung ist die Ungleichung in (14). Nach Gl. (13) und der in Abschnitt (1.2.1) hergeleiteten Dichten

in der Grenzschicht, kann die geforderte Bedingung überprüft werden. Aus ihr folgt das erste *Bohm-Kriterium*.

$$0 > \left. \frac{d^2 \Psi}{d\Phi^2} \right|_{\Phi=0} \stackrel{Gl.(13)}{=} \left. \frac{d}{d\Phi} \left(\frac{n_e(x) - n_I(x)}{\varepsilon_0} \right) \right|_{\Phi=0} = \frac{en_e(-d)}{\varepsilon_0} \left(\frac{e}{k_B T_e} - \frac{e}{m_I v_{0,I}^2} \right) \quad (14)$$

$$\Rightarrow v_{0,I} \geq v_{B,I} = \sqrt{\frac{k_B T_e}{m_I}} \quad (15)$$

($v_{B,I}$ - Bohm-Geschwindigkeit; $v_{0,I}$ - Ionen-Driftgeschwindigkeit; T_e - Elektronentemperatur; m_I - Ionenmasse)

Für das Bohm-Kriterium in Gl. (15) kann auch analog die sog. *Machzahl* $M = v_{0,I}/v_{B,I}$ angegeben werden.

Um zu erläutern, warum die Randschicht sich als Rückwirkung nicht in das Plasma ausdehnt, betrachten wir die Teilchenbewegung aus der Vor-Randschicht. Hier existiert ein elektrisches Feld, welches die Ionen auf die Geschwindigkeit v_B in Richtung Wand beschleunigt. Außerdem gilt in ihr noch die Quasineutralitäts-Bedingung:

$$n_I(x) = n_{I,0} \exp\left(\frac{e\Phi(x)}{k_B T_e}\right) = n_e(x) \quad (16)$$

Hierbei ist $\Phi(x)$ das Potential der Vorschicht aus Abschnitt (1.2.1). Da Stöße der Frequenz $\nu_{N,I}$ der Ionen mit den Neutralgasatomen einen nicht vernachlässigbaren Einfluss auf deren Strom haben, muss die Geschwindigkeitsverteilung umgeschrieben werden.

$$\frac{dv_I}{dx} = \frac{\nu_{N,I} v_I^2}{v_B^2 - v_I^2} \quad (17)$$

Aus der Singularität von Gl. (17) in $v_I = v_B$ und der Kenntnis über das Wandpotential lässt sich die Ausdehnung der Randschicht d bestimmen. Offensichtlich werden Ionen mit einer Geschwindigkeit $v_I < v_B$ in der Vorschicht beschleunigt. Geschwindigkeiten größer als die Bohm-Geschwindigkeit kommen dort nicht vor, da dies nach Gl (15) nur in der Randschicht der Fall sein darf.

Zusammen mit dem ersten *Bohm-Kriterium* folgt, dass am Übergang der Vor- zur Randschicht die Ionen v_B erreichen müssen, damit sich eine positive Raumladungszone ausbilden kann.

$$M = 1 \quad \Leftrightarrow \quad v_I(-d) = v_B \quad (18)$$

Lokal heißt das, dass bei $x = -d$ die Dichten bereits auf $\approx 0,66n_{e,0}$ abgefallen sind (siehe Abb. 4a) und das Potential durch die Aufladung der Wand circa $-k_B T_e/2e$ beträgt.

Ein Plasma „sieht“ damit seine Randschicht nicht, da sich die notwendige Dynamik der entsprechenden Ladungsträger auf diese beschränkt und sich nicht beliebig ausdehnen kann. Mit anderen Worten: eine Randschicht bildet sich nur an Orten des Elektronenmangels und lokal negativer Potentiale aus.

1.3 Aufladung von Staubpartikeln

Die Ladung eines Fremdteilchens (Staub) in einem Plasma ist eine dynamische Größe. Sie ist zeitlich veränderlich, als auch abhängig von den Plasmametern, den Partikeleigenschaften sowie dessen

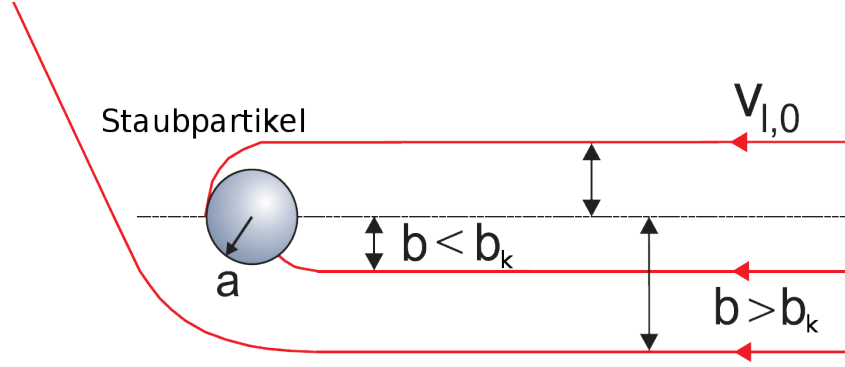


Abb. 5: OML-Beschreibung eines, auf einen Staubpartikel einströmendes Ions. Der kritische Stoßparameter, für welcher eine Kollision stattfindet, ist b_k . Er ist im Vergleich zum geometrischen Querschnitt aufgrund der Coulomb-Wechselwirkung vergrößert.

Trajektorie in der Entladung. Offensichtlich ergibt sich die Ladung eines Teilchens zum Zeitpunkt t aus den Ladungsströmen I_k der Plasmaspezies auf das Partikel bis zu diesem Zeitpunkt. Im folgenden genügt es, dieses Problem auf einer Zeitskala zu betrachten, in der man die Ladung als konstant unter dem Einfluss der Ströme annehmen kann. Damit werden diese ebenfalls stationär und es gilt für ein einzelnes Teilchens die *Kirchhoff'sche Knotenregel*, wobei der Staub ein Knoten sei:

$$\sum_k I_k(\Phi_{\text{fl}}) = \frac{dQ_S}{dt}, \quad (19)$$

Die Elektronen und Ionen im Plasma strömen aufgrund ihrer thermischen Bewegung auf das Fremdteilchen und verleihen diesem über Stöße eine Ladung Q_S , wobei sich für das Partikel ein elektrostatisches Potential Φ_{fl} einstellt, bei dem Gl. (19) gilt. Die Ladungsspezies kommen dabei im allgemeinen aus Sekundär-, Photo-, oder Feldemissionen, wobei die dominanten Ströme die des Plasmas selbst sind. Hier soll es ausreichen, die Plasmaströme nach *Langmuir* und *Mott-Smith* mit dem sog. *orbital motion limit*-Modell [1] zu beschreiben.

1.3.1 OML-Modell

Dabei wird angenommen, dass sich ein strömendes Teilchen, welches zu Q_S beiträgt bzw. damit elektrostatisch wechselwirkt, stoßlos aus dem Unendlichen (durch die Entladung) darauf zu bewegen kann. Aufgrund der, im allgemeinen höheren Elektronentemperatur und -beweglichkeit wird $\Phi_{\text{fl}} < 0$, woraus eine veränderte Wechselwirkung mit den Teilchen der Ladungsströme folgt. Man definiert folglich einen kritischen Stoßparameter b_k , welcher dem Abstand eines Ions zur Target-Achse entspricht, bei dem dieses durch die Coulomb-Anziehung des Partikels gerade noch dessen Oberfläche tangiert. Für Parameter $b > b_k$ wird ein eintreffendes Ion auf seiner Trajektorie nur abgelenkt, für $b < b_k$ landet dieses auf dem Staubteilchen.

Da vorausgesetzt wurde, dass keine Stöße vor dem Target geschehen, kann die Impulserhaltung zusammen mit der Energieerhaltung für ein einzelnes Projektil aufgestellt werden, welches sich im Abstand b_k darauf zu bewegt:

$$|\vec{L}| = |\vec{r} \times \vec{p}| = m_I v_I a = m_i v_{i,0} b_k \quad (20)$$

$$E_I = \frac{m_I}{2} v_I^2 + e\Phi_{\text{fl}} = \frac{m_I}{2} v_{I,0}^2 \quad (21)$$

In Gl.(20) und (21) stehen jeweils die linken Seiten für den Zeitpunkt des Auftreffens und die rechten für das Einlaufen aus dem Unendlichen. Durch Umformungen lässt sich ein Ausdruck für den kritischen Stoßparameter, in Abhängigkeit vom Partikelradius und dem *floating*-Potential aufgestellt werden.

$$b_k^2 = a^2 \left(1 - \frac{e\Phi_{fl}}{\frac{m_l}{2} v_{l,0}^2} \right) \quad (22)$$

Der zugehörige Streuquerschnitt für die Streuung eines Teilchenstroms an einem Staubpartikel wird damit zu $\sigma_k = \pi b_k^2$, welcher größer als die geometrische Querschnittsfläche πa^2 . Dem liegt die Coulomb-Wechselwirkung der Stoßpartner zu Grunde.

Der (differentielle) Ladungsträgerstrom dI_j , welcher schließlich den Parameter der Partikelladung bestimmt, ergibt sich aus der Aufsummierung aller Stromdichten von Teilchen der Geschwindigkeiten v_j , gewichtet mit ihren zugehörigen Wechselwirkungsquerschnitten σ_j und (hier: maxwellartigen) Verteilungen $f(v_j)$:

$$dI_j = \sigma_j(v_j) n_j v_j f(v_j) dv_j$$

$$\text{Ionen: } I_I = \pi a^2 n_I e \sqrt{\frac{8k_B T_I}{\pi m_I}} \left(1 - \frac{e\Phi_P}{k_B T_I} \right) \quad (23)$$

$$\text{Elektronen: } I_e = -\pi a^2 n_e e \sqrt{\frac{8k_B T_e}{\pi m_e}} \exp\left(\frac{e\Phi_P}{k_B T_e}\right) \quad (24)$$

($T_{e,I}$ - Elektronen-/Ionentemperatur; $n_{e,I}$ - Elektronen-/Ionendichte, Φ_P - Partikelpotential; k_B - Boltzmann-Konstante)

Der Unterschied zwischen Gl. (23) und (24) resultiert aus den unterschiedlichen Arten der Wechselwirkung mit dem Staubteilchen. Da $\Phi_P < 0$ ist, werden Ionen aller Geschwindigkeiten in Richtung des Partikels gelenkt und könnten theoretische damit stoßen (respektiv der Geschwindigkeitsverteilung und dem Streuquerschnitt). Die Elektronen hingegen müssen mindestens eine Geschwindigkeit $v_{\min} = \sqrt{-2e\Phi_P/m_e}$ besitzen, damit sie die Potentialbarriere zum Partikel überwinden und damit stoßen können. Außerdem finden sich mit $\sqrt{8k_B T_j/\pi m_j}$ die thermischen Geschwindigkeiten der jeweiligen Spezies j als Vorfaktoren wieder. Damit werden die Gesamtströme letztendlich zum Produkt aus ungestörter, thermischer Stromdichte und der angepassten Wechselwirkungsfläche des Partikels.

Es sei erwähnt, dass aufgrund der hohen Teilchendichten in einem Plasma die OML-Theorie nicht der Realität entspricht. Die mittlere freie Weglänge eines Ions oder Elektrons hat in etwa die Dimension der Debyelänge λ_D und ist nicht, wie vorausgesetzt, unendlich groß. Des weiteren entsprechen die $f(v_j)$ in der Praxis nicht isotropen Maxwell-Geschwindigkeitsverteilungen.

1.3.2 Neutralgas-Ionen-Stöße

Auf Grundlage der OML-Theorie lässt sich ein erweiterter Ausdruck für den Ionenstrom mit Rücksicht auf Stöße des Neutralgases aufstellen. Offensichtlich geht, mit dem Durchgang eines Projektils durch das Neutralgas einer Entladung, der Verlust kinetischer Energie einher. Es ist nun leicht nachzuvollziehen, dass sich viele Ionen, aufgrund der Ablenkungen durch Stöße und Wechselwirkung, um das negativ geladene Staubpartikel sammeln.

In einer Sphäre mit dem Radius R um das Teilchen ist die Stoßwahrscheinlichkeit zwischen Ionen und Neutralgasatomen

$$\frac{R}{l\lambda_{\text{mfp}}} = Rn_N\sigma_{\text{IN}} . \quad (25)$$

(n_N - Neutralgasdichte; σ_{IN} - Stoßparameter für Ion-Neutralgas-Stöße; λ_{mfp} - mittlere freie Weglänge) Durch eine Sphäre mit diesem Radius fließt nun neben dem thermischen Ionenstrom I_{th} noch ein weiterer Strom I_S auf Grund der Stöße mit dem Neutralgas. Die Ionen der Geschwindigkeit $v_{\text{th,I}}$, welche sich ohne Wechselwirkung mit dem Gas der Entladung am Target vorbei bewegen würden, werden mit der Stoßwahrscheinlichkeit aus Gl. (25) in Richtung des Staubteilchens abgelenkt und tragen somit zum Ladungsstrom auf dieses bei. Der Gesamtladungsstrom durch Ionen entspricht der Summe der beiden Ströme:

$$I_{\text{th}} = \pi R^2 n_N e v_{\text{th,I}} \quad I_S = \pi R^2 n_N e v_{\text{th,I}} (R n_N \sigma_{\text{N,I}}) \quad (26)$$

$$I_{\text{ges}} = \pi a^2 n_I e v_{\text{th,I}} \left(1 - \frac{e\Phi_P}{k_B T_I} + \frac{R^3}{\lambda_{\text{mfp}} a^3} \right) \quad (27)$$

Auf der Oberfläche der 'Stoßsphäre' S_R hat das Yukawa-Potential des Staubteilchens gerade die Energie der thermischen Ionenbewegung (Gl. (28)), womit diese gerade noch in dessen Einfang geraten. Mit dem daraus bestimmten R folgt ein diskreter Ionenstrom auf das Partikel mit Rücksicht auf die Ionen-Neutralgaswechselwirkung (Gl. (29)).

$$\frac{k_B T_I}{e} = \frac{Z_S e}{4\pi\epsilon_0 R} \exp\left(\frac{R}{\lambda_D}\right) \quad (28)$$

$$I_I = \pi a^2 n_I e v_{\text{th,I}} \left(1 - \frac{e\Phi_P}{k_B T_I} + 0,1 \left(\frac{e\Phi_P}{k_B T_I} \right)^2 \frac{\lambda_D}{\lambda_{\text{mfp}}} \right) \quad (29)$$

Im Vergleich zum Ergebnis des OML-Modells aus Gl. (23) ist dieser Ladungsstrom in Abhängigkeit des Partikelpotentials und Ionentemperatur vergrößert. Die Wechselwirkung mit dem Neutralgas sorgt also, über die Stöße und Erzeugung einer *Ionenwolke* um ein Teilchen, für einen größeren pos. Ladungsstrom, welcher respektive wiederum für eine Steigerung des Elektronenstromes auf Grund des veränderten Partikelpotentials sorgt. Eine selbstkonsistente Lösung der, an den Anfang gestellte Problematik in Gl. (19) um das *floating*-Potential gestaltet sich jedoch als überaus schwierig, da schon der OML-Theorie mehrere falsche Annahmen vorausgingen und dessen Eigenrückwirkungen nicht-trivial sind.

1.4 Staub-Dynamik

In einem Plasma wirken viele, u.U. nicht-triviale Kräfte auf den eingefangenen Staub. Im Folgenden werden die wichtigsten Einflüsse und Kenngrößen der Dynamik komplexer Plasmen vorgestellt und beschrieben. Insbesondere ist dieser Abschnitt wichtig für das Verständnis über die Bildung und Stabilität sog. *Yukawa-Cluster*. Dabei handelt es sich um ein System aus wenigen Staubteilchen, welche sich in einem äußeren, harmonischen Potential - analog zum Schalenmodell des Atoms - anordnen. Diese sollen des Weiteren genauer in Abschnitt 1.5 beschrieben werden.

1.4.1 Gravitation und elektrische Feldstärke

Betrachtet man ein Experiment, welches am Erdboden in Nähe der Meereshöhe durchgeführt wird, so muss offensichtlich die vollständige Gravitationskraft berücksichtigt werden. Dies gilt bspw. nicht für Versuche unter Mikrogravitation während Parabelflügen oder auf der *International Space Station*.

$$F_g = m_S g = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_S g \quad (30)$$

(m_S - Masse der Staubteilchen; a - Partikelradius; ρ_S - Massendichte des Staubes; g - Erdbeschleunigung)
 Natürlich wirkt auf die, durch das ionisierte Gas elektrisch geladenen Partikel eine elektrische Kraft F_E , welche aus dem äußeren Feld E der Plasma-Elektroden folgt. Eine elektrische Wechselwirkung mit dem Plasma tritt aufgrund der Quasineutralität nicht auf: innerhalb einer *Debye-Kugel* sind die Veränderung zu schnell, als dass das träge Staubteilchen diesen folgen könnte.

$$F_E = Q_S E = 4\pi\epsilon_0 a \Phi_{fl} E \quad (31)$$

(Q_S - Staubladung; Φ_{fl} - *floating*-Potential)

Diese beiden Kräfte heben sich gerade in der Randschicht einer sog. Radiofrequenz-Entladung (*rf discharge*) auf, da sie für eine oben liegende Kathode antiparallel stehen. Zu beachten ist hierbei der stark unterschiedliche Einfluss des Teilchenradius - $\propto a^3$ und $\propto a$.

1.4.2 Abschirmung und Polarisationskräfte

Die große negative Aufladung der Staubteilchen sorgt über die Coulomb-Wechselwirkung mit den auf das Partikel zuströmenden Ionen dafür, dass sich eine Konzentration derer lokal stark ändert. Es entsteht eine Wolke aus langsamen Ionen die quasi in der näheren Umgebung um das Teilchen verbleiben, jedoch nicht mit diesem interagiert und es nach außen hin vor dem Einfall schnellerer pos. Ladungen abschirmen. Somit gibt es keine direkte Rückwirkung der Wolke auf das Partikel, sofern dessen sphärische Symmetrie gegeben ist. Gilt dies nicht, so entsteht ein Multipol- bzw. Dipolmoment \vec{p} , welches danach strebt, sich in Richtung des Feldes \vec{E} auszurichten. Damit wirkt eine Kraft F_{Dip} (für ein Dipolmoment) auf das Staubteilchen zurück, welche mit dem Gradienten der Richtungsdivergenz zwischen \vec{p} und \vec{E} geht.

$$\vec{F}_{Dip} = \vec{\nabla} (\vec{p} \vec{E}) \quad (32)$$

$$\stackrel{\vec{p} \parallel \vec{E}}{=} grad(pE)$$

Das besagte Dipolmoment entsteht u.a. durch die diversen, gerichteten Ladungsprozesse in dem Plasma. Ein Partikel, welches in der Randschicht eingefangen und von einer Ionenwolke umgeben wird, 'sieht' unterschiedliche *Debye*-Längen über und unter sich aufgrund der lokalen Feldrichtung und der stark vom Mittelwert abweichenden Ionen- und Elektronendichten. Somit ändert sich offensichtlich die Plasmadichte innerhalb des Volumens einer Kugel mit dem, nun ortsabhängigen Radius λ_D (\vec{r}). Insgesamt folgt daraus eine neue Bestimmungsgleichung für das Potential und damit auch eine neue Kraft F_E .

$$\Delta\Phi(\vec{r}) - \frac{\Phi(\vec{r})}{\lambda_D^2(\vec{r})} = \frac{Q_s}{\varepsilon_0} \delta(\vec{r}) \quad (33)$$

$$F_E = \underbrace{Q_s E}_{(I)} - \underbrace{\frac{Q_s^2}{8\pi\varepsilon_0} \frac{\nabla\lambda_D(\vec{r})}{\lambda_D^2}}_{(II)} \quad (34)$$

Hierbei stellt (I) die normale Komponente dar und (II) ist zusätzliche Kraft durch die Deformation der Ionenwolke in Richtung kleinerer *Debye*-Längen $\lambda_D(\vec{r})$. Die Kraft F_E kann also dadurch größer oder kleiner werden. Hinzu kommt, dass der veränderte Parameter λ_D von der Driftgeschwindigkeit u_I abhängt, welche die Ionenwolke maßgeblich beeinflusst. Ist jedoch $u_I < v_{th,I}$ so kann man annehmen, dass die Ionenwolke besteht und $\lambda_D(\vec{r}) \approx \lambda_{D,I}$ gilt.

Sind die Ionen jedoch schneller, womit $u_I \gg v_{th,I}$ wird, so können sie nicht mehr vom Feld des Partikels 'gefangen' werden und damit die Ionenwolke bilden. So gilt folglich $\lambda_D(\vec{r}) \approx \lambda_{D,e}$.

Insgesamt ist der Einfluss der Polarisation vernachlässigbar klein, solange die Teilchen eine Größe von einigen hundert μm nicht übersteigen.

1.4.3 Ionen-Neutralgasreibung

Aufgrund der hohen negativen Ladung des Staubteilchens und der daraus resultierenden elektrostatischen Wechselwirkung existiert ein, relativ auf das Partikel zufließender, Ionenstrom oder auch „Ionenwind“. Weiterhin bewegen sich mit ihrer thermischen Geschwindigkeit die Neutralgasatome durch das Plasma und stoßen mit anderen Teilchen. Die Zahl der Stöße dN einer Spezies mit einem Target mit dem Streuparameter σ im Zeitintervall dt ist somit über deren relative Geschwindigkeit v_{rel} zu diesem in $dN = n\sigma v_{rel} dt$ gegeben. Hierbei kennzeichnet n die Stromdichte der strömenden Teilchen. Aus diesem Strom folgt ein gewisser Impulsübertrag Δp auf das Target. Hieraus lässt sich eine Kraft F_{drag} ziehen, die einer Reibung bzw. einer Impulsaufnahme entspricht.

$$F_{drag} = \frac{dN\Delta p}{dt} = \Delta p n \sigma v_{rel} \quad (35)$$

Man spricht hierbei auch von *ambipolarer Diffusion*, da die Ionenströme und damit auch die Ionenreibung zu beiden Polen führen. Man kann diese aus 2 Teilen aufbauen: direkte Kollisionen mit den Ionen F_{dir} und deren Coulomb-Streuung an den Feldern der neg. geladenen Staubpartikel. Im folgenden soll das sog. *Barnes-Modell* eingeführt werden, welches die besagte Ionenreibung beschreibt.

Ionenreibung: Barnes-Modell Für die Bestimmung von F_{dir} wird angenommen, dass nur die Ionen, welche für eine Ladungsänderung der Partikel sorgen, auch diese direkt treffen. Im Rückblick auf die Bestimmung der Ionenströme in 1.3 wird die Kraft durch Kollisionen zu

$$F_{dir} = \pi a^2 m_I \tilde{v} n_I u_I \left(1 - \frac{2e\Phi_{fl}}{m_I \tilde{v}^2} \right). \quad (36)$$

(n_I - Ionenkonzentration; u_I - Ionen-Driftgeschwindigkeit; m_I - Ionenmasse)

Das Produkt aus Masse und mittlerer Geschwindigkeit der Ionen $m_I \tilde{v} = m_I \sqrt{u_I^2 + v_{th,I}^2}$ entspricht dem Impulsübertrag.

Für die Coulomb-Streuung müssen alle diejenigen Ionen miteinbezogen werden, welche mit dem Feld

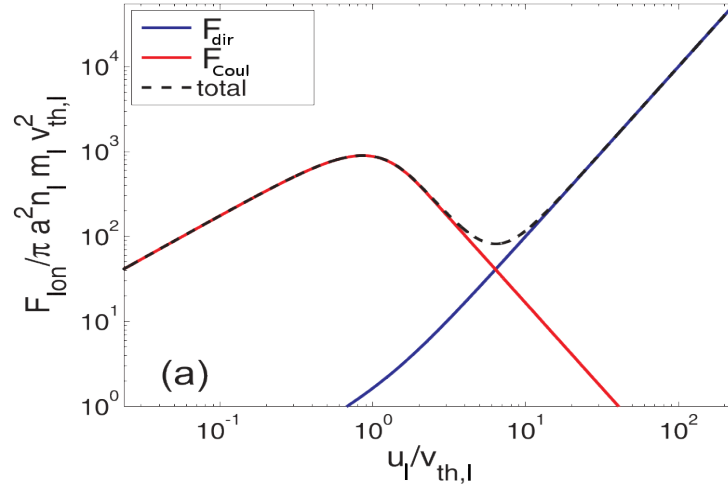


Abb. 6: Berechnete Kräfte F_{Coul} (Coulomb), F_{dir} (collection) und die Summe beider auf einer doppelt-logarithmischen Skala.

des Staubes 'stoßen'. Hierfür wird der Streuquerschnitt $\tilde{\sigma}$ der Ionen-Elektronen-Wechselwirkung auf den aktuellen Fall angepasst.

$$\tilde{\sigma} = 4\pi b_{\frac{\pi}{2}}^2 \ln(\Lambda) = 4\pi b_{\frac{\pi}{2}}^2 \ln\left(\frac{\lambda_D}{b_{\frac{\pi}{2}}}\right) \quad (37)$$

$$\text{wobei } b_{\frac{\pi}{2}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_I v^2}$$

Der Stoßparameter $b_{\frac{\pi}{2}}$ beschreibt eine Ablenkung um 90° . Für die Ionenreibung müssen weitere Bedingungen mit eingebunden werden: die Coulomb-Streuung außerhalb der Ionenwolke ist irrelevant, die Staubpartikel haben eine endliche Ausdehnung und damit existiert ein minimaler Stoßparameter b_k . Damit wird das gesuchte σ zu

$$\sigma = \int_{b_k}^{\lambda_D} \tilde{\sigma} d\left(\frac{\lambda_D}{b_{\frac{\pi}{2}}}\right) = 4\pi b_{\frac{\pi}{2}}^2 \ln\left(\frac{\lambda_D^2 + b_{\frac{\pi}{2}}^2}{b_k^2 + b_{\frac{\pi}{2}}^2}\right)^{1/2} \quad (38)$$

$$F_{\text{Coul}} \stackrel{(*)}{=} \frac{2\pi a^2 e^2 \Phi_{\text{fl}}^2}{m_I \tilde{v}^3} n_I u_I \ln\left(\frac{\lambda_D^2 + b_{\frac{\pi}{2}}^2}{b_k^2 + b_{\frac{\pi}{2}}^2}\right)^{1/2}.$$

Den $\ln(\dots)$ nennt man auch den *Coulomb-Logarithmus* $\ln(\Lambda)$.

In (*) wurde für die vollständige Coulomb-Kraft durch Ionen F_{Coul} auf ein Partikel benutzt, dass dieses mit Ladung $Z_S e = Q_S$ als Kugelkondensator mit $Q_S = 4\pi\epsilon_0 a \Phi_{\text{fl}}$ ausgedrückt werden kann. Wichtig zu beachten ist jedoch, dass nur Ionen einen Beitrag leisten, die innerhalb eines Stoßparameters $\lambda_D \approx \lambda_{D,e}$ am *target* vorbei fliegen.

Die gesamte Kraft durch Ionen auf die Staubeilchen ist somit die Summe der Kräfte aus direkten Stößen und Coulomb-Kollisionen $F_{\text{ion}} = F_{\text{dir}} + F_{\text{Coul}}$, welche zusammen dargestellt sind in Abb. 6.

1.4.4 Neutralgasreibung

Die Stöße mit den Neutralgasatomen können, ebenso wie die mit Ionen, als Kraft durch Reibung aufgefasst werden. Diese sorgen insbesondere für eine Verlangsamung der Bewegung der Staubteilchen. Die Kraft F_N wird, in ähnlicher Weise wie F_{dir} , durch einen Impulsübertrag über einen Strom von Neutralgasteilchen auf einen effektiven Querschnitt ausgedrückt.

$$F_N = -\delta \frac{4}{3} \pi a^3 m_N v_{\text{th},N} n_N v_S \quad (39)$$

(m_N - Neutralgasatommasse; $v_{\text{th},N}$ - thermische Geschw. der Neutralgasatome; n_N - Neutralgasdichte; v_S - Staubteilchengeschw.)

Der Faktor δ beschreibt hierbei die Art, wie die Neutralgasatome mit dem Staub stoßen. Eine spiegelnde Reflexion tritt für ein $\delta = 1$ auf. Mit steigendem δ wird die Kollision immer diffuser, bis hin zu einem Wert von $\delta = 1,44$.

Für den berühmten *Milikan-Öltropfen-Versuch* zur Bestimmung der Ladung eines Elektrons wurde, 1924 von *P. S. Epstein*, ebenso ein Ausdruck für die Kraft durch Neutralgasreibung bestimmt. Dabei ist β der Reibungskoeffizient und ρ_S die Dichte des Staubmediums.

$$F_N = -m_S \beta v_S = -m_S v_S \delta \frac{8}{\pi} \frac{p}{a \rho_S v_{\text{th},N}} \quad (40)$$

1.4.5 Thermophoretische Kraft

In einer Plasmakammer kann, durch Aufheizung oder Abkühlung einer der Elektroden bzw. Kammerbegrenzungen ein, bspw. der Gravitation oder dem elektrischen Feld entgegen gerichteter Temperaturgradient angelegt werden.

Die Kraft kann folgendermaßen erklärt werden: auf der Seite der höheren Temperatur haben die Neutralgasteilchen im Mittel eine größere Geschwindigkeit und Impuls, woraus ein positiver Impulsübertrag in Richtung niedrigerer Temperaturen folgt. Mit der Wärmeleitfähigkeit des Neutralgases κ_N folgt für die thermophoretische Kraft F_{th} Gl. (41). Auf Grund $\propto a^2$ ist diese Kraft besonders wichtig für Teilchen mit einem Radius kleiner als μm . Sie wird für die Formation von sog. *Yukawa-Clustern* genutzt (siehe 1.5).

$$F_{\text{th}} = -\frac{32}{15} \frac{a^2 \kappa_N}{v_{\text{th},N}} \text{grad}(T) \quad (41)$$

Es sei erwähnt - über die Zustandsgleichung für ideale Gase $pV = Nk_B T$ ersichtlich -, dass bei einer höheren Temperatur die Dichte des Neutralgases sinkt. Experimentell findet man daher, dass die verminderte Dichte zu einer niedrigeren Stoßintensität führt und damit den Effekt der Thermophorese in etwa gerade kompensiert. Trotzdem bleibt die Methode des Temperaturgradienten ein wichtiges Mittel zum Einfang des Staubes und Ausgleich der Gravitationskraft.

1.4.6 Kraft durch Laser-Einstrahlung

Der Einsatz von *Laser* (**L**ight **A**mplification by **S**timulated **E**mission of **R**adiation) hat in Versuchen zu kolloidalen Plasmen verschiedene Gründe: einerseits wird der *target*-Bereich mit ihnen ausgeleuchtet, andererseits können unterschiedliche dynamische Eigenschaften des Staubes untersucht werden.

Die Manipulation von eingefangenen Teilchen wird bspw. durch die Fokussierung eines *Laserstrahls*

auf ein Partikel realisiert. Hierbei spielt der Impulsübertrag der Photonen mit Impuls p_{ph} , welcher dem Strahlungsdruck p_{Strahl} entspricht und die photophoretische Kraft F_{ph} eine Rolle.

$$p_{\text{Strahl}} = \frac{dp_{\text{ph}}}{A_L dt} = \frac{dN_{\text{ph}}}{A_L dt} \frac{h}{\lambda} = \frac{I_L}{c}$$

$$F_{\text{Strahl}} = \gamma \frac{I_L}{c} \pi a^2 \quad (42)$$

(N_{ph} - Anzahl der, die das Partikel treffenden Photonen; λ, ν - Lasergrößen; A_L - Querschnittsfläche des *Laser*; γ - Wechselwirkungskoeffizient für den Stoß Photon-Staub)

Für ein $\gamma = 2$ in Gl. (42) liegt eine Totalreflexion vor, für $\gamma = 1$ wird der Impuls der auftreffenden Photonen vollständig absorbiert. Ein *Laser*-Strahl kann u.a., auf Grund der anisotropen Photonendichte (*gaussian bandwidth*) über den Querschnitt, zum Einfang von (einem) ausgewählten Partikeln benutzt werden. Bei der photophoretischen Kraft wird die resultierende Dynamik aus dem, durch die Stöße mit Photonen erzeugten Temperaturgradienten über ein einzelnes Partikel beschrieben. Wie bereits erläutert, liegt ein Strahldichtegradient für eine Fläche von A_S vor, woraus eine unterschiedliche Staufaufheizung durch die Stoßreibung folgt.

Treffen nun Neutralgasatome auf die heißere Seite, so werden sie dort schneller reflektiert, als von der kälteren. Die Differenz des Impulsübertrags resultiert in der photophoretischen Kraft, die entgegen des Gradienten der Photonendichte und damit in Richtung der heißen Seite der Partikel zeigt. Je nach der Absorptionsfähigkeit besitzen die Teilchen unterschiedliche Temperaturgradienten. Somit stellt sich eine heiße Front aus den Teilchen auf, welche eine gute Absorption und somit insgesamt höhere Temperatur aufweisen. Für diese Partikel zeigt F_{ph} in Richtung des Strahls. Analog wirkt die photophoretische Kraft für schlecht absorbierende Teilchen in entgegengesetzte Richtung. Somit ergibt sich F_{ph} in Gl. (43) mit dem Wärmeleitungskoeffizienten κ_S des Staubes, dem Gasdruck p und der Gastemperatur T .

$$F_{\text{ph}} = \frac{\pi a^2 p I_L}{6 (p a v_{\text{th},N} + \kappa_S T)} \quad (43)$$

1.4.7 Einfang und Gleichgewicht

In Abb. 7 sind einige der bisher beschriebenen Kräfte für typische Parameter berechnet und mit einer doppelt-logarithmischen Skala dargestellt worden.

Für Teilchen mit einem Radius im Bereich von einigen μm sind die Kräfte des äußeren elektrischen Feldes F_E und der Gravitation F_G dominant. Daher müssen, für einen praktikablen Einfang, diese beiden Kräfte im Gleichgewicht sein, d.h. sich stationär aufheben. Dies ist gerade in der nahen Randschicht der positiven Elektrode der Fall, da dort F_E stark genug ist. Weil $\text{grad}(E) \ll 1$ ist, gilt dies nur lokal. Für $a \gg 1 \mu\text{m}$ wird F_E weniger relevant und es übt die Thermophorese eine immer größere Kraft auf den Staub aus. Genauer: F_{th} ist in Experimenten sogar schon für $\text{grad}(T) \approx 2 \frac{\text{K}}{\text{m}}$ eine wichtige, nicht vernachlässigbare Größe. Für die Neutralgasreibung F_N gilt, dass diese bei großen thermischen Geschwindigkeiten des Staubes nahezu konstant wird, jedoch für „kalten“ Staub mit zunehmendem Drift v_S an Einfluss gewinnt. Die Ionenreibung F_{ion} ist unter diesen Umständen vergleichsweise klein. Sind die Staubpartikel klein, d.h. haben einen Radius $a \approx 10^{-9} \text{ m}$, so wird die Gravitationskraft mit ihrem Einfluss $\propto a^3$ sehr klein und spielt damit kaum noch eine Rolle. Damit muss die Kraft des elektrischen Feldes mit der Ionenreibung bzw. der Thermophorese balanciert werden.

In Abb. 8 sind schematisch die Kräfte aus Abb. 7 mit ihren Orientierungen dargestellt worden. Abbildungsteil (a) zeigt dabei den Einfang von μm -großen Teilchen in einer kleinen, lokalisierten Randschicht. Diese ordnen sich dabei in ausgedehnten Schichten mit hexagonaler Struktur (*fcc* bzw. *bcc*) an.

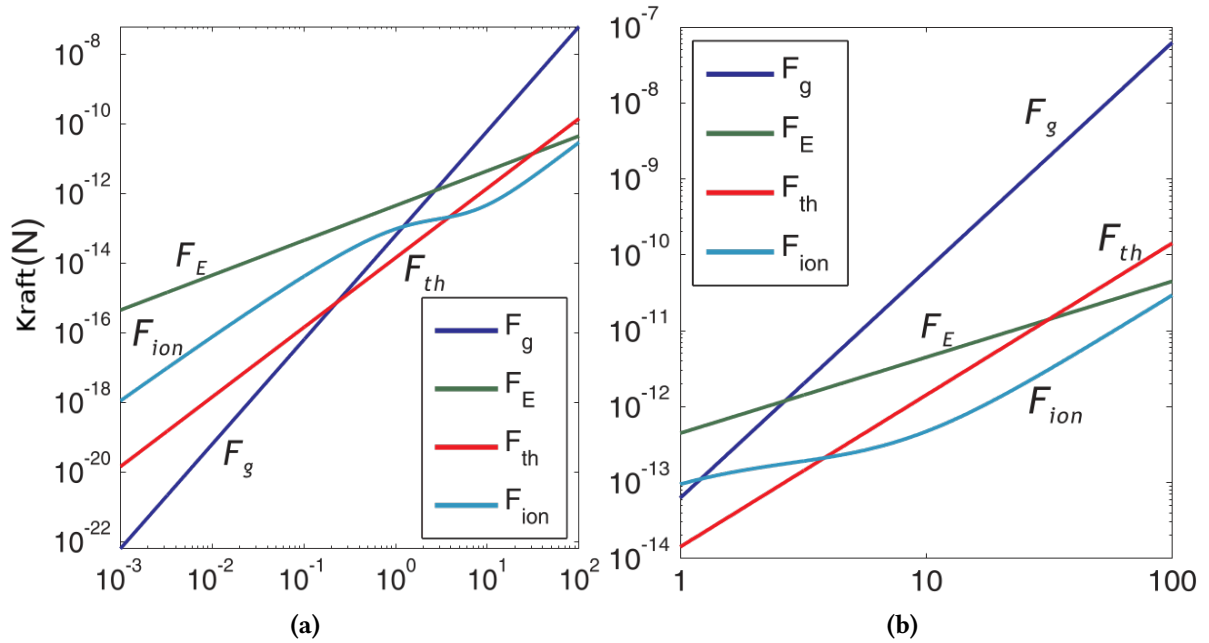


Abb. 7: Kräfte als Funktion des Teilchenradius in einem Argon-Plasma (Parameter: $\kappa_N = 0,016 \frac{\text{kgm}}{\text{s}^3}$; $\rho_s = 1,5 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $T_e = 2 \text{ eV}$; $\Phi_{fl} = -4 \text{ V}$; $E = 1000 \frac{\text{V}}{\text{m}}$; $n_I = 10^5 \text{ m}^{-3}$; $u_I = v_{th,I} = v_{th,N} = 400 \frac{\text{m}}{\text{s}}$)

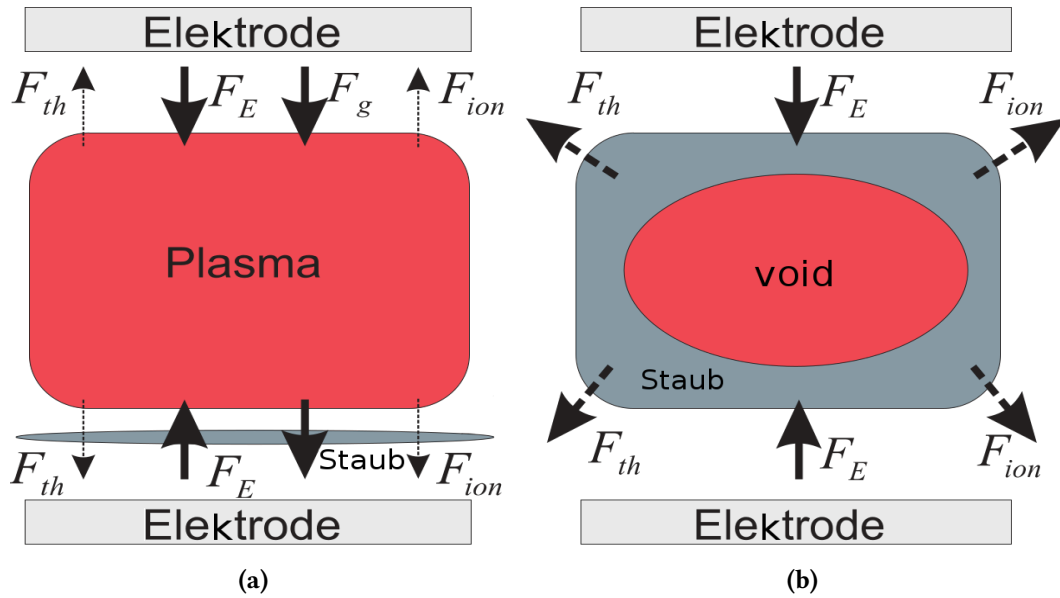


Abb. 8: Schemata für den Einfang von Staub mit (a): $a \approx 10^{-5} \text{ m}$ (b): $a \approx 10^{-9} \text{ m}$ bzw. unter Mikrogravitation. Es wurden die wichtigsten Kräfte und deren Richtungen eingezeichnet.

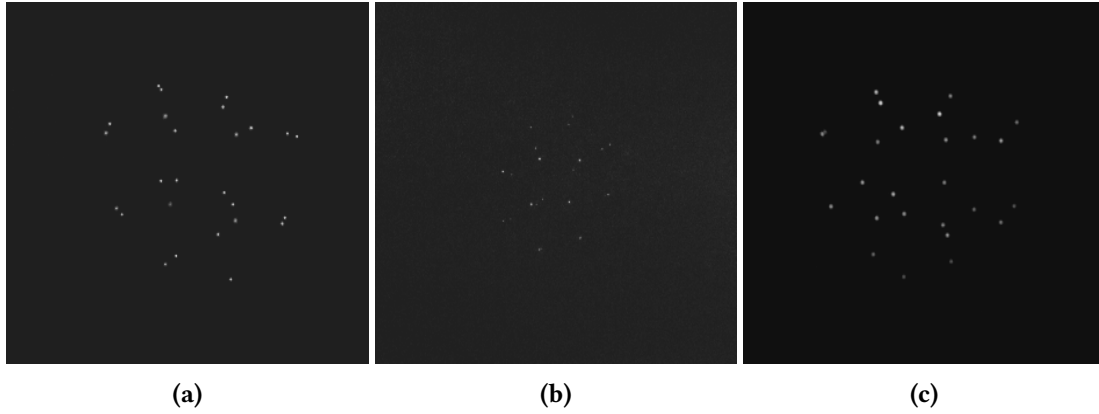


Abb. 9: Aufnahmen aus 3 verschiedenen, orthogonalen Raumrichtungen eines *Yukawa-Balls* mit $N = 26$ Teilchen. Das System befindet sich bei niedrigen Gasdrücken ($\approx 6 - 10$ Pa) in einer Argon-Entladung unter einem Kupferring, welcher sich im Plasma auf Φ_{fl} aufgeladen hat. **(a):** Ansicht aus der Ebene des Clusters **(b):** von oben **(c):** andere Richtung in der Ebene

Die Kräfte der Thermophorese und des „Ionenwindes“ (F_{ion}) zeigen dabei aus dem Plasma heraus in Richtung der Kammer bzw. der Elektroden. Die Ionen sind dabei bestrebt, aufgrund der ambipolaren Diffusion in der Randschicht auf die Kammerwand, den Ladungsunterschied (etwa innerhalb einer *Debye*-Länge) zwischen dem Plasma und dem Gehäuse auszugleichen. Das liegt u.a. an den unterschiedlichen Beweglichkeiten der Ladungsträger und deren Strömung auf die Kammer (siehe Abschn. 1.2). Weiterhin gilt ähnliches für die thermophoretische Kraft: das aufgeheizte Plasma erzeugt einen Impulsübertrag in Richtung der kühleren Kammer, woraus eine Kraft vom Plasma weg folgt. Der Staub wird somit in einem Teil der Entladung eingefangen, in dem diese Kräfte eine untergeordnete Rolle spielen. Die relevante elektrische Feldkraft ist besonders in der Nähe der Elektroden groß und kann damit dort Gravitationskraft bzw. F_{th} und F_{ion} kompensieren. Sie zeigt zudem in Richtung des Plasmas, da dieses in der Randschicht nicht mehr als neutral betrachtet werden kann.

Im zweiten Teil (b) von Abb. 8 ist ein Plasma mit Staubteilchen im nm-Bereich unter Schwerelosigkeit gezeigt. Dabei entsteht der sog. *void*, welcher ein Fremdteilchen-freier Bereich in Mitten der Entladung ist und aufgrund der relativen Orientierungen der Kräfte zustande kommt. Thermophorese und Ionenwind-Kraft zeigen (selbe Argumentation wie zu Teil (a)) aus der 'Mitte' des Plasma in Richtung der Kammer und der Elektroden, wobei von diesen aus die elektrische Feldkraft zum *void* zeigt. Da in diesem Fall F_G sehr klein ist (wegen $\propto a^3$), muss für den Einfang des Staubes das starke F_E , welches zwischen Kammer und Plasma entsteht, mit F_{th} und F_{ion} im Gleichgewicht sein. Somit ist es möglich, Staub in dreidimensional ausgedehnten Bereichen in der gesamten Entladung einzufangen.

Es stellen sich sogar Dichte- bzw. Volumen- und Massegradienten aufgrund der empfindlichen Abhängigkeit von Gravitation und elektrischer Feldkraft ein. Das bedeutet, dass sich schwerere, größere Teilchen bzw. „verschmolzene“ Partikelcluster am Rande des Einfangs wiederfinden, wohingegen kleinerer Staub sich dicht gepackt um den *void* herum befindet.

1.5 Finite Yukawa-Cluster

Bisher wurden in den Abschnitten 1.1 und 1.2 allgemein gültige Charakteristika des für diesen Aufbau verwendeten Plasmas besprochen. Außerdem sind in 1.3 und 1.4 die für komplexe bzw. staubige Plasmen spezifischen Kenngrößen und Prozesse, wie beispielsweise Aufladung und Einfang, beschrieben worden. Damit kennen wir die Dynamik eines einzelnen Staubteilchen in einem Plasma und unter welchen Bedingungen ein Einfang gegeben ist, jedoch wissen wir nichts über das kollektive Verhalten

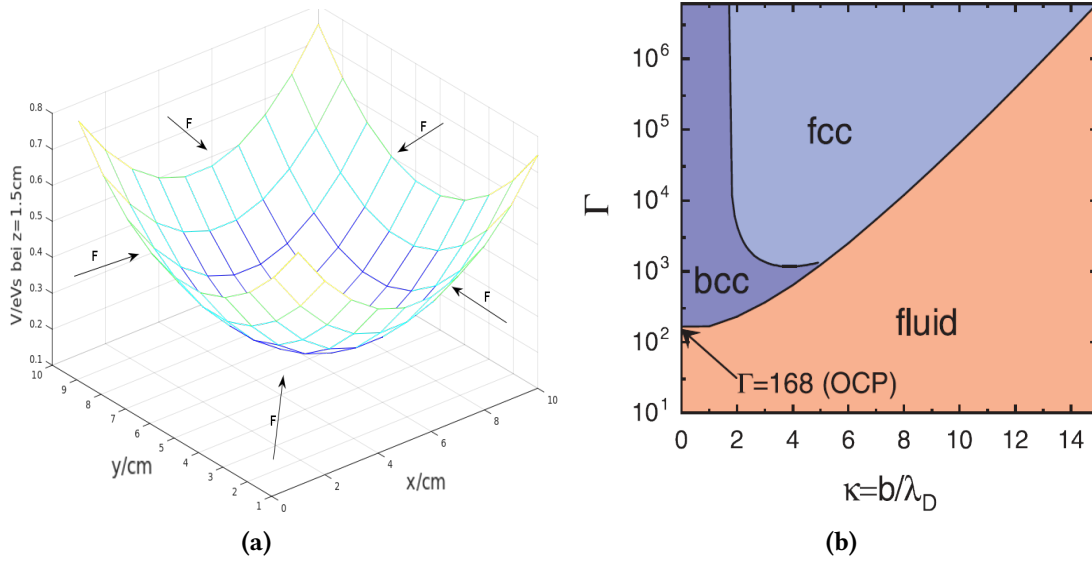


Abb. 10: (a): (b):

der bereits besprochenen *Yukawa-Cluster*. Wann und wo sind diese - falls ein solcher Zustand existiert - stabil? Wie ist ihr Verhalten bei Störungen des externen Potentials? Dieser Abschnitt soll sich mit diesen Fragen, in Bezug auf einen Versuch unter den Bedingungen aus Abb. 8a, auseinander setzen.

1.5.1 Struktur

Ein *Yukawa-Ball* kann durch das Erzeugen eines externen Potentials eingefangen werden: beispielsweise durch räumliche Begrenzung mit einer Küvette oder einem Ring, welche sich im Plasma aufladen und damit eine nach innen gerichtete, elektrische Kraft auf den ebenfalls negativ geladenen Cluster ausüben. Das aus den Kräften auf die Staubpartikel resultierende Potential kann als harmonisch angenommen werden, e.g.:

$$V(\vec{r}_j) = \frac{m_S \omega_0^2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{pmatrix} \vec{r}_j^2 \quad (44)$$

,wobei $\alpha_k = \omega_k^2 / \omega_x^2$ die relative der Richtung $k \in \{x, y, z\}$ und $\omega_0 = \omega_x$ die absolute Einfangstärke ist. In Abb. 10a ist das Potential, in dessen globalen Minimums sich der Cluster in diesem Experiment bildet, für eine feste Höhe über der getriebenen Elektrode dargestellt. Für eine geeignete Anordnung strebt man einen isotropen Einfang mit $\omega_x = \omega_y = \omega_z$ an.

Um ein Maß für die Stabilität eines staubigen Plasmas zu erhalten, geht man, wie bei Festkörpern und deren Elektronengasen, von einer Punktladung Q vor dem Hintergrund der Ionen aus (*one component plasma* - OCP). Der Kopplungsparameter Γ in Gl. (45) beschreibt somit die elektrostatische Wechselwirkung eines Teilchens mit seinen Nachbarn in Einheiten der thermischen Energie. Für ein $\Gamma > 1$ spricht man von einer starken Kopplung innerhalb des Clusters bzw. des Plasmas. Mit $\Gamma \geq \Gamma_k \simeq 168$ liegen kristalline Systeme vor. Bei einem kleineren Wert gehen die Cluster in einen flüssigen bzw. gasförmigen Zustand über (Abb. 10b). Das heißt, dass ein System aus Staubpartikeln „schmelzen“ kann, bringt man durch Lasereinstrahlung o.ä. gezielt Energie in den Cluster ein und verringert damit die Ordnung bzw. erhöht die thermische Bewegung. Dabei verschwindet zuerst die Winkelabhängigkeit,

was das Auflösen der kristallartigen Strukturen innerhalb des Clusters zur Folge hat (zum Beispiel [2]). Die große $b_{\text{WS}} = (3/4\pi n_{\text{S}})^{-1/3}$ ist der *Wigner-Seitz*-Radius: er ist analog zu \bar{b} aus Tab. 1 eine Skala für Teilchenabstände. Insbesondere ist b_{WS} eine korrektere Größe, da sich der Staub in hexagonalen bzw. pentagonalen Zellen auf den konzentrischen Sphären des Clusters anordnet. Die Zusammensetzung eines solchen, *finiten Yukawa-Systems* ähnelt stark dem Orbital- bzw. Schalenmodell der Atomphysik. Außerdem: sowohl aufgrund der bisher besprochenen Kräfte und der Coulomb-Wechselwirkung des Staubes, als auch wegen des nicht-reziproken *Ionenfokus* (siehe [3]) streben die Systeme eine energetisch günstige fcc- (*face centered cubic*) bzw. bcc-Struktur (*body centered cubic*) an.

$$\Gamma = \frac{Z_{\text{S}} e^2}{4\pi\epsilon_0 b_{\text{WS}} k_{\text{B}} T_{\text{S}}} ; \quad \Gamma_{\text{C,eff}} = \Gamma \exp\left(-\frac{b_{\text{WS}}}{\lambda_{\text{D}}}\right) \quad (45)$$

Der effektive Parameter reiner Coulomb-Wechselwirkungen $\Gamma_{\text{C,eff}}$ entspricht einer modifizierten Kopplung mit Rücksicht auf die Abschirmung durch die Ionenwolke ([4], [5]) um ein Partikel bzw. den Cluster. Aus diesem Grund führt man die Abschirmstärke $\kappa = b_{\text{WS}}/\lambda_{\text{D}}$ ein, welche angibt, um wie viel die elektrostatische Wechselwirkung mit einem Teilchen der Ladung Q innerhalb einer Elementarzelle der Staubpartikel abgeschwächt ist. Außerdem folgt daraus der Zusammenhang für die Phasengrenze in Abb. 10b $\Gamma(\kappa)$: für große *Wigner-Seitz*-Radien bzw. sehr kleine Debye-Längen verschwindet die Wechselwirkung zwischen den Staubteilchen nahezu vollständig. Das Yukawa-Potential geht für diesen Fall in das harter Kugeln über (bspw. van-der-Waals-Gastheorie etc.).

Abschließend sei erwähnt, dass die bisher genannten Eigenschaften u.U. stark von der Art der Wechselwirkung bzw. der Teilchenzahl abhängen: die Betrachtungen vernachlässigen vollständig den Einfluss einer *Elektronenerzeugung* ([6]) und gehen von reiner Coulomb- oder Yukawa-Wechselwirkung aus. Die Besetzungszahlen der Sphären des Clusters können jedoch für die verschiedenen Potentiale stark variieren, was u.a. eine Folge unterschiedlicher Abschirmungen ist.

1.5.2 Dynamik- und Modenanalyse

Auf Grundlage der strukturellen Überlegungen des vorherigen Abschnittes, kann eine Analyse der dynamischen Eigenschaften eines solchen finiten Yukawa-Systems erfolgen. Diese beruht auf der Entwicklung eines *Modenspektrums* dieses Clusters, wobei im Gegensatz zu ausgedehnten System darin nur eine endliche Zahl von Moden vorhanden sind. Statt einer Dispersionsrelation für Wellen bestimmt man demnach Schwingungsmoden, welche den Grenzen und Randbedingungen des Clusters bzw. des Einfangs genügen.

Mit der Normierung auf Abstandseinheiten r_0 und Energieeinheiten E_0 folgt Gl. (46). Die erste Summe stellt den kinetischen Anteil der Energie des i -ten Teilchens im Rahmen eines harmonischen Oszillators dar. Die Yukawa-Abstoßung im zweiten Teil kommt aus der elektrostatischen Wechselwirkung innerhalb des Staubkristalls, weswegen $\kappa = r_0/\lambda_{\text{D}}$ und $r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ gilt.

$$E = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i^2 + \sum_{i<j}^N \frac{\exp(-\kappa r_{ij})}{r_{ij}} \quad (46)$$

$$r_0 = \left(\frac{2Z_{\text{S}}^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 m_{\text{S}} \omega_0^2} \right)^{1/3} \quad E_0 = \left(\frac{Z_{\text{S}}^2 e^4 m_{\text{S}} \omega_0^2}{8\pi\epsilon_0} \right)^{1/3}$$

Ausgehend von der normierten Gesamtenergie E eines N -Teilchen-Clusters lässt sich, als Analogon zur Taylor-Entwicklung, durch Approximation um ein Equilibrium die sog. *Hesse-Matrix* in Gl. (47) als dynamische Matrix $A \in \text{Mat}(3N \times 3N)$ aufstellen. Hinter dieser Formulierung steht die Idee, dass

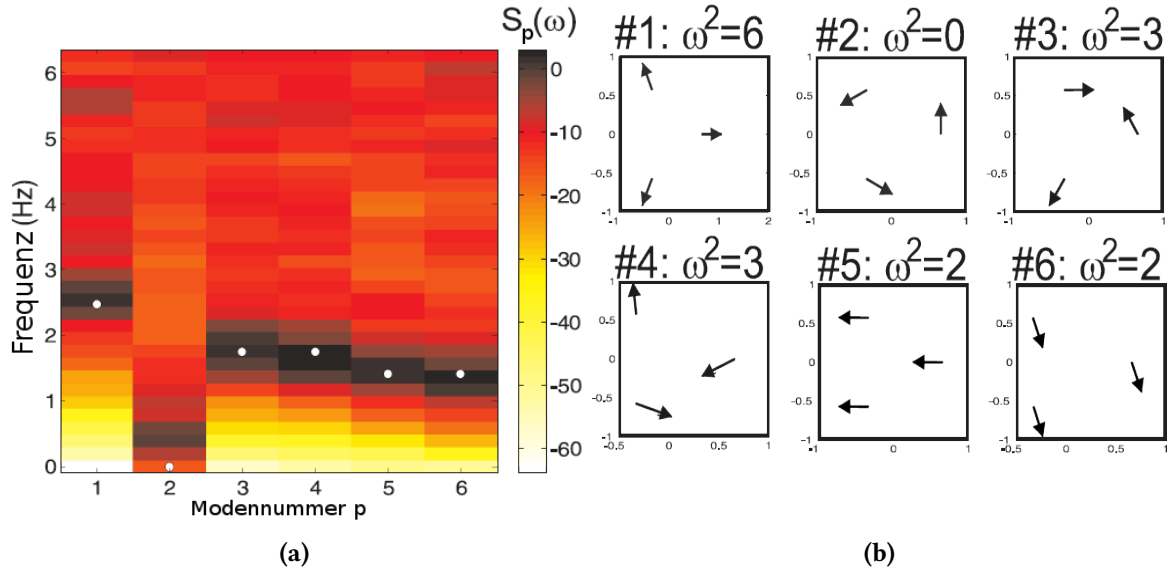


Abb. 11: (a): Modenspektrum für einen 3-Teilchen-Cluster. Die weißen Punkte entsprechen theoretisch errechneten Werten der Modenfrequenzen. Die Bereiche von $S_p(\omega) \rightarrow 0$ treten bei der Eigenfrequenz auf. (b): Eigenvektoren ($\vec{v}_{i,p}$) für $N = 3$. Die Modenfrequenz ist auf die Einfangstärke ω_0 normiert.

jede Bewegung als anteilige Überlagerung der Schwingungsmoden verstanden werden kann. Somit steht in A für alle Teilchenkoordinaten i, j die 2. Ordnung der Entwicklung um das Gleichgewicht. Löst man für diese das Eigenwertproblem, so erhält man mit \vec{v}_p und ω_p den Modenvektor und -frequenz der Mode p .

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 E}{\partial x_i \partial x_j} & \dots & \frac{\partial^2 E}{\partial x_i \partial z_j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 E}{\partial z_i \partial x_j} & \dots & \frac{\partial^2 E}{\partial z_i \partial z_j} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \frac{\partial^2 E}{\partial x_i \partial y_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 E}{\partial x_1 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 E}{\partial x_1 \partial y_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 E}{\partial x_N \partial y_1} & \dots & \frac{\partial^2 E}{\partial x_N \partial y_N} \end{pmatrix} \quad (47)$$

$$\left(A - \omega_p^2 I_{(3N)} \right) \vec{v}_p = 0 \quad (48)$$

$$\text{wobei} \quad \vec{v}_p^\top = (x_{1,p}, \dots, x_{N,p}, y_{1,p}, \dots) \quad \text{bzw.} \quad \vec{v}_{i,p}^\top = (x_{i,p}, y_{i,p}, z_{i,p})$$

Aus der Lösung von Gl. (48) um A erhält man folglich $3N$ Modenfrequenzen und -vektoren. Den Anteil, den eine jede Mode p an der Bewegung eines Teilchens i hat, erhält man durch die Projektion des Vektors der Geschwindigkeit $\vec{v}_i(t)$ auf die Modenvektoren $\vec{v}_{i,p}$. Anders herum: den Anteil der Mode an der Clusterbewegung, ob thermisch oder extern angeregt, erhält man aus der Summe aller Anteile an den Teilchenbewegungen (siehe Gl. (49)). Die Energie, welche in der Mode p bei der Frequenz ω gespeichert ist, ergibt sich über die Fouriertransformation dieses Bewegungsanteils zu $S_p(\omega)$.

$$f_p(t) = \sum_{i=1}^N \vec{v}_i(t) \vec{v}_{i,p} \quad (49)$$

$$S_p(\omega) = \frac{2}{T} \left| \int_0^T f_p(t) \exp(i\omega t) dt \right|^2 \quad (50)$$

Die spektrale Energiedichte aus Gl. (50) wird in Abb. 11a für einen sehr simplen Cluster aus $N = 3$ Teilchen dargestellt. Passend dazu sind in Abb. 11b die Modenvektoren der drei Staubpartikel einge-

zeichnet. Insbesondere sind dort Moden gezeigt, welche allgemein für alle Cluster auftreten: *breathing*, *slosh* und Rotation. $p = 1$ zeigt die *breathing*-Mode: alle Teilchen entfernen sich vom Clusterschwerpunkt, wobei dieser jedoch fest bleibt. Die Frequenz ω_{breath} hängt schwach von N ab und steigt mit der Abschirmung κ . Mode $p = 2$ ist die Rotationsmode. Ihre Eigenfrequenz ist 0, da es für diese keine rückstellenden Kräfte gibt. In $p = 3$ und $p = 4$ sind *kink*-Moden gezeigt. Nummer 5 und 6 stellen *slosh*-Moden dar: das System führt eine Schwerpunktstranslation aus, wobei alle Partikel sich in die selbe Richtung bewegen.

Diese *Normalmodenanalyse* ist ein geeignetes Mittel zur Analyse der Dynamik eines finiten Systems (siehe [7],[8]), vorausgesetzt genügt den gemachten Voraussetzungen: Yukawa-Wechselwirkung, starke Kopplung jedoch fluider Zustand, homogene Partikel ...

1.5.3 Fluidmoden

Genau wie in der, diesem Teilgebiet übergeordneten Plasmaphysik, lässt sich ein finiter Cluster als hydrodynamische Gesamtheit auffassen. Ähnlich wie beim *Fluidmodell* und der Betrachtung durch die *magnetohydrodynamischen Gleichungen* (MHD), nimmt man hierbei das System als kontinuierliche Masse mit entsprechender Ladungsverteilung an. Daraus ergeben sich neue Möglichkeiten die Dynamik des Cluster zu beschreiben und nachzuvollziehen.

Eingangs muss das neue Potential $\Phi(\vec{r}, t)$ des fluiden „Tropfens“ beschrieben werden. Da der Cluster von Ladungsträgern abgeschirmt wird, welche sich um diesen auf Grund seiner elektrostatischen Wechselwirkung ansammeln - analog zu den vorherigen Abschnitten -, kann man die modifizierte Poissongleichung (Gl. (51)) für die Ladungsdichte $\rho(\vec{r}, t)$ des Systems benutzen. Deren Lösung erhält man mit der *Green-Funktion* $G(\vec{r})$ aus Gl. (53) in (54).

$$(\Delta - \kappa^2) \Phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\vec{r}, t) \quad (51)$$

$$\Phi(\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\vec{r}', t)}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \quad (52)$$

$$\therefore G(\vec{r}) = \frac{\exp(-\kappa|\vec{r}|)}{4\pi|\vec{r}|} \quad (53)$$

$$\Phi = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(-\kappa|\vec{r} - \vec{r}'|)}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} \rho(\vec{r}', t) d^3r' \quad (54)$$

Die Green-Funktion entspricht einem einheitenlosen Yukawa-Potential, welches man nach [9],[10] in eine Reihe von sphärisch-harmonischen *Kugelflächenfunktionen* Y_{lm} und *modifizierten Besselfunktionen* $i_l(x)$ und $k_l(x)$ entwickeln kann. Die Definitionen erfolgen in dreidimensionalen Kugelkoordinaten (r, θ, φ) , wobei die minimalen bzw. maximalen Abstände $r_< = \min(r', r)$ und $r_> = \max(r', r)$ sind.

$$\frac{\exp(-\kappa|\vec{r}|)}{4\pi|\vec{r}|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} i_l(\kappa r_<) k_l(\kappa r_>) \exp(-\kappa r_>) Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (55)$$

2 Durchführung

3 Auswertung

4 Literatur

Literatur

- [1] H. M. Mott-Smith and Irving Langmuir. The theory of collectors in gaseous discharges. *Phys. Rev.*, 28:727–763, 1926. 11
- [2] H. Thomas and G. E. Morfill. Melting dynamics of a plasma crystal. *Nature*, 379:806–809, 1996. 22
- [3] A. Melzer, V. A. Schweigert, I. V. Schweigert, A. Homann, S. Peters, and A. Piel. Structure and stability of the plasma crystal. *Phys. Rev. E*, 54:46–49, 1996. 22
- [4] M. Lampe, G. Joyce, and Gurudas Ganguli. Interactions between dust grains in a dusty plasma. *Phys. Plasmas*, 7:3851–3861, 2000. 22
- [5] I. V. Schweigert, A. Melzer, and A. Piel. Dust particles shielding in a plasma with ion flow. *J. Phys. IV France*, 10:421, 2000. 22
- [6] A. Melzer and John Goree. Fundamentals of complex plasmas. In R. Hippler, H. Kersten, M. Schmidt, and K. H. Schoenbach, editors, *Low Temperature Plasma Physics. Fundamentals, Technologies, and Techniques (2nd Edn.*, pages 129–173. Wiley-VCH Verlag GmbH, Weinheim, 2008. 22
- [7] A. Melzer, M. Klindworth, and A. Piel. Normal modes of 2d finite coulomb clusters in complex plasmas. *Phys. Rev. Lett.*, 87:115002, 2001. 24
- [8] A. Melzer. Mode spectra of thermally excited 2d dust coulomb clusters. *Phys. Rev. E*, 67:016411, 2003. 24
- [9] G. Arfken and H. Weber. Mathematical methods for physicists. 24
- [10] 24

5 Anhang