

Bachelor-Arbeit zum Thema „Modenanregung in *Yukawa*-Bällen“

Philipp Hacker

12. Juni 2015

Institut für Physik
mathematisch-naturwissenschaftliche Fakultät
Universität Greifswald



Erst-Gutachter: Prof. Dr. André Melzer

Zweit-Gutachter: Prof. Dr. Lutz Schweikhard

Bearbeitungszeitraum: 01.03.2015 bis 12.07.2015

Inhaltsverzeichnis

0	Motivation	3
1	Physikalische Grundlagen	4
1.1	Grenzschichten von Plasmen	4
1.1.1	Child-Langmuir-Gesetz	4
1.1.2	Bohm-Kriterien	5
1.2	Aufladung von Staubpartikeln	6
1.2.1	OML-Modell	7
1.2.2	Neutralgas-Ionen-Stöße	8
1.3	Staub-Dynamik	9
1.3.1	Gravitation und elektrische Feldstärke	9
1.3.2	Abschirmung und Polarisationskräfte	10
1.3.3	Ionen-Neutralgasreibung	11
1.3.4	Neutralgasreibung	12
1.3.5	Thermophoretische Kraft	13
1.3.6	Kraft durch <i>Laser</i> -Einstrahlung	13
1.3.7	Einfang und Gleichgewicht	14
1.4	Finite Yukawa-Cluster	16
1.5	Coulomb-Kristallisation	16
2	Durchführung	17
3	Auswertung	18
4	Literatur	19
5	Anhang	20

0 Motivation

1 Physikalische Grundlagen

1.1 Grenzsichten von Plasmen

Im Hauptvolumen eines Plasmas werden die Neutralgasatome durch Wechselwirkungen mit den Elektronen zur Fluoreszenz angeregt. Die Grenzsichten von Gasentladung zu Metallen sind jedoch dunkler, als das eigentliche Plasma. Dies ist somit auf einen Elektronenmangel zurückzuführen. Die Quasineutralität kann dort somit nicht mehr gelten. Es folgt, dass eine Randschicht automatisch eine positive Raumladungszone ist.

Auf Grund der wesentlich größeren Beweglichkeit μ_e und thermischen Geschwindigkeit $v_{th,e}$, wird eine Wand in einem Plasma häufiger von Elektronen getroffen, als von den korrespondierenden Ionen. Betrachtet man nur die Oberfläche dieser, so kann man dessen Aufladung und damit auch das Potential Φ als negativ annehmen.

1.1.1 Child-Langmuir-Gesetz

Die negative Aufladung eines Objektes in einem Plasmas soll nun eine große Potentialbarriere gegen thermische Elektronen erzeugen, e.g. $|\Phi(0) - \Phi(-d)| \ll \frac{k_B T_e}{e}$. Die Betrachtung in einer Dimension soll hier genügen - es lässt sich leicht der dreidimensionale Zusammenhang daraus erweitern. Die Elektronendichte $n_e(x)$ geht mit dem Boltzmann-Faktor $f_B(\Phi)$ („boltzmann-artige“ Elektronen) wie

$$n_e(x) = n_e(-d) f_B(\Phi) = n_e(-d) \exp\left(\frac{e(\Phi(x) - \Phi(-d))}{k_B T_e}\right). \quad (1)$$

Die Elektronendichte fällt damit exponentiell in Richtung der Wand ab. Das bedeutet, dass nur noch vorrangig Ionen ungehindert einströmen können. Es ist anzunehmen, dass die Randschichtausdehnung $d \ll \lambda_{mfp}$ die mittlere freie Weglänge des Plasma ist und die Ionen stoßfrei darin eintreten.

An der Grenze zur Vorschicht (siehe Abb. 1a) haben die Ionen die Geschwindigkeit $v_{I,0}$ und das Potential der Wand verschwindet gerade an dieser Stelle. Für den Dichteverlauf der Ionen folgt:

$$n_I(x) = n_I(-d) \left(1 - \frac{2e\Phi(x)}{m_I v_{I,0}^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

Nimmt man weiterhin an, dass die kinetische Energie $\frac{m_I v_{I,0}^2}{2} \ll |e\Phi(x)|$ die Beschleunigung in der Randschicht ist, folgt somit die Bestimmungsgleichung (3) für $\Phi(x)$ nach Poisson. Um dabei das korrekte Potential in der Grenzsicht zu erhalten, muss die Rückwirkung der Ionen auf dieses beachtet werden.

$$\Delta\Phi \cong -\frac{en_I(-d)}{\epsilon_0} \left(-\frac{2e\Phi(x)}{m_I v_{I,0}^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (3)$$

Die klassische Lösung nach *Langmuir* für das eindimensionale $\Phi(x)$ erhält man aus Gl. (3), wobei der ungestörte Ionenstrom geschrieben wurde als $j_I = n_I(-d) e v_{I,0}$.

$$\Phi(x) = \left(\left(\frac{3}{4}(x+d)\right)^4 \left(\frac{j_I}{\epsilon_0}\right)^2 \frac{m_I}{2e}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (4)$$

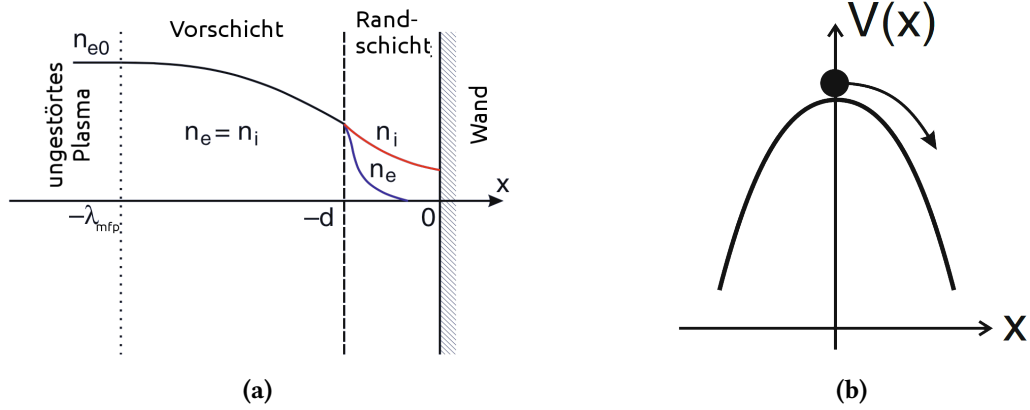


Abb. 1: (a): Dichten-Verlauf in der Grenzsicht zu einer Metalloberfläche. In einer bestimmten Entfernung d zur Wand fällt die Elektronendichte praktisch auf 0, woraus die lokale Aufhebung der Quasineutralität folgt. (b): (Eindimensionales) Harmonisches Potential mit extremaler Instabilität. Kleine Auslenkungen sorgen für große Kräfte.

Die Auflösung von Gl. (4) nach dem Ionenstrom j_I ergibt das *Child-Langmuir-Gesetz* (Gl. (??)). Dieses gibt nunmehr an, wie der Ionenstrom in der Randschicht von den Eigenschaften des ungestörten Plasmas abhängt. Umgekehrt bedeutet das, dass die Grenzregion auf Variationen des Potentials und der Parameter mit Veränderungen der Schichtdichte reagiert und damit versucht, den Einschränkungen der positiven Raumladungszone und dessen Ionenstrom nach dem *Child-Langmuir-Gesetz* zu genügen.

$$j_I = \frac{4}{9} \varepsilon_0 \left(\frac{2e (\Phi(-d) - \Phi(0))^3}{m_i d^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

1.1.2 Bohm-Kriterien

Es stellt sich u.a. die Frage, warum sich diese Randschicht, in der die Elektronendichte stark abnimmt und gegen die Grenze verschwindet, nicht in das gesamte Plasma durch eine Rückwirkung ausbreitet. Das heißt also: Warum und wann ist die Randschicht(-grenze) stabil?

Man stelle sich nun ein (mechanisches) Ein-Teilchen-Problem vor, bei welchem eine Gleichgewichtsanalyse vorgenommen wird. Das Potential habe ein Extremum - maximal oder minimal - an welchem die Punktmasse sich befindet. Für die Behandlung des Randschicht-Problems sind nur Potentiale mit umgekehrt-parabelartigen Maxima interessant (siehe Abb. 1b), womit aus einer kleinen Störung eine große Kraft auf das Teilchen folgt. In diesem Fall kann man also von einer Instabilität sprechen.

Der Bezug zur Plasmarandschicht wird deutlich, wenn man die Differentialgleichung des mechanischen Problems mit der Poissongleichung des Potentials in der Rand- bzw. Vorschicht - siehe Gl. (6) vergleicht. Dabei stellt $\Psi(\Phi)$ ein Pseudopotential dar, welches in seiner Bedeutung vergleichbar mit der mechanischen Variante $V(\vec{r})$ ist.

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = - \frac{dV}{d\vec{r}} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta_{\vec{r}} \Phi = - \frac{d\Psi}{d\Phi} = f(\Phi) \stackrel{\text{Poisson}}{=} \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (6)$$

Damit eine Instabilität vorliegen kann, muss die, aus einer Störung des Pseudopotentials resultierende Kraft mit der Entfernung zum Gleichgewicht anwachsen. Die mathematisch äquivalente Formulierung ist die Ungleichung in (7). Nach Gl. (6) und der in Abschnitt (1.1.1) hergeleiteten Dichten

in der Grenzschicht, kann die geforderte Bedingung überprüft werden. Aus ihr folgt das erste *Bohm-Kriterium*.

$$0 > \left. \frac{d^2 \Psi}{d\Phi^2} \right|_{\Phi=0} \stackrel{\text{Gl. (6)}}{=} \left. \frac{d}{d\Phi} \left(\frac{n_e(x) - n_I(x)}{\varepsilon_0} \right) \right|_{\Phi=0} = \frac{en_e(-d)}{\varepsilon_0} \left(\frac{e}{k_B T_e} - \frac{e}{m_I v_{0,I}^2} \right) \quad (7)$$

$$\Rightarrow v_{0,I} \geq v_{B,I} = \sqrt{\frac{k_B T_e}{m_I}} \quad (8)$$

($v_{B,I}$ - Bohm-Geschwindigkeit; $v_{0,I}$ - Ionen-Driftgeschwindigkeit; T_e - Elektronentemperatur; m_I - Ionenmasse)

Für das Bohm-Kriterium in Gl. (8) kann auch analog die sog. *Machzahl* $M = \frac{v_{0,I}}{v_{B,I}}$ angegeben werden. Um zu erläutern, warum die Randschicht sich als Rückwirkung nicht in das Plasma ausdehnt, betrachten wir die Teilchenbewegung aus der Vor-Randschicht. Hier existiert ein elektrisches Feld, welches die Ionen auf die Geschwindigkeit v_B in Richtung Wand beschleunigt. Außerdem gilt in ihr noch die Quasineutralitäts-Bedingung:

$$n_I(x) = n_{I,0} \exp\left(\frac{e\Phi(x)}{k_B T_e}\right) = n_e(x) \quad (9)$$

Hierbei ist $\Phi(x)$ das Potential der Vorschicht aus Abschnitt (1.1.1). Da Stöße der Frequenz $\nu_{N,I}$ der Ionen mit den Neutralgasatomen einen nicht vernachlässigbaren Einfluss auf deren Strom haben, muss die Geschwindigkeitsverteilung umgeschrieben werden.

$$\frac{dv_I}{dx} = \frac{\nu_{N,I} v_I^2}{v_B^2 - v_I^2} \quad (10)$$

Aus der Singularität von Gl. (10) in $v_I = v_B$ und der Kenntnis über das Wandpotential lässt sich die Ausdehnung der Randschicht d bestimmen. Offensichtlich werden Ionen mit einer Geschwindigkeit $v_I < v_B$ in der Vorschicht beschleunigt. Geschwindigkeiten größer als die Bohm-Geschwindigkeit kommen dort nicht vor, da dies nach Gl. (8) nur in der Randschicht der Fall sein darf.

Zusammen mit dem ersten *Bohm-Kriterium* folgt, dass am Übergang der Vor- zur Randschicht die Ionen v_B erreichen müssen, damit sich eine positive Raumladungszone ausbilden kann.

$$M = 1 \quad \Leftrightarrow \quad v_I(-d) = v_B \quad (11)$$

Lokal heißt das, dass bei $x = -d$ die Dichten bereits auf $\approx 0,66n_{e,0}$ abgefallen sind (siehe Abb. 1a) und das Potential durch die Aufladung der Wand circa $-\frac{k_B T_e}{2e}$ beträgt.

Ein Plasma „sieht“ damit seine Randschicht nicht, da sich die notwendige Dynamik der entsprechenden Ladungsträger auf diese beschränkt und sich nicht beliebig ausdehnen kann. Mit anderen Worten: eine Randschicht bildet sich nur an Orten des Elektronenmangels und lokal negativer Potentiale aus.

1.2 Aufladung von Staubpartikeln

Die Ladung eines Fremdteilchens (Staub) in einem Plasma ist eine dynamische Größe. Sie ist zeitlich veränderlich, als auch abhängig von den Plasmaparametern, den Partikeleigenschaften sowie dessen Trajektorie in der Entladung. Offensichtlich ergibt sich die Ladung eines Teilchens zum Zeitpunkt t

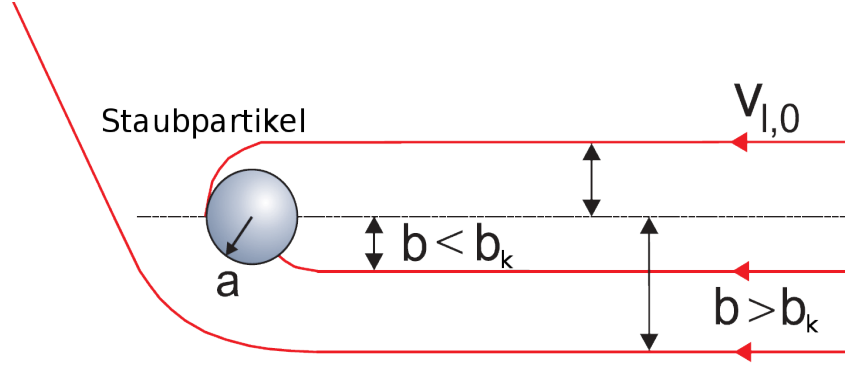


Abb. 2: OML-Beschreibung eines, auf ein Staubpartikel einströmendes Ions. Der kritische Stoßparameter, für welcher eine Kollision stattfindet, ist b_k . Er ist im Vergleich zum geometrischen Querschnitt aufgrund der Coulomb-Wechselwirkung vergrößert.

aus den Ladungsströmen I_k der Plasmaspezies auf das Partikel bis zu diesem Zeitpunkt. Im folgenden genügt es, dieses Problem auf einer Zeitskala zu betrachten, in der man die Ladung als konstant unter dem Einfluss der Ströme annehmen kann. Damit werden diese ebenfalls stationär und es gilt für ein einzelnes Teilchen die *Kirchhoff'sche Knotenregel*, wobei der Staub ein Knoten sei:

$$\sum_k I_k(\Phi_{\text{fl}}) = \frac{dQ_S}{dt}, \quad (12)$$

Die Elektronen und Ionen im Plasma strömen aufgrund ihrer thermischen Bewegung auf das Fremdteilchen und verleihen diesem über Stöße eine Ladung Q_S , wobei sich für das Partikel ein elektrostatisches Potential Φ_{fl} einstellt, bei dem Gl. (12) gilt. Die Ladungsspezies kommen dabei im allgemeinen aus Sekundär-, Photo-, oder Feldemissionen, wobei die dominanten Ströme die des Plasmas selbst sind. Hier soll es ausreichen, die Plasmaströme nach *Langmuir* und *Mott-Smith* mit dem sog. *orbital motion limit*-Modell [1] zu beschreiben.

1.2.1 OML-Modell

Dabei wird angenommen, dass sich ein strömendes Teilchen, welches zu Q_S beiträgt bzw. damit elektrostatisch wechselwirkt, stoßlos aus dem Unendlichen (durch die Entladung) darauf zu bewegen kann. Aufgrund der, im allgemeinen höheren Elektronentemperatur und -beweglichkeit wird $\Phi_{\text{fl}} < 0$, woraus eine veränderte Wechselwirkung mit den Teilchen der Ladungsströme folgt. Man definiert folglich einen kritischen Stoßparameter b_k , welcher dem Abstand eines Ions zur Target-Achse entspricht, bei dem dieses durch die Coulomb-Anziehung des Partikels gerade noch dessen Oberfläche tangiert. Für Parameter $b > b_k$ wird ein eintreffendes Ion auf seiner Trajektorie nur abgelenkt, für $b < b_k$ landet dieses auf dem Staubteilchen.

Da vorausgesetzt wird, dass keine Stöße vor dem Target geschehen, kann die Impulserhaltung zusammen mit der Energieerhaltung für ein einzelnes Projektil aufgestellt werden, welches sich im Abstand b_k darauf zu bewegt:

$$|\vec{L}| = |\vec{r} \times \vec{p}| = m_I v_{I,0} a = m_I v_{I,0} b_k \quad (13)$$

$$E_I = \frac{m_I}{2} v_I^2 + e\Phi_{\text{fl}} = \frac{m_I}{2} v_{I,0}^2 \quad (14)$$

In Gl.(13) und (14) stehen jeweils die linken Seiten für den Zeitpunkt des Auftreffens und die rechten für das Einlaufen aus dem Unendlichen. Durch Umformungen lässt sich ein Ausdruck für den kritischen Stoßparameter, in Abhängigkeit vom Partikelradius und dem *floating*-Potential aufgestellt werden.

$$b_k^2 = a^2 \left(1 - \frac{e\Phi_{fl}}{\frac{m_l}{2} v_{l,0}^2} \right) \quad (15)$$

Der zugehörige Streuquerschnitt für die Streuung eines Teilchenstroms an einem Staubpartikel wird damit zu $\sigma_k = \pi b_k^2$, welcher größer als die geometrische Querschnittsfläche πa^2 . Dem liegt die Coulomb-Wechselwirkung der Stoßpartner zu Grunde.

Der (differentielle) Ladungsträgerstrom dI_j , welcher schließlich den Parameter der Partikelladung bestimmt, ergibt sich aus der Aufsummierung aller Stromdichten von Teilchen der Geschwindigkeiten v_j , gewichtet mit ihren zugehörigen Wechselwirkungsquerschnitten σ_j und (hier: maxwellartigen) Verteilungen $f(v_j)$:

$$dI_j = \sigma_j(v_j) n_j v_j f(v_j) dv_j$$

$$\text{Ionen: } I_I = \pi a^2 n_I e \sqrt{\frac{8k_B T_I}{\pi m_I}} \left(1 - \frac{e\Phi_P}{k_B T_I} \right) \quad (16)$$

$$\text{Elektronen: } I_e = -\pi a^2 n_e e \sqrt{\frac{8k_B T_e}{\pi m_e}} \exp\left(\frac{e\Phi_P}{k_B T_e}\right) \quad (17)$$

($T_{e,I}$ - Elektronen-/Ionentemperatur; $n_{e,I}$ - Elektronen-/Ionendichte, Φ_P - Partikelpotential; k_B - Boltzmann-Konstante)

Der Unterschied zwischen Gl. (16) und (17) resultiert aus den unterschiedlichen Arten der Wechselwirkung mit dem Staubteilchen. Da $\Phi_P < 0$ ist, werden Ionen aller Geschwindigkeiten in Richtung des Partikels gelenkt und könnten theoretische damit stoßen (respektiv der Geschwindigkeitsverteilung und dem Streuquerschnitt). Die Elektronen hingegen müssen mindestens eine Geschwindigkeit

$v_{\min} = \sqrt{-\frac{2e\Phi_P}{m_e}}$ besitzen, damit sie die Potentialbarriere zum Partikel überwinden und damit stoßen

können. Außerdem finden sich mit $\sqrt{\frac{8k_B T_j}{\pi m_j}}$ die thermischen Geschwindigkeiten der jeweiligen Spezies j als Vorfaktoren wieder. Damit werden die Gesamtströme letztendlich zum Produkt aus ungestörter, thermischer Stromdichte und der angepassten Wechselwirkungsfläche des Partikels.

Es sei erwähnt, dass aufgrund der hohen Teilchendichten in einem Plasma die OML-Theorie nicht der Realität entspricht. Die mittlere freie Weglänge eines Ions oder Elektrons hat in etwa die Dimension der Debyelänge λ_D und ist nicht, wie vorausgesetzt, unendlich groß. Des weiteren entsprechen die $f(v_j)$ in der Praxis nicht isotropen Maxwell-Geschwindigkeitsverteilungen.

1.2.2 Neutralgas-Ionen-Stöße

Auf Grundlage der OML-Theorie lässt sich ein erweiterter Ausdruck für den Ionenstrom mit Rücksicht auf Stöße des Neutralgases aufstellen. Offensichtlich geht, mit dem Durchgang eines Projektils durch das Neutralgas einer Entladung, der Verlust kinetischer Energie einher. Es ist nun leicht nachzuvollziehen, dass sich viele Ionen, aufgrund der Ablenkungen durch Stöße und Wechselwirkung, um das negativ geladene Staubpartikel sammeln.

In einer Sphäre mit dem Radius R um das Teilchen ist die Stoßwahrscheinlichkeit zwischen Ionen und Neutralgasatomen

$$\frac{R}{l\lambda_{\text{mfp}}} = Rn_N\sigma_{\text{I,N}} . \quad (18)$$

(n_N - Neutralgasdichte; $\sigma_{\text{I,N}}$ - Stoßparameter für Ion-Neutralgas-Stöße; λ_{mfp} - mittlere freie Weglänge) Durch eine Sphäre mit diesem Radius fließt nun neben dem thermischen Ionenstrom I_{th} noch ein weiterer Strom I_S auf Grund der Stöße mit dem Neutralgas. Die Ionen der Geschwindigkeit $v_{\text{th,I}}$, welche sich ohne Wechselwirkung mit dem Gas der Entladung am Target vorbei bewegen würden, werden mit der Stoßwahrscheinlichkeit aus Gl. (18) in Richtung des Staubteilchens abgelenkt und tragen somit zum Ladungsstrom auf dieses bei. Der Gesamtladungsstrom durch Ionen entspricht der Summe der beiden Ströme:

$$I_{\text{th}} = \pi R^2 n_N e v_{\text{th,I}} \quad I_S = \pi R^2 n_N e v_{\text{th,I}} (R n_N \sigma_{\text{N,I}}) \quad (19)$$

$$I_{\text{ges}} = \pi a^2 n_I e v_{\text{th,I}} \left(1 - \frac{e\Phi_P}{k_B T_I} + \frac{R^3}{\lambda_{\text{mfp}} a^3} \right) \quad (20)$$

Auf der Oberfläche der 'Stoßsphäre' S_R hat das Yukawa-Potential des Staubteilchens gerade die Energie der thermischen Ionenbewegung (Gl. (21)), womit diese gerade noch in dessen Einfang geraten. Mit dem daraus bestimmten R folgt ein diskreter Ionenstrom auf das Partikel mit Rücksicht auf die Ionen-Neutralgaswechselwirkung (Gl. (22)).

$$\frac{k_B T_I}{e} = \frac{Z_S e}{4\pi\epsilon_0 R} \exp\left(\frac{R}{\lambda_D}\right) \quad (21)$$

$$I_I = \pi a^2 n_I e v_{\text{th,I}} \left(1 - \frac{e\Phi_P}{k_B T_I} + 0,1 \left(\frac{e\Phi_P}{k_B T_I} \right)^2 \frac{\lambda_D}{\lambda_{\text{mfp}}} \right) \quad (22)$$

Im Vergleich zum Ergebnis des OML-Modells aus Gl. (16) ist dieser Ladungsstrom in Abhängigkeit des Partikelpotentials und Ionentemperatur vergrößert. Die Wechselwirkung mit dem Neutralgas sorgt also, über die Stöße und Erzeugung einer *Ionenwolke* um ein Teilchen, für einen größeren pos. Ladungsstrom, welcher respektive wiederum für eine Steigerung des Elektronenstromes auf Grund des veränderten Partikelpotentials sorgt. Eine selbstkonsistente Lösung der, an den Anfang gestellte Problematik in Gl. (12) um das *floating*-Potential gestaltet sich jedoch als überaus schwierig, da schon der OML-Theorie mehrere falsche Annahmen vorausgingen und dessen Eigenrückwirkungen nicht-trivial sind.

1.3 Staub-Dynamik

In einem Plasma wirken viele, u.U. nicht-triviale Kräfte auf den eingefangenen Staub. Im Folgenden werden die wichtigsten Einflüsse auf die Dynamik komplexer Plasmen vorgestellt und beschrieben.

1.3.1 Gravitation und elektrische Feldstärke

Betrachtet man ein Experiment, welches am Erdboden in Nähe der Meereshöhe durchgeführt wird, so muss offensichtlich die vollständige Gravitationskraft berücksichtigt werden. Dies gilt bspw. nicht für Versuche unter Mikrogravitation während Parabelflügen oder auf der *International Space Station*.

$$F_g = m_S g = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_S g \quad (23)$$

(m_S - Masse der Staubteilchen; a - Partikelradius; ρ_S - Massendichte des Staubes; g - Erdbeschleunigung)
 Natürlich wirkt auf die, durch das ionisierte Gas elektrisch geladenen Partikel eine elektrische Kraft F_E , welche aus dem äußeren Feld E der Plasma-Elektroden folgt. Eine elektrische Wechselwirkung mit dem Plasma tritt aufgrund der Quasineutralität nicht auf: innerhalb einer *Debye-Kugel* sind die Veränderung zu schnell, als dass das träge Staubteilchen diesen folgen könnte.

$$F_E = Q_S E = 4\pi\epsilon_0 a \Phi_{fl} E \quad (24)$$

(Q_S - Staubladung; Φ_{fl} - *floating*-Potential)

Diese beiden Kräfte heben sich gerade in der Randschicht einer sog. Radiofrequenz-Entladung (*rf discharge*) auf, da sie für eine oben liegende Kathode antiparallel stehen. Zu beachten ist hierbei der stark unterschiedliche Einfluss des Teilchenradius - $\propto a^3$ und $\propto a$.

1.3.2 Abschirmung und Polarisationskräfte

Die große negative Aufladung der Staubteilchen sorgt über die Coulomb-Wechselwirkung mit den auf das Partikel zuströmenden Ionen dafür, dass sich eine Konzentration derer lokal stark ändert. Es entsteht eine Wolke aus langsamen Ionen die quasi in der näheren Umgebung um das Teilchen verbleiben, jedoch nicht mit diesem interagiert und es nach außen hin vor dem Einfall schnellerer pos. Ladungen abschirmen. Somit gibt es keine direkte Rückwirkung der Wolke auf das Partikel, sofern dessen sphärische Symmetrie gegeben ist. Gilt dies nicht, so entsteht ein Multipol- bzw. Dipolmoment \vec{p} , welches danach strebt, sich in Richtung des Feldes \vec{E} auszurichten. Damit wirkt eine Kraft F_{Dip} (für ein Dipolmoment) auf das Staubteilchen zurück, welche mit dem Gradienten der Richtungsdivergenz zwischen \vec{p} und \vec{E} geht.

$$\vec{F}_{Dip} = \vec{\nabla} (\vec{p} \vec{E}) \quad (25)$$

$$\vec{p} \parallel \vec{E} \quad \vec{p} \parallel \vec{E} \quad \vec{p} \parallel \vec{E}$$

Das besagte Dipolmoment entsteht u.a. durch die diversen, gerichteten Ladungsprozesse in dem Plasma. Ein Partikel, welches in der Randschicht eingefangen und von einer Ionenwolke umgeben wird, 'sieht' unterschiedliche *Debye*-Längen über und unter sich aufgrund der lokalen Feldrichtung und der stark vom Mittelwert abweichenden Ionen- und Elektronendichten. Somit ändert sich offensichtlich die Plasmadichte innerhalb des Volumens einer Kugel mit dem, nun ortsabhängigen Radius $\lambda_D(\vec{r})$. Insgesamt folgt daraus eine neue Bestimmungsgleichung für das Potential und damit auch eine neue Kraft F_E .

$$\Delta \Phi(\vec{r}) - \frac{\Phi(\vec{r})}{\lambda_D^2(\vec{r})} = \frac{Q_s}{\epsilon_0} \delta(\vec{r}) \quad (26)$$

$$F_E = \underbrace{Q_S E}_{(I)} - \underbrace{\frac{Q_S^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{\nabla \lambda_D(\vec{r})}{\lambda_D^2}}_{(II)} \quad (27)$$

Hierbei stellt (I) die normale Komponente dar und (II) ist zusätzliche Kraft durch die Deformation der Ionenwolke in Richtung kleinerer *Debye*-Längen $\lambda_D(\vec{r})$. Die Kraft F_E kann also dadurch größer oder kleiner werden. Hinzu kommt, dass der veränderte Parameter λ_D von der Driftgeschwindigkeit u_I abhängt, welche die Ionenwolke maßgeblich beeinflusst. Ist jedoch $u_I < v_{th,I}$ so kann man annehmen, dass die Ionenwolke besteht und $\lambda_D(\vec{r}) \approx \lambda_{D,I}$ gilt.

Sind die Ionen jedoch schneller, womit $u_I \gg v_{th,I}$ wird, so können sie nicht mehr vom Feld des Partikels 'gefangen' werden und damit die Ionenwolke bilden. So gilt folglich $\lambda_D(\vec{r}) \approx \lambda_{D,e}$.

Insgesamt ist der Einfluss der Polarisation vernachlässigbar klein, solange die Teilchen eine Größe von einigen hundert μm nicht übersteigen.

1.3.3 Ionen-Neutralgasreibung

Aufgrund der hohen negativen Ladung des Staubteilchens und der daraus resultierenden elektrostatischen Wechselwirkung existiert ein, relativ auf das Partikel zufließender, Ionenstrom oder auch „Ionenwind“. Weiterhin bewegen sich mit ihrer thermischen Geschwindigkeit die Neutralgasatome durch das Plasma und stoßen mit anderen Teilchen. Die Zahl der Stöße dN einer Spezies mit einem Target mit dem Streuparameter σ im Zeitintervall dt ist somit über deren relative Geschwindigkeit v_{rel} zu diesem in $dN = n\sigma v_{rel}dt$ gegeben. Hierbei kennzeichnet n die Stromdichte der strömenden Teilchen. Aus diesem Strom folgt ein gewisser Impulsübertrag Δp auf das Target. Hieraus lässt sich eine Kraft F_{drag} ziehen, die einer Reibung bzw. einer Impulsaufnahme entspricht.

$$F_{drag} = \frac{dN \Delta p}{dt} = \Delta p n \sigma v_{rel} \quad (28)$$

Man spricht hierbei auch von *ambipolarer Diffusion*, da die Ionenströme und damit auch die Ionenreibung zu beiden Polen führen. Man kann diese aus 2 Teilen aufbauen: direkte Kollisionen mit den Ionen F_{dir} und deren Coulomb-Streuung an den Feldern der neg. geladenen Staubpartikel. Im folgenden soll das sog. *Barnes-Modell* eingeführt werden, welches die besagte Ionenreibung beschreibt.

Ionenreibung: Barnes-Modell Für die Bestimmung von F_{dir} wird angenommen, dass nur die Ionen, welche für eine Ladungsänderung der Partikel sorgen, auch diese direkt treffen. Im Rückblick auf die Bestimmung der Ionenströme in 1.2 wird die Kraft durch Kollisionen zu

$$F_{dir} = \pi a^2 m_I \tilde{v} n_I u_I \left(1 - \frac{2e\Phi_{fl}}{m_I \tilde{v}^2} \right). \quad (29)$$

(n_I - Ionenkonzentration; u_I - Ionen-Driftgeschwindigkeit; m_I - Ionenmasse)

Das Produkt aus Masse und mittlerer Geschwindigkeit der Ionen $m_I \tilde{v} = m_I \sqrt{u_I^2 + v_{th,I}^2}$ entspricht dem Impulsübertrag.

Für die Coulomb-Streuung müssen alle diejenigen Ionen miteinbezogen werden, welche mit dem Feld des Staubes 'stoßen'. Hierfür wird der Streuquerschnitt $\tilde{\sigma}$ der Ionen-Elektronen-Wechselwirkung auf den aktuellen Fall angepasst.

$$\tilde{\sigma} = 4\pi b_{\frac{\pi}{2}}^2 \ln(\Lambda) = 4\pi b_{\frac{\pi}{2}}^2 \ln\left(\frac{\lambda_D}{b_{\frac{\pi}{2}}}\right) \quad (30)$$

$$b_{\frac{\pi}{2}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_I v^2}$$

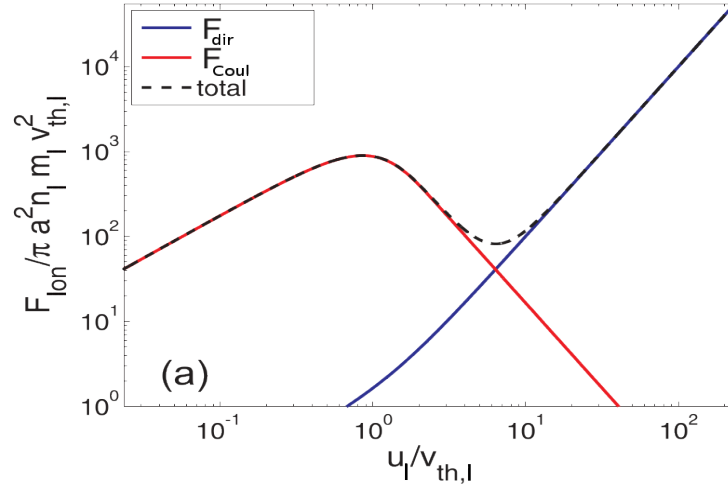


Abb. 3: Berechnete Kräfte F_{Coul} (Coulomb), F_{dir} (collection) und die Summe beider auf einer doppelt-logarithmischen Skala.

Der Stoßparameter $b_{\frac{\pi}{2}}$ beschreibt eine Ablenkung um 90° . Für die Ionenreibung müssen weitere Bedingungen mit eingebunden werden: die Coulomb-Streuung außerhalb der Ionenwolke ist irrelevant, die Staubpartikel haben eine endliche Ausdehnung und damit existiert ein minimaler Stoßparameter b_k . Damit wird das gesuchte σ zu

$$\sigma = \int_{b_k}^{\lambda_D} \tilde{\sigma} d\left(\frac{\lambda_D}{b_{\frac{\pi}{2}}}\right) = 4\pi b_{\frac{\pi}{2}}^2 \ln\left(\frac{\lambda_D^2 + b_{\frac{\pi}{2}}^2}{b_k^2 + b_{\frac{\pi}{2}}^2}\right)^{1/2}$$

$$F_{\text{Coul}}^* = \frac{2\pi a^2 e^2 \Phi_{\text{fl}}^2}{m_I \tilde{v}^3} n_I u_I \ln\left(\frac{\lambda_D^2 + b_{\frac{\pi}{2}}^2}{b_k^2 + b_{\frac{\pi}{2}}^2}\right)^{1/2}. \quad (31)$$

Wobei in * für die vollständige Coulomb-Kraft durch Ionen F_{Coul} auf ein Partikel benutzt wurde, dass dieses mit Ladung $Z_S e = Q_S$ als Kugelkondensator als $Q_S = 4\pi\epsilon_0 a \Phi_{\text{fl}}$ ausgedrückt werden kann. Wichtig zu beachten ist jedoch, dass nur Ionen einen Beitrag leisten, die innerhalb eines Stoßparameters $\lambda_D \approx \lambda_{D,e}$ am *target* vorbei fliegen.

Die gesamte Kraft durch Ionen auf die Staubteilchen ist somit die Summe der Kräfte aus direkten Stößen und Coulomb-Kollisionen $F_{\text{ion}} = F_{\text{dir}} + F_{\text{Coul}}$, welche zusammen dargestellt sind in Abb. 3.

1.3.4 Neutralgasreibung

Die Stöße mit den Neutralgasatomen können, ebenso wie die mit Ionen, als Kraft durch Reibung aufgefasst werden. Diese sorgen insbesondere für eine Verlangsamung der Bewegung der Staubteilchen. Die Kraft F_N wird, in ähnlicher Weise wie F_{dir} , durch einen Impulsübertrag über einen Strom von Neutralgasteilchen auf einen effektiven Querschnitt ausgedrückt.

$$F_N = -\delta \frac{4}{3} \pi a^3 m_N v_{\text{th},N} n_N v_S \quad (32)$$

(m_N - Neutralgasatommasse; $v_{\text{th},N}$ - thermische Geschw. der Neutralgasatome; n_N - Neutralgasdichte; v_S - Staubteilchengeschw.)

Der Faktor δ beschreibt hierbei die Art, wie die Neutralgasatome mit dem Staub stoßen. Eine spiegelnde Reflexion tritt für ein $\delta = 1$ auf. Mit steigendem δ wird die Kollision immer diffuser, bis hin zu einem Wert von $\delta = 1,44$.

Für den berühmten *Milikan-Öltropfen-Versuch* zur Bestimmung der Ladung eines Elektrons wurde, 1924 von *P. S. Epstein*, ebenso ein Ausdruck für die Kraft durch Neutralgasreibung bestimmt. Dabei ist β der Reibungskoeffizient und ρ_S die Dichte des Staubmediums.

$$F_N = -m_S \beta v_S = -m_S v_S \delta \frac{8}{\pi} \frac{p}{a \rho_S v_{th,N}} \quad (33)$$

1.3.5 Thermophoretische Kraft

In einer Plasmakammer kann, durch Aufheizung oder Abkühlung einer der Elektroden bzw. Kammerbegrenzungen ein, bspw. der Gravitation oder dem elektrischen Feld entgegen gerichteter Temperaturgradient angelegt werden.

Die Kraft kann folgendermaßen erklärt werden: auf der Seite der höheren Temperatur haben die Neutralgasteilchen im Mittel eine größere Geschwindigkeit und Impuls, woraus ein positiver Impulsübertrag in Richtung niedrigerer Temperaturen folgt. Mit der Wärmeleitfähigkeit des Neutralgases κ_N folgt für die thermophoretische Kraft F_{th} Gl. (34). Auf Grund $\propto a^2$ ist diese Kraft besonders wichtig für Teilchen mit einem Radius kleiner als μm . Sie wird für die Formation von sog. *Yukawa-Clustern* genutzt (siehe 1.4).

$$F_{th} = -\frac{32}{15} \frac{a^2 \kappa_N}{v_{th,N}} grad(T) \quad (34)$$

Es sei erwähnt - über die Zustandsgleichung für ideale Gase $pV = Nk_B T$ ersichtlich -, dass bei einer höheren Temperatur die Dichte des Neutralgases sinkt. Experimentell findet man daher, dass die verminderte Dichte zu einer niedrigeren Stoßintensität führt und damit den Effekt der Thermophorese in etwa gerade kompensiert. Trotzdem bleibt die Methode des Temperaturgradienten ein wichtiges Mittel zum Einfang des Staubes und Ausgleich der Gravitationskraft.

1.3.6 Kraft durch Laser-Einstrahlung

Der Einsatz von *Laser* (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation) hat in Versuchen zu kolloidalen Plasmen verschiedene Gründe: einerseits wird der *target*-Bereich mit ihnen ausgeleuchtet, andererseits können unterschiedliche dynamische Eigenschaften des Staubes untersucht werden.

Die Manipulation von eingefangenen Teilchen wird bspw. durch die Fokussierung eines *Laserstrahls* auf ein Partikel realisiert. Hierbei spielt der Impulsübertrag der Photonen mit Impuls p_{ph} , welcher dem Strahlungsdruck p_{Strahl} entspricht und die photophoretische Kraft F_{ph} eine Rolle.

$$p_{Strahl} = \frac{dp_{ph}}{A_L dt} = \frac{dN_{ph}}{A_{La} dt} \frac{h}{\lambda} = \frac{I_L}{c}$$

$$F_{Strahl} = \gamma \frac{I_L}{c} \pi a^2 \quad (35)$$

(N_{ph} - Anzahl der, die das Partikel treffenden Photonen; λ, ν - Lasergrößen; A_L - Querschnittsfläche des *Laser*; γ - Wechselwirkungskoeffizient für den Stoß Photon-Staub)

Für ein $\gamma = 2$ in Gl. (35) liegt eine Totalreflexion vor, für $\gamma = 1$ wird der Impuls der auftreffenden

Photonen vollständig absorbiert.

Geht man davon, dass die Photonendichte nicht isotrop über die Querschnittsfläche A_L ist, so existiert ein Intensitätsgradient über die Strecke eines Strahlradius. Somit treten innerhalb der Strahlungsfläche auf ein Partikel unterschiedliche Kräfte durch den *Laser* auf: im Mittel treffen mehr Photonen das Partikel auf der Seite, welcher dem Strahlmittelpunkt zugewandt ist, als auf der entgegengesetzten. Somit entsteht eine Kraft, welche senkrecht auf der *Laser*-Richtung steht und zum Strahl lot zeigt. Ein *Laser*-Strahl kann also zum Einfang von (einem) ausgewählten Partikeln benutzt werden.

Bei der photophoretischen Kraft wird die resultierende Dynamik aus dem, durch die Stöße mit Photonen erzeugten Temperaturgradienten über ein einzelnes Partikel beschrieben. Wie bereits erläutert, liegt ein Strahldichtegradient für eine Fläche von A_S vor, woraus eine unterschiedliche Staubaufheizung durch die Stoßreibung folgt.

Treffen nun Neutralgasatome auf die heißere Seite, so werden sie dort schneller reflektiert, als von der kälteren. Die Differenz des Impulsübertrags resultiert in der photophoretischen Kraft, die entgegen des Gradienten der Photonendichte und damit in Richtung der heißen Seite der Partikel zeigt. Je nach der Absorptionsfähigkeit besitzen die Teilchen unterschiedliche Temperaturgradienten. Somit stellt sich eine heiße Front aus den Teilchen auf, welche eine gute Absorption und somit insgesamt höhere Temperatur aufweisen. Für diese Partikel zeigt F_{ph} in Richtung des Strahls. Analog wirkt die photophoretische Kraft für schlecht absorbierende Teilchen in entgegengesetzte Richtung. Somit ergibt sich F_{ph} in Gl. (36) mit dem Wärmeleitungskoeffizienten κ_S des Staubes, dem Gasdruck p und der Gastemperatur T .

$$F_{ph} = \frac{\pi a^2 p I_L}{6 (p a v_{th,N} + \kappa_S T)} \quad (36)$$

1.3.7 Einfang und Gleichgewicht

In Abb. 4 sind einige der bisher beschriebenen Kräfte für typische Parameter berechnet und mit einer doppelt-logarithmischen Skala dargestellt worden.

Für Teilchen mit einem Radius im Bereich von einigen μm sind die Kräfte des äußeren elektrischen Feldes F_E und der Gravitation F_G dominant. Daher müssen, für einen praktikablen Einfang, diese beiden Kräfte im Gleichgewicht sein, d.h. sich stationär aufheben. Dies ist gerade in der nahen Randschicht der positiven Elektrode der Fall, da dort F_E stark genug ist. Weil $\text{grad}(E) \ll 1$ ist, gilt dies nur lokal. Für $a \gg 1 \mu\text{m}$ wird F_E weniger relevant und es übt die Thermophorese eine immer größere Kraft auf den Staub aus. Genauer: F_{th} ist in Experimenten sogar schon für $\text{grad}(T) \approx 2 \frac{\text{K}}{\text{m}}$ eine wichtige, nicht vernachlässigbare Größe. Für die Neutralgasreibung F_N gilt, dass diese bei großen thermischen Geschwindigkeiten des Staubes nahezu konstant wird, jedoch für „kalten“ Staub mit zunehmendem Drift v_S an Einfluss gewinnt. Die Ionenreibung F_{ion} ist unter diesen Umständen vergleichsweise klein. Sind die Staubpartikel klein, d.h. haben einen Radius $a \approx 10^{-9} \text{ m}$, so wird die Gravitationskraft mit ihrem Einfluss $\propto a^3$ sehr klein und spielt damit kaum noch eine Rolle. Damit muss die Kraft des elektrischen Feldes mit der Ionenreibung bzw. der Thermophorese balanciert werden.

In Abb. 5 sind schematisch die Kräfte aus Abb. 4 mit ihren Orientierungen dargestellt worden. Abbildungsteil (a) zeigt dabei den Einfang von μm -großen Teilchen in einer kleinen, lokalisierten Randschicht. Diese ordnen sich dabei in ausgedehnten Schichten mit hexagonaler Struktur (*fcc* bzw. *bcc*, siehe 1.5) an. Die Kräfte der Thermophorese und des „Ionenwindes“ (F_{ion}) zeigen dabei aus dem Plasma heraus in Richtung der Kammer bzw. der Elektroden. Hierbei sind die Ionen bestrebt, aufgrund der ambipolaren Diffusion in der Randschicht auf die Kammerwand, den Ladungsunterschied (etwa innerhalb einer *Debye*-Länge) zwischen dem Plasma und dem Gehäuse auszugleichen. Das liegt u.a. an den unterschiedlichen Beweglichkeiten der Ladungsträger und deren Strömung auf die Kammer. Weiterhin

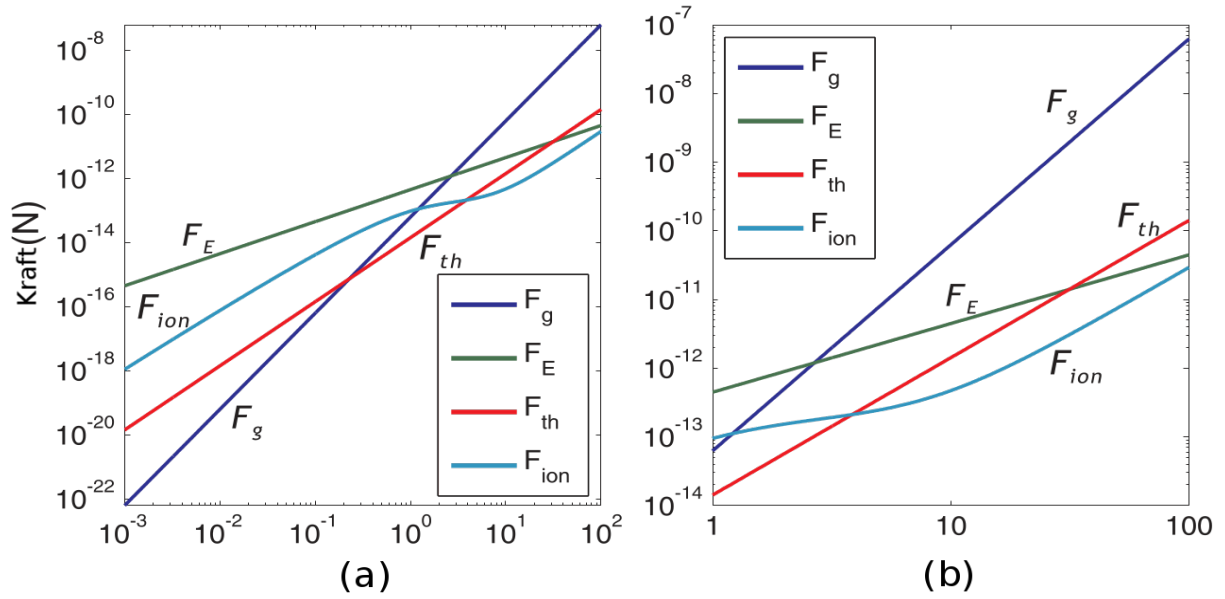


Abb. 4: Kräfte als Funktion des Teilchenradius in einem Argon-Plasma (Parameter: $\kappa_N = 0,016 \frac{\text{kgm}}{\text{s}^3}$; $\rho_S = 1,5 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $T_e = 2 \text{ eV}$; $\Phi_{fl} = -4 \text{ V}$; $E = 1000 \frac{\text{V}}{\text{m}}$; $n_I = 10^5 \text{ m}^{-3}$; $u_I = v_{th,I} = v_{th,N} = 400 \frac{\text{m}}{\text{s}}$)

gilt ähnliches für die thermophoretische Kraft: das aufgeheizte Plasma erzeugt einen Impulsübertrag in Richtung der kühleren Kammer, woraus eine Kraft vom Plasma weg folgt. Der Staub wird somit in einem Teil der Entladung eingefangen, in dem diese Kräfte eine untergeordnete Rolle spielen. Die relevante elektrische Feldkraft ist besonders in der Nähe der Elektroden groß und kann damit dort Gravitationskraft bzw. F_{th} und F_{ion} kompensieren. Sie zeigt zudem in Richtung des Plasmas, da dieses in der Randschicht nicht mehr als neutral betrachtet werden kann.

Im zweiten Teil (b) von Abb. 5 ist ein Plasma mit Staubteilchen im nm-Bereich unter Schwerelosigkeit gezeigt. Dabei entsteht der sog. *void*, welcher ein Fremdteilchen-freier Bereich in Mitten der Entladung ist und aufgrund der relativen Orientierungen der Kräfte zustande kommt. Thermophorese und Ionenwind-Kraft zeigen (selbe ARGumentation wie zu Teil (a)) aus der 'Mitte' des Plasma in Richtung der Kammer und der Elektroden, wobei von diesen aus die elektrische Feldkraft zum *void* zeigt. Da in diesem Fall F_G sehr klein ist (wegen $\propto a^3$), muss für den Einfang des Staubes das starke F_E , welches zwischen Kammer und Plasma entsteht, mit F_{th} und F_{ion} im Gleichgewicht sein. Somit ist es möglich, Staub in dreidimensional ausgedehnten Bereichen in der gesamten Entladung einzufangen.

Es stellen sich sogar Dichte- bzw. Volumen- und Massegradienten aufgrund der empfindlichen Abhängigkeit von Gravitation und elektrischer Feldkraft ein. Das bedeutet, dass sich schwerere, größere Teilchen bzw. „verschmolzene“ Partikelcluster am Rande des Einfangs wiederfinden, wohingegen kleinerer Staub sich dicht gepackt um den *void* herum befindet.

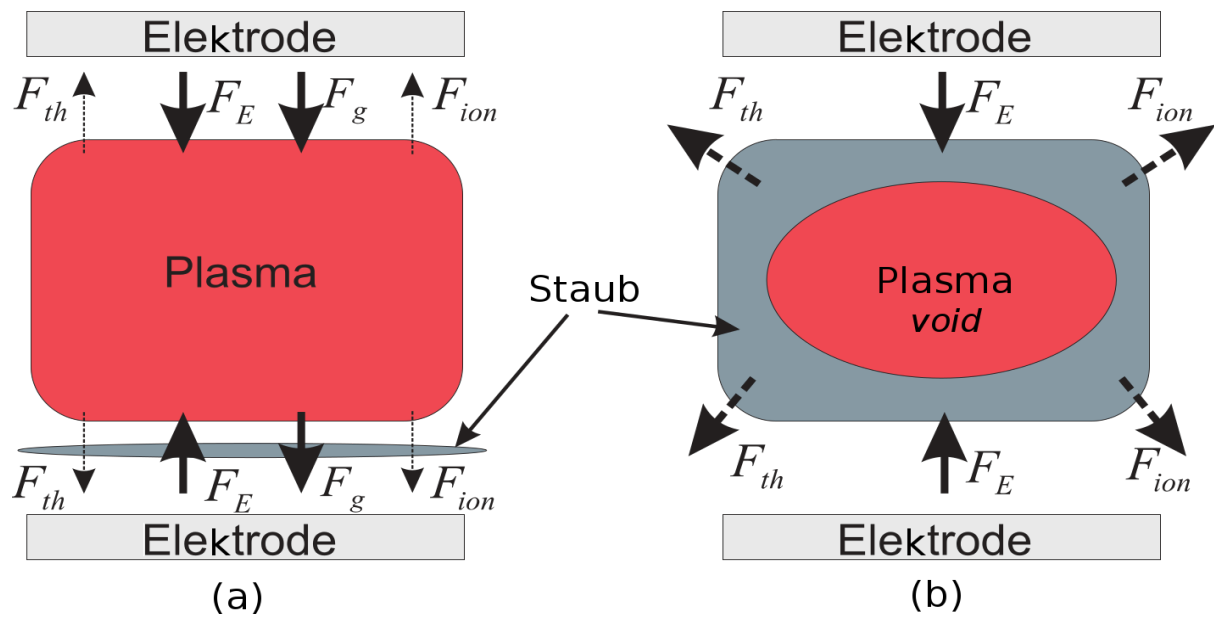


Abb. 5: Schemata für den Einfang von Staub mit (a): $a \approx 10^{-5}$ m (b): $a \approx 10^{-9}$ m bzw. unter Mikrogravitation. Es wurden die wichtigsten Kräfte und deren Richtungen eingezeichnet.

1.4 Finite Yukawa-Cluster

1.5 Coulomb-Kristallisation

2 Durchführung

3 Auswertung

4 Literatur

Literatur

- [1] H. M. Mott-Smith and Irving Langmuir. The theory of collectors in gaseous discharges. *Phys. Rev.*, 28:727–763, 1926. 7

5 Anhang