

# Protokoll: Chaotisches Pendel

Tom Kranz, Philipp Hacker

11. November 2014

Betreuer: Thomas Schumann (Bernd Pompe)

Versuchsdatum: 28./29.10.2014

Note:

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Physikalische Grundlagen</b>	<b>2</b>
2.1	Nichtlineare Bewegungsgleichung . . . . .	3
2.1.1	Parametrische Erregung . . . . .	4
2.1.2	Dämpfung . . . . .	4
2.1.3	Normierung . . . . .	4
2.2	Beschreibung des chaotischen Prozesses . . . . .	4
2.2.1	Regime der Bewegung . . . . .	4
2.2.2	Stroboskopisches Phasenraumportrait . . . . .	5
2.2.3	Attraktoren . . . . .	5
2.2.4	Bifurkationsdiagramme . . . . .	5
2.2.5	Vorhersagehorizont . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Durchführung</b>	<b>7</b>
3.1	Versuchsaufbau . . . . .	7
3.2	Ablauf . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Messungen</b>	<b>8</b>
<b>5</b>	<b>Quellen</b>	<b>9</b>
<b>6</b>	<b>Anhang</b>	<b>9</b>

# 1 Einleitung

Der Begriff Chaos beschreibt den Zustand völliger Unordnung und Verwirrung. In der mathematischen Physik ist die *Chaostheorie* das Feld der nichtlinearen Dynamik, in welcher deterministische Systeme empfindlichst von den Anfangsbedingungen beeinflusst werden.

Dieses moderne Feld der Physik bzw. Mathematik wurde durch den von Henri Poincaré gefundenen Lösungsansatz für die Stabilität des Sonnensystems geschaffen. Erst die im letzten Jahrhundert verbesserte Mathematik der Numerik machte es möglich, fälschlich als Ausnahmen angesehene Phänomene, wie Turbulenzen, Dreikörperprobleme o. ä., näherungsweise zu berechnen.

Allgemein hin ist das Prinzip des Chaos heute bekannt durch die Metapher des Schmetterlingseffektes beim Wetter.

In dem im Folgenden beschriebenen Versuch werden die Prinzipien von nichtlinearer Dynamik am Beispiel eines periodisch erregten Pendels nachvollzogen. Qualitativ sollen so Begrifflichkeiten wie *Bifurkation*, *merkwürdiger Attraktor* oder *Vorhersagehorizont* beobachtet und näher gebracht werden.

## 2 Physikalische Grundlagen

Im Allgemeinen wird die Dynamik eines Systems durch eine Bewegungsgleichung, deren Anfangsbedingungen und die daraus resultierende Trajektorie im Phasenraum vollständig beschrieben. Für beidseitig deterministische Systeme lässt sich damit *an die Vergangenheit erinnern* und die Zukunft voraussagen (für  $t \in [-\infty, \infty]$ ).

Für reale, chaotische Prozesse sind die Anfangsbedingungen jedoch nicht vollständig bekannt und diese Abweichung, in Form einer kleinen Störung, wächst im zeitlichen Mittel exponentiell an. Somit ist die Vorhersagbarkeit im Vergleich zu rein theoretischen Systemen stark eingeschränkt. Andererseits kann man bei gedämpften (dissipativen) Prozessen die Trajektorie nach einer gewissen Zeit auf einem sog. *Attraktor* (Mengen im Phasenraum, welche qualitativ stabile Bewegungen beschreiben) finden.

## 2.1 Nichtlineare Bewegungsgleichung

Sei für das ungedämpfte, harmonische Pendel, ohne Erregung im Schwerfeld der Erde,  $x(t)$  der Auslenkwinkel im Bereich  $[-\pi; \pi]$ ,  $y(t)$  die Winkelgeschwindigkeit (1. totale Ableitung von  $x$  nach der Zeit), das Trägheitsmoment  $J$ , die Masse  $m$  und der Abstand zum Schwerpunkt  $l$ , so gilt

$$J \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + m \cdot g \cdot l \cdot \sin(x) = 0 \quad (1)$$

für die exakte nichtlineare Bewegungsgleichung.

Für die Eigenkreisfrequenz folgt

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{m l g}{J}}. \quad (2)$$

Das Gesamtträgheitsmoment des chaotischen Pendels setzt sich aus den einzelnen Trägheitsmomenten der folgenden Bauteile zusammen: Winkelcodescheibe, Aluminiumscheibe der Wirbelstrombremse (durch Übersetzung das 15-fache!), Zahnkränze, Pendelkörper der Masse  $m_K$ ; Höhe  $h_K$  und Pendelstab.

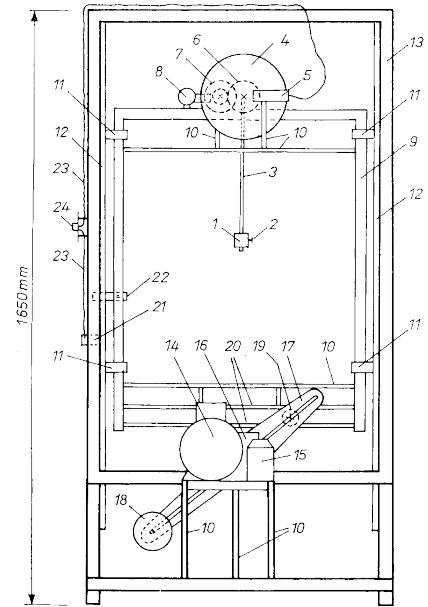


Abb. 1: Aufbau, frontales Schema

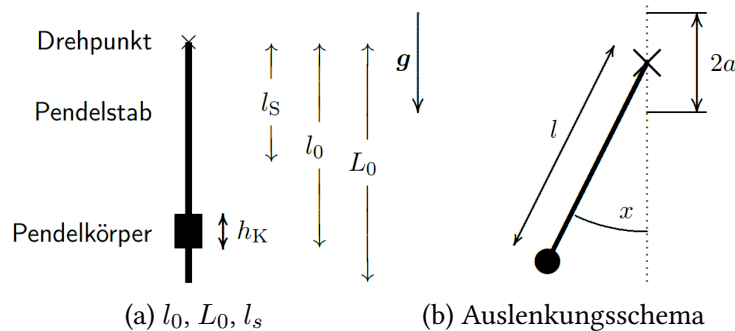


Abb. 2: Längenabmessungen

Kennt man jedoch das Trägheitsmoment an der Stelle  $l_0 = L_0$  (siehe Abb. (Abb. 2a)), so lässt sich schreiben

$$J(l_0) = J(L_0) - m_K (L_0^2 - l_0^2 - h_K (L_0 - l_0)). \quad (3)$$

Für den Abstand  $l_s$  zum Massenschwerpunkt des Pendels gilt

$$l(l_0) = \frac{m_s \cdot l_s + m_K \cdot (l_0 - \frac{h_K}{2})}{m_s + m_K} \quad (4)$$

Geht man mit (4) und (3) in (2), so erhält man

$$\omega_0(l_0) = \sqrt{\frac{(m_s \cdot l_s + m_K (l_0 - \frac{h_K}{2})) \cdot g}{J(L_0) - m_K \cdot (L_0^2 - l_0^2 - h_K \cdot (L_0 - l_0))}} \quad (5)$$

### 2.1.1 Parametrische Erregung

Versteht man die getriebene, periodische Erregung  $h(t) = -a \cdot \cos(\omega' t)$  durch den Schlitten auf dem der Pendelkörper fährt als zu addierende Beschleunigung zur Erdanziehung, so kann man schreiben

$$J \frac{dy}{dt} + ml \sin(x) \left( g + \frac{d^2 h}{dt^2} \right) = J \frac{dy}{dt} + ml \sin(x) (g + a \cdot \omega'^2 \cdot \cos(\omega' t)) = 0 \quad (6)$$

### 2.1.2 Dämpfung

Das durch die Wirbelstrombremse erzeugte Dämpfungs-/Bremsdrehmoment wird über ein Getriebe der Übersetzung  $V$  (100:15) auf das Pendel übertragen. Hinzu kommt die nicht justierbare Dissipation durch Reibungen im Lager und mit der Luft.

Die Dämpfung enthält somit einen konstanten Term und einen, der mit der Winkelgeschwindigkeit bzw. dem magnetischen Fluss (somit dem Strom  $I$ ) geht.

$$M_D = b_0 \cdot \operatorname{sgn}(y) + b_1 \cdot y \quad (7)$$

### 2.1.3 Normierung

Zur übersichtlicheren Darstellung wird die Bewegungsgleichung, welche sich jetzt aus (7) und (6) zusammensetzt, durch folgende Normierungen bzw. dimensionslose Variablen vereinfacht:

$$\frac{dy}{d\tau} = \dot{y} \quad \frac{dx}{d\tau} = \dot{x} = y \quad (8)$$

$$\text{Zeit: } \tau = \omega_0 t \quad \text{Erregerfrequenz: } \Omega(l_0) = \frac{\omega'}{\omega_0} \quad (9)$$

$$\text{konst. Dämpfung: } \beta_0(l_0) = \frac{b_0}{J\omega_0^2} \quad \text{normierte Dämpfung: } \beta_1(l_0, I) = \frac{b_1}{J\omega_0} \quad (10)$$

$$\text{normierte Amplitude: } \alpha(a) = \frac{\omega'^2 \cdot a}{g} \quad (11)$$

Die Bewegungsgleichung, die man damit erhält, ist stark nichtlinear. Sie lautet:

$$\dot{y} + \beta_0 \cdot \operatorname{sgn}(y) + \beta_1 \cdot y + (1 + \alpha \cdot \cos(\Omega\tau)) \cdot \sin(x) = 0 \quad (12)$$

## 2.2 Beschreibung des chaotischen Prozesses

### 2.2.1 Regime der Bewegung

Die oberflächliche Qualität und Charakteristik einer Bewegung kann allgemein als Regime bezeichnet werden. Für bestimmte Anfangsbedingungen der Variablen  $(x_0; y_0)$  und Werte für die Parameter stellt sich nach einer gewissen Einschwingzeit asymptotisch ein Bewegungsregime ein.

Rotationsbewegungen werden solche genannt, deren  $\operatorname{sgn}(y) = \text{const.}$  ist bzw. die permanent in eine Richtung schwingen. Sie sind charakteristisch für große  $y_0$ . Ist die Auslenkung über beliebig große  $\tau$  hinweg beschränkt, so spricht man von einer Librationsbewegung.

Alle anderen Bahnen im vollständigen Phasenraum gehören zu den transient chaotische Bewegungen. Die zeichnen sich durch ihre starke Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen aus. Es ist möglich, Einschwingzeiten von mehreren hundert Erregerperioden verstreichen zu lassen, um dann eine qualitative Bewegungsänderung zu beobachten.

### 2.2.2 Stroboskopisches Phasenraumportrait

Der 3-dim. Raum, welcher die Bewegung des Pendels zu jeder Zeit und in jedem Zustand einschließt, heißt vollständiger Phasenraum. Er wird aus der Auslenkung  $x(\tau)$ , der Winkelgeschwindigkeit  $y(\tau)$  und der Zeit  $\tau$  aufgespannt. Es reicht hierbei jedoch, das Produkt aus den Intervallen  $[-\pi; \pi]$  für die Auslenkung,  $[-\infty; \infty]$  für die Winkelgeschwindigkeit und  $[0; 2\pi]$  für die normierte Erregerphase zu betrachten.

Die Darstellung von Punkten der Trajektorie, welche zu gleichwertigen Zeiten aufgenommen wurden, können zusammen als zweidimensionales, *stroboskopisches Phasenraumportrait* aufgefasst werden. Dieser ist auf die Auslenkung und die Winkelgeschwindigkeit reduziert.

### 2.2.3 Attraktoren

Attraktoren sind Punktmenge im Phasenraum dissipativer Systeme, auf welche transiente Bewegungen asymptotisch zulaufen. Sie beschreiben stabile Zustände. Bezüglich des *Lebesgue-Maß* sind sie Nullmengen: unter dem Strom im Phasenraum schrumpft das Volumen über die Zeit. Dies kommt durch die Divergenz von

$$\operatorname{div}(\dot{x}; \dot{y}) = -\beta_0 \cdot \delta(y) - \beta_1 \quad (13)$$

zum Ausdruck. Somit kann die Einschwingzeit, die für das Anlaufen des Attraktors durch die Bewegung benötigt wird, unendlich lange werden. Diese Zeit ist jedoch für den Experimentator beendet, wenn die Trajektorie näher am Attraktor liegt, als die Messauflösung die Darstellung zulässt. Kompliziertere Gebilde dieser Art heißen *fraktal* und deren Attraktoren *seltsam* (nach *B Mandelbrot*).

### 2.2.4 Bifurkationsdiagramme

Eine stroboskopische Darstellung der Auslenkung oder der Winkelgeschwindigkeit gegen einen Parameter der Bewegung nennt man Bifurkationsdiagramm (Abb. 3). In diesem kann man die qualitativen Bewegungsänderungen (*Bifurkationen*) in Abhängigkeit des verwendeten Parameters ablesen. Beispielsweise lässt sich so der Verlauf der Periodizität der Pendelbewegung bei externer Erregung verfolgen (“Rotations-Einer” → “Rotations-Zweier” → ... Chaos).

### 2.2.5 Vorhersagehorizont

Mit Hilfe des *Lyapunov-Exponenten*  $\lambda$  kann man, bei einer Messgenauigkeit  $\varepsilon$  für eine Bewegung auf einem Attraktor des Durchmessers  $\epsilon$ , den Prozess qualitativ vorhersagen, solange wie

$$\varepsilon \cdot e^{\lambda \cdot \tau} \lesssim \epsilon \quad (14)$$

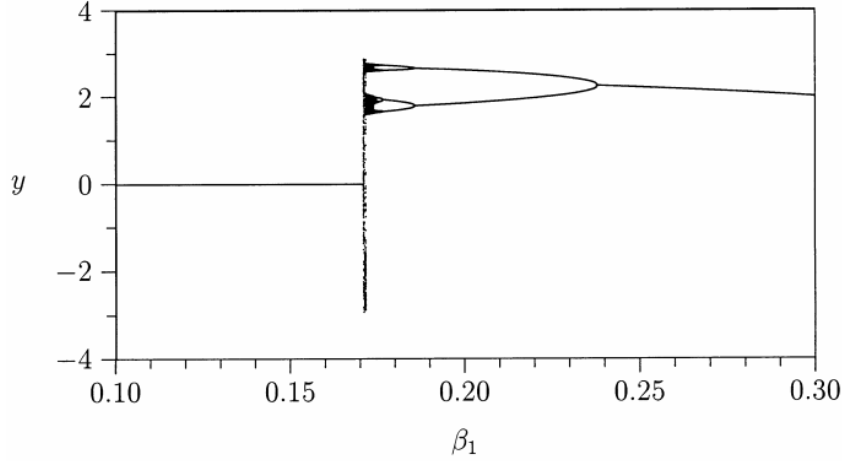


Abb. 3: Winkelgeschwindigkeit  $y$  über Parameter  $\beta_1$

gilt. Für den *Lyapunov-Exponenten* und den Vorhersagehorizont (in der Zeit) gilt, bei einer kleinen Störung  $\xi$  der Trajektorie, folgendes:

$$\|\xi(\tau)\| = \|\xi(0)\| \cdot e^{\lambda\tau} \quad (15)$$

$$\tau_{vor} \approx \frac{1}{\lambda} \cdot \ln\left(\frac{\epsilon}{\epsilon}\right). \quad (16)$$

Es entfernen sich zwei Trajektorien, ungestört und gestört, im zeitlichen Mittel exponentiell. Somit ist die Vorhersagbarkeit stark eingeschränkt. Messfehler, welche für die Anfangsbedingungen gemacht werden, zerstören somit die Erwartungen an den Prozess. Für chaotische Bewegungen ist  $\lambda > 0$ .

Mit  $\lambda$  kann außerdem die Informationsmenge  $I$  berechnet werden, welche proportional (*Informationsdimension*  $D_I$ ) mit einer Verbesserung der relativen Messgenauigkeit  $G = \frac{\epsilon}{\epsilon}$  geht:

$$I \sim D_I \ln(G) \quad (17)$$

$$D_I = 1 + \frac{\lambda}{\lambda + \beta_1} \quad (18)$$

Als Vorhersagehorizont lässt sie auch jene Zeit verstehen, welche benötigt wird, um die Informationen zum Anfangszustand vollständig durch neue zu ersetzen:  $\tau_{vor} \cdot \lambda \approx I(G)$ .

Für  $G$  gilt in unserem Versuch  $2^{-8}$ .

$$\tau_{vor} \approx \frac{D_I}{\lambda} \ln(G) \approx \frac{1}{\frac{\Omega}{2\pi}} \cdot \ln(2^8) \approx 10 \cdot \frac{2\pi}{\Omega} \quad (19)$$

Für  $\tau \ll \tau_{vor}$  sind die chaotischen Bewegungen aus den Anfangsbedingungen vorhersagbar. Mit  $\tau \lesssim \tau_{vor}$  wird die Vorhersagbarkeit u.U. stark eingeschränkt. Ist  $\tau > \tau_{vor}$ , so lässt sich die chaot. Bewegung nicht mehr vorhersagen. Allein ob sie auf einem Attraktor stattfinden wird kann abgeschätzt werden.

## 3 Durchführung

### 3.1 Versuchsaufbau

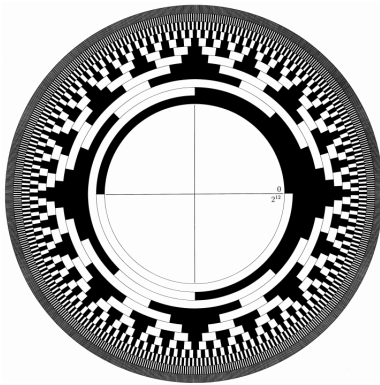


Abb. 4: Ein-Schritt-Code-Scheibe

Der Aufbau des Pendels kann in der Abb. 1 und Abb. 2 eingesehen werden.

Im Rahmen sind des Weiteren Platinen für Microcontroller (MC) und integrierte Schaltkreise angebracht. Diese werden bei einer konstanten Spannung von  $\pm 5\text{ V}$  betrieben. Sie verarbeiten die, von Photodioden in den Auflicht-Lichtschränken an der Winkelcodescheibe (siehe Abb. 4), erzeugten Signale. Außerdem geben Analog-Digital-Wandler dem Experimentator die Möglichkeit, Phase sowie Auslenkung zu oszillographieren (*x-y-Modus*). Außerdem kann die besprochene *stroboskopische Phasenraumdarstellung* aus 2.2.2 dadurch realisiert werden, dass am MC ein Neustart des

Programms mit Halten eines 2. Knopfes erfolgt. Dabei ändert sich das analoge Signal in der Form, dass die Ausgabe nur noch zeitsynchron mit dem zweiten Durchgang des Schlittens durch die Lichtschranke im unteren Totpunkt der Erregung stattfindet. Zu beachten ist jedoch, dass zum Zeitpunkt der Aufnahme von die Phase der Erregung nicht immer die gleich ist. Die Lichtschranke kann die Durchgangsrichtungen nicht unterscheiden.

Die Drehachse wird über ein Getriebe mit einem Verhältnis von 100:15 auf die Wirbelstrombremse übersetzt. Das heißt, dass schon geringe Ströme und somit Flusssichten durch die Aluminiumscheibe ausreichen, um ein signifikantes Verzögerungsmoment hervorzurufen. Der Strom wird von 2 in Reihe geschalteten Netzteilen geliefert.

Die Amplitude der, durch einen Elektromotor getriebenen Erregung, sowie die Lage des Pendelkörpers sind variabel.

### 3.2 Ablauf

Eingangs wird bei abgeschalteter Erregung und unter Änderung des Abstandes des Pendelkörpers von der Drehachse am Oszilloskop (*Roll-Modus*) die Schwingungsfrequenz untersucht. Anschließend wird bei sukzessiver Änderung des Parameters Strom im stroboskopischen Phasenraumbild nach der Bifurkation einer Periodenverdopplung gesucht. Beispielsweise kann das der Übergang von einer *Einer-Periode* zu einer *Zweierperiode* (siehe Abb. 3 an  $\beta_1 \approx 0.24$ ) sein. Außerdem wird jeweils eine Messung für ein  $\Omega$  gemacht. Die gefundenen Werte werden danach mit denen der numerischen Simulation des bereitgestellten Programms verglichen. Die Amplitude sowie Frequenz der Erregung bleibt konstant.

Schließlich erfolgt nach Einstellung der, in der Anleitung gegebenen Parameter eine Messung zu den Anfangsbedingungen einer bestimmten Erreger-Phasenlage. Hierzu wird die Auslenkung und Winkelgeschwindigkeit zeitabhängig oszillographiert. Das gewonnene Bild wird wiederum mit der Simulation für die ausgewählten Werte verglichen.

## 4 Messungen

Zuerst wurden die Frequenzen für Schwingungen beliebiger Größe bei ausgeschalteter Wirbelstrombremse und maximalem Abstand des Pendelgewichts gemessen. Die Ergebnisse sind in Abb. 5 dargestellt, zusammen mit einer Näherung, die in der Versuchsanleitung vorgeschlagen wurde. Diese Näherung sollte erst ab einer Auslenkung von  $\frac{\pi}{2}$  merkliche Abweichungen von der exakten Lösung aufweisen, was mit unserer Messung sehr gut korreliert. Die Messung der Frequenzen erfolgte durch Vermessen der Zeit zwischen zwei Auslenkungsextrema ( $\hat{=}\frac{T}{2}$ ), die der Auslenkung durch Mittelwertbildung der ausgegebenen Spannungen bei diesen Maxima. Der Fehlerbereich hierfür ist großzügig gewählt, nämlich der halbe Unterschied zwischen den beiden Maxima, zuzüglich einer geschätzten Messunsicherheit des Oszilloskops von  $\Delta U \approx 30 \text{ mV}$  bei Philipps Messungen, beziehungsweise  $\Delta U \approx 3 \text{ mV}$  bei Toms Messungen. Die Diskrepanz erklärt sich durch die Wahl unterschiedlicher Messbereiche. Die Messunsicherheit der Frequenz (das Oszilloskop bot eine Funktion zum „direkten“ Messen von Frequenzen) haben wir zu  $\Delta f \approx 0,03 \text{ Hz}$  geschätzt. Lediglich im Bereich höherer Auslenkungen kommt es zur Abweichung der Näherung von den Messwerten – aufgrund des eingeschränkten Gültigkeitsbereichs der Näherung entspricht dies aber völlig den Erwartungen. Ein oberflächlicher Vergleich mit der in der Anleitung gegebenen (aber leider nicht näher spezifizierten) Kurve ergibt sogar in diesem Bereich eine Übereinstimmung.

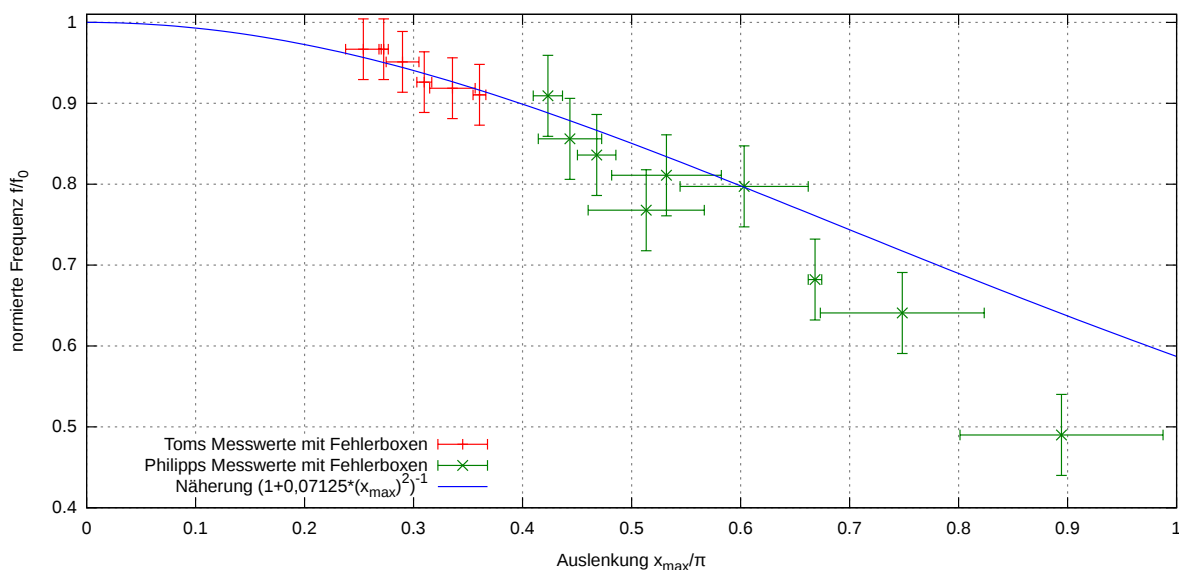


Abb. 5: Frequenzen der Pendelbewegung bei unterschiedlichen Auslenkungen

Als nächstes wurden Bifurkationen untersucht. Zuerst wurden feste Parameter vorgegeben, das Pendel in ein Rotationsregime getrieben und dann  $\beta_1$  kontinuierlich verändert, bis sich im stroboskopischen Phasenraumbild eine Periodenverdopplung zeigte. Dies wurde für einen ansonsten festen Parametersatz zweimal getan und dann wurde der Abstand des Pendelgewichts von der Drehachse geändert, um  $\Omega$  einen neuen Wert zu geben. Nach erfolgreichem Einschwingen im Rotationsregime wurde auch hier wieder  $\beta_1$  kontinuierlich bis zur Periodenverdopplung verändert. Die Ergebnisse zeigt Abb. 6. Unsere Fehlerberechnung stützt



sich auf das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz, das wir mit einem CAS auf die funktionalen Zusammenhänge zwischen normierten Parametern und Messgrößen angewendet haben, um letztlich die eingezeichneten Messfehler zu erhalten. Von der Anleitung wurde an dieser Stelle eine Simulation empfohlen, um die Bifurkationsstellen zu verifizieren oder zumindest mit der Simulation zu vergleichen. Da das vorgeschlagene Programm jedoch in unserem Parameterbereich keine auswertbaren Bifurkationsdiagramme geliefert hat, können wir an dieser Stelle leider keinen Vergleich zur Simulation liefern. Da keine Kenntnisse über den Zusammenhang von  $\Omega$  und  $\beta_1$  in der Parameterebene bestehen, kann auch kein Rückschluss auf die Qualität der gewonnenen Messwerte gemacht werden. Nichtsdestotrotz beobachteten wir für die in Abb. 6 gezeigten Werte qualitative Bewegungsänderung des Pendels, was den Erwartung aus den Grundlagen gerecht wird.

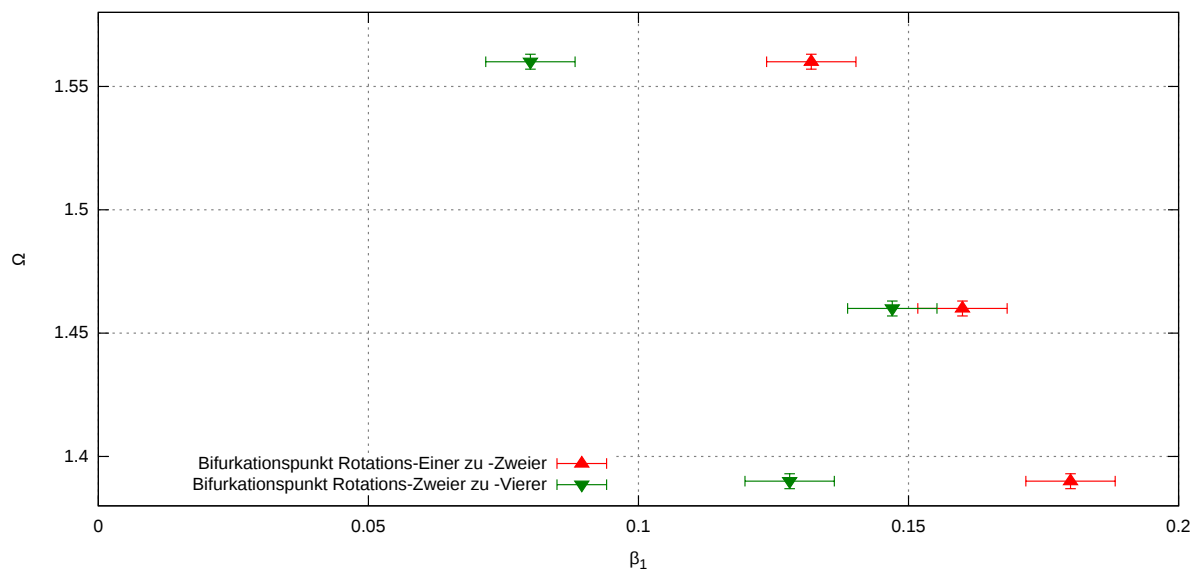


Abb. 6: Punkte in der  $(\Omega; \beta_1)$ -Parameterebene, bei denen Bifurkationen auftraten

Um Aussagen über den Vorhersagehorizont machen zu können, war es notwendig, zeitsynchron mit der Phase der Erregung die Auslenkung und die Winkelgeschwindigkeit aufzunehmen. Dies war jedoch bei dem gegebenen Versuchsaufbau nicht möglich, weswegen wiederum kein Vergleich zur Simulation angestellt werden konnte. Wir erhielten keine Referenz für die Aussagen über den Vorhersagehorizont.

## 5 Quellen

<http://de.wikipedia.org/wiki/Chaos>

<http://de.wikipedia.org/wiki/Chaosforschung>

Versuchsanleitung „Bifurkation und Chaos(Pendel)“

## **6 Anhang**

Die originalen Messwert-Aufzeichnungen liegen bei.