

# Protokoll: Bifurkation und Chaos am Beispiel des erregten Pendels

Tom Kranz, Philipp Hacker

9. November 2014

Betreuer: T. Schumann  
Versuchsdatum: 28.10.2014/29.10.2014

Note:

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Motivation</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>2</b>
2.1	Der Versuchsaufbau . . . . .	2
2.2	Die Messung . . . . .	3
2.3	Die mathematische Beschreibung der Bewegung . . . . .	3
2.3.1	Die grundlegende Bewegungsgleichung . . . . .	3
2.3.2	Die parametrische Erregung . . . . .	4
2.3.3	Die Dämpfung . . . . .	4
2.4	Die weiterführende Betrachtung . . . . .	5
2.4.1	Die Bewegungsgleichung und ihr Definitionsbereich . . . . .	5
2.4.2	Bewegungsregime und Bifurkationen . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Durchführung</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>6</b>
<b>5</b>	<b>Anhang</b>	<b>6</b>

# 1 Motivation

In diesem Versuch wird die Natur chaotischer Prozesse am Beispiel des periodisch erregten Pendels beleuchtet. Dafür werden Messmethoden und die Darstellung des Prozesses im Phasenraum erklärt. Insbesondere wird auf das Phänomen der Bifurkation, der qualitativen Änderung des Phasenraumbilds bei geringfügiger Veränderung eines Kontrollparameters, eingegangen.

## 2 Grundlagen

### 2.1 Der Versuchsaufbau

Abb. 1 zeigt den Versuchsaufbau. Hierbei handelt es sich um ein physikalisches Pendel, dessen Hauptschwingmasse (1) über einen Stab (3) an der Drehachse (×) befestigt ist. Die Masse kann durch Lösen der Stellschraube (2) auf dem Stab verschoben werden, um das Trägheitsmoment des Pendels zu beeinflussen. Zum Pendelkörper (beziehungsweise zum schwingenden Trägheitsmoment) gehören weiterhin die Winkelcodescheibe (4), die zum Auslesen der aktuellen Auslenkung mittels Auflichtschranken (5) benutzt wird und die Aluminiumscheibe der Wirbelstrombremse (7), deren 15-Zahn-Zahnrad über ein 100-Zahn-Zahnrad (6) mit der Drehachse verbunden ist. Zur Wirbelstrombremse gehört weiterhin eine magnetfeld-erzeugende Spulen- $\mu$ -Metall-Konstruktion (8). Die Teile (9) bis (13) bilden die Halterung des Pendels, damit es sich auf und ab bewegen kann. Der Hebelarm (17) wird über ein Getriebe (16) von einem Elektromotor (14) gedreht, woraufhin sich die an den Führungsschienen (20) verschiebbar gelagerte Führungsrolle (19) im Kreis bewegt und die Halterung periodisch auf und ab beschleunigt. Über die Steuerkonsole (15) lässt sich der Elektromotor ein- und ausschalten und die Erregerfrequenz einstellen. Die Lichtschranke (21) registriert den Durchlauf des Zeigers (22) zu einer bestimmten Phasenlage der Erregung für die stroboskopische Ausgabe der Messwerte. Schließlich bildet (23) die Verkabelung und (24) ein Interface zum Abgreifen der Messwerte mittels eines Oszilloskops.

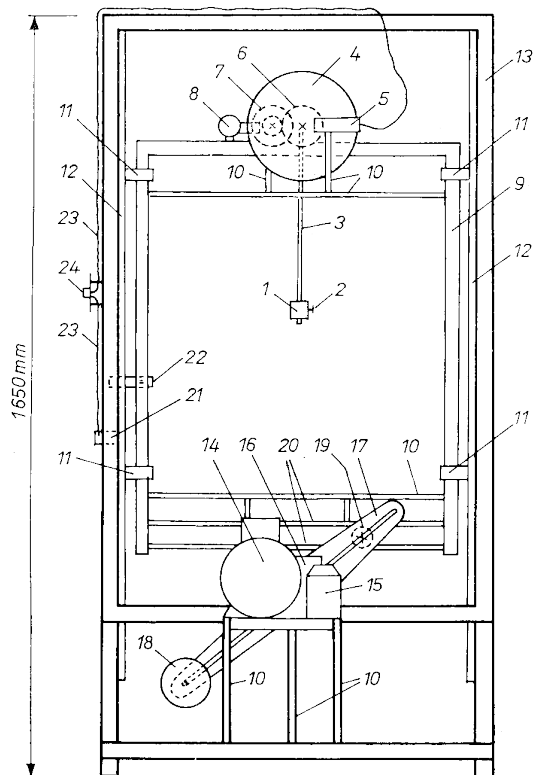


Abb. 1: Das periodisch erregte Pendel

## 2.2 Die Messung

Direkt gemessen wird nur die aktuelle Auslenkung des Pendels. Dies geschieht über die in Abb. 2 gezeigte Winkelcodescheibe, eine Auflichtschranke und eine Auswertungselektronik.

Abb. 2: Die benutzte Winkelcodescheibe – (4) in Abb. 1

Die Codescheibe kann den Auslenkwinkel  $x$  mit einer Auflösung von bis zu zwölf Bits darstellen. Da für die volle Auflösung eine aufwändige Kalibrierung der Auflichtschranke nötig ist, werden die vier Least-Significant-Bits nicht ausgewertet und es verbleibt eine Auflösung von acht Bits, beziehungsweise  $\Delta x = \frac{360^\circ}{2^8} \approx 1,4^\circ$  oder  $\Delta x = \frac{2\pi \text{ rad}}{2^8} \approx 2,45 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$ . Die Abtastrate beträgt  $f_s = (200 \pm 4 \cdot 10^{-4}) \text{ Hz}$ , was einer Abtastperiode von  $T_s = (5 \pm 1 \cdot 10^{-4}) \text{ ms}$  entspricht. Die Winkelgeschwindigkeit  $y$  wird von der Elektronik automatisch aus zwei Auslenkwinkeln im Abstand von 32 Abtastperioden berechnet:  $y(t) \approx \frac{x(t) - x(t - 32 \cdot T_s)}{32 \cdot T_s}$ . Ausgegeben werden Spannungen, die um einen zu den Messwerten  $x$  und  $y$  proportionalen Term verschoben sind:

$$U_x(t) = U_{\max} \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{x(t)}{2\pi} \right) \quad \text{bzw.} \quad U_y(t) = U_{\max} \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{y(t) \cdot 32 \cdot T_s}{2\pi} \right) \quad (1)$$

Hierbei ist  $U_{\max} = 3,06 (1) \text{ V}$  die maximale Ausgabespannung. Es wird ersichtlich, dass  $x$  im Intervall  $[-\pi; \pi)$  und  $y$  im Intervall  $\left[ \frac{-\pi}{32 \cdot T_s}; \frac{\pi}{32 \cdot T_s} \right)$  gemessen werden. Die Grenzen des Intervalls für den Auslenkwinkel sind offensichtlich, die Grenzen des Intervalls für die Winkelgeschwindigkeit wurden aus der Überlegung heraus gewählt, dass sicher nicht mehr als  $\frac{1/2}{32 \cdot T_s} = 3,125$  Vollkreise pro Sekunde durchlaufen werden. Die Messgenauigkeit der Winkelgeschwindigkeit beträgt ungefähr  $\Delta y \approx 1,047 \text{ rad}$ . Mithilfe der Lichtschranke und des Zeigers (siehe Kapitel 2.1) lässt sich auch eine stroboskopische Ausgabe der Messungswerte realisieren: Die Spannungen an den Ausgängen werden nur aktualisiert, wenn der Zeiger die Lichtschranke zweimal durchlaufen hat, also die gleiche Phasenlage der Erregung erreicht ist.

## 2.3 Die mathematische Beschreibung der Bewegung

### 2.3.1 Die grundlegende Bewegungsgleichung

Die Newtonsche Bewegungsgleichung des nicht-erregten, ungedämpften physikalischen Pendels wird als bekannt vorausgesetzt:

$$J \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + m \cdot l \cdot g \cdot \sin(x) = 0 \quad (2)$$

Hierbei ist  $J$  das Trägheitsmoment,  $m$  die Masse des gesamten Pendelkörpers,  $l$  der Abstand von der Drehachse zum Schwerpunkt des Körpers und  $g$  die Fallbeschleunigung im erdnahen Gravitationsfeld. Daraus lässt sich die Eigenfrequenz, die Schwingfrequenz bei kleinen Auslenkungen, zu  $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m l g}{J}}$  berechnen. Diese lässt sich über den Abstand der Hauptschwingmasse von der Drehachse (im Folgenden wird der Abstand zwischen unterer Fläche

der Hauptmasse und Drehachse als  $l_0$  bezeichnet) beeinflussen. Dafür wird  $J(l_0)$  berechnet:  $J$  setzt sich aus dem Trägheitsmoment des Hauptkörpers, des Stabs, der Codescheibe und der Wirbelstrombremse zusammen. Nur Das Trägheitsmoment des Hauptkörpers  $J_K$  ist von  $l_0$  abhängig und berechnet sich mit dem Trägheitsmoment um eine durch den Schwerpunkt verlaufende Achse  $J_{K0}$  nach dem Steinerschen Satz zu  $J_K(l_0) = J_{K0} + m_K \cdot \left(l_0 - \frac{h_K}{2}\right)^2$ , mit  $h_K$  der Höhe und  $m_K$  der Masse des Hauptpendelkörpers. Ist nun das Gesamtträgheitsmoment bei einer festen Länge (zum Beispiel der Länge des Stabs  $L_0$ ) bekannt, berechnet sich  $J(l_0)$  zu:

$$\begin{aligned} J(l_0) &= J(L_0) + m_K \cdot \left( \left(l_0 - \frac{h_K}{2}\right)^2 - \left(L_0 - \frac{h_K}{2}\right)^2 \right) \\ &= J(L_0) - m_K \cdot (L_0^2 - l_0^2 - h_K \cdot (L_0 - l_0)) \end{aligned} \quad (3)$$

Für den Abstand des Pendelschwerpunkts von der Drehachse  $l$  wird noch die Masse des Stabs  $m_S$  und die Schwerpunktslage des Stabs  $l_S$  benötigt. Damit ergibt sich:

$$l(l_0) = \frac{m_S}{m} \cdot l_S + \frac{m_K}{m} \cdot \left(l_0 - \frac{h_K}{2}\right) \quad (4)$$

Die Werte  $J(L_0) = 34,3(4) \text{ g m}^2$ ,  $L_0 = 400,0(5) \text{ m}$ ,  $m_K = 201,93(5) \text{ g}$ ,  $h_K = 37,8(1) \text{ mm}$ ,  $m_S = 53,87(5) \text{ g}$ ,  $l_S = 209(1) \text{ mm}$ , sowie ein praktisches Diagramm zum Ablesen der Eigenfrequenz  $f_0(l_0)$  wurden freundlicherweise in der Versuchsanleitung bereitgestellt.

### 2.3.2 Die parametrische Erregung

Zusätzlich zur Erdbeschleunigung wird das Pendel durch die Auf- und Abbewegung nach oben und unten beschleunigt. Da die Höhe der Drehachse mit der Erregerphase (o.B.d.A. befindet sich der Hebelarm zu  $t = 0$  am unteren Totpunkt) verändert wird,  $h(t) = h_0 - a \cdot \cos(\omega \cdot t)$ , ergibt sich eine Modulation des Parameters  $g$  in Gleichung (2) um  $\frac{d^2 h}{dt^2} = a \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t)$  mit der Amplitude  $a$  und der Kreisfrequenz  $\omega$  der Erregung. Da die Beschleunigung am unteren Totpunkt in die gleiche Richtung wie die Fallbeschleunigung zeigt, wird diese einfach zu  $g$  hinzu addiert:

$$J \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + m \cdot l \cdot (g + a \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t)) \cdot \sin(x) = 0 \quad (5)$$

### 2.3.3 Die Dämpfung

Gleichung (5) bildet natürlich noch kein reales System ab – in der Praxis dissipiert immer Energie aus dem System in die Umgebung. Dies geschieht zum einen über die, nicht beeinflussbare, Reibung und zum anderen in unserem Versuchsaufbau über die Bremswirkung der Wirbelstrombremse. Der Einfluss der Reibung hängt näherungsweise nur von der Bewegungsrichtung des Pendels ab und wird mit der experimentell bestimmten Konstante  $b_0 = 0,027(3) \text{ N m}$  bewertet. Die Bremswirkung der Wirbelstrombremse hängt von der Stromstärke ab und der Einfluss dieser Bremswirkung auf das System ist proportional zur Geschwindigkeit der Pendelbewegung. Der Proportionalitätsfaktor wird bis zur quadratischen Ordnung

genähert durch  $b_1 \approx \left(0,01 + 0,398 \cdot \left(\frac{I}{A}\right) + 0,392 \cdot \left(\frac{I}{A}\right)^2\right) \frac{Nms}{2\pi}$ . Diese Drehmomente wirken der Bewegung entgegen, also werden sie zur linken Seite von Gleichung (5) hinzu addiert:

$$J \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + b_0 \cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{dx}{dt}\right) + b_1 \cdot \frac{dx}{dt} + m \cdot l \cdot (g + a \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t)) \cdot \sin(x) = 0 \quad (6)$$

Zur Vereinfachung dieser Gleichung werden nun die dimensionslose Zeitvariable  $\tau = 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t$  und die dimensionslosen Parameter  $\Omega = \frac{\omega}{2 \cdot \pi \cdot f_0}$ ,  $\beta_0 = \frac{b_0}{J \cdot (2 \cdot \pi \cdot f_0)^2}$ ,  $\beta_1 = \frac{b_1}{J \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_0}$ ,  $\alpha = \frac{\omega^2}{g} \cdot a$  eingeführt. Nach einer Division der Gleichung (6) durch  $J \cdot (2 \cdot \pi \cdot f_0)^2 = m \cdot l \cdot g$  ergibt sich nun die normierte Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + \beta_0 \cdot \operatorname{sgn}(\dot{x}) + \beta_1 \cdot \dot{x} + (1 + \alpha \cdot \cos(\Omega \cdot \tau) \cdot \sin(x)) = 0 \quad (7)$$

## 2.4 Die weiterführende Betrachtung

### 2.4.1 Die Bewegungsgleichung und ihr Definitionsbereich

Gleichung (7) ist eine hochgradig nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Durch die Terme  $\operatorname{sgn}(\dot{x})$  und  $\cos(\Omega \cdot \tau) \cdot \sin(x)$  wird die Lösung erschwert, beziehungsweise im Bereich der elementaren Funktionen unmöglich gemacht. Durch Näherungsverfahren (zum Beispiel nach EULER oder RUNGE-KUTTA) lassen sich jedoch für beliebige Parametersätze und Anfangsbedingungen Aussagen über die Zukunft und die Vergangenheit des Systems machen. Die Anfangsbedingungen bilden ein 3-Tupel  $(x_0, y_0, \tau_0)$  und stammen vorerst aus dem  $\mathbb{R}^3$ . Da die Auslenkung  $x$  jedoch Winkel in einem Kreis darstellt, hat ihr Definitionsbereich nur eine Breite von  $2\pi$ . In Kapitel 2.2 wird bereits angedeutet, dass dieser Definitionsbereich das halb-offene Intervall  $[-\pi; \pi)$  ist. Die Winkelgeschwindigkeit  $y$  dagegen kann beliebig groß werden, die Einschränkung in Kapitel 2.2 gilt nur für den Messbereich. Da auch  $\tau$  nur im Argument einer Winkelfunktion vorkommt, nämlich multipliziert mit der normierten Kreisfrequenz  $\Omega$ , hat auch der Wertebereich dieser Variable eine endliche Breite. Zur Vereinfachung ersetzen wir die normierte Zeit  $\tau$  durch die Phasenlage der Erregung  $\Omega \cdot \tau = \omega \cdot t \in [0; 2\pi)$ . Dadurch sind die Anfangsbedingungen  $(x_0, y_0, \omega \cdot t_0) \in [-\pi; \pi) \times \mathbb{R} \times [0; 2\pi) = \mathbb{T} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}$ , wobei  $\mathbb{T}$  für „Torus“ steht und den Kreis darstellt. Jeder Punkt in diesem dreidimensionalen Raum legt die Trajektorie des Systems eindeutig fest.

### 2.4.2 Bewegungsregime und Bifurkationen

Je nach Anfangsbedingungen und Parameterwahl fällt die Trajektorie asymptotisch in eines von drei sogenannten Bewegungsregimen: Rotation, Libration oder Chaos. Das Rotationsregime zeichnet sich dadurch aus, dass das Pendel sich nur in eine Richtung bewegt, die Winkelgeschwindigkeit also immer das gleiche Vorzeichen hat. Bei der Libration bewegt sich die Auslenkung immer zwischen zwei Grenzen, das Pendel schwingt also hin und her. Chaotischen Bewegungen fehlt jegliche Periodizität.

Hat sich das System in ein periodisches Regime eingeschwungen, führen kleine Veränderungen in Kontrollparametern zunächst nur zu geringfügigen Verschiebungen der Phasenbahn und irgendwann stellen sich qualitative Veränderungen der Bahn ein – im zeitlich kontinuierlichen  $(x; y)$  Phasenbild spaltet sie sich auf, im stroboskopischen Phasendiagramm treten doppelt so viele Punkte auf.

### **3 Durchführung**

### **4 Auswertung**

### **5 Anhang**

Die originalen Messwert-Aufzeichnungen liegen bei.