

# Protokoll: Hall-Effekt in Halbleitern

Tom Kranz, Philipp Hacker

1. Dezember 2014

Betreuer: Dr. Marvin von der Ehe

Versuchsdatum: 18.11.2014

Note:

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Physikalische Grundlagen</b>	<b>2</b>
2.1	Halbleiter . . . . .	2
2.2	Ladungsträgerdichten und Beweglichkeiten . . . . .	3
2.2.1	Ladungsträgerdichten . . . . .	3
2.2.2	Beweglichkeiten . . . . .	4
2.3	Dotierter Halbleiter . . . . .	6
2.4	Hall-Effekt . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Durchführung</b>	<b>10</b>
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>11</b>
<b>5</b>	<b>Quellen</b>	<b>11</b>

# 1 Einleitung

Dem sog. *Hall-Effekt* bedient man sich bei der Messung von magnetischen Feldstärken. Dabei werden Halbleiter eingesetzt, die in ihren attraktiven Eigenschaften sich dafür sehr gut eignen. In diesem Versuch sollen die Prinzipien dieser Vorgehensweise und die Unterschiede zwischen verschiedenen *dopierten* Materialien aufgezeigt werden. Im Fokus stehen außerdem die Untersuchungen von Beweglichkeit der Ladungsträger, der Konzentrationen dieser und deren Rückschlüsse auf interne Stromflussprozesse im Halbleiter.

## 2 Physikalische Grundlagen

### 2.1 Halbleiter

Halbleiter sind Festkörper, welche sich durch eine kleine, nicht von Ladungsträgern besiedelten Energielücke  $E_G$  zwischen dem letzten besetzten Energieband, dem *Valenzband*, und dem darauf folgendem, dem *Leitungsband* charakterisieren (Abb. 1). Nach *Wolfgang Pauli* (1925) kann das  $N$ -te Band maximal mit  $2N$  verschiedenen Zuständen der Ladungsträger, den Elektronen besetzt werden. Diese werden in, an die Atome im Gitter des Halbleiter-Kristalls gebundene Rumpfelektronen und quasifreie, bewegliche Elektronen unterschieden.

In Halbleiter können damit bereits durch thermische Anregung oder kleine äußere Felder Elektronen in das Leitungsband übergehen und damit einen elektrischen Strom fließen lassen. Aus dem Übergang geht auch ein sog. *Defektelektron* hervor, was einen unbesetzten Zustand oder ein Loch im Band, aus welchen das Elektronen abwandert, ausdrückt und damit die Gleichheit von Loch- und Ladungsträgerkonzentration fordert. Diese wird als *intrinsische Ladungsträgerdichte* bezeichnet. Der entstehende Strom heißt *Rekombi-*

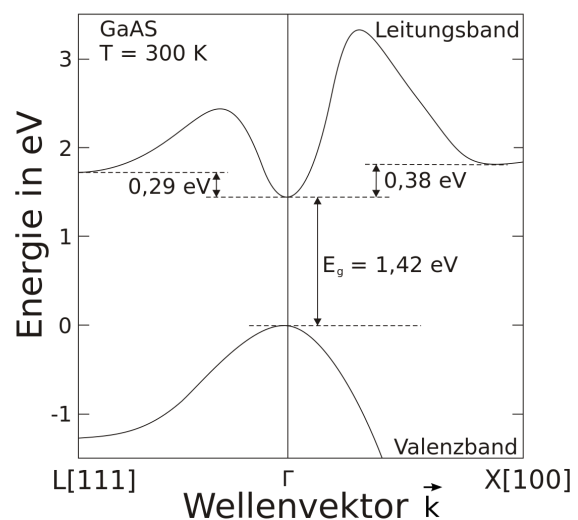


Abb. 1: reduzierte Bandstruktur in Silizium mit eingezeichneten Richtungsachsen

*nationsstrom*, da er durch die *Rekombination* eines Elektron-Loch-Paares charakterisiert wird. Es sei angemerkt, dass die Bewegung der Elektronen, quantenmechanisch betrachtet, durch eine Welle mit Richtungsvektor  $\vec{k}$  und der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  ausgedrückt werden kann.

Betrachtet man die Defektelektronen als pos. Ladungen, so tragen sie unter einen äußeren elektrischen Feld  $\vec{E}$  zu der Dichte des dabei fließenden Stromes  $\vec{j}$  aus Gl. (1) bei. Hierbei haben die Quasi-/Teilchen einmal die Geschwindigkeit  $\vec{v}_{n/p}$ . Diese Eigenschaft nennt man *Eigentleitung*  $\sigma_i$ . Allgemein sind jedoch die Beweglichkeiten  $\mu$  und Konzentrationen  $p$  bzw.  $n$  von Löchern und freien Elektronen nicht gleich (Verunreinigungen).

$$\vec{j} = q_e n \vec{v}_n + q_p p \vec{v}_p = e (n \mu_n + p \mu_p) \vec{E} = \sigma \vec{E} \quad (1)$$

( $\sigma$  - Leitfähigkeit;  $e$  - Elementarladung;  $q_i$  - Ladung der Teilchen)

## 2.2 Ladungsträgerdichten und Beweglichkeiten

### 2.2.1 Ladungsträgerdichten

Da eine thermische bzw. äußere Anregung nötig ist, um Elektronen ins Leitungsband zu bewegen, kann eine starke Temperaturabhängigkeit von  $n$  und  $p$  gefolgert werden. Die Besetzung der Energieniveaus muss der Fermi-Statistik  $f(E, T)$  folgen. In der Regel ist jedoch die Aufweichung von  $f(E, T)$  im Bereich  $\sim 2k_B T$  und damit sehr klein gegen  $E_G$ . Sie kann deswegen durch die Boltzmann-Statistik ersetzt werden, sofern  $E - E_F \gg 2k_B T$  für die Fermi-Energie zwischen den Bändern gilt. Damit werden die Ladungsträgerdichten zu:

$$\begin{aligned} n &= \int_{E_L}^{\infty} D_L(E) e^{-\frac{E-E_F}{k_B T}} dE = \int_{E_L}^{\infty} \frac{(2m_n)^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3} \sqrt{E - E_L} e^{-\frac{E-E_F}{k_B T}} dE \\ &= \frac{(2m_n k_B T)^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3} e^{-\frac{E_L-E_F}{k_B T}} \int_{E_L}^{\infty} \sqrt{E - E_L} e^{-\frac{E}{k_B T}} dE \\ &= 2 \left( \frac{2\pi m_n k_B T}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{E_L-E_F}{k_B T}} = N_{\text{eff}}^L e^{-\frac{E_L-E_F}{k_B T}} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{analog } p = 2 \left( \frac{2\pi m_p k_B T}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{E_V-E_F}{k_B T}} = N_{\text{eff}}^V e^{-\frac{E_V-E_F}{k_B T}} \quad (3)$$

( $D_{L/V}$  - Zustandsdichten in den Bändern;  $m_{n/p}$  - effektive Massen;  $E_V, E_L$  - Bandkanten)

Die Konzentrationen für quasifreie Ladungsträger folgen somit der Boltzmann-Statistik. Die Faktoren  $N_{\text{eff}}^{L/V}$  sind die effektiven Zustandsdichten und gehen mit  $T^{3/2}$ . Man kann nun sich das jeweilige Band als ein einziges Energieniveau mit den betreffenden Zustandsdichten denken. Die Besetzungsdichte wird durch die Boltzmann-Verteilung geregelt. Beachtet werden muss jedoch, das ebenso  $E_F$  als auch  $E_{V/L}$  von außen verschoben werden können. Dem folgen die Integrale der Besetzungsdichten nach. Außerdem ist offensichtlich  $E_G = E_L - E_V$ .

Die besprochene intrinsische Ladungsträgerkonzentration wird damit zu

$$n_i = \sqrt{np} = \sqrt{4 \left( \frac{k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^3 (m_n m_p)^{3/2} e^{-\frac{E_G}{k_B T}}} = \sqrt{N_{\text{eff}}^V N_{\text{eff}}^L} e^{-\frac{E_G}{2k_B T}} \quad (4)$$

Bei geeigneter Handhabung der Messwerte, sowie einigen Näherungen bezüglich der Verhältnisse der Ladungsträgerkonzentrationen, kann man durch Gl. (5) die Bandlücke bestimmen.

$$\begin{aligned} \sigma_i &= e (n_i \mu_n + n_i \mu_p) = e n_i (\mu_p + \mu_n) \\ \ln(\sigma_i) &= \ln \left( \sqrt{N_{\text{eff}}^V N_{\text{eff}}^L} (\mu_n + \mu_p) \right) - \frac{E_G}{2k_B T} \\ &= \frac{1}{2} (\ln(N_{\text{eff}}^V) + \ln(N_{\text{eff}}^L)) + \ln(\mu_n) \ln(\mu_p) - \frac{E_G}{2k_B T} \\ &\hat{=} a \cdot x + b \\ \text{mit } x &= \frac{1}{T} ; a = \frac{E_G}{2k_B} ; b = \frac{1}{2} (\ln(N_{\text{eff}}^V) + \ln(N_{\text{eff}}^L)) + \ln(\mu_n) \ln(\mu_p) \end{aligned} \quad (5)$$

### 2.2.2 Beweglichkeiten

Die Beweglichkeiten  $\mu_{n/p}$  sind Mittelwerte über die besetzten Zustände im Valenz- und Leitungsband. Löcher und Elektronen verhalten sich dabei qualitativ gleich. Es gilt wiederum die Boltzmann-Statistik für die folgenden Mittelwerte ( $\tau(\vec{k})$  - Relaxationszeit des Elektrons am reziproken „Ort“  $\vec{k}$ ).

$$\mu = \frac{1}{m} \frac{\langle \tau(\vec{k}) v^2(\vec{k}) \rangle}{\langle v^2(\vec{k}) \rangle} \quad (6)$$

Grob kann gefolgert werden, dass  $\mu \sim \tau$ . Jedoch ist  $\tau$  proportional zur mittleren freien Weglänge der bewegten Ladungsträger. Somit kann man  $\frac{1}{\tau} \sim \langle v \rangle \Sigma$  für einen Streuquerschnitt der Teilchen  $\Sigma$  als Stoßwahrscheinlichkeit auffassen. Außerdem ist, wegen der Boltzmann-Statistik der Bewegungen  $\langle v \rangle \sim \sqrt{T}$ . Nimmt man nun an, dass die Streuung nur an Phononen oder ionisierten Störstellen stattfinden kann, so folgen 2 grundlegende Überlegungen:

- der Streuquerschnitt eines Phonons mit  $(\vec{q}, \omega(\vec{q}))$  sei  $\Sigma_{\text{Ph}}$ , so kann man für  $T \ll \Theta_{\text{Deb}}$  annehmen:

$$\Sigma_{\text{Ph}} \sim m \cdot \omega^2(\vec{q}) \cdot \langle s^2(\vec{q}) \rangle \sim T \quad (7)$$

- für einen, an einer ionisierten Störstelle vorbeifliegenden Ladungsträger ist der Streuquerschnitt nach *Rutherford*  $\Sigma_{\text{St}} \sim \langle v \rangle^4$ , woraus mit der Störstellenkonzentration  $N_{\text{St}}$  folgt:

$$\frac{1}{\tau_{\text{St}}} \sim \frac{N_{\text{St}}}{T^{3/2}} \quad (8)$$

Benutzt man jetzt die vorherigen Aussagen zusammen mit Gl (7) und (8), so erhält man für die Beweglichkeit in verschiedenen Temperaturbereichen (siehe Abb. 2):

$$\mu_{\text{St}} \sim T^{3/2} \text{ und } \mu_{\text{Ph}} \sim T^{-3/2} \quad (9)$$

Offensichtlich findet für große Temperaturen mehr Streuung an Phononen statt, da dort natürlich das mittlere Schwingungsquadrat des Gitters größer ist. Zudem folgt dies ebenso aus den Voraussetzungen von Gl. (7). Für kleinere Temperaturen mit  $T \ll \Theta_{\text{Deb}}$  überwiegt die Ablenkung durch die Coulomb-Abstoßung an Störstellen mit Ladungen.

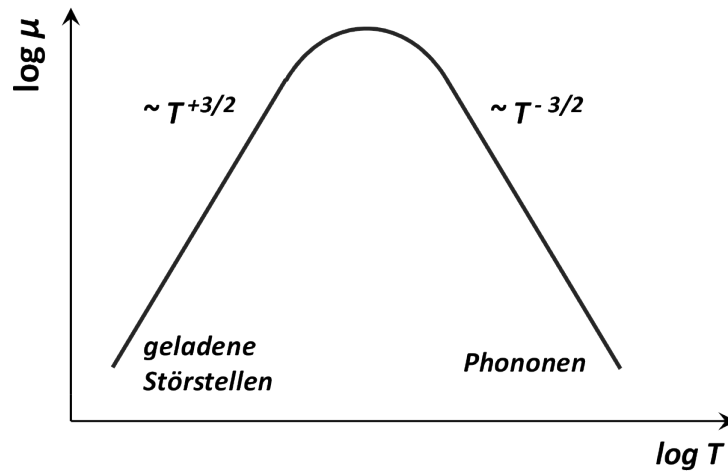


Abb. 2: Doppeltlogarithmische Auftragung der Beweglichkeit über die Temperatur

## 2.3 Dotierter Halbleiter

Den Einbau von Fremdatomen unterschiedlicher Wertigkeiten (im Vergleich zum Material des Halbleiters) bezeichnet man als Dotierung. Diese ist gleichzusetzen mit dem künstlichen Erzeugen von freien Elektronen bzw. Defekten. Man verändert folglich die Konzentration der Ladungsträger, was Einfluss auf Leitfähigkeit und thermisches Verhalten hat. Die Donatoren (größere Wertigkeit) und Akzeptoren (kleinere Wertigkeit) verändern die Bandstruktur und explizit die Bandlücke des Halbleiterkristalls, indem sie in ihren unterschiedlichen Energieniveaus Defekt-/Elektronen abgeben bzw. aufnehmen. Dadurch reichen schon geringere Anregungsenergien der Ladungsträger aus, damit sie im Leitungsband zum Strom beitragen können. Etwas genauer heißt das, dass Akzeptoren die obere Bandkante ( $E_L$ ) herabsetzen und Donatoren die untere ( $E_V$ ) anheben. Dotiert man einen Kristall mit nur einer Sorte von Fremdatomen, so spricht man entweder von einem p-dotierten (für Akzeptoren) oder n-dotierten (für Donatoren) Halbleiter.

Die Annahme gleicher Konzentrationen  $n$  und  $p$  kann, wie angesprochen, nicht mehr gelten. Deswegen führt man mit den Dichten der neutralen ( $N_D^0$ ) und ionisierten ( $N_D^+$ ) Donatoren (analog Akzeptoren) die folgenden Ladungsträgerdichten ein:

$$N_D = N_D^0 + N_D^+ \quad (10)$$

$$N_A = N_A^0 + N_A^- \quad (11)$$

Hierbei wurde beachtet, dass ionisierte Akzeptoren negativ und Donatoren positiv geladen werden, falls sie zur sog. *Störstellenleitung* beitragen.

Aufgrund der Ladungsneutralität im gesamten Halbleiter muss  $n + N_A^- = p + N_D^+$  gelten. Für die Besetzung  $n_D$  bzw.  $p_A$  der jeweiligen Fremdatome kann man die Fermi-Statistik benutzen.

$$n_D = N_D^0 = N_D \left( \frac{1}{1 + e^{\frac{E_D - E_F}{k_B T}}} \right) \quad \text{und} \quad p_A = N_A^0 = N_A \left( \frac{1}{1 + e^{\frac{E_F - E_A}{k_B T}}} \right) \quad (12)$$

( $E_{A/D}$  - Energieniveaus der Dotierungen)

Nimmt man an, dass ein reiner n-Halbleiter vorliegt und dass der größte Beitrag zur Leitfähigkeit von den Donatoren geleistet wird ( $N_D^+ \gg n_i$ ), so kann man unter Verwendung von Gln. (12), (10) und (4) schreiben:

$$n = N_D^+ + p \approx N_D^+ = N_D - N_D^0 \approx N_D \left( 1 - \frac{1}{1 + e^{\frac{E_D - E_F}{k_B T}}} \right)$$

$$\left( e^{\frac{E_F}{k_B T}} = \frac{n}{N_{\text{eff}}^L} e^{\frac{E_L}{k_B T}} ; E_d = E_L - E_D \right) \Rightarrow \approx \frac{N_D}{1 + \frac{n}{N_{\text{eff}}^L} e^{\frac{E_d}{k_B T}}} \quad (13)$$

Nach Umstellen von Gl. (13) folgt Gl. (14).

$$n \approx 2N_D \left( 1 + \sqrt{1 + 4 \frac{N_D}{N_{\text{eff}}^L} e^{\frac{E_d}{k_B T}}} \right)^{-1} \quad (14)$$

Gleichung (14) lässt sich qualitativ für verschiedene Grenzfälle diskutieren (siehe Abb. 3):

$e^{\frac{E_d}{k_B T}} \rightarrow \infty$ : Es sind so wenige Ladungsträger angeregt, dass  $n \ll n_D$  ist. Alle von den Donatoren abgegebenen Elektronen werden kompensiert (Kompensationsbereich).

$e^{\frac{E_d}{k_B T}} \gg 1$ : Hier gilt die sog. Störstellenreserve - viele Donatoren sind noch nicht ionisiert. Die Ladungsträgerkonzentration geht wie die des intrinsischen Halbleiters nach Gl. (4) mit  $E_d$ .

$E_d \leq k_B T$ : Alle Donatoren sind ionisiert und die Ladungsträgerkonzentration ist  $n = N_D = \text{const.}$  Im Störstellenerschöpfungszustand spielen Valenzband-Elektronen für  $n$  keine Rolle.

$T \rightarrow \infty$ : Für sehr große Temperaturen überwiegen die thermisch angeregten Elektronen aus dem Valenz-Band die Donator-Ladungsträger. Die gemachten Näherungen für Gl. (14) sind nicht mehr gültig. Man spricht von Eigenleitung.

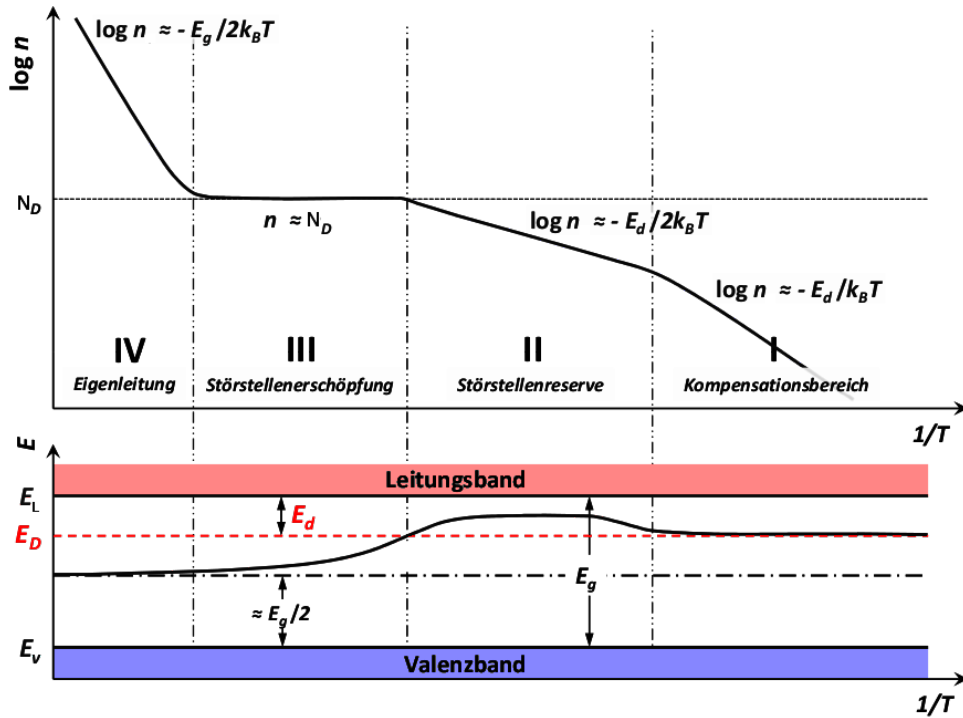


Abb. 3: Temperaturverlauf der Konzentration eines n-Halbleiters nach Gl. (14)

## 2.4 Hall-Effekt

An einem Halbleiter, welcher senkrecht zum durchfließenden Strom von einem Magnetfeld durchsetzt wird, kann wiederum senkrecht auf Strom- und Magnetfeldrichtung eine Spannung gemessen werden. Diese ist die Hall-Spannung und wurde nach dem US-amerikanischen Physiker *Edwin Hall* benannt.

Aufgrund der Lorentz-Kraft  $\vec{F}_L$  erfahren die Ladungsträger des Stromes  $\vec{j}$  eine Ablenkung durch das Magnetfeld  $\vec{B}$  senkrecht zu ihrer Bewegungsrichtung, welche der Richtung von  $\vec{v}$  entspricht (Gl. (15)). Das Hall-Feld  $\vec{E}_H$  wächst solange an, bis die dazugehörige Kraft  $\vec{F}_H$  die Lorentz-Kraft kompensiert (Gl.(15)).

$$\vec{F} = \vec{F}_L + \vec{F}_H = \frac{1}{qn} (\vec{j} \times \vec{B}) + q\vec{E}_H = q (\vec{v} \times \vec{B}) + q\vec{E}_H = 0 \quad (15)$$



Weil für Defekte die Vorzeichenwechsel in  $q$  und  $\vec{v}$  sich gerade aufheben, folgt, dass Elektronen und Löcher durch den Hall-Effekt in die selbe Richtung bewegt werden. Die Hall-Spannung resultiert somit nur aus den Unterschieden zwischen den Konzentrationen und Beweglichkeiten der beiden Typen von Ladungsträgern. Offensichtlich ist sie deshalb eine geeignete Größe, um die genannten Charakteristiken zu messen.

Für einen Strom  $\vec{j} = (j_x, 0, 0)$  (aus einem ext. Feld  $\vec{E} = (E_x, 0, 0)$ ) und ein Magnetfeld  $\vec{B} = (0, 0, B_z)$  ist  $\vec{E}_H = (0, E_H, 0)$ .

Sei der Querschnitt des Leiters gerade  $A = bd$ , der Strom somit  $I = j_x A$  und der Halbleiter entweder ein reiner p-/n-Leiter, so folgt für die Hall-Spannung  $U_H$ :

$$U_H^n = -\frac{1}{ne} \frac{IB_z}{d} = R_H^n \frac{IB_z}{d} \quad \text{und} \quad U_H^p = \frac{1}{pe} \frac{IB_z}{d} = R_H^p \frac{IB_z}{d} \quad (16)$$

( $R_H^{n/p}$  - Hall-Konstanten)

Allgemein liegen jedoch keine reinen n-/p-Halbleiter vor, weswegen eine weitere Betrachtung von  $R_H$  notwendig wird.

Mit dem ohmschen Gesetz folgt für die Stromdichten  $j_y$ :

$$\begin{aligned} F^n &= -e(v_x^n B + E_H) \quad \text{und} \quad F^p = e(v_x^p B + E_H) \\ j_y^n &= \sigma^n \frac{F^n}{(-e)} = n\mu_n e(E_H + v_x^n B) = n\mu_n e(E_H + \mu_n E_x B) \\ \text{analog } j_y^p &= p\mu_p e(E_H + \mu_p E_x B) \end{aligned}$$

Aufgrund der Ladungserhaltung muss die Summe der Ströme verschwinden. Äquivalent gilt dies für die Stromdichten. Stellt man diese Bedingung nach dem Hall-Feld  $E_H$  um, so erhält man mit  $E_x = \frac{j_x}{\sigma_{\text{ges}}}$

$$\begin{aligned} E_H &= \frac{e(\mu_n^2 n - \mu_p^2 p)}{\sigma_{\text{ges}}} E_x B = \frac{\mu_n^2 n - \mu_p^2 p}{n\mu_n + p\mu_p} E_x B \\ \text{und damit } R_H &= \frac{E_H}{j_x B} = \frac{\mu_n^2 n - \mu_p^2 p}{e(p\mu_p + n\mu_n)^2} \end{aligned} \quad (17)$$

### 3 Durchführung

In diesem Versuch benutzten wir den Hall-Effekt um Untersuchungen zur Leitfähigkeit und damit der Beweglichkeit und Konzentration der Ladungsträger in Halbleitern zu machen. Grundlage bildete damit eine sog. Hall-Sonde, sowie ein Aufbau für den Halbleiterkristall (in unserem Fall Germanium Ge) mit Heizung und Temperaturfühler. In dieses Gerät konnten unterschiedliche Halbleiterplatinen eingebaut werden. Ebenso waren darin bereits Leiterbahnen für die Messungen von Leitfähigkeit und Hall-Spannung integriert. Selbstverständlich umgibt den Kristall ein, von einem Elektromagneten mit regelbarem Spulenstrom erzeugtes Magnetfeld.

Der intrinsische und somit undotierte Ge-Kristall wurde unter Erhöhung der Temperatur bis 160 C der Strom und die Spannung über den Halbleiter gemessen. Der Querstrom betrug 3 mA sowie die Querspannung 12 V. Das Magnetfeld war abgeschaltet.

Folgende Messungen wurden für sowohl den p- als auch n-dotierten Ge-Kristall gemacht:

- der Magnetfeldsensor wurde weit entfernt vom Aufbau „genullt“
- bei  $B = 0 \text{ T}$  wurden eventuelle  $U_H$  kompensiert; ein Querstrom von 20 mA wurde eingestellt
- in Abhängigkeit von der Magnetfeldstärke bis 200 mT die Hall-Spannung gemessen
- parallel wurde die über den Kristall abfallenden Spannung beobachtet
- voran getätigte Messungen wurden bei einer konstanten Feldstärke von 200 mT in Abhängigkeit von der Temperatur wiederholt

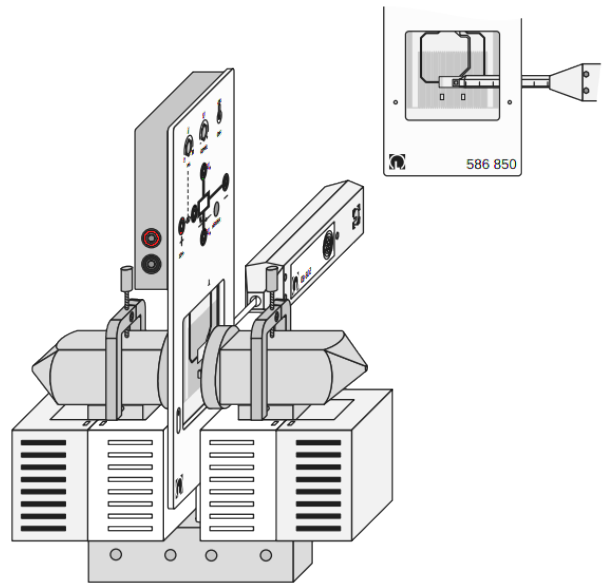


Abb. 4: Oben: Hall-Sonde vor Kristallplatte  
Unten: Spulen-Paar auf Polschuhen

## 4 Auswertung

## 5 Quellen

- <http://de.wikipedia.org/wiki/Bandstruktur>  
Abschn.: Bandstrukturen realer Festkörper
- Festkörperphysik, Vorlesungsskript zur Vorlesung im WS 1998/1999 und SS 1999; Prof. Dr. Rudolf Gross, Dr. Achim Marx  
S.414, Abb. 10.11
- Festkörperphysik: Einführung in die Grundlagen; H. Ibach, H. Lüth  
(Springer-Verlag, Berlin, 1993)  
Kap. 12, S.408-423
- Festkörperphysik, SS 2014; Prof. Dr. Hippler, Prof. Dr. Münzenberg,  
Dr. von der Ehe (geb. Walter)  
Übungsblatt 7, Aufgabe 3