

# ANNALEN DER PHYSIK.

## VIERTE FOLGE. BAND 25.

### 1. *Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen; von Gustav Mie.*

1. Die mannigfachen Färbungen der Metalle im kolloidalen Zustand haben im Laufe der Zeiten recht verschiedenartige Deutungen erfahren. Früher neigte man sehr zu der Meinung, daß die betreffenden Metalle (besonders das Silber) in mehreren verschieden gefärbten Modifikationen aufträten. Später ist die Meinung aufgekommen, daß die Farben auf optischer Resonanz beruhten. Diese Meinung ist besonders eingehend von F. Ehrenhaft<sup>1)</sup> begründet worden. Endlich hat neuerdings J. C. Maxwell-Garnett<sup>2)</sup> nachgewiesen, daß sich die Farben von kolloidalen Metallen, wenn die suspendierten Partikelchen des Metalles sehr klein sind, aus der Theorie, die L. Lorenz<sup>3)</sup> für optisch inhomogene Medien entwickelt hat, einwandfrei erklären lassen. Die Theorie ergibt für eine feine Metallsuspension, in denen die Dimensionen der Teilchen im Vergleich zur Wellenlänge und außerdem zu ihren gegenseitigen Entfernungen sehr klein sind, eine ganz bestimmte Absorptionskurve, die sich aus den optischen Konstanten des Metalles vorher berechnen läßt und demnach, obwohl sie durchaus verschieden von der Absorptionskurve des soliden Metalles verläuft, doch gar nichts mit Resonanz in dem Sinne, in dem dieses Wort von Ehrenhaft, Wood u. a. gebraucht wird, zu tun hat. So konnte Maxwell-Garnett unter anderem die rote Farbe vieler Goldlösungen, die Ehrenhaft als Resonanz-

1) F. Ehrenhaft, Wiener Sitzungsber. IIa. 112. p. 181. 1903; 114. p. 1115. 1905.

2) J. C. Maxwell-Garnett, Phil. Trans. 203. p. 385. 1904; 205. p. 237. 1906. Für den Brechungsexponenten von Gelatine-Silberemulsionen wies auch F. Kirchner in seiner Leipziger Dissertation die Gültigkeit der Lorenzschen Formel nach (Ann. d. Phys. 13. p. 239. 1904).

3) L. Lorenz, Wied. Ann. 11. p. 70. 1880.

wirkung auffaßte, aus der Lorenzschen Theorie ungezwungen herleiten. Andere Farben ergibt die Theorie, wenn die Teilchen näher zusammenrücken, und man kann, wie Maxwell-Garnett durch Rechnung nachwies, alle möglichen Übergänge von der Farbe der unendlich verdünnten Metallsuspension bis zu der des soliden Metalles bekommen. So erklären sich auch in sehr einfacher Weise die interessanten Farbenumwandlungen, die F. Kirchner und R. Zsigmondy<sup>1)</sup> an eintrocknender Gelatine, die kolloidales Gold enthielt, beobachtet haben.

Indessen paßt diese von Maxwell-Garnett in manchen Fällen so erfolgreich durchgeführte Erklärung der eigentümlichen optischen Eigenschaften kolloidaler Metalle doch in sehr vielen anderen Fällen gar nicht. Man kann auch an *sehr verdünnten* Lösungen eines und desselben Metalles die mannigfachsten Färbungen erhalten, während sie nach der Lorenzschen Theorie stets ein und dieselbe Absorptionskurve zeigen müßten. Nun beruht aber andererseits die von Ehrenhaft vertretene Ansicht über die Resonanz der Teilchen auf der durchaus unzulässigen Annahme, daß man die Metalle auch optisch als vollkommene Leiter ansehen dürfe. Abgesehen von den Einwendungen, die gegen eine solche Annahme vom Standpunkt der Theorie<sup>2)</sup> erhoben werden müssen, wird ihre Unrichtigkeit direkt bewiesen erstens durch die Tatsache, daß Lösungen mit allerkleinsten Metallteilchen nicht vorwiegend violett und blau diffus reflektieren und in der Durchsicht nicht gelbrot aussehen, sondern daß sie sowohl im durchgehenden wie im auffallenden Licht andere für das betreffende Metall charakteristische Farben zeigen, zweitens durch die Tatsache, daß in Lösungen mit sehr feinen Teilchen das diffus zerstreute Licht sein Polarisationsmaximum nicht, wie die von Ehrenhaft vertretene Theorie behauptet, bei  $120^\circ$ , sondern genau wie in Trübungen durch nicht leitende Stoffe bei  $90^\circ$  hat, wo das Licht fast vollkommen polarisiert ist.

Um die Frage definitiv zu entscheiden, ob in den kolloidalen Metallösungen von verschiedener Farbe verschiedene allotrope

---

1) R. Zsigmondy, Ann. d. Phys. 15. p. 573. 1904.

2) Vgl. die Diskussion zwischen F. Pockels und F. Ehrenhaft in der Physik. Zeitschr. 5. p. 152, 387, 460. 1904.

Modifikationen des Stoffes auftreten, die im kompakten Zustand nicht vorkommen, oder ob man sie durch Teilchen von derselben physikalischen Beschaffenheit, die das kompakte Metall hat, die sich nur in Größe und Form voneinander unterscheiden, erklären kann, ist es unbedingt nötig, sowohl noch mehr experimentelles Material zu schaffen, als auch die Theorie in exakter Form zu entwickeln.

Es sind deswegen im Greifswalder Institut genaue Messungen an verschiedenartigen kolloidalen Goldlösungen von Hrn. Steubing ausgeführt worden. Ich habe über einen kleinen Teil dieser Messungen schon auf der Dresdener Naturforscherversammlung vorläufig berichtet. Die ausführliche Arbeit wird Hr. Steubing in allernächster Zeit veröffentlichen.

Die optische Theorie wird man jedenfalls nach mehreren Richtungen hin entwickeln müssen. Obwohl nämlich die Metalle im allgemeinen regulär kristallisieren, und zwar vorwiegend in Form von Oktaedern, so ist es doch sehr wohl möglich, daß sich bei schnellem Ausscheiden aus der Lösung sehr stark verzerrte Kristalle bilden, die als Blättchen oder Stäbchen in der Flüssigkeit schweben. Andererseits können sich aber auch sicher sehr regelmäßige Kristalle ausbilden, wie man das z. B. in dem sogenannten Avanturinglas an den schönen Kupferoktaedern beobachtet. Die Theorie wird nun für solche ringsum gleichartig ausgebildeten Kristalle, wie regelmäßige Oktaeder, Würfel u. dgl. fürs erste einfach Kugeln substituieren dürfen, ebenso für Blättchen und Stäbchen abgeflachte oder langgestreckte Ellipsoide. Ich möchte dabei aber erwähnen, daß doch von Hrn. Steubing gewisse Beobachtungen über die Polarisation des diffus zerstreuten Lichtes gemacht sind, auf die ich in 20. noch zurückkommen werde, die den Gedanken nahe legen, daß wir es nicht wirklich mit Kugeln oder ähnlich einfachen Körpern zu tun haben.

*Die im folgenden vorliegende Arbeit beschäftigt sich nur mit dem einfachsten Fall, in welchem man den Teilchen Kugelform zuschreiben darf.*

#### Polarkoordinaten.

2. Wir wollen uns die drei Koordinatenachsen ( $x, y, z$ ) der Einfachheit numeriert denken (1, 2, 3). Das Koordinaten-

system sei ein Rechtssystem. Es sei ferner der Radiusvektor eines Punktes  $(x, y, z)$  mit  $r$  bezeichnet, der Winkel, den  $r$

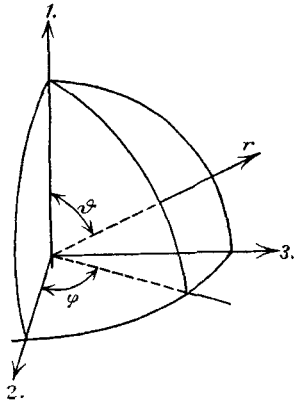


Fig. 1. Koordinatensystem.

mit der Achse 1 bildet, sei  $\vartheta$ , der Winkel der Projektion von  $r$  auf die (2, 3)-Ebene mit der Achse 2 sei  $\varphi$  (Fig. 1). Dann sind also  $(r, \vartheta, \varphi)$  Polarkoordinaten des Punktes. Wir wollen ferner die Komponenten der elektrischen und der magnetischen Feldintensität in diesem Polarkoordinatensystem bezeichnen mit  $\mathfrak{E}_r, \mathfrak{E}_\vartheta, \mathfrak{E}_\varphi$  und  $\mathfrak{S}_r, \mathfrak{S}_\vartheta, \mathfrak{S}_\varphi$ . Es läßt sich dann leicht zeigen, daß die Maxwell'schen Gleichungen die folgende Form annehmen:

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} r^2 \cdot \sin \vartheta \left( k \cdot \frac{\partial \mathfrak{E}_r}{\partial t} + \mathcal{A} \cdot \mathfrak{E}_r \right) = \frac{\partial (r \cdot \sin \vartheta \cdot \mathfrak{S}_\varphi)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial (r \cdot \mathfrak{S}_\vartheta)}{\partial \varphi}, \\ r \cdot \sin \vartheta \cdot \left( k \cdot \frac{\partial \mathfrak{E}_\vartheta}{\partial t} + \mathcal{A} \cdot \mathfrak{E}_\vartheta \right) = \frac{\partial \mathfrak{S}_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r \cdot \sin \vartheta \cdot \mathfrak{S}_\varphi)}{\partial r}, \\ r \cdot \left( k \cdot \frac{\partial \mathfrak{E}_\varphi}{\partial t} + \mathcal{A} \cdot \mathfrak{E}_\varphi \right) = \frac{\partial (r \cdot \mathfrak{S}_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial \mathfrak{S}_r}{\partial \vartheta}, \\ - r^2 \cdot \sin \vartheta \cdot \mu \cdot \frac{\partial \mathfrak{S}_r}{\partial t} = \frac{\partial (r \cdot \sin \vartheta \cdot \mathfrak{E}_\varphi)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial (r \cdot \mathfrak{E}_\vartheta)}{\partial \varphi}, \\ - r \cdot \sin \vartheta \cdot \mu \cdot \frac{\partial \mathfrak{S}_\vartheta}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{E}_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r \cdot \sin \vartheta \cdot \mathfrak{E}_\varphi)}{\partial r}, \\ - r \cdot \mu \cdot \frac{\partial \mathfrak{S}_\varphi}{\partial t} = \frac{\partial (r \cdot \mathfrak{E}_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial \mathfrak{E}_r}{\partial \vartheta}. \end{array} \right.$$

Hier bedeuten  $k, \mathcal{A}, \mu$  Dielektrizität, Leitvermögen, Permeabilität, alle in demselben Maßsystem. In einem nicht leitenden Medium ist  $k \cdot \mu = 1/v^2$ , wenn  $v$  die Geschwindigkeit elektromagnetischer Wellen in dem Medium ist.

Man könnte nun leicht durch geeignete Eliminationen für  $\mathfrak{E}_r$  und  $\mathfrak{S}_r$  je eine Differentialgleichung zweiter Ordnung aufstellen, die die übrigen Unbekannten nicht mehr enthält. Wir wollen das aber erst ausführen, nachdem wir die Gleichungen speziell für das Problem regelmäßiger Schwingungen umgeformt haben.

Wir setzen dazu:

$$(2) \quad \mathfrak{E}_r = E_r \cdot e^{2\pi i n t}, \quad \mathfrak{H}_r = H_r \cdot e^{2\pi i n t} \text{ usw.},$$

wo  $E_r$  und  $H_r$  nur noch von den Koordinaten, aber nicht von der Zeit abhängen, und  $n$  die Schwingungszahl in der Sekunde ist. Ferner ist:

$$(3) \quad 4\pi^2 \cdot n^2 \cdot \mu \cdot k - 2\pi i \cdot n \cdot \mu \cdot A = \frac{4\pi^2 \cdot m^2}{\lambda^2}$$

und zwar bedeutet hier  $\lambda$  die Wellenlänge der betreffenden Schwingung im Vakuum, ferner  $m$  den komplexen Brechungs-exponenten des Mediums für Licht von der Wellenlänge  $\lambda$ . In einem nicht absorbierenden Medium (z. B. Wasser) ist  $m$  identisch mit dem gewöhnlichen Brechungsexponenten, in Metallen dagegen ist  $m = \nu \cdot (1 - i \cdot \kappa)$ , wo  $\nu$  die gewöhnlich als Brechungsexponent bezeichnete reelle Größe und  $\kappa$  den Absorptionskoeffizienten bedeuten.

Endlich wollen wir noch folgende Bezeichnungen einführen:

$$(4) \quad -\frac{i \cdot n \cdot \mu \cdot \lambda}{m} \cdot H_r = M_r \text{ usw.},$$

$$(5) \quad \frac{2\pi m r}{\lambda} = x.$$

Wir bekommen dann die folgenden Gleichungen, in welchen die Größen  $E$  und  $M$  in ganz gleicher Weise eintreten:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 \cdot \sin \vartheta \cdot E_r = \frac{\partial (x \cdot \sin \vartheta \cdot M_\varphi)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial (x \cdot M_\vartheta)}{\partial \varphi}, \\ x \cdot \sin \vartheta \cdot E_\vartheta = \frac{\partial M_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (x \sin \vartheta \cdot M_\varphi)}{\partial x}, \\ x \cdot E_\varphi = \frac{\partial (x \cdot M_\vartheta)}{\partial x} - \frac{\partial M_r}{\partial \vartheta}, \\ x^2 \cdot \sin \vartheta \cdot M_r = \frac{\partial (x \sin \vartheta \cdot E_\varphi)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial (x E_\vartheta)}{\partial \varphi}, \\ x \cdot \sin \vartheta \cdot M_\vartheta = \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (x \cdot \sin \vartheta \cdot E_\varphi)}{\partial x}, \\ x \cdot M_\varphi = \frac{\partial (x \cdot E_\vartheta)}{\partial x} - \frac{\partial E_r}{\partial \vartheta}. \end{array} \right.$$

Wir denken uns nun ein kugelförmiges Partikelchen vom Radius  $\varrho$ , dessen Zentrum mit dem Koordinatenanfang zusammenfällt, außen ist das Lösungsmittel (z. B. Wasser). Wir wollen die Feldgrößen in der Kugel und im Lösungsmittel

durch die Suffixe  $i$  und  $a$  unterscheiden, die beiden Brechungs-exponenten seien  $m$  und  $m_0$ . Von der Permeabilität wollen wir annehmen, daß sie innen und außen gleich sei:  $\mu_i = \mu_a$ . Die Variable  $x$  macht an der Kugeloberfläche einen Sprung, da

$$x_i = \frac{2\pi m}{\lambda} \cdot r, \quad x_a = \frac{2\pi m_0}{\lambda} r = \frac{2\pi}{\lambda'} \cdot r,$$

wenn  $\lambda'$  die Wellenlänge in dem Lösungsmittel bedeutet. An der Kugeloberfläche müssen die folgenden Grenzbedingungen erfüllt sein:

$$(7) \quad \begin{cases} E_{\vartheta a} = E_{\vartheta i}, & E_{\varphi a} = E_{\varphi i}, \\ (x \cdot M_{\vartheta})_a = (x \cdot M_{\vartheta})_i, & (x \cdot M_{\varphi})_a = (x \cdot M_{\varphi})_i. \end{cases}$$

#### Lösungen der Maxwell'schen Gleichungen.

3. Um die Gleichungen (6) zu lösen, hat man einfach die von Lord Rayleigh in „Theory of Sound“ entwickelten Methoden anzuwenden. Es ist das beispielsweise schon von Fr. Hasenöhr<sup>1)</sup> für andere Zwecke einmal ausgeführt. Ich gebe im folgenden aufs neue eine kurze Herleitung der Integrale, um möglichst übersichtlich alle zur Diskussion zu benutzenden Formeln zusammenstellen zu können.

Wie schon oben erwähnt, läßt sich durch geeignete Eliminationen aus den Gleichungen (6) für  $E_r$  und  $M_r$  je eine Gleichung zweiter Ordnung aufstellen:

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 (x^2 E_r)}{\partial x^2} + \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \cdot \frac{\partial E_r}{\partial \vartheta} \right) \\ \quad + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 E_r}{\partial \varphi^2} + x^2 E_r = 0, \\ \frac{\partial^2 (x^2 M_r)}{\partial x^2} + \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \cdot \frac{\partial M_r}{\partial \vartheta} \right) \\ \quad + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 M_r}{\partial \varphi^2} + x^2 M_r = 0. \end{cases}$$

Wir können jetzt alle Lösungen des Gleichungssystems (6) in drei Gruppen sondern. Die erste Gruppe stellt die Wellen dar, die durch elektrische Schwingungen der Kugel entstehen, sie ist charakterisiert durch:

$$E_r \neq 0, \quad M_r = 0.$$

1) Fr. Hasenöhr, Wiener Ber. IIa. 111. p. 1229. 1902.

Die zweite Gruppe stellt die Wellen dar, die durch magnetische Schwingungen der Kugel entstehen. Für sie ist:

$$E_r = 0, \quad M_r \neq 0.$$

Die dritte Gruppe enthält alle Integrale der Maxwell'schen Gleichungen, die regelmäßig periodische Schwingungen darstellen. Man kann sie erhalten, indem man Integrale der Gruppe I mit Integralen der Gruppe II addiert.

Vorausgesetzt, wir hätten eine Lösung der Differentialgleichung für  $E_r$  gefunden, dann erhält man die übrigen Komponenten, die dem Fall der Gruppe I entsprechen, sehr einfach durch das folgende Verfahren: Man setzt in der zweiten und dritten Gleichung des Systems (6)  $M_r = 0$  ein, und substituiert dann für  $M_\varphi$  und  $M_\vartheta$  die Werte aus der fünften und sechsten Gleichung. Man hat dann sofort die Gleichungen, die zur Berechnung von  $E_\vartheta$  und  $E_\varphi$  aus dem bekannten  $E_r$  dienen müssen. Hat man nun  $E_r$ ,  $E_\vartheta$ ,  $E_\varphi$ , so findet man natürlich  $M_\vartheta$  und  $M_\varphi$  aus den beiden letzten Gleichungen des Systems (6). Es ergibt sich so das folgende Formelsystem:

$$(9) \quad \begin{cases} E_r, & M_r = 0, \\ \frac{\partial^2 (x \cdot E_\vartheta)}{\partial x^2} + x \cdot E_\vartheta = \frac{\partial^2 E_r}{\partial \vartheta \partial x}, & \frac{\partial (x \cdot M_\vartheta)}{\partial x} = x \cdot E_\varphi, \\ \frac{\partial^2 (x \cdot \sin \vartheta \cdot E_\varphi)}{\partial x^2} + x \sin \vartheta \cdot E_\varphi = \frac{\partial^2 E_r}{\partial \varphi \partial x}, & \frac{\partial (x M_\varphi)}{\partial x} = -x \cdot E_\vartheta. \end{cases}$$

Ganz analog wird die Rechnung für Gruppe II. Ferner kann man  $E_r$  allgemein berechnen als eine Summe von Gliedern, deren jedes Gleichung (8) einzeln erfüllt und ein Produkt aus einer Funktion von  $x$  mit einer Funktion der Winkel  $\vartheta$ ,  $\varphi$  ist. Das  $\nu^{\text{te}}$  Glied sei:

$$E_r^{(\nu)} = \frac{K_\nu(x)}{x^2} \cdot P_\nu(\vartheta, \varphi).$$

Dann müssen  $K_\nu$  und  $P_\nu$  die folgenden beiden Gleichungen erfüllen:

$$(10) \quad \frac{d^2 K_\nu}{dx^2} + \left(1 - \frac{c_\nu}{x^2}\right) K_\nu = 0,$$

$$(11) \quad \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[ \sin \vartheta \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta} \right] + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 P_\nu}{\partial \varphi^2} + c_\nu \cdot P_\nu = 0,$$

wo  $c_\nu$  irgend eine reelle oder komplexe Zahl sein könnte. Wir wollen nur solche Funktionen  $K_\nu$  und  $P_\nu$  benutzen, für die

$$(12) \quad c_\nu = \nu \cdot (\nu + 1).$$

Es ist dann  $P_\nu$  eine Kugelfunktion der beiden Variablen  $\vartheta, \varphi$  von der ganzzahligen Ordnung  $\nu$ ,  $K_\nu$  ist eine mit den Zylinderfunktionen mit gebrochenem Index (Nenner 2) nahe verwandte Funktion. Die Gleichungen (9) ergeben nun die folgende Lösung der Maxwell'schen Gleichungen:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_r^{(\nu)} = \frac{K_\nu(x)}{x^2} \cdot P_\nu(\vartheta, \varphi), \\ E_\vartheta^{(\nu)} = \frac{1}{\nu \cdot (\nu + 1)} \cdot \frac{K_\nu'(x)}{x} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta}, \\ E_\varphi^{(\nu)} = \frac{1}{\nu \cdot (\nu + 1)} \cdot \frac{K_\nu'(x)}{x \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \varphi}, \\ M_r^{(\nu)} = 0, \\ M_\vartheta^{(\nu)} = \frac{1}{\nu \cdot (\nu + 1)} \cdot \frac{K_\nu(x)}{x \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \varphi}, \\ M_\varphi^{(\nu)} = -\frac{1}{\nu \cdot (\nu + 1)} \cdot \frac{K_\nu(x)}{x} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta}. \end{array} \right.$$

Damit haben wir die Lösungen der ersten Gruppe ( $M_r = 0$ ) gefunden. Wir können nun aber wegen der Symmetrie der Differentialgleichungen (6) in bezug auf die  $E$  und  $M$  ohne weiteres auch die Lösungen der Gruppe II ( $E_r = 0$ ) hinschreiben, nämlich:

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_r^{(\nu)} = 0, \\ E_\vartheta^{(\nu)} = \frac{1}{\nu \cdot (\nu + 1)} \cdot \frac{K_\nu(x)}{x \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\nu(\vartheta, \varphi)}{\partial \varphi}, \\ E_\varphi^{(\nu)} = -\frac{1}{\nu \cdot (\nu + 1)} \cdot \frac{K_\nu(x)}{x} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\nu(\vartheta, \varphi)}{\partial \vartheta}, \\ M_r^{(\nu)} = \frac{K_\nu(x)}{x^2} \cdot \mathfrak{P}_\nu(\vartheta, \varphi), \\ M_\vartheta^{(\nu)} = \frac{1}{\nu \cdot (\nu + 1)} \cdot \frac{K_\nu'(x)}{x} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial \vartheta}, \\ M_\varphi^{(\nu)} = \frac{1}{\nu \cdot (\nu + 1)} \cdot \frac{K_\nu'(x)}{x \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial \varphi}, \end{array} \right.$$

wo  $K_\nu$  und  $\mathfrak{P}_\nu$  irgendwelche Lösungen der Gleichungen (10) und (11) sind, in denen  $c_\nu = \nu \cdot (\nu + 1)$  zu setzen ist.

Alles kommt nun darauf an, ein ebene Welle, nämlich die auf das kugelförmige Partikelchen auftreffende Welle mit Hilfe von (13) und (14) auszudrücken. Dazu müssen wir aber zunächst die wichtigsten Eigenschaften der dabei zu verwendenden Lösungen von (10) und (11) kennen.



Die Funktionen  $K_\nu$  und  $I_\nu$ .

4. Die Differentialgleichung (10)

$$\frac{d^2 K_\nu}{dx^2} + \left(1 - \frac{\nu \cdot (\nu + 1)}{x^2}\right) \cdot K_\nu = 0$$

läßt sich für den Fall  $\nu = 0$  sofort lösen. Zwei partikuläre Integrale sind:

$$\begin{aligned} K_0(x) &= e^{ix}, \\ K_0(-x) &= e^{-ix}. \end{aligned}$$

Kennt man ferner eine Lösung der Gleichung von der Ordnungszahl  $\nu$ ,  $K_\nu$ , so kann man durch Einsetzen leicht beweisen, daß eine Lösung  $K_{\nu+1}$  der Gleichung von der Ordnungszahl  $(\nu + 1)$  folgendermaßen berechnet werden kann:

$$(15) \quad K_{\nu+1}(x) = i \cdot \left( (\nu + 1) \cdot \frac{K_\nu}{x} - \frac{dK_\nu}{dx} \right).$$

Diese Rekursionsformel liefert, wenn man  $K_0(x) = e^{ix}$  wählt:

$$(16) \quad K_\nu(x) = e^{ix} \cdot \sum_0^\nu \frac{(\nu + \mu)!}{\mu! (\nu - \mu)!} \cdot \frac{i^\mu}{2^\mu \cdot x^\mu}.$$

Aus (15) findet man, wenn man einmal differenziert, darauf  $dK_\nu/dx$  und mit Hilfe von (10) auch noch  $d^2 K_\nu/dx^2$  eliminiert:

$$(17) \quad K_{\nu-1}(x) = -i \cdot \left( \nu \cdot \frac{K_\nu}{x} + \frac{dK_\nu}{dx} \right).$$

Ferner erhält man aus (15) und (17) folgende oft zu brauchenden Relationen:

$$(18) \quad \begin{cases} (2\nu + 1) \cdot \frac{K_\nu(x)}{x} = i \cdot K_{\nu-1} + \frac{1}{i} \cdot K_{\nu+1} \\ (2\nu + 1) \cdot \frac{dK_\nu}{dx} = (\nu + 1) \cdot i \cdot K_{\nu-1} - \nu \cdot \frac{1}{i} \cdot K_{\nu+1}. \end{cases}$$

Eine zweite partikuläre Lösung von (10) bekommt man ohne weiteres, da in (10) nur die zweite Potenz von  $x$  bzw.  $dx$  vorkommt, wenn man in der ersten Lösung das Vorzeichen umkehrt  $K_\nu(-x)$ . Die allgemeine Lösung ist also:

$$A \cdot K_\nu(x) + B \cdot K_\nu(-x).$$

Da wir im folgenden gerade die Lösung  $K_\nu(-x)$  brauchen werden, so wird es gut sein, die Relationen noch einmal hin-

zuschreiben, die man bekommt, wenn man in (15), (16), (17), (18) das Vorzeichen von  $x$  umkehrt:

$$(19) \quad K_\nu(-x) = e^{-ix} \cdot \sum_0^\nu \frac{(\nu + \mu)!}{\mu! (\nu - \mu)!} \cdot \frac{(-i)^\mu}{2^\mu \cdot x^\mu},$$

$$(20) \quad \begin{cases} K_{\nu+1}(-x) = -i \cdot \left( (\nu + 1) \cdot \frac{K_\nu(-x)}{x} - K'_\nu(-x) \right), \\ K_{\nu-1}(-x) = +i \cdot \left( \nu \cdot \frac{K_\nu(-x)}{x} + K'_\nu(-x) \right). \end{cases}$$

$$(21) \quad \begin{cases} -(2\nu + 1) \cdot \frac{K_\nu(-x)}{x} = i \cdot K_{\nu-1}(-x) + \frac{1}{i} \cdot K_{\nu+1}(-x), \\ -(2\nu + 1) \cdot K'_\nu(-x) = i \cdot (\nu + 1) \cdot K_{\nu-1}(-x) - \frac{\nu}{i} \cdot K_{\nu+1}(-x). \end{cases}$$

5. Wenn man in den Ausdrücken (16) und (19)  $e^{ix}$  und  $e^{-ix}$  in Potenzreihen entwickelt und darauf ausmultipliziert und nach Potenzen von  $x$  ordnet, so bekommt man die Potenzreihenentwickelungen für  $K_\nu(x)$  und  $K_\nu(-x)$ , die natürlich eine endliche Anzahl von Potenzen mit negativen, ganzen Exponenten enthalten. Man bekommt nämlich:

$$K_\nu(x) = \sum_{r=-\nu}^{r=+\infty} i^r \cdot x^r \cdot \sum_0^\nu \frac{(\nu + \mu)! (-1)^\mu}{(\mu + r)! \mu! (\nu - \mu)! 2^\mu}.$$

Nun läßt sich aber zeigen, daß:

$$\sum_0^\nu \frac{(-1)^\mu \cdot (\nu + \mu)!}{2^\mu \cdot (\mu + r)! \mu! (\nu - \mu)!} = \frac{(r - \nu + 1) \cdot (r - \nu + 3) \cdot \dots \cdot (r + \nu - 1)}{(r + \nu)!}.$$

Dieser Ausdruck ist dadurch bemerkenswert, daß er bis zu  $r = \nu$  hin immer abwechselnd von Null verschieden und gleich Null ist. Bis zur Potenz  $x^\nu$  hin bleiben also in der Reihe nur Glieder von der Form  $x^{-\nu+2\mu}$  stehen. Setzen wir in den Koeffizienten  $r = -\nu + 2\mu$  ein, so bekommen wir:

$$\begin{aligned} & \frac{(r - \nu + 1) \cdot (r - \nu + 3) \cdot \dots \cdot (r + \nu - 1)}{(r + \mu)!} \\ &= (-1)^{\nu + \mu + 1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2\nu - 2\mu - 1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2\mu - 1)}{(2\mu)!}. \end{aligned}$$

Also:

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} K_\nu(x) &= -i^\nu \cdot \sum_0^\nu \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots (2\nu - 2\mu - 1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot \dots (2\mu - 1)}{(2\mu)!} \cdot x^{-\nu + 2\mu} \\ &+ \sum_{r=\nu+1}^{+\infty} \frac{(r - \nu + 1)(r - \nu + 3) \cdot \dots (r + \nu - 1)}{(r + \nu)!} \cdot i^r \cdot x^r. \end{aligned} \right.$$

Ebenso:

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} K_\nu(-x) &= -(-i)^\nu \cdot \sum_0^\nu \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots (2\nu - 2\mu - 1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot \dots (2\mu - 2)}{(2\mu)!} \cdot x^{-\nu + 2\mu} \\ &+ \sum_{r=\nu+1}^{+\infty} \frac{(r - \nu + 1)(r - \nu + 3) \cdot \dots (r + \nu - 1)}{(r + \nu)!} \cdot (-i)^r \cdot x^r. \end{aligned} \right.$$

Man sieht hieraus, daß die Differentialgleichung (10) auch eine Lösung hat, die um den Nullpunkt herum in eine Potenzreihe ohne negative Potenzen zu entwickeln ist. Wir wollen sie mit dem Buchstaben  $I_\nu$  bezeichnen, und setzen:

$$(24) \quad I_\nu(x) = \frac{1}{2i} \cdot \left( \frac{K_\nu(x)}{i^\nu} - \frac{K_\nu(-x)}{(-i)^\nu} \right).$$

Die Potenzreihe für  $I_\nu$  hat lauter reelle Koeffizienten, sie lautet:

$$(25) \quad I_\nu(x) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^\mu \cdot x^{\nu + 2\mu + 1}}{(2\mu + 1)! (2\mu + 3)(2\mu + 5) \cdot \dots (2\mu + 2\nu + 1)}.$$

Aus (18) und (19) ergeben sich zwei wichtige Relationen:

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} (2\nu + 1) \cdot \frac{I_\nu}{x} &= I_{\nu-1} + I_{\nu+1}, \\ (2\nu + 1) \cdot \frac{dI_\nu}{dx} &= (\nu + 1) \cdot I_{\nu-1} - \nu \cdot I_{\nu+1}. \end{aligned} \right.$$

6. Zur Berechnung der Funktionen  $K_\nu(-x)$ ,  $I_\nu(x)$  und ihrer ersten Ableitungen (die in den Schlußformeln allein vorkommen) werden wir am besten folgende Ausdrücke brauchen:

$$(27) \left\{ \begin{aligned} K_1(-x) &= -\frac{i}{x} \cdot e^{-ix} \cdot (1 + ix), \\ K_2(-x) &= -\frac{3}{x^3} \cdot e^{-ix} \cdot \left( \left(1 - \frac{1}{3}x^2\right) + ix \right), \\ K_3(-x) &= +\frac{15 \cdot i}{x^5} \cdot e^{-ix} \cdot \left( \left(1 - \frac{2}{5}x^2\right) + ix \cdot \left(1 - \frac{1}{15}x^2\right) \right), \\ &\dots \dots \dots \\ K_\nu(-x) &= (-i)^\nu \frac{1 \cdot 3 \dots (2\nu-1)}{x^\nu} \cdot e^{-ix} \\ &\quad \cdot \left\{ \left( 1 + \sum_{\sigma=1}^{\frac{\nu(-1)}{2}} \frac{(\nu-\sigma)_\sigma (-1)^\sigma}{(2\nu-1)(2\nu-3) \dots (2\nu-2\sigma+1)} \cdot \frac{x^{2\sigma}}{1 \cdot 3 \dots (2\sigma-1)} \right) \right. \\ &\quad \left. + ix \cdot \left( 1 + \sum_{\sigma=1}^{\frac{\nu(+1)}{2}-1} \frac{(\nu-\sigma-1)_\sigma (-1)^\sigma}{(2\nu-1)(2\nu-3) \dots (2\nu-2\sigma+1)} \cdot \frac{x^{2\sigma}}{1 \cdot 3 \dots (2\sigma+1)} \right) \right\}. \end{aligned} \right.$$

$$(28) \left\{ \begin{aligned} K_1'(-x) &= +\frac{i}{x^2} \cdot e^{-ix} \cdot ((1-x^2) + ix), \\ K_2'(-x) &= +\frac{6}{x^3} \cdot e^{-ix} \cdot \left( \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) + ix \cdot \left(1 - \frac{1}{6}x^2\right) \right), \\ K_3'(-x) &= -\frac{45 \cdot i}{x^5} \cdot e^{-ix} \cdot \left( \left(1 - \frac{7}{15}x^2 + \frac{1}{45}x^4\right) + ix \cdot \left(1 - \frac{2}{15}x^2\right) \right), \\ &\dots \dots \dots \\ K_\nu'(-x) &= -(-i)^\nu \cdot \nu \cdot \frac{1 \cdot 3 \dots (2\nu-1)}{x^{\nu+1}} \cdot e^{-ix} \\ &\quad \cdot \left\{ \left( 1 + \sum_{\sigma=1}^{\frac{\nu(+1)}{2}} (-1)^\sigma \frac{(\nu-\sigma)_\sigma + \frac{2\sigma-1}{\nu} \cdot (\nu-\sigma)_{\sigma-1}}{(2\nu-1)(2\nu-3) \dots (2\nu-2\sigma+1)} \cdot \frac{x^{2\sigma}}{1 \cdot 3 \dots (2\sigma-1)} \right) \right. \\ &\quad \left. + i \cdot x \cdot \left( 1 + \sum_{\sigma=1}^{\frac{\nu(-1)}{2}} (-1)^\sigma \frac{(\nu-\sigma-1)_\sigma + \frac{2\sigma+1}{\nu} \cdot (\nu-\sigma-1)_{\sigma-1}}{(2\nu-1)(2\nu-3) \dots (2\nu-2\sigma+1)} \cdot \frac{x^{2\sigma}}{1 \cdot 3 \dots (2\sigma+1)} \right) \right\}. \end{aligned} \right.$$

$$(29) \left\{ \begin{aligned} I_1(x) &= \frac{x^3}{3} \cdot \left( 1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{x^2}{3!} + \frac{3}{7} \cdot \frac{x^4}{5!} - \frac{3}{9} \cdot \frac{x^6}{7!} + \dots \right), \\ I_2(x) &= \frac{x^3}{15} \cdot \left( 1 - \frac{3}{7} \cdot \frac{x^2}{3!} + \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 9} \cdot \frac{x^4}{5!} - \frac{3 \cdot 5}{9 \cdot 11} \cdot \frac{x^6}{7!} + \dots \right), \\ I_3(x) &= \frac{x^4}{105} \cdot \left( 1 - \frac{3}{9} \cdot \frac{x^2}{3!} + \frac{3 \cdot 5}{9 \cdot 11} \cdot \frac{x^4}{5!} - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{9 \cdot 11 \cdot 13} \cdot \frac{x^6}{7!} + \dots \right), \\ &\dots \dots \dots \\ I_\nu(x) &= \frac{x^{\nu+1}}{1 \cdot 3 \dots (2\nu+1)} \cdot \left( 1 - \frac{3}{2\nu+3} \cdot \frac{x^2}{3!} + \frac{3 \cdot 5}{(2\nu+3)(2\nu+5)} \cdot \frac{x^4}{5!} \right. \\ &\quad \left. - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{(2\nu+3)(2\nu+5)(2\nu+7)} \cdot \frac{x^6}{7!} + \dots \right). \end{aligned} \right.$$

$$(30) \left\{ \begin{aligned} I_1'(x) &= \frac{2 \cdot x}{3} \cdot \left( 1 - 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{x^2}{3!} + 3 \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{x^4}{5!} - 4 \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{x^6}{7!} + \dots \right), \\ I_2'(x) &= \frac{3 \cdot x^2}{15} \cdot \left( 1 - \frac{5}{7} \cdot \frac{x^2}{3!} + \frac{5}{9} \cdot \frac{x^4}{5!} - \frac{5}{11} \cdot \frac{x^6}{7!} + \dots \right), \\ I_3'(x) &= \frac{4 \cdot x^3}{104} \cdot \left( 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{x^2}{3!} + \frac{4}{2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{9 \cdot 11} \cdot \frac{x^4}{5!} \right. \\ &\quad \left. - \frac{5}{2} \cdot \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{9 \cdot 11 \cdot 13} \cdot \frac{x^6}{7!} + \dots \right), \\ &\dots \dots \dots \\ I_\nu'(x) &= \frac{(\nu+1) \cdot x^\nu}{1 \cdot 3 \dots (2\nu+1)} \cdot \left( 1 - \frac{\nu+3}{\nu+1} \cdot \frac{3}{2\nu+3} \cdot \frac{x^2}{3!} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\nu+5}{\nu+1} \cdot \frac{3 \cdot 5}{(2\nu+1)(2\nu+5)} \cdot \frac{x^4}{5!} - \dots \right). \end{aligned} \right.$$

Diese Reihen sind für Zahlenrechnungen meistens weit bequemer als die endlichen Ausdrücke, die man nach (24) für  $I_\nu$  und  $I_\nu'$  bekommt. Für andere Zwecke muß man aber auch diese kennen:

$$(29a) \left\{ \begin{aligned} I_1(x) &= -\cos x + \frac{\sin x}{x}, \\ I_2(x) &= -\sin x - \frac{3 \cdot \cos x}{x} + \frac{3 \cdot \sin x}{x^2}, \\ I_3(x) &= +\cos x - \frac{6 \cdot \sin x}{x} - \frac{15 \cdot \cos x}{x^2} + \frac{15 \cdot \sin x}{x^3}, \\ &\dots \dots \dots \\ I_\nu(x) &= \sin \left( x - \frac{\nu \pi}{2} \right) + \sum_1^\nu r \sin \left( x - \frac{(\nu-r)\pi}{2} \right) \\ &\quad \cdot \frac{(\nu+r)!}{(\nu-r)! r!} \cdot \frac{1}{2^r \cdot x^r}. \end{aligned} \right.$$

$$(30a) \left\{ \begin{aligned} I_1'(x) &= +\sin x + \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}, \\ I_2'(x) &= -\cos x + \frac{3 \cdot \sin x}{x} + \frac{6 \cdot \cos x}{x^2} - \frac{6 \cdot \sin x}{x^3}, \\ I_3'(x) &= -\sin x - \frac{6 \cdot \cos x}{x} + \frac{21 \cdot \sin x}{x^2} + \frac{45 \cdot \cos x}{x^3} - \frac{45 \cdot \sin x}{x^4}, \\ &\dots \dots \dots \\ I_\nu'(x) &= \cos \left( x - \frac{\nu \cdot \pi}{2} \right) + \sum_1^{\nu+1} r \cos \left( x - \frac{(\nu-r)\pi}{2} \right) \\ &\quad \cdot \frac{(\nu+r-1)!}{(\nu-r+1)! r!} \cdot \frac{(\nu(\nu+1) + r(r-1))}{2^r \cdot x^r}. \end{aligned} \right.$$

## Die Kugelfunktionen.

7. Für das vorliegende Problem sind die gewöhnlichen Kugelfunktionen, die nur von einer Variablen abhängen (die zonalen Kugelfunktionen) nicht zu verwenden. Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, daß Funktionen von den folgenden beiden Formen zur Lösung nötig sind:

$$(31) \quad P_\nu(\vartheta, \varphi) = II_\nu(v) \cdot \cos \vartheta,$$

$$(32) \quad \mathfrak{P}_\nu(\vartheta, \varphi) = II_\nu(v) \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi,$$

$$(33) \quad v = \sin \vartheta \cdot \sin \varphi.$$

Die Funktion  $II_\nu$  muß, wie man durch Substitution der Ausdrücke für  $P_\nu$  und  $\mathfrak{P}_\nu$  in (11) erkennt, folgender Differentialgleichung gehorchen:

$$(34) \quad \frac{d^2}{dv^2} ((1 - v^2) \cdot II_\nu) + v \cdot (v + 1) \cdot II_\nu = 0.$$

Die geometrische Bedeutung der drei in (31), (32), (33) vorkommenden Winkelfunktionen:

$$\cos \vartheta, \quad \sin \vartheta \cdot \sin \varphi, \quad \sin \vartheta \cdot \cos \varphi$$

ist wohl ohne weiteres klar. Nennen wir die Winkel, die der Radiusvektor des betrachteten Punktes mit den Achsen 1, 2, 3 bildet (vgl. 2.),  $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ , so ist, wie man aus Fig. 2 sofort sehen kann:

$$(35) \quad \begin{cases} \cos \vartheta_1 = \cos \vartheta, \\ \cos \vartheta_2 = \sin \vartheta \cdot \cos \varphi, \\ \cos \vartheta_3 = \sin \vartheta \cdot \sin \varphi = v. \end{cases}$$

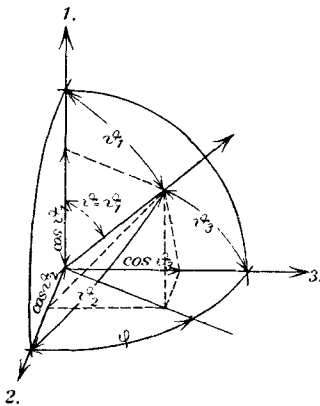


Fig. 2.  
Trigonometrische Beziehungen.

Wir wollen jetzt noch die wichtigsten Formeln für die Funktionen  $II_\nu$  zusammenstellen. Bekanntlich ist eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung der Kugelfunktionen rational und ganz in den trigonometrischen Funktionen der Winkelkoordinaten  $\vartheta, \varphi$ . Nur diese Lösung interessiert uns.

Haben wir sie für eine Ordnungszahl (z. B.  $\nu = 1$ ) gefunden, so können wir sie für alle anderen Ordnungszahlen mit Hilfe der folgenden Rekursionsformel berechnen:

$$(36) \quad \frac{d II_{\nu+1}}{dv} = v \cdot \frac{d II_\nu}{dv} + (\nu + 2) \cdot II_\nu.$$

Diese Formel kann man durch Einsetzen in (34) ohne weiteres verifizieren. Eine Lösung von (34) für den Fall  $\nu = 1$  ist nun:

$$(37) \quad \Pi_1(v) = 1.$$

Daraus ergibt sich durch Anwendung von (36):

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Pi_0(v) = 0, \quad \Pi_1(v) = 1, \\ \Pi_2 = 3v, \\ \Pi_3 = \frac{15}{2} \cdot v^2 - \frac{3}{2}, \\ \Pi_4 = \frac{35}{2} v^3 - \frac{15}{2} v, \\ \quad \cdot \frac{\nu(+1)}{2} - 1 \\ \Pi_\nu = \frac{1}{2^\nu} \cdot \sum_0^s (-1)^s \cdot \frac{(2\nu - 2s)!}{(\nu - s)! s!} \cdot \frac{v^{\nu - 2s - 1}}{(\nu - 2s - 1)!}. \end{array} \right.$$

Eine andere Reihenentwicklung für  $\Pi_\nu$  ist die folgende:

$$(39) \quad \Pi_\nu = \sum_0^{\frac{\nu(+1)}{2} - 1} (-1)^s \cdot \frac{(\nu + 1)!}{s!(s + 1)!} \cdot \frac{v^{\nu - 2s - 1} \cdot (1 - v^2)^s}{(\nu - 2s - 1)! 2^{2s + 1}}.$$

Für den speziellen Wert  $v = 0$  ergibt (38):

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Pi_\nu(0) = 0, \quad \text{wenn } \nu \text{ eine gerade Zahl ist,} \\ \Pi_\nu(0) = (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \cdot \frac{(\nu + 1)!}{2^{\nu-1} \left(\frac{\nu}{2}\right)! \left(\frac{\nu-1}{2}\right)!}, \quad \text{wenn } \nu \text{ ungerade ist,} \end{array} \right.$$

und für die erste Ableitung:

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{d\Pi_\nu}{dv}\right)_{v=0} = (-1)^{\frac{\nu}{2}-1} \cdot \frac{(\nu + 1)!}{2^{\nu-1} \left(\frac{\nu}{2}\right)! \left(\frac{\nu}{2} - 1\right)!}, \quad \text{wenn } \nu \text{ gerade,} \\ \left(\frac{d\Pi_\nu}{dv}\right)_{v=0} = 0, \quad \text{wenn } \nu \text{ ungerade.} \end{array} \right.$$

Ähnlich kann man aus (39) die Werte der Funktion  $\Pi_\nu$  und ihrer Ableitungen für  $v = 1$  berechnen.

8. Gerade so, wie es bei den oben besprochenen Funktionen  $K_\nu$  und  $I_\nu$  war, gibt es auch für die  $\Pi_\nu$  außer der Rekursionsformel (36) noch eine zweite Relation, die sich ähnlich wie (36) beweisen läßt:

$$(42) \quad \frac{d\Pi_{\nu-1}}{dv} = v \cdot \frac{d\Pi_\nu}{dv} - (\nu - 1) \cdot \Pi_\nu.$$

Aus (36) und (42) folgen die beiden oft sehr nützlichen Formeln:

$$(43) \quad \begin{cases} (2\nu + 1) \cdot II_\nu = \frac{d II_{\nu+1}}{d\nu} - \frac{d II_{\nu-1}}{d\nu}, \\ (2\nu + 1) \cdot \nu \cdot II_\nu = \nu \cdot II_{\nu+1} + (\nu + 1) \cdot II_{\nu-1}. \end{cases}$$

9. Endlich seien auch noch die in den Formeln (13) und (14) vorkommenden Differentialquotienten von  $P_\nu$  und  $\mathfrak{P}_\nu$  hier notiert.

$$(44) \quad \begin{cases} P_\nu = II_\nu \cdot \cos \vartheta, \\ \frac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta} = - \frac{d(\nu \cdot II_\nu)}{d\nu} \cdot \sin \vartheta + \frac{d II_\nu}{d\nu} \cdot \sin \varphi, \\ \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \varphi} = \frac{d II_\nu}{d\nu} \cdot \cos \vartheta \cdot \cos \varphi. \end{cases}$$

$$(45) \quad \begin{cases} \mathfrak{P}_\nu = II_\nu \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi, \\ \frac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial \vartheta} = \frac{d(\nu \cdot II_\nu)}{d\nu} \cdot \cos \vartheta \cdot \cos \varphi, \\ \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial \varphi} = - \frac{d(\nu \cdot II_\nu)}{d\nu} \cdot \sin \varphi + \frac{d II_\nu}{d\nu} \cdot \sin \vartheta. \end{cases}$$

Speziell für die ersten beiden Ordnungszahlen haben wir:

$$\begin{aligned} P_1 &= \cos \vartheta, & P_2 &= 3 \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \varphi, \\ \frac{\partial P_1}{\partial \vartheta} &= -\sin \vartheta, & \frac{\partial P_2}{\partial \vartheta} &= 3 \cdot \cos 2 \vartheta \cdot \sin \varphi, \\ \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial P_1}{\partial \varphi} &= 0, & \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial P_2}{\partial \varphi} &= 3 \cdot \cos \vartheta \cdot \cos \varphi, \\ \mathfrak{P}_1 &= \sin \vartheta \cdot \cos \varphi, & \mathfrak{P}_2 &= 3 \cdot \sin^2 \vartheta \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi, \\ \frac{\partial \mathfrak{P}_1}{\partial \vartheta} &= \cos \vartheta \cdot \cos \varphi, & \frac{\partial \mathfrak{P}_2}{\partial \vartheta} &= 3 \cdot \sin 2 \vartheta \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi, \\ \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_1}{\partial \varphi} &= -\sin \varphi, & \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_2}{\partial \varphi} &= 3 \cdot \sin \vartheta \cdot \cos 2 \varphi. \end{aligned}$$

#### Integralwerte der Kugelfunktionen.

10. Im folgenden wird die Aufgabe gelöst werden müssen, die gesamte Strahlung, die von der Kugel reflektiert wird, zu berechnen. Wir werden sehen, daß diese Aufgabe darauf hinauskommt, die Oberflächenintegrale

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} P_\nu \cdot P_\mu \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi \quad \text{und} \quad \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathfrak{P}_\nu \cdot \mathfrak{P}_\mu \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi$$

zu finden. Man kann diese Integrale sehr leicht beispie-



weise nach einer in Maxwells Treatise on Electricity<sup>1)</sup> angegebenen Methode ausrechnen. Es ergibt sich:

$$(46) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} P_\nu \cdot P_\mu \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathfrak{P}_\nu \cdot \mathfrak{P}_\mu \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi = 0, \\ \int_0^\pi \int_0^{2\pi} P_\nu^2 \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathfrak{P}_\nu^2 \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi = 2\pi \cdot \frac{\nu \cdot (\nu + 1)}{2\nu + 1}. \end{aligned} \right.$$

### Ebene Welle.

11. Das vorliegende Problem ist als gelöst zu betrachten, sobald es gelingt, die ebene Welle, die auf die Kugel auftrifft, in Ausdrücke von der Form (13) und (14) zu zerlegen.

Als Fortschreitungsrichtung der ebenen Welle wollen wir die Achse 3, und zwar im negativen Sinne wählen. Das Licht sei geradlinig polarisiert, und zwar sei Achse 1 die Richtung der elektrischen Schwingung, also Achse 2 die der magnetischen.

Nennen wir die Koordinate eines Punktes in der Richtung der Achse 3 vorübergehend wieder  $z$ , so ist nach (35):

$$z = r \cdot \cos \vartheta_3 = r \cdot v.$$

Die ebene Welle wird also durch folgende Größen repräsentiert:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_1 &= e^{2\pi i n t + \frac{2\pi i z}{\lambda'}}, \quad \mathfrak{E}_2 = \mathfrak{E}_3 = 0, \\ \mathfrak{H}_1 &= 0, \quad \mathfrak{H}_2 = -\sqrt{\frac{k}{\mu}} \cdot e^{2\pi i n t + \frac{2\pi i z}{\lambda'}}, \quad \mathfrak{H}_3 = 0. \end{aligned}$$

Hier sind  $k$  und  $\mu$  Dielektrizität und Permeabilität in dem in (1) gebrauchten Sinn, das Leitvermögen des von dem Strahl durchlaufenen Mediums (des Wassers) haben wir als Null angenommen,  $\lambda'$  ist die Wellenlänge in dem Medium (Wasser). Setzt man nun (vgl. (5))

$$\frac{2\pi i z}{\lambda'} = \frac{2\pi i \cdot r \cdot v}{\lambda'} = i \cdot x \cdot v,$$

so kann man ohne weiteres die Größen  $E_r, \dots$  und  $M_r, \dots$ , die früher (Formel (2) und (4)) eingeführt wurden, hinschreiben:

$$(47) \quad \begin{cases} E_r = e^{i \cdot x \cdot v} \cdot \cos \vartheta, & M_r = i \cdot e^{i \cdot x \cdot v} \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi, \\ E_\vartheta = -e^{i \cdot x \cdot v} \cdot \sin \vartheta, & M_\vartheta = i \cdot e^{i \cdot x \cdot v} \cdot \cos \vartheta \cdot \cos \varphi, \\ E_\varphi = 0, & M_\varphi = -i \cdot e^{i \cdot x \cdot v} \cdot \sin \varphi. \end{cases}$$

1) Bd. I p. 200 der deutschen Übersetzung.

Nun kann man aber die hier vorkommende Exponentialfunktion leicht nach  $I$ - und  $II$ -Funktionen entwickeln. Es ist nämlich:

$$(48) \quad e^{ixv} = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} (2\nu+1) \cdot i^{\nu-1} \cdot \frac{I_{\nu}(x)}{x^2} \cdot II_{\nu}(v).$$

Man kann die Richtigkeit dieser Formel am leichtesten durch Differenzieren nach  $x$  und nach  $v$  beweisen. Es ist nämlich, wenn wir die Reihe zunächst einmal  $f(x, v)$  nennen, nach (26) und (43):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{x^2} \cdot \left\{ \sum_1^{\infty} i^{\nu-1} \cdot (2\nu+1) \cdot \left( \frac{d I_{\nu}}{dx} - 2 \cdot \frac{I_{\nu}}{x} \right) \cdot II_{\nu}(v) \right\}, \\ &= \frac{i}{x^2} \cdot \sum_1^{\infty} ((\nu-1) \cdot i^{\nu-2} \cdot I_{\nu-1} + (\nu+2) \cdot i^{\nu} \cdot I_{\nu+1}) \cdot II_{\nu}(v), \\ &= i \cdot \sum_1^{\infty} i^{\nu-1} \cdot \frac{I_{\nu}}{x^2} \cdot (\nu \cdot II_{\nu+1} + (\nu+1) \cdot II_{\nu-1}), \\ &= i \cdot v \cdot \sum_1^{\infty} (2\nu+1) i^{\nu-1} \cdot \frac{I_{\nu}}{x^2} \cdot II_{\nu}(v), \\ &= i \cdot v \cdot f(x, v). \end{aligned}$$

Ebenso kann man zeigen, daß:

$$\frac{\partial f}{\partial v} = i \cdot x \cdot f(x, v).$$

Endlich ist:

$$(f(x, v))_{x=0} = 1.$$

Also

$$f(x, v) = e^{ixv}.$$

Demnach haben wir für  $E_r$  und  $M_r$  die gesuchte Reihenentwicklung:

$$\begin{aligned} E_r &= \sum_1^{\infty} (2\nu+1) \cdot i^{\nu-1} \cdot \frac{I_{\nu}}{x^2} \cdot P_{\nu}, \\ M_r &= \sum_1^{\infty} (2\nu+1) \cdot i^{\nu} \cdot \frac{I_{\nu}}{x^2} \cdot \mathfrak{P}_{\nu}, \end{aligned}$$

wo  $P_{\nu}$  und  $\mathfrak{P}_{\nu}$  die in (31) und (32) definierten Funktionen sind.

Man kann nun von dem gefundenen Wert  $E_r$  ausgehend, mit Hilfe der Formeln (13) eine Lösung der Gruppe I bilden, ferner von  $M_r$  ausgehend unter Benutzung von (14) eine Lösung der Gruppe II, die Summe dieser beiden Lösungen muß dann dasjenige Integral der Maxwell'schen Gleichungen sein, das die ebene Welle wiedergibt. Man kann sich leicht durch direkte Rechnung überzeugen, daß die so erhaltenen Reihenentwickelungen in der Tat identisch sind mit den Ausdrücken (47).

Man kann nämlich aus den Relationen (26) und (43), wenn man dazu noch die Differentialgleichung (10)

$$\frac{1}{\nu \cdot (\nu + 1)} \cdot \left( \frac{d^2 I_\nu}{dx^2} + I_\nu \right) = \frac{I_\nu}{x^2}$$

beachtet, die folgenden beiden Gleichungen ableiten:

$$(49) \left\{ \begin{aligned} & \sum_1^\infty \frac{2\nu + 1}{\nu \cdot (\nu + 1)} \left( i^{\nu-1} \cdot I_\nu \cdot \frac{d(v \cdot II_\nu)}{dv} + i^\nu \cdot \frac{dI_\nu}{dx} \cdot \frac{dII_\nu}{dv} \right) = 0, \\ & \sum_1^\infty \frac{2\nu + 1}{\nu \cdot (\nu + 1)} \cdot \left( i^{\nu-1} \cdot I_\nu \cdot \frac{dII_\nu}{dv} + i^\nu \cdot \frac{dI_\nu}{dx} \cdot \frac{d(v \cdot II_\nu)}{dv} \right) \\ & \qquad = \sum_1^\infty (2\nu + 1) \cdot i^{\nu-1} \cdot \frac{I_\nu}{x^2} \cdot \frac{dII_\nu}{dv}, \\ & \qquad = \sum_1^\infty (2\nu + 1) \cdot i^\nu \cdot \frac{I_\nu}{x} \cdot II_\nu, \\ & \qquad = i \cdot x \cdot e^{ixv}. \end{aligned} \right.$$

Bildet man nun nach Vorschrift der Formeln (13) und (14) z. B.:

$$E_\vartheta = \sum_1^\infty \frac{2\nu + 1}{\nu \cdot (\nu + 1)} \cdot i^{\nu-1} \cdot \frac{I'_\nu}{x} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta} + \sum_1^\infty \frac{2\nu + 1}{\nu \cdot (\nu + 1)} \cdot i^\nu \cdot \frac{I_\nu}{x \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial \varphi},$$

so ergibt sich mit Benutzung der Formeln (44), (45) und (49):

$$E_\vartheta = -e^{ixv} \cdot \sin \vartheta.$$

Ebenso wird:

$$E_{\varphi} = \sum_1^{\infty} \nu \frac{2\nu+1}{\nu(\nu+1)} \cdot i^{\nu-1} \cdot \frac{I_{\nu}}{x \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial P_{\nu}}{\partial \varphi} \\ - \sum_1^{\infty} \nu \frac{2\nu+1}{\nu(\nu+1)} \cdot i^{\nu} \cdot \frac{I_{\nu}}{x} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_{\nu}}{\partial \vartheta} = 0.$$

Ähnlich  $M_{\vartheta}$  und  $M_{\varphi}$ . Man kann also für die ebene Welle, anstatt der Ausdrücke (47) auch die folgenden brauchen:

$$(50) \left\{ \begin{aligned} E_r &= \sum_1^{\infty} (2\nu+1) \cdot i^{\nu-1} \cdot \frac{I_{\nu}}{x^2} \cdot P_{\nu}, \\ E_{\vartheta} &= \sum_1^{\infty} \nu \frac{2\nu+1}{\nu(\nu+1)} \cdot i^{\nu-1} \cdot \frac{I'_{\nu}}{x} \cdot \frac{\partial P_{\nu}}{\partial \vartheta} + \sum_1^{\infty} \nu \frac{2\nu+1}{\nu(\nu+1)} \cdot i^{\nu} \cdot \frac{I_{\nu}}{x \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_{\nu}}{\partial \varphi}, \\ E_{\varphi} &= \sum_1^{\infty} \nu \frac{2\nu+1}{\nu(\nu+1)} \cdot i^{\nu-1} \cdot \frac{I'_{\nu}}{x \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial P_{\nu}}{\partial \varphi} - \sum_1^{\infty} \nu \frac{2\nu+1}{\nu(\nu+1)} \cdot i^{\nu} \cdot \frac{I_{\nu}}{x} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_{\nu}}{\partial \vartheta}, \\ M_r &= \sum_1^{\infty} (2\nu+1) \cdot i^{\nu} \cdot \frac{I_{\nu}}{x^2} \cdot P_{\nu}, \\ M_{\vartheta} &= \sum_1^{\infty} \nu \frac{2\nu+1}{\nu(\nu+1)} \cdot i^{\nu-1} \cdot \frac{I_{\nu}}{x \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial P_{\nu}}{\partial \varphi} + \sum_1^{\infty} \nu \frac{2\nu+1}{\nu(\nu+1)} \cdot i^{\nu} \cdot \frac{I'_{\nu}}{x} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_{\nu}}{\partial \vartheta}, \\ M_{\varphi} &= - \sum_1^{\infty} \nu \frac{2\nu+1}{\nu(\nu+1)} \cdot i^{\nu-1} \cdot \frac{I_{\nu}}{x} \cdot \frac{\partial P_{\nu}}{\partial \vartheta} + \sum_1^{\infty} \nu \frac{2\nu+1}{\nu(\nu+1)} \cdot i^{\nu} \cdot \frac{I'_{\nu}}{x \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_{\nu}}{\partial \varphi}. \end{aligned} \right.$$

#### Gebrochene und reflektierte Welle.

12. Wenn wir nun dazu übergehen, auch die Welle im Innern der Kugel und die von ihr nach außen ausstrahlende Welle durch Ausdrücke von der Form (13) und (14) wiederzugeben, so müssen wir dabei beachten: Erstens, daß im Innern der Kugel nur das mit  $I_{\nu}$  bezeichnete Integral der Gleichung (10) zu verwenden ist, weil alle anderen partikulären Integrale für  $x=0$ , d. h. im Zentrum der Kugel, unendlich werden müßten; zweitens, daß im Außenraum  $K_{\nu}(-x)$  zu verwenden ist, weil nur dieses den Faktor

$$e^{-ix} = e^{-\frac{2\pi i r}{\lambda'}}$$

hat, so daß die Komponenten der elektrischen und magnetischen Kräfte, die Zeit lediglich in der Kombination:

$$e^{2\pi i \left( n t - \frac{r}{\lambda'} \right)}$$

enthalten, was das Charakteristikum einer von der Kugel ausgehenden Strahlung ist.

Die Strahlung im Innern der Kugel läßt sich also folgendermaßen darstellen:

$$(51) \left\{ \begin{array}{l} E_{ri} = \sum_1^{\infty} i \cdot b_{\nu} \cdot \frac{I_{\nu}}{x^2} \cdot P_{\nu}, \\ E_{\partial i} = \sum_1^{\infty} \left( \frac{b_{\nu} \cdot i}{\nu \cdot (\nu + 1)} \cdot \frac{I'_{\nu}}{x} \cdot \frac{\partial P_{\nu}}{\partial \vartheta} + \frac{q_{\nu}}{\nu \cdot (\nu + 1)} \cdot \frac{I_{\nu}}{x \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_{\nu}}{\partial \varphi} \right), \\ E_{\varphi i} = \sum_1^{\infty} \left( \frac{b_{\nu} \cdot i}{\nu \cdot (\nu + 1)} \cdot \frac{I'_{\nu}}{x \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial P_{\nu}}{\partial \varphi} - \frac{q_{\nu}}{\nu \cdot (\nu + 1)} \cdot \frac{I_{\nu}}{x} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_{\nu}}{\partial \vartheta} \right), \\ M_{ri} = \sum_1^{\infty} q_{\nu} \cdot \frac{I_{\nu}}{x^2} \cdot \mathfrak{P}_{\nu}, \\ M_{\partial i} = \sum_1^{\infty} \left( \frac{b_{\nu} \cdot i}{\nu \cdot (\nu + 1)} \cdot \frac{I_{\nu}}{x \cdot \sin \varphi} \cdot \frac{\partial P_{\nu}}{\partial \vartheta} + \frac{q_{\nu}}{\nu \cdot (\nu + 1)} \cdot \frac{I'_{\nu}}{x} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_{\nu}}{\partial \vartheta} \right), \\ M_{\varphi i} = \sum_1^{\infty} \left( - \frac{b_{\nu} \cdot i}{\nu \cdot (\nu + 1)} \cdot \frac{I_{\nu}}{x} \cdot \frac{\partial P_{\nu}}{\partial \vartheta} + \frac{q_{\nu}}{\nu \cdot (\nu + 1)} \cdot \frac{I'_{\nu}}{x \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_{\nu}}{\partial \varphi} \right). \end{array} \right.$$

Die Koeffizienten  $b_{\nu}$  und  $q_{\nu}$ , deren einem der Faktor  $i$  zugefügt ist, nur, damit die späteren Formeln etwas eleganter werden, sind nebst den in den folgenden Ausdrücken (52) vorkommenden  $a_{\nu}$  und  $p_{\nu}$  aus den Grenzbedingungen (7) zu ermitteln.

Im Außenraum kommt zu der ebenen Welle (50), die auf die Welle auftrifft, noch die reflektierte Strahlung:

$$(52) \left\{ \begin{aligned} E_{ra} &= \sum_1^\infty a_\nu \cdot i \cdot \frac{K_\nu(-x)}{x^2} \cdot P_\nu, \\ E_{\theta a} &= \sum_1^\infty \left( \frac{a_\nu \cdot i}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \frac{K'_\nu(-x)}{x} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta} + \frac{p_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \frac{K_\nu(-x)}{x \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial \varphi} \right), \\ E_{\varphi a} &= \sum_1^\infty \left( \frac{a_\nu \cdot i}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \frac{K'_\nu(-x)}{x \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \varphi} - \frac{p_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \frac{K_\nu(-x)}{x} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial \vartheta} \right), \\ M_{ra} &= \sum_1^\infty p_\nu \cdot \frac{K_\nu(-x)}{x^2} \cdot \mathfrak{P}_\nu, \\ M_{\theta a} &= \sum_1^\infty \left( \frac{a_\nu \cdot i}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \frac{K_\nu(-x)}{x \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \varphi} + \frac{p_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \frac{K'_\nu(-x)}{x} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial \vartheta} \right), \\ M_{\varphi a} &= \sum_1^\infty \left( -\frac{a_\nu \cdot i}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \frac{K_\nu(-x)}{x} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta} + \frac{p_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \frac{K'_\nu(-x)}{x \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial \varphi} \right). \end{aligned} \right.$$

#### Ermittlung der Koeffizienten.

13. Den Radius der kleinen Kugel haben wir mit  $\varrho$  bezeichnet, den Brechungsexponenten des Mediums (Wassers) mit  $m_0$ , den komplexen Brechungsexponenten des Materials der Kugel mit  $m$ . Weiter wollen wir die Größen  $x_a$  und  $x_i$  für den speziellen Wert  $r = \varrho$  mit  $\alpha$  und  $\beta$  bezeichnen, ferner den relativen Brechungsexponenten  $m/m_0$  mit  $m'$

$$(53) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= \frac{2\pi \cdot m_0 \cdot \varrho}{\lambda} = \frac{2\pi \varrho}{\lambda'}, \\ \beta &= \frac{2\pi \cdot m \cdot \varrho}{\lambda} = \frac{m}{m_0} \cdot \alpha = m' \cdot \alpha. \end{aligned} \right.$$

Endlich wollen wir noch die Abkürzungen brauchen:

$$(54) \quad \left\{ \begin{aligned} I_\nu(\alpha) &= A_\nu & I'_\nu(\alpha) &= A'_\nu, \\ I_\nu(\beta) &= B_\nu & I'_\nu(\beta) &= B'_\nu, \\ K_\nu(-\alpha) &= C_\nu & K'_\nu(-\alpha) &= C'_\nu. \end{aligned} \right.$$

Wir setzen nun in die Grenzbedingungen:

$$\begin{aligned} (E_\theta + E_{\theta a})_{r=\varrho} &= (E_{\theta i})_{r=\varrho}, \\ (E_\varphi + E_{\varphi a})_{r=\varrho} &= (E_{\varphi i})_{r=\varrho}, \\ \alpha \cdot (M_\theta + M_{\theta a})_{r=\varrho} &= \beta \cdot (M_{\theta i})_{r=\varrho}, \\ \alpha \cdot (M_\varphi + M_{\varphi a})_{r=\varrho} &= \beta \cdot (M_{\varphi i})_{r=\varrho}, \end{aligned}$$

die Ausdrücke (50), (52), (51) ein und erhalten, da zwei Paare dieser Gleichungen sich als identisch erweisen, für  $a_\nu$ ,  $b_\nu$ ,  $p_\nu$ ,  $q_\nu$  die folgenden Bedingungen:

$$\begin{aligned} -(2\nu + 1) \cdot i^\nu \cdot \frac{A_\nu'}{\alpha} + a_\nu \cdot \frac{C_\nu'}{\alpha} &= b_\nu \cdot \frac{B_\nu'}{\beta}, \\ -(2\nu + 1) \cdot i^\nu \cdot A_\nu + a_\nu \cdot C_\nu &= b_\nu \cdot B_\nu, \\ (2\nu + 1) \cdot i^\nu \cdot \frac{A_\nu}{\alpha} + p_\nu \cdot \frac{C_\nu}{\alpha} &= q_\nu \cdot \frac{B_\nu}{\beta}, \\ (2\nu + 1) \cdot i^\nu \cdot A_\nu' + p_\nu \cdot C_\nu' &= q_\nu \cdot B_\nu'. \end{aligned}$$

Daraus berechnen sich:

$$(55) \quad \begin{cases} a_\nu = + (2\nu + 1) \cdot i^\nu \cdot \frac{A_\nu' \cdot B_\nu \cdot \beta - B_\nu' \cdot A_\nu \cdot \alpha}{C_\nu' \cdot B_\nu \cdot \beta - B_\nu' \cdot C_\nu \cdot \alpha}, \\ p_\nu = - (2\nu + 1) \cdot i^\nu \cdot \frac{A_\nu \cdot B_\nu' \cdot \beta - B_\nu \cdot A_\nu' \cdot \alpha}{C_\nu \cdot B_\nu' \cdot \beta - B_\nu \cdot C_\nu' \cdot \alpha}. \end{cases}$$

#### Formeln zum praktischen Rechnen.

14. So einfach die Formeln (55) auf den ersten Anblick auch erscheinen, so schwierig ist es, sie zu diskutieren. Besonders erschwerend ist in dem Falle metallischer Kugeln, daß  $\beta$  und damit zugleich  $B_\nu$ ,  $B_\nu'$  komplexe Größen sind. Aber auch im Falle nicht absorbierender Kugeln, wo  $\beta$  reell ist, bleiben noch zwei unter allen Umständen komplexe Größen, nämlich  $C_\nu$  und  $C_\nu'$  in den Ausdrücken stehen.

Für nicht sehr große Kugeln wird man stets am bequemsten mit den Formeln (27), (28), (29), (30) rechnen. Danach können wir setzen:

$$(56) \quad \left\{ \begin{aligned} A_\nu &= \frac{\alpha^{\nu+1}}{1 \cdot 3 \dots (2\nu+1)} \cdot f_\nu, \\ B_\nu &= \frac{\beta^{\nu+1}}{1 \cdot 3 \dots (2\nu+1)} \cdot g_\nu, \\ C_\nu &= (-i)^\nu \frac{1 \cdot 3 \dots (2\nu-1)}{\alpha^\nu} \cdot e^{-i\alpha} \cdot (h_\nu + i\alpha \cdot k_\nu); \\ A_\nu' &= \frac{(\nu+1) \cdot \alpha^\nu}{1 \cdot 3 \dots (2\nu+1)} \cdot f_\nu', \\ B_\nu' &= \frac{(\nu+1) \cdot \beta^\nu}{1 \cdot 3 \dots (2\nu+1)} \cdot g_\nu', \\ C_\nu' &= -\nu \cdot (-i)^\nu \frac{1 \cdot 3 \dots (2\nu-1)}{\alpha^{\nu+1}} \cdot e^{-i\alpha} \cdot (h_\nu' + i\alpha \cdot k_\nu'). \end{aligned} \right.$$

Die Faktoren  $f_\nu$ ,  $f'_\nu$  sind rasch konvergierende Potenzreihen in  $\alpha^2$ ;  $g_\nu$ ,  $g'_\nu$  dieselben Reihen in  $\beta^2$ ;  $h_\nu$ ,  $k_\nu$ ,  $h'_\nu$ ,  $k'_\nu$  sind endliche Potenzsummen in  $\alpha^2$ , also alles Ausdrücke, die verhältnismäßig leicht zu berechnen sind. Man kann sie direkt aus den Formeln (27) bis (30) entnehmen. Alle diese Summen  $f_\nu$ ,  $f'_\nu$  usw. fangen mit dem Glied 1 an, für Kügelchen, deren Durchmesser gegen die Wellenlänge des Lichtes innen und außen klein ist, nähern sie sich also alle sehr dem Wert 1, und man bekommt für  $A_\nu$ ,  $A'_\nu$  usw. sehr einfache Ausdrücke. Setzt man (56) in (55) ein und schreibt zur Abkürzung:

$$(57) \quad u_\nu = e^{i\alpha} \frac{f'_\nu}{h'_\nu + i\alpha \cdot k'_\nu}, \quad v_\nu = \frac{f_\nu}{f'_\nu} \cdot \frac{g'_\nu}{g_\nu}, \quad w_\nu = \frac{h_\nu + i\alpha \cdot k_\nu}{h'_\nu + i\alpha \cdot k'_\nu} \cdot \frac{g'_\nu}{g_\nu},$$

$$(58) \quad \frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{m^2}{m_0'^2} = m'^2,$$

so ergeben sich folgende praktische Formeln:

$$(59) \quad \begin{cases} a_\nu = (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{\nu+1}{\nu} \cdot \frac{\alpha^{2\nu+1}}{1^2 \cdot 3^2 \cdot \dots (2\nu-1)^2} \cdot u_\nu \cdot \frac{m'^2 - v_\nu}{m'^2 + \frac{\nu+1}{\nu} \cdot w_\nu}, \\ p_\nu = (-1)^\nu \cdot \frac{\nu+1}{\nu} \cdot \frac{\alpha^{2\nu+1}}{1^2 \cdot 3^2 \cdot \dots (2\nu-1)^2} \cdot u_\nu \cdot \frac{1 - v_\nu}{1 + \frac{\nu+1}{\nu} \cdot w_\nu}. \end{cases}$$

15. Es ist nicht schwierig, ungefähr zu beurteilen, wie  $a_\nu$  sich mit wachsender Teilchengröße ändert. Für kleine  $\alpha$  werden die  $f_\nu$ ,  $g_\nu$  usw. alle ziemlich genau gleich 1 und folglich kann man die Näherungsgleichung benutzen:

$$(60) \quad \begin{cases} a_\nu \sim \alpha^{2\nu+1} \cdot \frac{\nu+1}{\nu} \cdot \frac{C_\nu}{1^2 \cdot 3^2 \cdot \dots (2\nu-1)^2}, \\ C_\nu = \frac{m'^2 - 1}{m'^2 + \frac{\nu+1}{\nu}} \cdot (-1)^{\nu-1}. \end{cases}$$

Hier ist  $C_\nu$  eine komplexe Zahl, deren absoluter Betrag nicht allzu weit von 1 abliegt.<sup>1)</sup> Während  $a_\nu$ , wie (60) zeigt, zunächst mit der  $(2\nu+1)^{\text{ten}}$  Potenz von  $\alpha$  steigt, biegt bei größeren Werten von  $\alpha$  die Kurve der  $a_\nu$ -Werte ab und geht niemals über eine bestimmte GröÙe hinaus. Man sieht das, wenn man

---

1) Bei Goldkügelchen liegt beispielsweise der absolute Betrag von  $C_1$  zwischen 0,9 und 2,5, je nach der Farbe des Lichtes.



aus (29a) und (19) die Werte für  $I_\nu$  und  $K_\nu$  für sehr große Argumente nimmt. Da  $\alpha$  reell und  $\beta = \beta' - i \cdot \beta''$  komplex, so hat man:

$$\begin{aligned} K_\nu(-\alpha) &\sim e^{-i\alpha}, & K'_\nu(-\alpha) &\sim -i \cdot e^{-i\alpha}, \\ I_\nu(\alpha) &\sim \sin\left(\alpha - \frac{\nu\pi}{2}\right), & I'_\nu(\alpha) &\sim \cos\left(\alpha - \frac{\nu\pi}{2}\right), \\ I_\nu(\beta) &\sim -\frac{i}{2} \cdot e^{\beta''} \cdot e^{i \cdot \left(\beta' - \frac{\nu\pi}{2}\right)}, & I'_\nu(\beta) &\sim \frac{1}{2} \cdot e^{\beta''} \cdot e^{i \cdot \left(\beta' - \frac{\nu\pi}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Also, wenn man dies in (55) einsetzt, so bekommt man als Grenzwert für sehr große  $\alpha$ :

$$(61) \quad \begin{cases} a_\nu \sim (2\nu + 1) \cdot c_\nu, \\ c_\nu = \frac{i^\nu \cdot e^{i\alpha}}{1 + m'} \cdot \left( \sin\left(\alpha - \frac{\nu\pi}{2}\right) + i \cdot m' \cdot \cos\left(\alpha - \frac{\nu\pi}{2}\right) \right). \end{cases}$$

$c_\nu$  ist hier eine komplexe, periodisch mit  $\alpha$  veränderliche Größe, deren absoluter Betrag immer in der Gegend von 1 bleibt.

Da in (60) die Potenz  $\alpha^{2\nu+1}$  steht, außerdem aber der Nenner schnell mit  $\nu$  zunimmt, so muß zuerst  $a_1$  alle anderen Koeffizienten weit überragen. Wenn aber  $a_1$  seinem Grenzwert (61) zustrebt, schließt sich ihm als zweites  $a_2$  an, während alle folgenden noch klein bleiben. Später gesellt sich den beiden ersten auch  $a_3$  zu und so fort. Aus den Formeln für  $f_\nu$ ,  $g_\nu$  usw. ist ferner zu sehen, daß die Formel (60) für die später folgenden Koeffizienten immer länger annähernd gültig bleibt.

Aus dieser Betrachtung geht hervor, daß, wie groß auch  $\alpha$  sein möge, doch immer von einem bestimmten  $\nu$  an alle Koeffizienten so klein gegen die ersten bleiben, daß man sie ganz außer acht lassen darf.

*Die von einer kleinen Kugel reflektierte Strahlung setzt sich im wesentlichen stets aus einer endlichen Zahl von Partialwellen zusammen, aber die Zahl der Partialwellen nimmt zu, wenn die Kugel größer wird.*

Dieser Satz ist zunächst nur für die „elektrischen Schwingungen“ des Teilchens bewiesen, denen die Koeffizienten  $a_\nu$  entsprechen, er wird sich aber auch für die „magnetischen Schwingungen“, die die auftreffende Welle erregt, d. h. die Koeffizienten  $p_\nu$ , bestätigt finden, die wir in 17. diskutieren werden.

In dem Zahlenbeispiel, das ich unten bringe, um der Erklärung der optischen Eigenschaften kolloidaler Metallösungen näher zu kommen, werde ich bis zu einem Wert des Durchmessers  $2\rho = 180 \mu\mu$  gehen. Dieser Wert liegt schon an der Grenze der mikroskopischen Auflösbarkeit, entspricht also wohl der äußersten Größe der Teilchen kolloidaler Lösungen. Auch bei dem großen Durchmesser  $2\rho = 180 \mu\mu$ , sind schon von  $v = 3$  an alle höheren „elektrischen Partialschwingungen“ gegen die beiden ersten ganz verschwindend klein, wir brauchen also nur  $a_1$  und  $a_2$  zu berechnen.

Dagegen müßte man z. B. bei dem Regenbogenproblem, das man auch mit der hier angewendeten Methode in Angriff nehmen könnte, eine ziemlich große Zahl Partialwellen berücksichtigen und würde auf sehr große rechnerische Schwierigkeiten stoßen.

Die beiden ersten Koeffizienten sind:

$$(62) \quad \begin{cases} a_1 = 2 \cdot \alpha^3 \cdot u_1 \cdot \frac{m'^2 - v_1}{m'^2 + 2w_1}, \\ a_2 = -\frac{1}{6} \cdot \alpha^5 \cdot u_2 \cdot \frac{m'^2 - v_2}{m'^2 + \frac{3}{2}w_2}. \end{cases}$$

Wird  $\alpha$  sehr klein, so kann man die  $u$ ,  $v$ ,  $w$  gleich 1 rechnen und bekommt:

$$(63) \quad \begin{cases} a_1 = 2 \cdot \alpha^3 \frac{m'^2 - 1}{m'^2 + 2}, \\ a_2 = -\frac{1}{6} \alpha^5 \frac{m'^2 - 1}{m'^2 + \frac{3}{2}}. \end{cases}$$

Natürlich ist für kleine  $\alpha$  auch schon  $a_2$  gegen  $a_1$  verschwindend klein, und es bleibt nur jene erste Partialwelle übrig, deren Existenz zuerst von Lord Rayleigh theoretisch bewiesen worden ist, die ich deswegen manchmal auch kurz die *Rayleighsche Strahlung* nennen werde.

16. Es sei auch noch der Spezialfall kurz erledigt, daß das Kügelchen aus einem vollkommen leitenden Material besteht. Bekanntlich ist dieser Fall zuerst von J. J. Thomson diskutiert und F. Ehrenhaft hat gemeint, die von Thomson entwickelte Theorie auf die Optik der kolloidalen Lösungen anwenden zu können. Obwohl dies aus den in Abschnitt 1.

genannten Gründen nicht geht, hat der Fall doch ein gewisses historisches und allgemein theoretisches Interesse. Wir setzen:

$$m'^2 = -i \cdot \infty \quad (\text{vgl. (3)}),$$

und vernachlässigen demgemäß in den Formeln (55) die Glieder mit dem Faktor  $\alpha$  gegen die mit dem Faktor  $\beta$ . Es ergibt sich so:

$$a_\nu = (2\nu + 1) \cdot i^\nu \cdot \frac{A'_\nu}{C'_\nu}.$$

Für kleine  $\alpha$  ist also:

$$a_\nu = (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{\nu+1}{\nu} \cdot \frac{\alpha^{2\nu+1}}{1^2 \cdot 3^2 \cdot \dots (2\nu-1)^2} \cdot e^{i\alpha} \cdot \frac{f'_\nu}{h'_\nu + i\alpha \cdot k'_\nu}.$$

Für große  $\alpha$  ergeben (19) und (30a):

$$a_\nu = (2\nu + 1) \cdot i^{\nu+1} \cdot e^{i\alpha} \cdot \sin\left(\alpha - \frac{\nu-1}{2} \pi\right).$$

Der absolute Betrag dieses Wertes schwankt regelmäßig periodisch zwischen 0 und  $(2\nu + 1)$  hin und her.

Von besonderem Interesse ist auch hier die Rayleighsche Welle. Der genaue Wert von  $a_1$  ist:

$$(64) \quad a_1 = 3 \cdot e^{i\alpha} \frac{\alpha \cdot \cos \alpha - (1 - \alpha^2) \cdot \sin \alpha}{i\alpha + (1 - \alpha^2)}.$$

Für unendlich kleine  $\alpha$  ergibt sich:

$$(65) \quad a_1 = 2 \cdot \alpha^3.$$

Der charakteristische Unterschied dieser Formel gegen (63) ist, daß dort noch der Faktor  $(m'^2 - 1)/(m'^2 + 2)$  hinzukommt, den man, wie wir noch sehen werden, bei Metallen auch nicht annähernd gleich 1 setzen darf, und der vor allen Dingen mit der Wellenlänge sehr stark variiert. Ein anderer sehr wichtiger Unterschied ist, daß in (65)  $a_1$  eine rein reelle Größe ist, während das richtige aus (63) berechnete  $a_1$  einen sehr beträchtlichen imaginären Teil hat. Dieser Teil bedingt, wie wir noch sehen werden, die Absorption in den kolloidalen Metallösungen.

17. Wir gehen nun über zur Diskussion der „magnetischen Schwingungen“, d. h. der Koeffizienten  $p_\nu$ . Für äußerst

kleine Teilchen ist Formel (59) nicht zu gebrauchen, da  $(1 - v_\nu)$  sich dann der Null nähert. Nach (57), ferner (29) und (30) ist:

$$(66) \quad \left\{ \begin{aligned} 1 - v_\nu &= \frac{1}{f'_\nu \cdot g_\nu} \cdot (f'_\nu \cdot g_\nu - f_\nu \cdot g'_\nu), \\ 1 - v_\nu &= \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(\nu + 1)(2\nu + 3)} \cdot \frac{1}{f'_\nu \cdot g_\nu} \cdot \left( 1 - \frac{1}{2\nu + 5} \cdot \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2!} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 \cdot 3}{(2\nu + 5)(2\nu + 7)} \cdot \frac{\alpha^4 + 2 \frac{2\nu + 5}{2\nu + 3} \alpha^2 \beta^2 + \beta^4}{4!} + \dots \right) \\ &= \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(\nu + 1)(2\nu + 3)} \cdot \frac{l_\nu}{f'_\nu \cdot g_\nu}. \end{aligned} \right.$$

Hier bedeutet also  $l_\nu$  ganz ähnlich wie die  $f'_\nu$ ,  $f_\nu$  usw. eine schnell konvergierende Potenzreihe in  $\alpha^2$  und  $\beta^2$ , die für kleine Teilchendurchmesser gleich 1 wird. Wir setzen nun weiter:

$$(67) \quad s_\nu = e^{i\alpha} \cdot \frac{l_\nu}{g_\nu} \cdot \frac{1}{h'_\nu + i\alpha k'_\nu} = u_\nu \cdot \frac{l_\nu}{f'_\nu \cdot g_\nu},$$

dann gibt die Formel (59) für  $p_\nu$ :

$$(68) \quad p_\nu = \frac{(-1)^\nu}{\nu \cdot (2\nu + 3)} \cdot \frac{\alpha^{2\nu+3}}{1^2 \cdot 3^2 \cdot \dots (2\nu - 1)^2} s_\nu \frac{m'^2 - 1}{1 + \frac{\nu + 1}{\nu} \cdot u_\nu}.$$

Für sehr kleine Durchmesser kann man annähernd setzen:

$$(69) \quad p_\nu = \frac{(-1)^\nu}{(2\nu + 1)(2\nu + 3)} \cdot \frac{\alpha^{2\nu+3}}{1^2 \cdot 3^2 \cdot \dots (2\nu - 1)^2} \cdot (m'^2 - 1).$$

Für große Durchmesser liefert (55), wenn man die Größen  $A_\nu$ ,  $A'_\nu$  usw. (54) nach (29a) und (19) berechnet:

$$(70) \quad p_\nu \sim (2\nu + 1) \cdot i^\nu \cdot e^{i\alpha} \cdot \frac{m' \cdot \sin\left(\alpha - \frac{\nu\pi}{2}\right) + i \cdot \cos\left(\alpha - \frac{\nu\pi}{2}\right)}{m' + 1}$$

Man kann also den Verlauf von  $p_\nu$  ganz ebenso beschreiben, wie es in (15) mit den  $a_\nu$  gemacht wurde.

Bei kleinen Teilchen wächst mit steigender Teilchengröße  $p_\nu$  ungefähr wie:

$$(71) \quad \left\{ \begin{aligned} p_\nu &\sim \alpha^{2\nu+3} \cdot \frac{C'_\nu}{1^2 \cdot 3^2 \cdot \dots (2\nu - 1)^2 \cdot (2\nu + 1)(2\nu + 3)}, \\ C'_\nu &= (m'^2 - 1) \cdot (-1)^\nu. \end{aligned} \right.$$

Der absolute Betrag von  $C'_\nu$  ist nicht sehr weit von 1 entfernt. Bei größeren Werten von  $\alpha$  biegt die Kurve der  $p_\nu$ -Werte ab und ändert sich schließlich bei sehr großen  $\alpha$  mit weiter wachsendem Teilchendurchmesser periodisch:

$$(72) \quad p_\nu \sim (2\nu + 1) \cdot c'_\nu.$$

$c'_\nu$  ist eine komplexe, periodisch sich ändernde Zahl, deren Amplitude nicht weit von 1 abliegt.

*Für die magnetischen Partialschwingungen gelten dieselben Sätze, wie für die elektrischen und zwar läuft die  $\nu$ -te magnetische Schwingung ungefähr parallel mit der  $(\nu + 1)^{\text{ten}}$  elektrischen.*

Durch Vergleichung der Formeln (69) und (70) mit (60) und (61) sieht man, daß der absolute Betrag von  $p_\nu$  im allgemeinen etwas unter dem von  $\alpha_{\nu+1}$  liegt.

Die erste magnetische Partialschwingung ist z. B. für alle Teilchengrößen stets von derselben Größenordnung, wie die zweite elektrische.

*Sehr kleine Teilchen strahlen seitlich stets nur die Rayleighsche Welle aus, bei den ganz groben Teilchen in kolloidaler Lösung kommt noch die zweite elektrische und die erste magnetische Partialschwingung hinzu.*

Ich werde also in dem unten zu bringenden Zahlenbeispiel im ganzen nur drei Koeffizienten, nämlich:  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $p_1$  zu berücksichtigen haben. Und zwar werde ich  $p_1$  für größere Teilchen nach der folgenden Formel berechnen:

$$(73) \quad p_1 = -2 \cdot \alpha^3 \cdot u_1 \frac{1 - v_1}{1 + 2w_1},$$

wo  $u_1$ ,  $v_1$ ,  $w_1$  ganz dieselben Größen sind, wie in (62). Für kleine Teilchen gilt die Näherungsformel:

$$(74) \quad p_1 = -\frac{\alpha^5}{15} \cdot (m^2 - 1).$$

18. Während die Annahme einer vollkommenen Leitfähigkeit bei den elektrischen Partialschwingungen zu Resultaten führte, die sich immerhin noch mit denen der exakten Theorie vergleichen ließen, liefert sie für die magnetischen Schwingungen völlig abweichende Resultate. Setzen wir in (55)  $\beta$  unendlich groß, so bekommen wir:

$$p_\nu = -(2\nu + 1) \cdot i^\nu \cdot \frac{A_\nu}{C_\nu}.$$

Also für kleine Durchmesser nach (27) und (29):

$$p_\nu = (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{\alpha^{2\nu+1}}{1^2 \cdot 3^2 \cdot \dots (2\nu-1)^2} e^{i\alpha} \cdot \frac{f_\nu}{h_\nu + i\alpha \cdot k_\nu},$$

ein Wert, der von ganz derselben Größenordnung ist, wie der unter der gleichen Annahme gefundene Wert von  $a_\nu$ .

*Nehmen wir an, daß die in dem Medium suspendierten Kügelchen vollkommene Leiter sind, so kommen wir dem verkehrten Resultat, daß die magnetische Partialschwingung  $\nu$ -ter Ordnung parallel geht mit der elektrischen Partialschwingung derselben Ordnungszahl (statt der nächsthöheren Ordnungszahl). Speziell für sehr feine Teilchen kommen wir so zu dem falschen Resultat, daß neben der Rayleighschen Welle die erste magnetische Schwingung ungefähr in derselben Größenordnung auftritt.*

J. J. Thomson, der zuerst den letzten Teil dieses Satzes bewies, zeigte bekanntlich schon, daß die Untersuchung der Polarisierung des von kolloidalen Metallösungen seitlich zerstreuten Lichtes ergibt, daß das Resultat falsch ist. Die eigentümlichen Polarisationserscheinungen, die F. Ehrenhaft<sup>1)</sup> und E. Müller<sup>2)</sup> später beobachtet haben, deuten keineswegs auf eine teilweise Gültigkeit der Annahme einer vollkommenen Leitfähigkeit hin. Wir werden weiter unten sehen, daß die exakte Theorie sie ganz ungezwungen erklärt.

Wir wollen, wegen der später folgenden zahlenmäßigen Diskussion, noch den Wert von  $p_1$  notieren:

$$(75) \quad p_1 = 3 \cdot e^{i\alpha} \frac{\sin \alpha - \alpha \cdot \cos \alpha}{1 + i\alpha}.$$

Für sehr kleine Werte von  $\alpha$  wird:

$$(76) \quad p_1 = \alpha^3.$$

Vergleichen wir (76) mit (65), so sehen wir, daß die Amplitude der magnetischen Schwingung bei sehr kleinen, vollkommen leitenden Partikelchen gerade die Hälfte der elektrischen sein müßte.

#### Die Partialwellen.

**19.** Für das folgende wird es nützlich sein eine Vorstellung zu haben, wie Intensität und Schwingungsrichtung

1) F. Ehrenhaft, Ann. d. Phys. 11. p. 489. 1903.

2) E. Müller, Ann. d. Phys. 24. p. 1. 1907.

der einzelnen Partialwellen (speziell der ersten) sich auf einer großen Kugel, in deren Zentrum das betrachtete Partikelchen liegt, von Punkt zu Punkt zu Punkt ändern.

Die Komponenten  $\mathfrak{E}_r$  und  $\mathfrak{H}_r$  brauchen wir nicht zu berücksichtigen, weil sie bei der Übertragung der Energie in den Außenraum nach dem Poyntingschen Satz gar nicht beteiligt sind. Es bleiben also nur die auf der Kugelfläche tangential verlaufenden Komponenten. Nun gilt aber nach (13) und (14) für jede Partialwelle:

$$E_\theta \cdot M_\theta + E_\varphi \cdot M_\varphi = 0,$$

d. h. die magnetischen Kraftlinien auf der Kugelfläche laufen überall senkrecht zu den elektrischen. Es genügt deshalb, um eine deutliche Vorstellung von der Strahlung zu bekommen, wenn man den Verlauf der elektrischen Kraftlinien auf der Kugelfläche angibt.

In den Fig. 3—10 sind die elektrischen Feldlinien auf einer das Teilchen umgebenden Kugelfläche für die vier

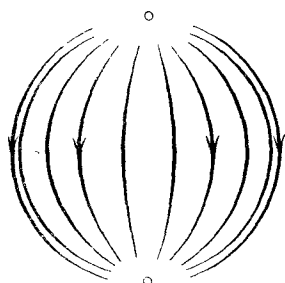


Fig. 3. Erste elektrische Partialschwingung.

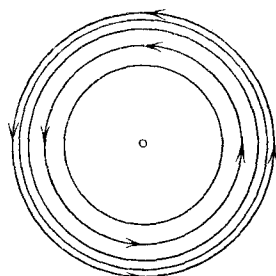


Fig. 4. Erste magnetische Partialschwingung.

ersten elektrischen und die vier ersten magnetischen Partialschwingungen gezeichnet. Als Ebene der Zeichnung ist die Ebene (1. 3.), d. h. die Schwingungsebene des Lichtstrahles gewählt, der die Wellen erregt. Es ist das eine Symmetrieebene des Vorganges, und man kann sich leicht zu der in den Figuren dargestellten vorderen Halbkugel die hinter der Zeichenebene liegende ergänzen, da die Kurven auf beiden ganz kongruent verlaufen. Bei den magnetischen Schwingungen ist  $E_r = 0$ , die Linien verlaufen also als geschlossene sphärische

Kurven, und zwar gibt es auf jeder der beiden Halbkugeln auf dem Äquator ( $\vartheta = \pi/2$ )  $\nu$  Zentralpunkte, in denen die Kraft Null ist und um die sich die Feldlinien, in  $\nu$  ver-

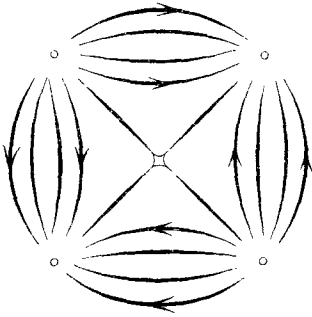


Fig. 5. Zweite elektrische Partialschwingung.

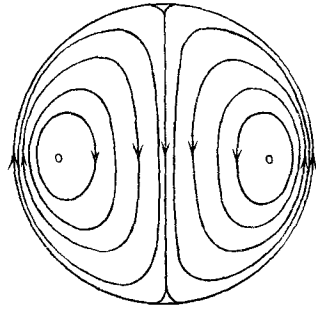


Fig. 6. Zweite magnetische Partialschwingung.

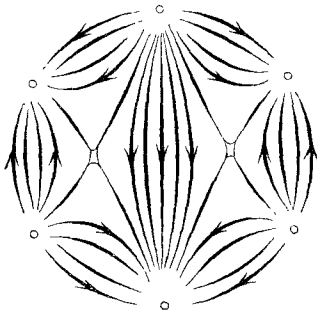


Fig. 7. Dritte elektrische Partialschwingung.

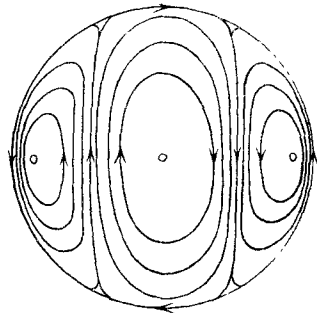


Fig. 8. Dritte magnetische Partialschwingung.

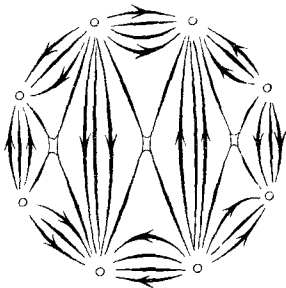


Fig. 9. Vierte elektrische Partialschwingung.

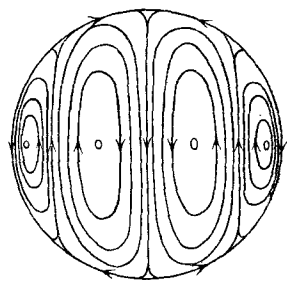


Fig. 10. Vierte magnetische Partialschwingung.



schiedenen Gruppen, herumschlingen. Bei den elektrischen Schwingungen verlaufen die Feldlinien dagegen in gewissen Kegelflächen, die alle durch  $\nu$  in der Zeichenebene liegende Kegeldurchmesser gehen. Die gezeichneten Kurven sind die Schnittkurven dieser Kegelflächen auf der Kugel. Diese Kurven laufen alle nach den  $\nu$  Polen aus, die durch die  $\nu$  Durchmesser ausgestochen werden. In Wirklichkeit biegen sich die Feldlinien aus der Kugeloberfläche heraus, um sich, je nach der Phase der Schwingung entweder im Innenraum oder im Außenraum zu schließen, da sie natürlich nicht Anfang und Ende haben können (abgesehen von den Linien unmittelbar am strahlenden Partikelchen).

Man kann sich nun auch leicht ein Bild von den magnetischen Feldlinien machen. Die Abbildungen Gruppe I geben ohne weiteres die magnetischen Feldlinien der Gruppe II und umgekehrt, wenn man sie um  $90^\circ$  dreht, d. h. Achse 1 und 2 vertauscht.

#### Die diffuse seitliche Strahlung.

20. Beobachtet wird in einer unendlichen Entfernung vom Teilchen, wir haben also in (52) einzusetzen:

$$K_\nu(-x) = e^{-ix},$$

wie aus Formel (19) hervorgeht. Dann ist weiter:

$$K'_\nu(-x) = -i \cdot e^{-ix},$$

also:

$$(77) \left\{ \begin{array}{l} E_{\vartheta a} = +i \cdot M_{\varphi a} = -i \cdot \frac{\lambda'}{2\pi} \cdot \frac{e^{-\frac{2\pi i r}{\lambda'}}}{r} \\ \quad \cdot \sum_1^\infty \left( \frac{a_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta} + \frac{p_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial \varphi} \right), \\ E_{\varphi a} = -i \cdot M_{\vartheta a} = -i \cdot \frac{\lambda'}{2\pi} \cdot \frac{e^{-\frac{2\pi i r}{\lambda'}}}{r} \\ \quad \cdot \sum_1^\infty \left( \frac{a_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \varphi} - \frac{p_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial \vartheta} \right). \end{array} \right.$$

Dabei ist angenommen, daß das durch die Lösung hindurchgehende Licht geradlinig polarisiert ist, und zwar so,

daß die elektrische Schwingungsrichtung die Achse 1 bildet. Nach (47) ist:

$$E_1 = -i \cdot M_2 = e^{\frac{2\pi i z}{\lambda'}}.$$

*Bezogen auf die Intensität des durchgehenden Lichtes als Einheit ist die Intensität des diffus zerstreuten Lichtes:*

$$(78) \quad \left\{ \begin{array}{l} J_\phi = \frac{\lambda'^2}{4\pi^2 \cdot r^2} \cdot \left| \sum_1^\infty \left( \frac{a_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta} + \frac{p_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial \varphi} \right) \right|^2, \\ J_\varphi = \frac{\lambda'^2}{4\pi^2 \cdot r^2} \cdot \left| \sum_1^\infty \left( \frac{a_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \varphi} - \frac{p_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial \vartheta} \right) \right|^2. \end{array} \right.$$

In diesen Formeln soll durch die geraden Striche angedeutet werden, daß von der zwischen ihnen stehenden komplexen Größe der absolute Betrag zu nehmen ist. Man erkennt aus (78), was ja von vornherein klar ist, daß die Intensität umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung  $r$  ist. Die beiden Intensitäten  $J_\phi$  und  $J_\varphi$  bedeuten die der zum Meridian ( $J_\phi$ ) und die der zum Breitenkreis ( $J_\varphi$ ) parallel schwingenden Komponente. Beide Komponenten haben im allgemeinen einen ganz bestimmten Phasenunterschied, den man finden kann, wenn man in der bekannten Weise die Phasen der beiden komplexen Größen in Formel (77) berechnet. Sieht man also beliebig schief zum durchgehenden Strahl auf die Lösung, so muß man im allgemeinen elliptisch polarisiertes Licht bekommen, vorausgesetzt, daß der durchgehende Strahl geradlinig polarisiert ist und daß die suspendierten Partikelchen so groß sind, daß außer der (für sich allein geradlinig polarisierten) Rayleighschen Strahlung auch noch höhere Partialwellen bemerkbar sind.

Auszunehmen sind hiervon aber alle Richtungen, die in den beiden Symmetrieebenen 1. 3. und 2. 3. liegen. Aus den Figuren des Abschnittes 19. kann man ohne weiteres entnehmen:

*Beleuchtet man die kolloidale Lösung mit geradlinig polarisiertem Licht und beobachtet in einer Richtung, die zu seiner elektrischen Schwingung senkrecht steht, so ist das seitlich zerstreute Licht geradlinig polarisiert, und zwar ist seine elektrische Schwin-*

gungsrichtung parallel zu der des durch die Lösung gehenden Strahles. Dreht man bei unveränderter Visionsrichtung die Schwingungsrichtung des durchgehenden Strahles um  $90^\circ$ , so bekommt man wieder geradlinig polarisiertes Licht, aber seine Schwingungsrichtung ist ebenfalls um  $90^\circ$  gegen die frühere gedreht.

Der erste Fall wird in unseren Formeln charakterisiert durch  $\vartheta = \pi/2$ , der zweite durch  $\varphi = \pm \pi/2$ .

So einfach der eben ausgesprochene Satz auch erscheinen mag, so wichtig kann er trotzdem vielleicht werden. Die Beobachtungen, die Hr. Steubing (vgl. 1.) über die Polarisation des seitlich zerstreuten Lichtes angestellt hat, haben nämlich ergeben, daß, auch wenn man in der vorgeschriebenen Weise mit vollkommen geradlinig polarisiertem Licht beleuchtet, die seitliche Ausstrahlung immer noch einen allerdings sehr kleinen Betrag unpolarisierten Lichtes neben dem überwiegenden linear polarisierten enthält. Ich neige sehr dazu, hieraus zu schließen, daß die in kolloidalen Lösungen suspendierten Partikelchen keine Kugeln sein können, selbst wenn auch die übrigen optischen Eigenschaften mit dieser Annahme in Einklang sein mögen.

Der Fall, daß man mit unpolarisiertem Licht beleuchtet, läßt sich nunmehr schnell erledigen. Man kann sich das unpolarisierte Licht einfach in zwei inkohärente Strahlen von gleicher Intensität zerlegt denken, die geradlinig polarisiert sind, und zwar den einen so, daß seine elektrische Schwingungsrichtung senkrecht auf der durch die Richtung des Strahles und den Visionsradius bestimmten Ebene steht, den anderen so, daß seine elektrische Schwingung in diese Ebene fällt. Man bekommt dann im ausgestrahlten Licht ebenfalls zwei inkohärente, senkrecht zueinander linear polarisierte Komponenten, aber im allgemeinen von verschiedener Intensität. Das heißt also: das ausgestrahlte Licht ist teilweise linear polarisiert.

*Geht durch die kolloidale Lösung ein unpolarisierter Lichtstrahl, so ist das seitlich zerstreute Licht stets teilweise linear polarisiert (niemals elliptisch). Und zwar ist die elektrische Schwingungsrichtung des polarisierten Anteils entweder senkrecht zu der durch Richtung des Strahles und Visionsradius bestimmten Ebene, oder sie fällt in diese Ebene, je nach der Größe der Teilchen und der Visionsrichtung.*

Dieser Satz ist hier natürlich nur unter der Annahme kugelförmiger Teilchen bewiesen, aber es ist wohl nicht zweifelhaft, daß er in dem Fall amorpher (also nicht dichroitischer) kolloidaler Lösungen stets gilt.

Bei Lösungen mit sehr kleinen Teilchen wird bekanntlich nur die zuerst genannte Polarisationsrichtung beobachtet, bei groben Teilchen kann aber, wie wir noch sehen werden, auch die zweite vorkommen.

**Intensität des senkrecht zum durchgehenden Strahl zerstreuten Lichtes.**

**21.** Da man im allgemeinen mit unpolarisiertem Licht beobachtet, so haben nur die beiden Hauptfälle: I.  $\vartheta = \pi/2$ , II.  $\varphi = \pm \pi/2$  für uns Interesse. In beiden Fällen ist  $E_\varphi = M_\varphi = 0$ , es bleibt also nur  $J_\vartheta$ , das wir in den zwei Fällen als  $J_I$  und  $J_{II}$  unterscheiden wollen.  $J_I$  ist die Intensität der Strahlung, deren Schwingungsrichtung senkrecht steht zur Visionsebene, wie wir kurz sagen wollen.  $J_{II}$  die Intensität des in der Visionsebene schwingenden Strahles. Zunächst ergeben (44) und (45) für die beiden Fälle:

$$(79) \left\{ \begin{array}{l} \text{I. } \vartheta = \frac{\pi}{2}, \quad \sin \varphi = v, \\ \frac{\partial P_v}{\partial \vartheta} = -H_v(v), \quad \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_v}{\partial \vartheta} = (1-v^2) \cdot H'_v(v) - v \cdot H_v(v). \end{array} \right.$$

$$(80) \left\{ \begin{array}{l} \text{II. } \varphi = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \sin \vartheta = \pm v, \\ \frac{\partial P_v}{\partial \vartheta} = \pm \{(1-v^2) \cdot H'_v(v) - v H_v(v)\}, \quad \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_v}{\partial \varphi} = \mp H_v(v). \end{array} \right.$$

Das ist in (78) einzusetzen. Wir wollen uns nun zuerst noch weiter beschränken auf den Fall, daß nur senkrecht zum Strahl beobachtet wird. Wir setzen also  $v = 0$  und wenden nun die Formeln (40), (41) an. Es ergibt sich:

$$(81) \left\{ \begin{array}{l} J_I = \frac{\lambda'^2}{4\pi^2 r^2} \cdot \left| -\frac{a_1}{2} + \sum_1^\infty (-1)^{\sigma+1} \cdot \frac{(2\sigma)_\sigma}{2^{2\sigma}} \cdot \left( \frac{a_{2\sigma+1}}{2(\sigma+1)} + p_{2\sigma} \right) \right|^2, \\ J_{II} = \frac{\lambda'^2}{4\pi^2 r^2} \cdot \left| \sum_1^\infty (-1)^{\sigma+1} \cdot \frac{(2\sigma)_\sigma}{2^{2\sigma}} \cdot \left( a_{2\sigma} - \frac{p_{2\sigma-1}}{2\sigma-1} \right) \right|^2. \end{array} \right.$$

Diese Formeln sind so geschrieben, daß in jedem Summanden zwei Koeffizienten von gleicher Größenordnung

stehen (vgl. 17.). In dem Zahlenbeispiel kann ich mich, wie schon öfter erwähnt, auf die Koeffizienten  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $p_1$  beschränken. Ich werde also mit folgenden Formeln rechnen:

$$(82) \quad \begin{cases} J_I = \frac{\lambda'^2}{4\pi^2 r^2} \cdot \left| \frac{a_1}{2} \right|^2, \\ J_{II} = \frac{\lambda'^2}{4\pi^2 r^2} \cdot \left| \frac{a_2 - p_1}{2} \right|^2. \end{cases}$$

$J_{II}$  hat nur bei den allergrößten Teilchen einen merklichen Wert und auch da überwiegt immer noch  $J_I$ . Es ist das die Intensität der Rayleighschen Strahlung, und zwar im rechten Winkel zu der sie erregenden elektrischen Schwingung, wo sie gerade ihr Maximum hat. Unter anderen Winkeln ist ihre Intensität:

$$J = J_I \cdot \sin^2 \vartheta$$

und ihre Gesamtstrahlung ist demnach:

$$R = J_I \cdot 2\pi r^2 \cdot \int_0^\pi \sin^3 \vartheta \cdot d\vartheta = \frac{8\pi}{3} \cdot r^2 \cdot J_I.$$

Danach kann man also, wenn man die Rayleighsche Strahlung in der Hauptrichtung mißt ( $J_I$ ), ihren Gesamtbetrag, d. h. also den Verlust, den der durchgehende Lichtstrahl durch sie erfährt, berechnen. Wir werden im folgenden stets die Größe:

$$(83) \quad R = \frac{2}{3\pi} \cdot \lambda'^2 \cdot \left| \frac{a_1}{2} \right|^2$$

angeben, die zugleich auch das Maß für  $J_I$  ist:

$$(84) \quad J_I = \frac{3}{8\pi} \cdot \frac{R}{r^2}.$$

Wie man den Gesamtbetrag der Strahlung II findet, werden wir in 26. sehen.

#### Strahlung vieler Partikelchen.

**22.** Wir haben uns bisher immer noch auf die Berechnung des von einem einzelnen Kügelchen diffus zerstreuten Lichtes beschränkt. Wir wollen nun weiter zu dem Fall übergehen, daß sehr viele Kügelchen in dem Medium fein verteilt sind, alle von demselben Durchmesser  $2\rho$  und von demselben optischen

Verhalten  $m'$ . Es trifft dann auf jedes einzelne Kugelchen nicht bloß der gerade durchgehende Strahl, sondern auch das von den anderen Kugelchen diffus zerstreute Licht. Der Einfluß dieser zweiten Ätherschwingung auf den Vorgang in jedem Kugelchen und die dadurch bewirkte Veränderung der ganzen seitlichen Ausstrahlung ist für äußerst kleine Teilchen von L. Lorenz theoretisch untersucht worden und J. C. Maxwell-Garnett hat die Konsequenzen der Lorenzschen Theorie für die Optik der kolloidalen Metallösungen rechnerisch verfolgt (vgl. Abschnitt 1). Es ergibt sich da, daß die suspendierten Teilchen doch schon sehr eng beisammen liegen müssen, damit die Rückwirkung der seitlichen Ausstrahlung auf den Strahlungsvorgang selber bemerkbar sein soll.

*Die wässerigen kolloidalen Lösungen der Metalle werden wir im folgenden als optisch unendlich verdünnt betrachten, und die ganze seitliche Ausstrahlung einfach durch Multiplikation der Strahlung, die beim Vorhandensein eines einzigen Teilchens diffus zerstreut würde, mit der Zahl der vorhandenen Teilchen berechnen.*

Wenn man übrigens Bedenken gegen die Zulässigkeit dieser Annahme hätte, so könnte man sie leicht experimentell prüfen, indem man die Lösung etwas weiter verdünnte. Ist unsere Annahme richtig, so muß die Farbe der Lösung dabei unverändert bleiben, die Absorption in allen Teilen des Spektrums sich als proportional der Konzentration erweisen. Wäre dagegen die Annahme falsch, so müßte dabei ein Farbumschlag eintreten, wie ihn Kirchner und Zsigmondy an konzentrierten Goldlösungen in Gelatine beobachtet haben (vgl. Abschnitt 1). Soviel ich weiß, ist es bisher noch nicht gelungen, derartig konzentrierte wässrige Lösungen zu bekommen. Jedenfalls beschränke ich mich auf die gewöhnlichen verdünnten Lösungen.

Wir wollen im folgenden die Konzentration der Lösung angeben in Kubikmillimetern des Metalles pro Kubikmillimeter Wasser. Ist die Zahl der Teilchen im Kubikmillimeter  $N$ , ihr Durchmesser  $2\rho$ , also das Volumen  $V = 4\pi\rho^3/3$ , so ist die Konzentration:

$$(85) \quad C = N \cdot V = \frac{\lambda'^3}{6\pi^2} \cdot N \cdot \alpha^3.$$

Andererseits ist nach (83) der Gesamtbetrag der Rayleighschen Strahlung:

$$R = N \cdot \frac{2}{3\pi} \cdot \lambda'^2 \cdot \left| \frac{a_1}{2} \right|^2,$$

also:

$$(86) \quad R = F_1 \cdot C,$$

wo  $F_1$  eine Größe bedeutet, die von der Konzentration unabhängig ist, aber wohl von der Teilchengröße und der Wellenlänge abhängt. Wir werden für diese Größe  $F_1$  zwei verschiedene Formeln brauchen, je nachdem die Teilchen klein oder groß sind:

$$(87) \quad F_1 = \frac{24\pi^3}{\lambda'^4} \cdot V \cdot \left| \frac{a_1}{2\alpha^3} \right|^2,$$

$$(88) \quad F_1 = \frac{4\pi}{\lambda'} \cdot \frac{1}{\alpha^3} \cdot \left| \frac{a_1}{2} \right|^2.$$

Die erste Formel ist deswegen besonders bequem für kleine Teilchen, weil, wie wir schon wissen, für sehr kleine Kügelchen  $a_1$  proportional mit  $\alpha^3$  zunimmt. Nach (62) ist:

$$\frac{a_1}{2\alpha^3} = u_1 \frac{m'^2 - v_1}{m'^2 + 2w_1},$$

wo  $u_1, v_1, w_1$  für sehr kleine Teilchendurchmesser den Wert 1 annehmen. Es ist also:

$$(89) \quad F_1 = \frac{24\pi^3}{\lambda'^4} \cdot V \cdot \left| u_1 \frac{m'^2 - v_1}{m'^2 + 2w_1} \right|^2$$

und für äußerst kleine Teilchen:

$$(90) \quad F_1 = \frac{24\pi^3}{\lambda'^4} \cdot V \cdot \left| \frac{m'^2 - 1}{m'^2 + 2} \right|^2.$$

Diese Formel (90) ist nichts anderes als die bekannte Rayleighsche Formel.<sup>1)</sup> Sie sagt aus, daß bei konstant gehaltener Konzentration die Strahlung einer Lösung um so größer ist, je größer die Teilchen sind. Und zwar ist die Intensität der Strahlung dem Teilchenvolumen direkt proportional. Außerdem überwiegen im allgemeinen die kurzwelligen Strahlen, wenn der von den optischen Eigenschaften der Kügelchen abhängige Faktor  $(m'^2 - 1)/(m'^2 + 2)$  nicht sehr mit der Farbe des Lichtes variiert. Diese letzte Voraussetzung trifft nun allerdings bei den Metallen durchaus nicht zu, das Licht, das

1) Lord Rayleigh, Phil. Mag. (5) 47. p. 379. 1899.

kolloidale Metallösungen mit feinsten Teilchen diffus ausstrahlen, ist deswegen im allgemeinen nicht blau, wie das von anderen trüben Lösungen, sondern hat eine für das betreffende Metall charakteristische Farbe. Ist  $(m'^2 - 1)/(m'^2 + 2)$  konstant, so gilt das bekannte Rayleighsche Gesetz, daß für verschiedene Farben unter sonst gleichen Umständen die Strahlung proportional mit  $\lambda'^{-4}$  ist.

Die Formel (88) kann uns dazu dienen, die Gesetze der Rayleighschen Strahlung bis in das Gebiet der sehr groben Teilchen zu verfolgen. Wie wir gesehen haben (im Abschnitt 15) ändert sich  $\alpha_1$  bei sehr groben Teilchen als eine periodische Funktion des Teilchendurchmessers mit konstanter Amplitude. Aus (88) folgt demnach, daß bei konstanter Konzentration die Rayleighsche Strahlung mit wachsendem Teilchendurchmesser abnimmt, sobald die Teilchen grob sind. Und zwar ist die Rayleighsche Strahlung schließlich, abgesehen von periodischen Schwankungen, dem Teilchenvolumen umgekehrt proportional.

*I. Bei konstant bleibender Konzentration nimmt die Rayleighsche Strahlung bei sehr feiner Verteilung zu, wenn der Teilchendurchmesser wächst, und zwar ungefähr proportional dem Teilchenvolumen, sie erreicht aber, nachdem die Teilchen schon ziemlich grob geworden sind, ein Maximum und nimmt von da an dauernd schnell ab, wenn die Verteilung noch gröber wird; wobei allerdings immer schwächer und schwächer werdende Maxima sich periodisch einstellen können.*

*II. Bestehen die Kügelchen aus vollkommen leitendem oder überhaupt vollkommen weißem Material, so ist der Teilchendurchmesser, bei welchem das Maximum der Strahlung erreicht wird, proportional der Wellenlänge, und der Maximalwert der Strahlung selber ist umgekehrt proportional der Wellenlänge.*

Der zweite Satz, der unmittelbar aus Formel (88) abzulesen ist, gilt natürlich für kolloidale Metallösungen nicht.

Man könnte das Auftreten dieses Strahlungsmaximums, das auch bei Trübungen durch nicht leitende Körper (Mastixtrübung, Dampfstrahl usw.) auftreten muß, allerdings an einer anderen Stelle, wie bei Leitern, mit einigen Vorbehalten vielleicht als *optische Resonanz* bezeichnen. Man muß dabei aber ja im Auge behalten, daß diese „optische Resonanz“ nur ganz flache Maxima mit sich bringt, und daß demgemäß das



Energiespektrum der diffusen Strahlung auch bei genauer Gleichheit aller trübenden Teilchen nur geringe Erhebungen über einen Durchschnittswert zeigen wird, wenn die Teilchen groß geworden sind. Das ausgestrahlte Licht wird daher bei trüben Körpern mit nicht leitenden Partikelchen (Dampfstrahl, Mastixtrübung) schließlich nahezu weiß, mit einer nur schwach hervortretenden Farbennuance. Ähnlich verhalten sich auch die kolloidalen Metallösungen; wie wir sehen werden, tritt z. B. bei Gold im allgemeinen das Gelb etwas hervor, entsprechend der gelben Eigenfarbe.

### Rayleighsche Strahlung von Goldlösungen.

23. Ich beginne nun, die optischen Eigenschaften einer Suspension winzig kleiner Goldkügelchen in Wasser zu berechnen, zunächst die Rayleighsche Strahlung. Ich lege folgende Zahlen zugrunde, die sich ergeben, wenn man durch die von Hagen und Rubens<sup>1)</sup> gemessenen Zahlenwerte eine möglichst glatte Kurve zieht. Nur den Wert des Reflexionsvermögens im Violett, der von Hagen und Rubens sicher zu klein angegeben wird<sup>2)</sup>, habe ich etwas verändert.

$\lambda$	$R$ (H. u. R.)	$r \cdot \kappa$ (H. u. R.)	$R$ ang.	$r \cdot \kappa$ ang.	$m$	$m'^2$	$\lambda'$
420	0,293	1,72	0,332	1,70	$1,70 - i \cdot 1,70$	$0,00 - i \cdot 3,20$	313
450	0,331	1,73	0,338	1,72	$1,73 - i \cdot 1,72$	$-0,017 - i \cdot 3,32$	336
500	0,470	2,07	0,480	2,02	$1,10 - i \cdot 2,02$	$-1,60 - i \cdot 2,49$	374
525	—	—	0,613	2,23	$0,79 - i \cdot 2,23$	$-2,45 - i \cdot 1,98$	393
550	0,740	2,32	0,730	2,45	$0,57 - i \cdot 2,45$	$-3,20 - i \cdot 1,57$	412
600	0,844	2,91	0,850	2,96	$0,38 - i \cdot 2,96$	$-4,84 - i \cdot 1,26$	450
650	0,889	3,58	0,888	3,54	$0,41 - i \cdot 3,54$	$-6,97 - i \cdot 1,63$	487

In dieser Tabelle enthält die erste Kolumne die Wellenlänge der betreffenden Farbe im Vakuum, die zwei folgenden das Reflexions- und das Absorptionsvermögen nach Hagen und Rubens, die dritte und vierte Kolumne die von mir zur Berechnung gewählten Zahlen,  $m$  ist der daraus berechnete komplexe Brechungsexponent des Goldes, bezogen auf das Vakuum,  $m'^2$  das Quadrat des komplexen Brechungsexponenten,

1) E. Hagen u. H. Rubens, Ann. d. Phys. 8. p. 1 u. 432. 1903.

2) Vgl. E. Hagen u. H. Rubens, l. c. p. 453.

bezogen auf Wasser ( $m'^2 = m^2/m_0^2$ ), endlich  $\lambda'$  die Wellenlänge in Wasser.

Ferner will ich im folgenden noch eine praktische Abkürzung einführen:

$$(91) \quad \frac{a_1}{2 a^3} = a_1.$$

Die Rayleighsche Strahlung berechnet sich dann nach (87) als:

$$(92) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_1 = \frac{24 \pi^3}{\lambda'^4} \cdot V \cdot |a_1|^2, \\ a_1 = u_1 \cdot \frac{m'^2 - v_1}{m'^2 + 2 w_1}. \end{array} \right.$$

Die Strahlung für unendlich feine Partikelchen ergibt sich, wenn man  $u_1, v_1, w_1$  alle drei gleich 1 setzt. Für Gold bekommt man folgende Werte für  $(a_1)_0 = (m'^2 - 1)/(m'^2 + 2)$ :

$\lambda =$	420	450	500	525
	0,579 - i. 0,675	0,602 - i. 0,666	0,807 - i. 1,180	1,330 - i. 1,440
$\lambda =$	550	600	650	
	1,925 - i. 1,211	1,880 - i. 0,391	1,545 - i. 0,180	

also jedenfalls ganz andere, als man bei unendlich großer Leitfähigkeit finden würde. Für vollkommene Leiter ergibt nämlich die Formel (65):

$$(a_1)_0 = 1$$

ganz unabhängig von der Wellenlänge. Allgemein hat für Metalle  $a_1$  die Form:

$$a_1 = a'_1 - i \cdot a''_1$$

und es ist  $|a_1|^2 = a'^2_1 + a''^2_1$ . Um den Unterschied gegen vollkommene Leiter, für die  $|a_1|^2 = 1$  wäre, gerade im Fall der Strahlung recht deutlich hervortreten zu lassen, will ich auch noch die Werte  $|a_1|^2$  für Gold hinschreiben:

420	450	500	525	550	600	650
0,790	0,805	2,05	3,84	5,18	3,70	2,42

Wir können uns nun schon ein Bild von dem Energiespektrum der seitlichen Ausstrahlung von sehr kleinen Teilchen machen, da sie ja gleich dem Produkt aus Konzentration, Teilchenvolumen und der Größe  $24 \pi^3 \cdot |a_1|^2 / \lambda'^4$  ist.

Die folgende Tabelle gibt diese Größe sowohl für vollkommen leitende Kugeln als auch für Goldkugeln:

	420	450	500	525
$\frac{24 \pi^3}{\lambda'^4} \cdot 1$	$7,76 \cdot 10^{16}$	$5,85 \cdot 10^{16}$	$3,81 \cdot 10^{16}$	$3,13 \cdot 10^{16}$
$\frac{24 \cdot \pi^3}{\lambda'^4} \cdot  a_1 ^2$	$6,12 \cdot 10^{16}$	$4,71 \cdot 10^{16}$	$7,77 \cdot 10^{16}$	$11,95 \cdot 10^{16}$
	550	600	650	
$\frac{24 \pi^3}{\lambda'^4} \cdot 1$	$2,59 \cdot 10^{16}$	$1,82 \cdot 10^{16}$	$1,315 \cdot 10^{16}$	
$\frac{24 \cdot \pi^3}{\lambda'^4} \cdot  a_1 ^2$	$13,37 \cdot 10^{16}$	$6,70 \cdot 10^{16}$	$3,17 \cdot 10^{16}$	

Als Längeneinheit habe ich hier, was ich auch stets im folgenden tun werde, das Millimeter gewählt.

*Mit Ausnahme des äußersten Blau und des Violett ist die Strahlung der Goldkugeln stärker als die von vollkommen leitenden Kugeln sein würde.*

Man könnte also vielleicht sagen, daß die Goldatome auf die Lichtwellen resonieren, und zwar am besten auf grüngelb. Man müßte dann aber annehmen, daß sie in größeren Teilchen besser mit dem schwingenden Äther gekoppelt sind, als in kleinen, weil die Ausstrahlung mit dem Volumen der Teilchen wächst.

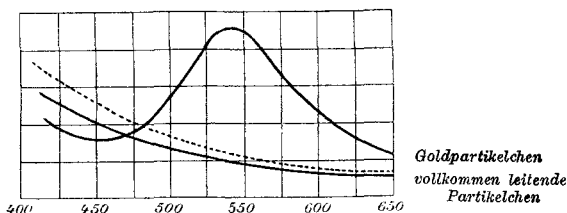


Fig. 11. Ausstrahlung einer unendlich feinen Suspension.

Die Fig. 11 stellt die Ausstrahlung kleiner Goldteilchen und kleiner vollkommen leitender Partikelchen noch einmal graphisch dar. (Die punktierte Kurve gibt die Ausstrahlung der letzteren nach Hinzufügung der ersten magnetischen Schwingung (vgl. 18.) wieder). Die zuletzt genannte Strahlung folgt ganz genau dem Rayleighschen Gesetz (proportional  $\lambda'^{-4}$ ).

Um die Strahlung auch für gröbere Verteilungen zu finden, mußte ich  $u_1$ ,  $v_1$ ,  $w_1$  berechnen, die sich aus Reihen nach  $\alpha^2$  (bzw.  $\beta^2 = m'^2 \cdot \alpha^2$ ) zusammensetzen. Ich führte die Rechnung für die in der ersten Kolumne der folgenden Tab. I verzeichneten Werte von  $\alpha^2$  aus, zugleich berechnete ich  $a_1$  auch für den Fall eines vollkommenen Leiters für dieselben  $\alpha^2$ .

Tabelle I.  
Werte des Koeffizienten  $a_1 = a_1/2a^3$ .

$a^2$	Vollkommener Leiter	Gold			
		420	450	500	525
		Gold			
0	1,00	0,579 — $i$ . 0,675	0,602 — $i$ . 0,666	0,807 — $i$ . 1,180	1,380 — $i$ . 1,440
0,2	1,04 — $i$ . 0,065	0,484 — $i$ . 0,755	0,505 — $i$ . 0,743	0,528 — $i$ . 1,312	0,850 — $i$ . 1,823
0,4	1,04 — $i$ . 0,188	0,343 — $i$ . 0,750	0,368 — $i$ . 0,757	0,216 — $i$ . 1,211	0,263 — $i$ . 1,640
0,6	0,961 — $i$ . 0,318	0,224 — $i$ . 0,699	0,244 — $i$ . 0,706	0,042 — $i$ . 1,029	— 0,028 — $i$ . 1,347
0,8	0,831 — $i$ . 0,410	0,145 — $i$ . 0,632	0,156 — $i$ . 0,640	— 0,047 — $i$ . 0,849	— 0,114 — $i$ . 1,061
1,0	0,638 — $i$ . 0,437	0,094 — $i$ . 0,559	0,100 — $i$ . 0,566	— 0,056 — $i$ . 0,715	— 0,126 — $i$ . 0,855
1,5	0,405 — $i$ . 0,366	0,038 — $i$ . 0,401	0,043 — $i$ . 0,406	— 0,044 — $i$ . 0,480	— 0,075 — $i$ . 0,554
2,0	0,265 — $i$ . 0,256	0,028 — $i$ . 0,297	0,031 — $i$ . 0,299	— 0,015 — $i$ . 0,349	— 0,029 — $i$ . 0,395
2,6	0,190 — $i$ . 0,176	0,026 — $i$ . 0,225	—	—	—
<hr/>					
$a^3$		Gold			
		350	600	650	
0		1,925 — $i$ . 1,211	1,880 — $i$ . 0,391	1,545 — $i$ . 0,180	
0,2		1,602 — $i$ . 2,050	2,190 — $i$ . 0,977	1,920 — $i$ . 0,515	
0,4		0,975 — $i$ . 2,040	1,750 — $i$ . 1,874	1,767 — $i$ . 1,080	
0,6		0,057 — $i$ . 1,719	0,807 — $i$ . 1,980	1,233 — $i$ . 1,492	
0,8		— 0,107 — $i$ . 1,306	0,160 — $i$ . 1,612	0,673 — $i$ . 1,431	
1,0		— 0,134 — $i$ . 1,014	0,095 — $i$ . 1,240	0,353 — $i$ . 1,191	
1,5		— 0,079 — $i$ . 0,627	0,009 — $i$ . 0,721	0,124 — $i$ . 0,718	
2,0		— 0,022 — $i$ . 0,435	0,032 — $i$ . 0,479	0,096 — $i$ . 0,471	
2,5		—	—	—	

Ich habe darauf die Strahlung berechnet (87):

$$F_1 = \frac{24 \cdot \pi^3}{\lambda'^4} \cdot V \cdot \left| \frac{a_1}{2 \alpha^3} \right|^2 = \frac{4 \pi}{\lambda'} \cdot \alpha^3 \cdot |a_1|^2.$$

Die zu jedem Wert von  $\alpha^2$  gehörenden Teilchendurchmesser:

$$2 \varrho = \frac{\lambda'}{\pi} \cdot \sqrt{\alpha^2}$$

kann man aus folgender Tabelle entnehmen:

$\alpha^2$	$\lambda = 420$	450	500	525	550	600	650
0,2	44,6	47,8	53,2	55,9	58,6	64,0	69,3
0,4	63,1	67,6	75,2	79,1	82,9	90,5	98,1
0,6	77,3	82,9	92,2	96,8	101,5	110,8	120,1
0,8	89,3	95,8	106,5	111,8	117,2	128,0	138,7
1,0	99,8	107,0	119,0	125,0	131,0	143,0	155,0
1,5	122,2	131,1	145,8	153,1	160,5	175,2	190,0
2,0	141,1	151,3	168,3	176,8	185,3	202,2	219,2
2,5	157,7	169,1					

Teilchendurchmesser in  $\mu\mu$ .

Die Kurven, die die Abhängigkeit der Strahlung vom Teilchendurchmesser wiedergeben, sind in Fig. 12 ausgeführt.

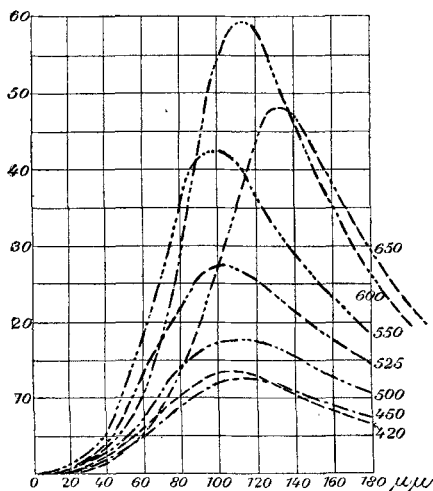


Fig. 12. „Optische Resonanz“ von Goldkugeln.

Die Abszissen sind die Teilchendurchmesser in  $\mu\mu$ , die Ordinaten geben die Gesamtstärke der Strahlung  $R$ , die von einem

Kubikmillimeter einer Lösung von der Konzentration  $10^{-6}$  (1 cbmm Gold pro Liter Wasser) ausgeht, und zwar in Promille der Stärke des durch einen Quadratmillimeter hindurchgehenden Lichtbündels.

Die Größe  $F_1$  bekommt man also aus den durch die Ordinaten dargestellten Zahlen durch Multiplikation mit  $10^3$ . Zum Vergleich habe ich in Fig. 13 die entsprechenden Kurven (lediglich der Rayleighschen Strahlung) in demselben Maßstab auch für Kügelchen eines vollkommenen Leiters gezeichnet. Die Durchmesser, bei denen das Maximum der Strahlung erreicht wird, sind hier den Wellenlängen  $\lambda'$  proportional, und zwar ist:

$$2 \varrho_{\text{Max.}} = 0,324 \cdot \lambda'.$$

Die Maxima nehmen mit wachsender Wellenlänge wie  $1/\lambda'$  ab.

Die Ausstrahlung der Goldteilchen ist, abgesehen von Blau und Violett, durchweg bedeutend größer als die der vollkommen leitenden Teilchen. Es ist, wie schon oben gesagt wurde, als ob zu der „Resonanz“ der Teilchen noch die Resonanz der Goldatome im Gelb hinzukäme. Am höchsten geht

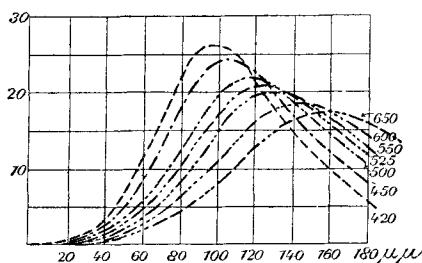


Fig. 13. „Optische Resonanz“ von vollkommen leitenden Kügelchen.

die Kurve für  $600 \mu\mu$  (also Orangegelb) hinauf. Die Durchmesser der stärkst strahlenden Teilchen sind:

	420	450	500	525	550	600	650
$2 \varrho_{\text{Max.}}$	105	111	110	100	96	113	131
$\lambda'$	113	336	374	393	412	450	487
$\frac{2 \varrho \cdot \text{Max.}}{\lambda'}$	0,336	0,331	0,294	0,255	0,233	0,252	0,269

Also  $2 \varrho_{\text{Max.}}$  liegt im allgemeinen zwischen  $\lambda'/4$  und  $\lambda'/3$ .

Aus den Kurven Fig. 12 kann man leicht die Energiespektren der Ausstrahlungen bei bestimmten Teilchengrößen gewinnen. Man kann aus den Kurven folgende Zahlen entnehmen:

$2\varrho$	420	450	500	525	550	600	650
20	0,262	0,199	0,338	0,546	0,637	0,299	0,139
40	2,10	1,60	2,72	4,62	5,90	2,92	1,35
60	6,2	5,0	8,0	13,7	19,7	12,3	5,9
80	10,4	9,1	14,1	22,9	37,8	33,0	14,7
100	13,2	12,0	17,2	27,1	42,3	55,5	29,0
120	12,5	12,0	17,1	25,0	36,0	57,5	45,0
140	10,0	10,5	15,0	20,8	27,9	44,5	46,2
160	7,9	8,5	12,4	17,1	22,5	33,3	36,8
180	6,3	7,2	10,4	13,8	17,7	25,0	28,0

Mit diesen Zahlen sind die Kurven in Fig. 14 konstruiert. Man sieht aus ihnen:

*Kleine kugelförmige Goldpartikelchen müssen im Ultramikroskop gelbgrün aussehen. Je größer sie werden, um so mehr verändert sich ihre Farbe zu Gelb und zu Rotgelb. Bei konstant gehaltener Konzentration strahlen am stärksten Lösungen, deren Teilchendurchmesser zwischen 100 und 140  $\mu$  liegt, ihre Partikelchen senden hauptsächlich orangefarbenes Licht aus. Die stärkstrahlenden Lösungen sind deswegen im auffallenden Licht braun.*

Daß diese Farbenerscheinungen durch das spezielle optische Verhalten des Goldes bedingt sind, sieht man,

wenn man sich aus den „Resonanzkurven“ vollkommen leitender Kügelchen die entsprechenden Strahlungskurven konstruiert. Ich habe das in Fig. 15 für die Teilchengrößen  $2\varrho = 100, 120, 140$ ,

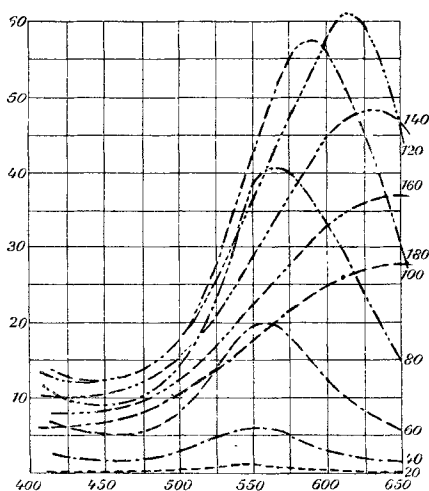


Fig. 14. Ausstrahlung kolloidaler Goldlösungen.

160, 180  $\mu\mu$  getan. Es sind das also alles schon recht grobe Trübungen. Während bei  $2\rho = 100$  die Kurve noch recht stark gegen Violett ansteigt, flacht sie sich mit wachsender Teilchendicke immer mehr ab und zeigt ein ganz schwaches Maximum, das bei 180  $\mu\mu$  schon bei einer Wellenlänge, die größer als 650  $\mu\mu$  ist, liegt. Das ausgestrahlte Licht ist also

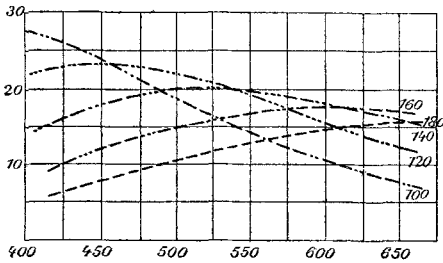


Fig. 15. Ausstrahlung von groben, vollkommen leitenden Kügelchen.

bei Teilchen, die größer als 100  $\mu\mu$  sind, in der Tat ziemlich weiß, mit einem schwachen Farbenton, der je nach der Größe der Teilchen blau, grün, gelb, rot sein kann. Bei 180  $\mu\mu$  müßte allerdings nach Fig. 15 Orange ziemlich deutlich sein; indessen liegt das nur

daran, daß wir uns hier auf die Rayleighsche Strahlung beschränkt haben. Würde man auch die folgenden Partialwellen berücksichtigen, so würden, wie eine leichte Überschlagsrechnung lehrt, alle Kurven und besonders die letzte noch weiter verflacht.

Ganz ähnliche Farben, wie bei den fingierten vollkommen leitenden Teilchen, wird man auch bei farblosen Partikelchen bekommen. Man wird aus den von mir benutzten Formeln z. B. leicht die Erscheinungen des farbigen Dampfstrahles berechnen können und wird da ähnliche Kurven bekommen, wie in Fig. 15 nur bei anderen Teilchengrößen.

#### Polarisation des diffus zerstreuten Lichtes von Goldlösungen.

24. Wir gehen nun weiter über zur Berechnung der Koeffizienten  $\alpha_2$  und  $p_1$ . Wir führen auch hier zur Bequemlichkeit neue Bezeichnungen ein:

$$(93) \quad \alpha_2 = -\frac{a_2}{2\alpha^3}, \quad p_1 = \frac{p_1}{2\alpha^3}.$$

Aus (62), (73), (74) folgt:

$$(94) \quad \alpha_2 = \frac{\alpha^2}{12} \cdot u_2 \frac{m'^2 - v_2}{m'^2 + 1,5 \cdot w_2}, \quad p_1 = u_1 \cdot \frac{v_1 - 1}{1 + 2w_1},$$



und für kleine Werte von  $\alpha$ :

$$(95) \quad a_2 = \frac{\alpha^2}{12} \cdot \frac{m'^2 - 1}{m'^2 + 1,5}, \quad p_1 = \frac{\alpha^2}{30} \cdot (1 - m'^2).$$

Hier sind  $u_1, v_1, w_1$  die schon bei der Berechnung von  $a_1$  benutzten Funktionen von  $\alpha^2$ ;  $u_2, v_2, w_2$  sind aus den Formeln (57) und (27) bis (30) zu entnehmen.

Aus den in Tab. II u. III (p. 426) verzeichneten Werten von  $a_2$  und  $p_1$  ersieht man, daß die zweite elektrische und die erste magnetische Partialwelle erst bei sehr grober Verteilung gegen die Rayleighsche Strahlung aufkommen können. Am stärksten treten sie ungefähr bei  $550 \mu\mu$  hervor. Berechnet man nach (82) für  $550 \mu\mu$  das Verhältnis  $J_{II}/J_I$  für die senkrecht zum durchgehenden Strahl austretende Strahlung:

$$(96) \quad \frac{J_{II}}{J_I} = \frac{|a_2 - p_1|^2}{|a_1|^2} = \frac{|a_2 + p_1|^2}{|a_1|^2},$$

so ergibt sich:

$\alpha^2$	klein	1	2
$J_{II}/J_I$	$0,016 \cdot \alpha^4$	0,059	0,642
$2 \varrho$	—	$131 \mu\mu$	$185,3 \mu\mu$

Mit Hilfe dieser Zahlen ist die eine Kurve Fig. 16 konstruiert. Man kann nun auch, wie es gewöhnlich geschieht, den Gehalt der Strahlung an polarisiertem Licht in Prozenten angeben, er ist:

$$P = \frac{J_I - J_{II}}{J_I + J_{II}}.$$

In unserem Beispiel ist:

$\alpha^2$	1	2
$P$	0,885	0,22
$2 \varrho$	$131 \mu\mu$	$185,3 \mu\mu$

Die Größe  $P$  wird durch die zweite Kurve in Fig. 16 dargestellt.

Wenn die Strahlung einer kolloidalen Goldlösung unter  $90^\circ$  zum hindurchgehenden Strahl nicht vollständig polarisiert ist, so folgt daraus, daß die Lösung Teilchen enthält, deren Durchmesser weit über  $100 \mu\mu$  liegen. Bei einer Teilchengröße von  $130 \mu\mu$  beträgt die Polarisation noch ungefähr 90 Proz.

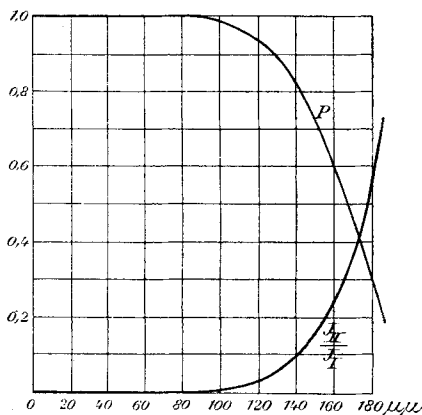


Fig. 16. Polarisation des unter  $90^\circ$  ausgestrahlten Lichtes von  $550 \mu\mu$  Wellenlänge.

Tabelle II.  
 Werte von  $a_2 = -\frac{a_2}{2 \cdot a^3}$ .

$a^2$	420	450	500	525	550	600	650
klein {	$a^2 \times$	$a^2 \times$	$a^2 \times$	$a^2 \times$	$a^2 \times$	$a^2 \times$	$a^2 \times$
	0,058 - i. 0,053	0,060 - i. 0,052	0,087 - i. 0,081	0,124 - i. 0,085	0,149 - i. 0,061	0,138 - i. 0,021	0,118 - i. 0,010
	1 0,047 - i. 0,053	0,049 - i. 0,058	0,063 - i. 0,101	0,102 - i. 0,124	0,152 - i. 0,114	0,157 - i. 0,043	0,132 - i. 0,023
	2 0,053 - i. 0,118	0,057 - i. 0,119	0,038 - i. 0,188	0,052 - i. 0,258	0,108 - i. 0,322	0,264 - i. 0,261	0,260 - i. 0,151
	2,5 0,039 - i. 0,140						

G. Mie.

Tabelle III.  
 Werte von  $p_1 = \frac{p_1}{2 \cdot a^3}$ .

$a^2$	420	450	500	525	550	600	650
klein {	$a^2 \times$	$a^2 \times$	$a^2 \times$	$a^2 \times$	$a^2 \times$	$a^2 \times$	$a^2 \times$
	0,033 + i. 0,107	0,034 + i. 0,111	0,087 + i. 0,083	0,115 + i. 0,066	0,140 + i. 0,052	0,195 + i. 0,042	0,266 + i. 0,054
	1 0,045 + i. 0,065	0,045 + i. 0,066	0,063 + i. 0,042	0,072 + i. 0,031	0,081 + i. 0,025	0,100 + i. 0,020	0,117 + i. 0,021
	2 0,064 + i. 0,072	0,065 + i. 0,073	0,078 + i. 0,051	0,087 + i. 0,042	0,094 + i. 0,037	0,110 + i. 0,036	0,123 + i. 0,041
	1,5 0,065 + i. 0,071						

Die Lösungen, deren Teilchen über  $100 \mu\mu$  dick sind, sind nun gerade die, die hauptsächlich gelb und rot strahlen. Wir werden im folgenden noch sehen, daß sie stets blau-durchsichtig sind.

*Nur die Teilchen von blauen Goldlösungen strahlen Licht aus, das unter  $90^\circ$  gegen den durchgehenden Strahl nur wenig polarisiert ist.*

Dieser Satz ist allerdings mit einem Vorbehalt auszusprechen, da er unter der Annahme kugelförmiger Teilchen abgeleitet ist. Es gibt jedenfalls auch blaue Lösungen, die unter  $90^\circ$  so gut wie vollständig polarisiertes Licht ausstrahlen. Aber sicher kann man wohl sagen, daß es keine roten Lösungen geben kann, die nicht unter  $90^\circ$  vollständig polarisiertes Licht geben. Wenn Beobachtungen ein anderes Resultat liefern<sup>1)</sup>, so folgt daraus mit Sicherheit, daß die angewandten Lösungen inhomogen waren, daß sie viele schwach strahlende, aber stark absorbierende Rotteilchen und verhältnismäßig wenige, stark strahlende Blauteilchen enthielten.

25. Wir wollen nun weiter dazu übergehen, die Polarisation des Lichtes bei verschiedenen Winkeln gegen den durchgehenden Strahl zu berechnen. Wir wollen den Winkel gegen die Richtung, von der der Strahl herkommt, mit  $\gamma$  bezeichnen. In den beiden Hauptfällen I und II (Abschnitt 21) ist dann:

$$\text{I. } \vartheta = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - \gamma, \quad v = \cos \gamma$$

$$J_I = \frac{\lambda'^2}{4 \pi^2 r^2} \cdot \left| \sum_1^\infty \left\{ \frac{a_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot H_\nu + \frac{p_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot (v \cdot H_\nu - (1-v^2) \cdot H_\nu') \right\} \right|^2.$$

$$\text{II. } \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \vartheta = \frac{\pi}{2} - \gamma, \quad v = \cos \gamma.$$

$$J_{II} = \frac{\lambda'^2}{4 \pi^2 r^2} \cdot \left| \sum_1^\infty \left\{ \frac{a_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot (v \cdot H_\nu - (1-v^2) \cdot H_\nu') + \frac{p_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot H_\nu' \right\} \right|^2.$$

Da es uns im folgenden nur auf den relativen Wert  $J_{II} : J_I$  ankommt, so wollen wir nur die Größen:

$$\mathfrak{J}_I = \frac{4 \pi^2 \cdot r^2}{\lambda'^2} \cdot \frac{J_I}{\alpha^6}, \quad \mathfrak{J}_{II} = \frac{4 \pi^2 \cdot r^2}{\lambda'^2} \cdot \frac{J_{II}}{\alpha^6}$$

1) Vgl. z. B. E. Müller, Ann. d. Phys. **24**. p. 13, 16. 1907.

berechnen. Ferner beschränken wir uns wie immer auf die ersten Glieder. Es ergibt sich:

$$(97) \quad \begin{cases} \mathfrak{I}_I = |a_1 - (a_2 - p_1) \cdot \cos \gamma|^2, \\ \mathfrak{I}_{II} = |a_1 \cdot \cos \gamma - a_2 \cdot \cos 2\gamma + p_1|^2. \end{cases}$$

Hier sind  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $p_1$  die Größen, deren Werte aus den Tab. I, II, III zu entnehmen sind. Durch graphische Interpolation findet man aus diesen Tabellen:

$$\begin{array}{ll} 2\varrho = 160 \mu\mu & 180 \mu\mu \\ a_1 = -0,08 - i \cdot 0,63 & -0,03 - i \cdot 0,47 \\ a_2 = 0,15 - i \cdot 0,22 & 0,12 - i \cdot 0,30 \\ p_1 = 0,09 + i \cdot 0,03 & 0,09 + i \cdot 0,03 \end{array}$$

für  $\lambda = 550 \mu\mu$ .

Setzt man dies in (97) ein, so gibt  $\mathfrak{I}_I + \mathfrak{I}_{II}$  die Gesamtstrahlung in ihrer Abhängigkeit vom Winkel  $\gamma$ ,  $\mathfrak{I}_I - \mathfrak{I}_{II}$  den Überschuß des polarisierten Lichtes über das unpolarisierte,  $P = (\mathfrak{I}_I - \mathfrak{I}_{II})/(\mathfrak{I}_I + \mathfrak{I}_{II})$  ist der prozentuale Gehalt an polarisiertem Licht. Da es uns nur auf relative Werte ankommt, habe ich die einzelnen Werte  $\mathfrak{I}$  durch  $(\mathfrak{I}_I + \mathfrak{I}_{II})_{90^\circ}$  dividiert; d. h. ich habe alles auf die unter  $\gamma = 90^\circ$  stattfindende Strahlung als Einheit bezogen. Die berechneten Zahlen sind:

$2\varrho = 160 \mu\mu$						
	$0^\circ$	$20^\circ$	$40^\circ$	$60^\circ$	$80^\circ$	$90^\circ$
Gesamte } Strahlung	0,64	0,67	0,75	0,88	0,97	1,00
Polarisiert	0	0,02	0,06	0,18	0,44	0,62
$P$	0	0,03	0,09	0,21	0,46	0,62
	$100^\circ$	$120^\circ$	$140^\circ$	$160^\circ$	$180^\circ$	
Gesamte } Strahlung	1,06	1,35	2,01	2,76	3,17	
Polarisiert	0,80	0,97	0,72	0,29	0	
$P$	0,76	0,72	0,36	0,10	0	
$2\varrho = 180 \mu\mu$						
	$0^\circ$	$20^\circ$	$40^\circ$	$60^\circ$	$80^\circ$	$90^\circ$
Gesamte } Strahlung	0,12	0,17	0,37	0,68	0,95	1,00
Polarisiert	0	-0,02	-0,10	-0,15	+0,06	0,31
$P$	0	-0,11	-0,27	-0,22	+0,06	0,31
	$100^\circ$	$120^\circ$	$140^\circ$	$160^\circ$	$180^\circ$	
Gesamte } Strahlung	1,04	1,33	2,16	3,30	3,85	
Polarisiert	0,62	1,10	0,65	0,35	0	
$P$	0,60	0,82	0,30	0,10	0	

In beiden Fällen ist das Maximum der Polarisation also von  $90^\circ$  nach der Seite des wachsenden  $\gamma$  verschoben, und zwar im einen Fall ( $2\rho = 160\ \mu\mu$ ) etwa nach  $\gamma = 110^\circ$ , im anderen Fall ( $180\ \mu\mu$ ) nach  $\gamma = 120^\circ$ . Daß gerade diese Winkel herauskommen, liegt wahrscheinlich an der speziellen

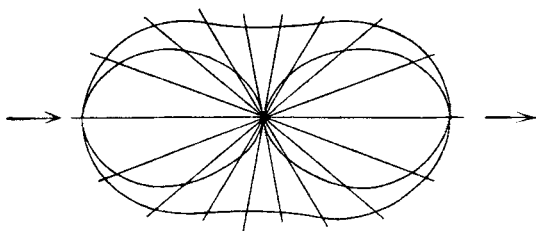


Fig. 17. Strahlungsdiagramm eines unendlich kleinen Goldkügelchens.

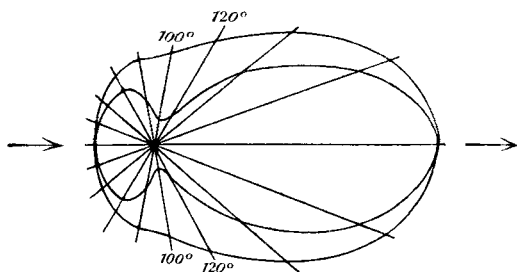


Fig. 18. Strahlungsdiagramm eines Goldkügelchens von  $160\ \mu\mu$  Durchm.

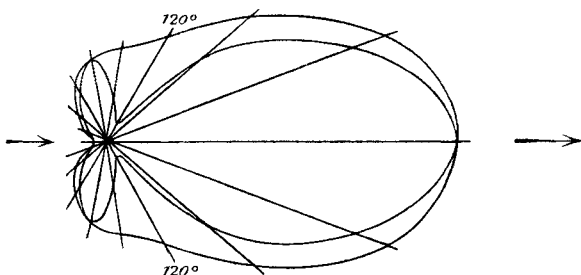


Fig. 19. Strahlungsdiagramm eines Goldkügelchens von  $180\ \mu\mu$  Durchm.

optischen Natur des Goldes, da für andere Metalle experimentell meistens kleinere Winkel gefunden worden sind. Das negative Vorzeichen vor einigen Zahlen im Falle  $2\rho = 180\ \mu\mu$  bedeutet, daß hier ein Überschuß von polarisiertem Licht vorhanden ist, das senkrecht zur Rayleighschen Strahlung schwingt.

Das Auffälligste an den gefundenen Zahlen ist aber die große Veränderlichkeit der Werte mit dem Strahlungswinkel. Es überwiegt bei den großen Teilchen ganz außerordentlich stark die Ausstrahlung nach der Seite hin, nach welcher der durch die Lösung gehende Lichtstrahl hingeht. Ich habe diese Verhältnisse durch einige Strahlungsdiagramme anschaulich zu machen versucht, indem ich die Intensität der Strahlung als Länge auf die von dem Teilchen ausgehenden Radienvektoren abtrug. Die äußeren Kurven in den Figg. 17—20 schneiden

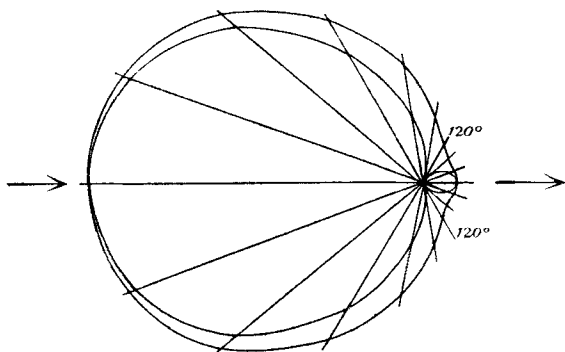


Fig. 20. Strahlungsdiagramm eines fingierten vollkommen leitenden, unendlich kleinen Kugelchens.

von den Radien Stücke ab, die der Intensität der gesamten Strahlung proportional sind, die inneren Kurven geben ebenso die *unpolarisierte* Strahlung, das Zwischenstück des Radiusvektors ist also der polarisierten Strahlung proportional.

Zusammenfassend können wir sagen:

*Ist das Polarisationsmaximum des seitlich zerstreuten Lichtes einer trüben Lösung von  $90^\circ$  nach der Seite der wachsenden  $\gamma$  verschoben, so ist das ein sicheres Zeichen, daß die Lösung sehr grobe Teilchen enthält. Zugleich muß dann die seitliche Strahlung nach der Seite hin, nach welcher der sie erregende Lichtstrahl geht ( $\gamma > 90^\circ$ ) ganz außerordentlich viel intensiver sein, als nach der anderen Seite ( $\gamma < 90^\circ$ ).*

Ich habe zum Vergleich noch das Strahlungsdiagramm für sehr feine Teilchen, und auch das für sehr feine Teilchen eines fingierten vollkommenen Leiters konstruiert (Figg. 17, 20).

Sieht man das letztere an, so bemerkt man, daß die Intensitätsverhältnisse gerade die umgekehrten sind, wie bei den groben Goldteilchen. Sollte also noch irgend ein Zweifel möglich sein,

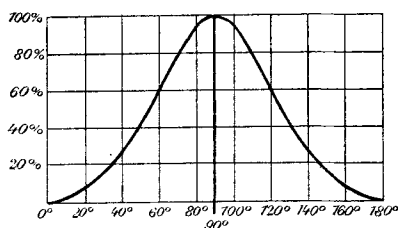


Fig. 21. Polarisation des diffus zerstreuten Lichtes bei unendlich feinen Teilchen.

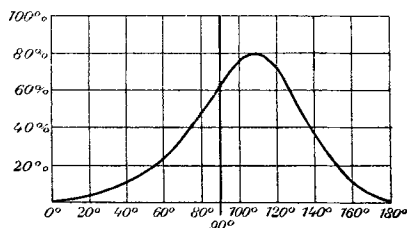


Fig. 22. Polarisation des diffus zerstreuten Lichtes bei der Teilchengröße 160  $\mu\text{m}$ .

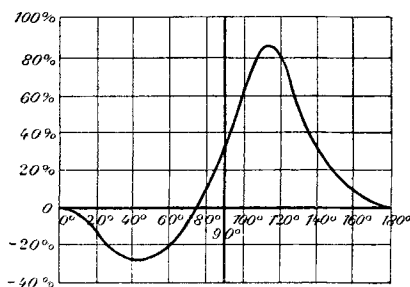


Fig. 23. Polarisation des diffus zerstreuten Lichtes bei der Teilchengröße 180  $\mu\text{m}$ .

daß die hier gebrachte Erklärung der von Herrn F. Ehrenhaft<sup>1)</sup> und Herrn E. Müller<sup>2)</sup> beobachteten Polarisationserscheinungen richtig ist, so könnte man die Frage durch Ver-

1) F. Ehrenhaft, Ann. d. Phys. 11. p. 489. 1903.

2) E. Müller, Ann. d. Phys. 24. p. 1. 1907.

gleichung der unter verschiedenen Winkeln ausgestrahlten Intensitäten wahrscheinlich schon mit bloßem Auge sehr leicht entscheiden.

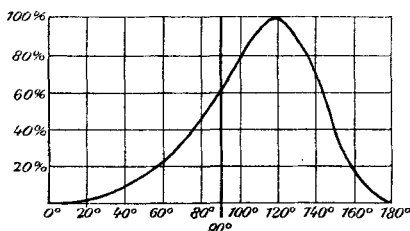


Fig. 24. Polarisation des diffus zerstreuten Lichtes von fingierten vollkommen leitenden, unendlich feinen Teilchen.

Die Kurven der Größe  $P$  (Fig. 21—24) bedürfen keiner weiteren Erläuterung.

#### Die Absorption trüber Medien.

26. Um die Absorption zu berechnen, werden wir untersuchen, wieviel Energie ein Teilchen verzehren würde, wenn es allein vorhanden wäre. Den Absorptionskoeffizienten der Lösung bekommt man daraus durch Multiplikation mit der Zahl der Teilchen im Kubikmillimeter.

Wir denken uns um das Zentrum des Kugelhens eine Kugelfläche vom Radius  $r$  geschlagen, und zwar sei  $x = 2\pi r/\lambda'$  eine sehr große Zahl. Die Stromdichte des Energiestromes durch diese Kugeloberfläche nach außen ist in jedem Moment:

$$\mathfrak{E}_\vartheta \cdot \mathfrak{H}_\varphi - \mathfrak{E}_\varphi \cdot \mathfrak{H}_\vartheta.$$

Wir müssen nun diesen momentanen Energiestrom über die Dauer einer Sekunde integrieren, um die Intensität des Lichtes zu bekommen. Es ist aber nach (2):

$$\mathfrak{E}_\vartheta = \Re [E_\vartheta \cdot e^{2\pi i n t}], \quad \mathfrak{H}_\vartheta = \Re [H_\vartheta \cdot e^{2\pi i n t}] \text{ usw.}$$

$\Re []$  gleich: „reeller Teil von“. Setzt man dies ein, so bekommt man das gesuchte Zeitintegral:

$$\int_{t=0}^{t=1} (\mathfrak{E}_\vartheta \cdot \mathfrak{H}_\varphi - \mathfrak{E}_\varphi \cdot \mathfrak{H}_\vartheta) \cdot dt = \frac{1}{2} [(E_\vartheta \cdot H_\varphi) - (E_\varphi \cdot H_\vartheta)].$$

Es soll hier durch die runden Klammern angedeutet werden, daß das „skalare Produkt“ der beiden komplexen



Faktoren zu bilden ist, d. h. das Produkt der beiden absoluten Beträge mit dem Kosinus der Phasendifferenz. Ist:

$$E_{\vartheta} = E'_{\vartheta} + i \cdot E''_{\vartheta}, \quad H_{\varphi} = H'_{\varphi} + i \cdot H''_{\varphi},$$

wo  $E'_{\vartheta}$ ,  $E''_{\varphi}$  usw. reelle Größen bedeuten sollen, so ist:

$$(E_{\vartheta} \cdot H_{\varphi}) = E'_{\vartheta} \cdot H'_{\varphi} + E''_{\vartheta} \cdot H''_{\varphi}.$$

Da für die skalare Multiplikation zweier Größen genau dieselben Regeln gelten, wie für die gewöhnliche Multiplikation, so wollen wir im folgenden die runden Klammern einfach weglassen. Wo zwei komplexe Größen  $E$  und  $H$  miteinander multipliziert werden, soll im folgenden stets das skalare Produkt gemeint sein. Wir können nach (4) die komplexen Größen  $H_{\vartheta}$  und  $H_{\varphi}$  ersetzen durch  $i \cdot M_{\vartheta}$  und  $i \cdot M_{\varphi}$ . Die Intensität der normalen Komponente des durch die Kugeloberfläche hindurchtretenden Lichtes ist dann bis auf einen Zahlenfaktor:

$$E_{\vartheta} \cdot i M_{\varphi} - E_{\varphi} \cdot i M_{\vartheta}.$$

Dieser Zahlenfaktor ist so gewählt, daß die Intensität des durch die Lösung hindurchgehenden Strahles gleich 1 ist. Wir haben für  $E_{\vartheta}$ ,  $M_{\varphi}$  usw. aus (51) und (52) die Werte  $E_{\vartheta} + E_{\vartheta a}$ ,  $M_{\varphi} + M_{\varphi a}$  usw. einzusetzen. Es zerfällt dann das Integral über die Kugelfläche, das die gesamte Lichtmenge darstellt, die durch die Kugelfläche nach außen geht, in drei Teile:

$$I = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (E_{\vartheta} \cdot i M_{\varphi} - E_{\varphi} \cdot i M_{\vartheta}) \cdot r^2 \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi,$$

$$II = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (E_{\vartheta a} \cdot i M_{\varphi} + E_{\vartheta} \cdot i M_{\varphi a} - E_{\varphi a} \cdot i M_{\vartheta} - E_{\varphi} \cdot i M_{\vartheta a}) r^2 \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi,$$

$$III = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (E_{\vartheta a} \cdot i M_{\varphi a} - E_{\varphi a} \cdot i M_{\vartheta a}) r^2 \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi.$$

Teil I enthält den Energiestrom des durchgehenden Lichtstrahles, wenn er durch das Partikelchen gar nicht beeinflußt würde, es ist von vornherein klar, daß sich für I Null ergeben muß; Teil III ist eine positive Größe, nämlich der Gesamtbetrag der seitlich ausgestrahlten Energie, er gibt also auch den Teil des Absorptionskoeffizienten, der auf Rechnung der diffusen Strahlung zu setzen ist. Teil II ist negativ, nämlich

der ganze Energieverlust des durchgehenden Strahles, er gibt also den ganzen Absorptionskoeffizienten, der sowohl durch die diffuse Strahlung als auch durch die wirkliche Absorption strahlender Energie im Partikelchen bedingt ist.

Da wir angenommen haben, daß  $x = 2\pi r/\lambda'$  unendlich groß gegen 1 ist, so können wir nach (29a) und (19) setzen:

$$I_\nu(x) = \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2}\right), \quad I'_\nu(x) = \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2}\right);$$

$$K_\nu(-x) = e^{-ix}, \quad K'_\nu(-x) = -i \cdot e^{-ix}.$$

Führen wir ferner vorübergehend die folgenden Abkürzungen ein:

$$A_\nu = \frac{\lambda'}{2\pi} \cdot \frac{2\nu+1}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot i^{\nu-1} \cdot \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2}\right),$$

$$B_\nu = -\frac{\lambda'}{2\pi} \cdot \frac{2\nu+1}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot i^\nu \cdot \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2}\right),$$

$$C_\nu = \frac{\lambda'}{2\pi} \cdot \frac{a_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot e^{-ix},$$

$$D_\nu = -\frac{\lambda'}{2\pi} \cdot \frac{p_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot e^{-ix},$$

so ergibt sich für die Faktoren der zu berechnenden skalaren Produkte:

$$E_\vartheta + E_{\vartheta a} = \sum_1^\infty \nu \frac{A_\nu + C_\nu}{r} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta} - \sum_1^\infty \nu \frac{B_\nu + D_\nu}{r} \cdot \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial \varphi},$$

$$E_\varphi + E_{\varphi a} = \sum_1^\infty \nu \frac{A_\nu + C_\nu}{r} \cdot \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \varphi} + \sum_1^\infty \nu \frac{B_\nu + D_\nu}{r} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial \vartheta},$$

$$-i \cdot (M_\vartheta + M_{\vartheta a}) = \sum_1^\infty \nu \frac{B_\nu + C_\nu}{r} \cdot \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \varphi} + \sum_1^\infty \nu \frac{A_\nu + D_\nu}{r} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial \vartheta},$$

$$i \cdot (M_\varphi + M_{\varphi a}) = \sum_1^\infty \nu \frac{B_\nu + C_\nu}{r} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta} - \sum_1^\infty \nu \frac{A_\nu + D_\nu}{r} \cdot \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial \varphi}.$$

Die Lichtintensität selber berechnet sich nun:

$$\begin{aligned}
 & (E_{\vartheta} + E_{\vartheta a}) \cdot i(M_{\varphi} + M_{\varphi a}) - (E_{\varphi} + E_{\varphi a}) \cdot i(M_{\vartheta} + M_{\vartheta a}) \\
 &= \sum_1^{\infty} \sum_1^{\infty} \mu \frac{(A_{\nu} + C_{\nu})(B_{\mu} + C_{\mu})}{r^2} \cdot \left( \frac{\partial P_{\nu}}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial P_{\mu}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial P_{\nu}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial P_{\mu}}{\partial \varphi} \right) \\
 &- \sum_1^{\infty} \sum_1^{\infty} \mu \frac{(A_{\nu} + C_{\nu})(A_{\mu} + D_{\mu}) + (B_{\nu} + C_{\nu})(B_{\mu} + D_{\mu})}{r^2} \cdot \frac{1}{\sin \vartheta} \\
 &\quad \cdot \left( \frac{\partial P_{\nu}}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_{\mu}}{\partial \varphi} - \frac{\partial P_{\nu}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_{\mu}}{\partial \vartheta} \right) \\
 &+ \sum_1^{\infty} \sum_1^{\infty} \mu \frac{(B_{\nu} + D_{\nu}) \cdot (A_{\mu} + D_{\mu})}{r^2} \cdot \left( \frac{\partial \mathfrak{P}_{\nu}}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_{\mu}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_{\nu}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_{\mu}}{\partial \varphi} \right).
 \end{aligned}$$

Wir können nun die Integration über die Kugeloberfläche ausführen. Es ist:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\partial P_{\nu}}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial P_{\mu}}{\partial \vartheta} \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi = - \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} P_{\nu} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \cdot \frac{\partial P_{\mu}}{\partial \vartheta} \right) \cdot d\vartheta \cdot d\varphi \\
 & \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\partial P_{\nu}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial P_{\mu}}{\partial \varphi} \cdot \frac{d\vartheta \cdot d\varphi}{\sin \vartheta} = - \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} P_{\nu} \cdot \frac{\partial^2 P_{\mu}}{\partial \varphi^2} \cdot \frac{d\vartheta \cdot d\varphi}{\sin \vartheta}.
 \end{aligned}$$

Mit Benutzung der Gleichung (11) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left( \frac{\partial P_{\nu}}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial P_{\mu}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial P_{\nu}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial P_{\mu}}{\partial \varphi} \right) \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi \\
 &= \mu \cdot (\mu + 1) \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} P_{\nu} \cdot P_{\mu} \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi.
 \end{aligned}$$

Also nach (46):

$$\begin{aligned}
 &= 0, \quad \nu \neq \mu \\
 &= 2\pi \cdot \frac{\nu^2 \cdot (\nu + 1)^2}{2\nu + 1}, \quad \nu = \mu.
 \end{aligned}$$

Ganz dasselbe bekommt man, wenn man für  $P_{\nu}$ ,  $P_{\mu}$  substituiert  $\mathfrak{P}_{\nu}$ ,  $\mathfrak{P}_{\mu}$ . Endlich ist:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left( \frac{\partial P_{\nu}}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_{\mu}}{\partial \varphi} - \frac{\partial P_{\nu}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_{\mu}}{\partial \vartheta} \right) \cdot d\vartheta \cdot d\varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[ P_{\nu} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_{\mu}}{\partial \varphi} \right]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} \cdot d\varphi - \int_0^{\pi} \left[ P_{\nu} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_{\mu}}{\partial \vartheta} \right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \cdot d\vartheta = 0.
 \end{aligned}$$

Der aus der Kugeloberfläche heraustretende Energiestrom ist demnach:

$$2\pi \cdot \sum_1^{\infty} ((A_\nu + C_\nu) \cdot (B_\nu + C_\nu) + (A_\nu + D_\nu) \cdot (B_\nu + D_\nu)) \frac{\nu^2 \cdot (\nu + 1)^2}{2\nu + 1}.$$

Dieser Ausdruck zerfällt nun in die oben besprochenen drei Teile:

$$\text{I} = 4\pi \cdot \sum_1^{\infty} (A_\nu \cdot B_\nu) \cdot \frac{\nu^2 \cdot (\nu + 1)^2}{2\nu + 1} = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{II} &= 2\pi \cdot \sum_1^{\infty} (A_\nu + B_\nu) \cdot (C_\nu + D_\nu) \cdot \frac{\nu^2 \cdot (\nu + 1)^2}{2\nu + 1} \\ &= \frac{\lambda'^2}{2\pi} \cdot \sum_1^{\infty} (-1)^{\nu-1} \cdot (i e^{-ix} \times (a_\nu - p_\nu) e^{-ix}) \\ &= \frac{\lambda'^2}{2\pi} \cdot \Im \left( \sum_1^{\infty} (-1)^{\nu-1} \cdot (a_\nu - p_\nu) \right). \end{aligned}$$

$$\text{III} = 2\pi \cdot \sum_1^{\infty} (C_\nu^2 + D_\nu^2) \cdot \frac{\nu^2 \cdot (\nu + 1)^2}{2\nu + 1} = \frac{\lambda'^2}{2\pi} \cdot \sum_1^{\infty} \frac{|a_\nu|^2 + |p_\nu|^2}{2\nu + 1}.$$

Ist die Zahl der Teilchen im Kubikmillimeter  $N$ , so gibt II als Absorptionskoeffizienten der Lösung pro Millimeter:

$$(98) \quad k = N \cdot \frac{\lambda'^2}{2\pi} \cdot \Im \left( \sum_1^{\infty} (-1)^{\nu} \cdot (a_\nu - p_\nu) \right).$$

Der Verlust durch Strahlung allein beträgt pro Millimeter nach III:

$$(99) \quad k' = N \cdot \frac{\lambda'^2}{2\pi} \cdot \sum_1^{\infty} \frac{|a_\nu|^2 + |p_\nu|^2}{2\nu + 1}.$$

Das Symbol  $\Im ( )$  in (98) bedeutet, das von der eingeklammerten komplexen Zahl der imaginäre Teil zu nehmen ist. Die senkrechten Striche in (99) bedeuten, daß von der zwischen ihnen stehenden Größe der absolute Betrag zu bilden ist.

## Absorption kolloidaler Goldlösungen.

27. Für die kolloidalen Lösungen können wir uns auf die Koeffizienten  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $p_1$  beschränken. Wir wollen ferner, wie oben, die drei Größen

$$a_1 = \frac{a_1}{2\alpha^3}, \quad a_2 = -\frac{a_2}{2\alpha^3}, \quad p_1 = \frac{p_1}{2\alpha^3}$$

eingeführen. Da weiter die Konzentration der Lösung ist:

$$C = N \cdot V, \quad V = \frac{4\pi q^3}{3} = \frac{\alpha^3 \cdot \lambda^3}{6\pi^2},$$

so ergibt sich:

$$(100) \quad \begin{cases} k = C \cdot K, \\ K = \frac{6\pi}{\lambda^3} \cdot \Im m(-a_1 - a_2 + p_1). \end{cases}$$

Die Größe  $K$  ändert sich bei sehr kleinen Teilchendurchmessern nur langsam, wenn die Teilchen größer werden.

*Bei sehr feiner Verteilung des Metalles in der Lösung ist die Farbe unabhängig von der Teilchengröße, der Absorptionskoeffizient ist der Konzentration der Lösung einfach proportional.*

Dieser Satz kann natürlich nur bis zu einer gewissen unteren Grenze in der Kleinheit der Teilchen Gültigkeit haben, da die Goldatome sich sicher optisch anders verhalten als kleine Goldkügelchen. Es wäre daher wahrscheinlich sehr interessant, die Absorption der Lösungen mit allerkleinsten amikroskopischen Teilchen zu untersuchen und gewissermaßen optisch den Vorgang zu verfolgen, wie sich die Goldteilchen aus den Atomen aufbauen.

Werden die Goldteilchen größer als etwa  $10 \mu\mu$ , so gilt der Satz nicht mehr. Ich habe aus den Tabellen I, II, III die Werte  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $p_1$  genommen und mit ihnen für jede Farbe die Kurve konstruiert, die die Abhängigkeit der Absorption vom Teilchendurchmesser darstellt (ähnlich den Strahlungskurven in Fig. 12). Aus diesem Diagramm habe ich dann die Absorptionskoeffizienten für die in der folgenden Tabelle aufgeführten Teilchendurchmesser abgelesen. Die Zahlen sind in ganz derselben Einheit angegeben, wie oben (p. 421) die ausgestrahlte Energie. Sie bedeuten also den Lichtverlust auf dem Wege 1 mm durch eine Lösung von der Konzentration  $10^{-6}$  (1 cbmm Gold in 1 Liter Wasser), und zwar in Promille. Die Größe  $K$  bekommt man also aus ihnen durch Multiplikation mit  $10^3$ .

## Absorption kolloidaler Goldlösungen.

$2 \varrho$	420	450	500	525	550	600	650
0	40,5	37,4	59,6	69,0	55,5	16,4	7,0
20 $\mu\mu$	42,7	38,8	62,2	76,6	61,6	18,5	8,0
40 „	46,5	42,0	66,0	86,5	77,7	25,0	11,3
60 „	48,8	45,4	67,4	88,4	96,1	37,3	16,4
80 „	46,5	44,8	62,5	81,0	97,0	65,0	27,1
100 „	41,0	41,0	52,2	66,3	82,2	85,0	44,5
120 „	34,6	34,8	42,8	51,2	61,0	77,5	58,7
140 „	29,4	29,7	35,9	41,9	48,6	57,0	56,1
160 „	25,7	26,1	30,8	36,0	41,2	45,1	45,6
180 „	24,0	24,8	28,0	33,0	37,0	37,7	36,5

Diese Zahlenreihen sind in Fig. 25 graphisch wiedergegeben als die Absorptionsspektren bei verschiedenen Teilchengrößen.

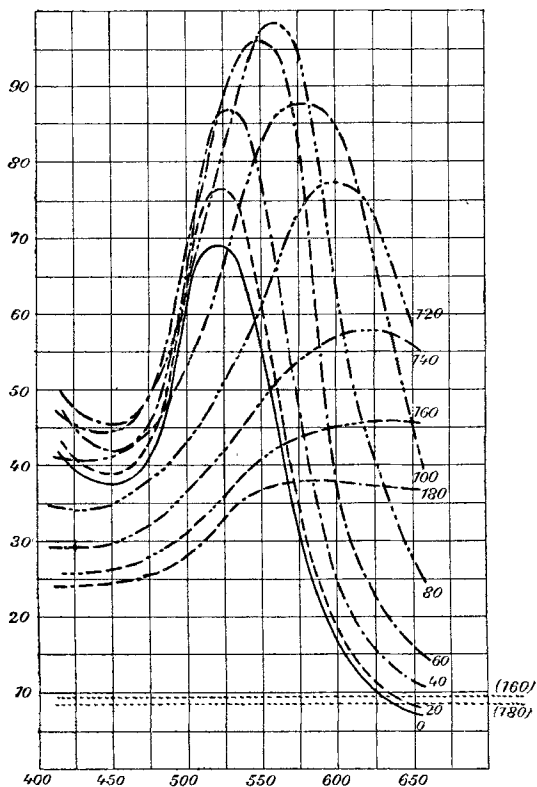


Fig. 25. Absorption kolloidaler Goldlösungen.

Man sieht bei feinen Verteilungen das bekannte steile Absorptionsmaximum der rubinroten Goldlösungen im Grün bei ca.  $525 \mu\mu$  Wellenlänge. Nimmt die Teilchengröße zu, so wächst bei konstanter Konzentration zunächst im ganzen Spektrum die Absorption, die Farbe ändert sich wenig, bekommt aber allmählich einen Stich ins bläuliche, indem das Maximum etwas nach rechts hin rückt. Eine starke Veränderung findet erst statt, wenn der Teilchendurchmesser ca.  $100 \mu\mu$  wird. Bei dieser Teilchengröße ist die Lösung violett. Bei 120 und 140 sehen wir schon die charakteristischen Spektren von tiefblauen Goldlösungen, bei 160 das einer indigo-blauen, bei 180 das einer grünlichblauen. Man bekommt also in der Tat bei veränderter Teilchengröße alle an den kolloidalen Goldlösungen beobachteten Farben.

28. Es ist von vornherein klar, daß die Farbe der Goldlösungen in erster Linie auf der eigentlichen Absorption des Lichtes in den Goldteilchen selber beruht. Mit vollkommen leitenden Teilchen würde man sie niemals beobachten. Hier würde der Lichtverlust ganz allein auf der seitlichen Lichtzerstreuung beruhen und die Absorptionskurven würden deswegen identisch sein mit den früher gezeichneten Strahlungskurven Fig. 15 (wenn man noch die den nächst höheren Partialwellen, also den Koeffizienten  $p_1, a_2, p_2$  entsprechenden Verluste hinzufügte). Diese Kurven sehen durchaus anders aus, wie die Absorptionskurven der Goldlösungen, sie würden stets nur ganz matte Farben darstellen, und bei unendlich feiner Verteilung wäre die Absorption überhaupt Null.

Indessen bestimmt bei größeren Teilchendurchmessern der Lichtverlust durch seitliche Ausstrahlung doch auch die Farbe der Goldlösungen mit. Die blauen Lösungen sind zugleich die, die eine starke rotgelbe Ausstrahlung zeigen. Es ist jedenfalls von Interesse, die beiden Summanden des Absorptionskoeffizienten auch einzeln zu berechnen. Für die praktische Rechnung ergibt sich aus (99) die Formel:

$$(101) \quad \begin{cases} k' = C \cdot K', \\ K' = \frac{4\pi}{\lambda'} \cdot \alpha^3 \cdot \left( |a_1|^2 + |v_1|^2 + \frac{3}{5} \cdot |a_2|^2 \right) \\ \quad = \frac{24\pi^2}{\lambda'^4} \cdot V \cdot \left( |a_1|^2 + |v_1|^2 + \frac{3}{5} \cdot |a_2|^2 \right). \end{cases}$$

Bis etwa  $2\rho = 100\mu\mu$  ist  $K'$  identisch mit der in 23. berechneten Größe  $F_1$  (Fig. 14). Bei größeren Teilchendurchmessern treten noch die Koeffizienten  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  hervor, obwohl die Rayleighsche Strahlung bis  $180\mu\mu$  doch noch immer überwiegt. Ich habe für die größeren Teilchen die Größen  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  durch graphische Interpolation aus den Tab. II und III gewonnen, und  $K'$  für dieselben Teilchengrößen berechnet, für die wir  $K$  schon kennen. Es ist dann

$$(102) \quad K'' = K - K'$$

das Maß für den in den Teilchen selbst verloren gehenden Bruchteil des Lichtes. In der folgenden Tabelle sind die so berechneten Werte von  $K''$ , wieder abgesehen vom Faktor  $10^3$ , aufgeführt.

Koeffizienten der reinen Absorption.

$2\rho$	420	450	500	525	550	600	650
0	40,5	37,4	59,6	69,0	55,5	16,4	7,0
20 $\mu\mu$	42,4	38,6	61,9	76,1	61,0	18,2	7,9
40 „	44,4	40,4	63,3	81,9	71,8	22,1	9,9
60 „	42,6	40,4	59,4	74,7	76,4	25,0	10,5
80 „	35,9	35,6	48,3	58,1	59,2	32,0	12,4
100 „	27,4	28,7	34,9	39,0	39,8	29,5	25,5
120 „	21,1	22,0	25,2	25,6	24,5	19,7	13,6
140 „	17,2	18,0	20,1	19,9	19,1	11,9	9,6
160 „	14,0	14,8	16,4	16,1	15,2	10,0	8,1
180 „	11,9	12,9	14,1	14,3	13,3	8,8	6,5

Diese Zahlenreihen sind in den Kurven der Fig. 26 graphisch dargestellt. Diese Kurven der reinen Absorption haben ihr Maximum stets im Grün zwischen  $\lambda = 525$  und  $\lambda = 550$ . Vergleicht man Fig. 26 mit Fig. 14, so ist immerhin ein gewisser Parallelismus zwischen Absorption und Ausstrahlung nicht zu verkennen. So steigt bei kleinen Teilchengrößen, wo die Ausstrahlung ihr Maximum noch im Grüngelb hat, die Ausstrahlung mit zunehmender Teilchengröße sehr schnell, die Absorption zeigt zugleich ein schwaches Anwachsen. Später geht, während das Maximum der Ausstrahlung nach rechts rückt, auch das Maximum der reinen Absorption ein wenig nach rechts, obwohl es stets im Grün bleibt. Aber zu diesen



verhältnismäßig geringfügigen Änderungen kommt eine andere, die offenbar nicht von der speziellen Natur des Goldes abhängt, und die schließlich alles andere überwiegt: Je gröber die Teilchen werden, je niedriger und flacher verlaufen die Kurven. Das ist auch von vornherein klar; denn wenn die Teilchen einigermaßen dick sind, so sind sie schließlich für alle Farben undurchsichtig, und je dicker sie werden, um so kleiner wird die Summe der schattenwerfenden Querschnitte.

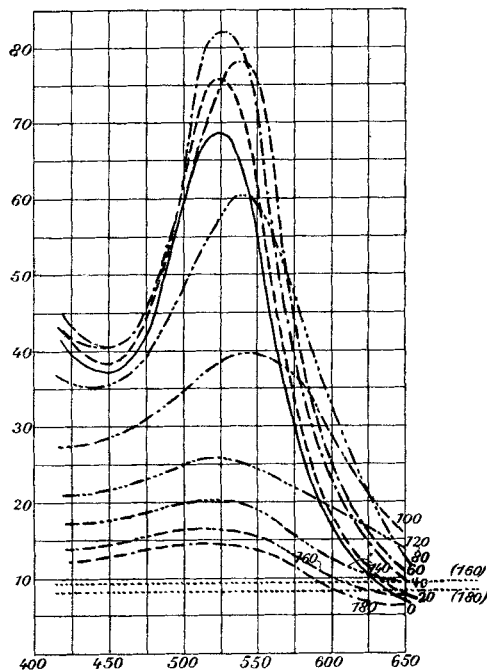


Fig. 26. „Reine Absorption“ in kolloidalen Goldlösungen.

Würde man die Wirkung der Beugung ganz außer acht lassen, also nur den geometrischen Schatten rechnen, so wäre der Absorptionskoeffizient  $k_0 = N \cdot q$ , wo bei der Konzentration  $10^{-6}$ :

$$N = \frac{10^{-6}}{\frac{4}{3} \pi \rho^3}, \quad q = \pi \cdot \rho^2,$$

also:

$$k_0 = N \cdot q = \frac{3}{4 \rho} \cdot 10^{-6}.$$

So würde sich für  $2\varrho = 180$  berechnen:  $k_0 = 8,3$  Promille, für  $2\varrho = 160$ :  $k_0 = 9,4$  Promille. Ich habe diese beiden Werte  $k_0$  ebenfalls in den Figg. 25, 26 eingetragen, als gerade Linien natürlich, weil  $k_0$  von der Farbe nicht abhängt. Man sieht, daß die Beugung bewirkt, daß die Absorption beträchtlich viel größer wird. Ferner wird im Gelb und Rot bei weitem der größte Teil des Lichtes von den Teilchen durch Reflexion entfernt, während in der linken Hälfte des Spektrums ungefähr die Hälfte des verloren gehenden Lichtes in den Teilchen absorbiert wird.

*Die Farben der kolloidalen Goldlösungen erklären sich durch das Zusammenwirken zweier Eigenschaften der Goldteilchen. Die Goldteilchen haben nämlich ein recht scharfes Maximum des Absorptionsvermögens im Grün, und zweitens ein Maximum des Reflexionsvermögens im Rotgelb. Sehr kleine Teilchen reflektieren schwach und absorbieren stark, sie machen die Lösung daher rubinrot. Grobe Teilchen reflektieren stark, zugleich wird die Kurve der reinen Absorption für sie niedriger und flacher, sie machen die Lösung deswegen blau. Für die Farbe der allergrößten Lösungen ist allein die Eigenschaft des Goldes, den rotgelben Teil des Spektrums stark zu reflektieren, ausschlaggebend, dadurch kommt ihre weniger satte blaugrüne Farbe zustande.*

Dieser Satz ist freilich nur unter der Annahme kugelförmiger Partikelchen bewiesen. Aber auch für blättchen- und stäbchenförmige Partikeln wird man in analoger Weise zwischen dem Absorptionsvermögen und dem Reflexionsvermögen der Teilchen unterscheiden müssen.

Die Vergleichung der in dieser Arbeit enthaltenen theoretischen Ergebnisse mit den Messungsergebnissen behalte ich mir bis nach dem Erscheinen der Arbeit des Hrn. Steubing vor. Es sei aber schon hier ausgesprochen, daß aus diesen Messungen hervorzugehen scheint, daß in der Tat die bekannten optischen Eigenschaften des Goldes auch für die ultramikroskopischen Teilchen erhalten bleiben und zur Erklärung der optischen Eigenschaften der kolloidalen Lösungen völlig hinreichen, daß aber andererseits die Theorie doch noch einer Ergänzung bedarf, um alles zu erklären, und zwar wahrscheinlich, indem man sie weiter auch für ellipsoidische Teilchen (Blättchen oder Stäbchen) entwickelt.

## Resultate.

1. Das Problem, die optischen Eigenschaften trüber Medien zu berechnen, ist unter zwei vereinfachenden Annahmen gelöst: erstens, daß die Teilchen als kugelförmig angesehen werden dürfen, zweitens, daß die Trübung optisch unendlich dünn ist. Die zweite Annahme ist bei den gewöhnlichen kolloidalen Lösungen sicher zutreffend.

2. Das von den kleinen Teilchen ausgestrahlte Licht läßt sich als eine Reihe von „Partialwellen“ berechnen, und zwar gibt es zwei Gruppen von Partialwellen, die den elektrischen und den magnetischen Schwingungen der Teilchen entsprechen. Von diesen Partialwellen braucht auch bei noch so großen Teilchen nur eine endliche Zahl berücksichtigt zu werden, und zwar geht mit der  $\nu^{\text{ten}}$  elektrischen die  $(\nu - 1)^{\text{te}}$  magnetische Schwingung parallel.

Bei den kolloidalen Lösungen mit sehr feinen Teilchen hat nur die erste elektrische Schwingung, der die „Rayleighsche Strahlung“ entspricht, einen merklichen Betrag. Bei größeren kolloidalen Lösungen tritt noch die zweite elektrische und die erste magnetische Schwingung hinzu.

3. Die Annahme einer vollkommenen Leitfähigkeit der Kugeln, die zu ganz unzulässigen Vereinfachungen der Formeln Veranlassung gibt, führt zu einem anderen Resultat, nämlich daß die  $\nu^{\text{te}}$  magnetische Schwingung mit der  $\nu^{\text{ten}}$  elektrischen parallel geht. Es müßte danach auch bei feinsten Trübungen außer der Rayleighschen Strahlung noch die erste magnetische Schwingung bemerkbar sein, und es würde sich dann der Thomsonsche Satz von dem Polarisationsmaximum bei  $120^\circ$  ergeben. Da die Voraussetzung falsch ist, kann man natürlich auch das Resultat nicht empirisch bestätigt finden.

4. Läßt man durch die trübe Lösung einen unpolarisierten Lichtstrahl gehen, so ist das seitlich ausgestrahlte Licht ganz oder teilweise linear polarisiert (niemals elliptisch polarisiert).

5. Bis zu einer Teilchengröße von ca.  $100 \mu\mu$  ist das von Goldkügelchen seitlich zerstreute Licht fast nur die Rayleighsche Strahlung, die bei  $90^\circ$  ihr Polarisationsmaximum (und zwar 100 Proz.) hat. Werden die Teilchen größer, so wächst sehr schnell der Betrag des unpolarisierten Lichtes bei

$90^\circ$  und das Polarisationsmaximum rückt nach vorne, bei der Teilchengröße 160 und  $180\ \mu\mu$  liegt es bei  $110^\circ$  und  $120^\circ$ . Zugleich wird durch die Interferenz der Partialwellen miteinander die anfängliche Symmetrie der Rayleighschen Strahlung gestört, bei weitem der größte Teil der diffusen Strahlung geht nach der Seite hinüber, nach welcher der erregende Lichtstrahl fortschreitet. In letzter Beziehung würde sich das von fingierten sehr kleinen, vollkommen leitenden Kügelchen reflektierte Licht gerade umgekehrt verhalten. Die großen Goldkügelchen, die diese anomalen Polarisationsverhältnisse zeigen, haben eine rotgelbe diffuse Strahlung und färben die Lösung blau. Es kann keine rotfärbenden Partikelchen geben, die sich so verhalten.

6. Bei konstant gehaltener Konzentration ist die diffuse Strahlung von sehr feinen Trübungen proportional mit dem Volumen eines Partikelchens. In gröberen Trübungen wächst sie mit zunehmender Teilchengröße langsamer und erreicht schließlich ein Maximum, dessen Lage von der Wellenlänge abhängt. Und zwar ist in einer Trübung von fingierten vollkommen leitenden Kügelchen der Teilchendurchmesser, dem die maximale Strahlung entspricht, proportional der Wellenlänge ( $0,324\ \lambda'$ ), bei Goldkügelchen gilt kein so einfaches Gesetz, doch liegt der betreffende Teilchendurchmesser immer zwischen  $\lambda'/4$  und  $\lambda'/3$ .

7. Die Farbe des diffus zerstreuten Lichtes ist bei den fingierten vollkommen leitenden Kügelchen, sowie überhaupt bei vollkommen weißen Kügelchen, wenn sie sehr klein sind, blauviolett, entsprechend dem Rayleighschen Gesetz (Strahlung proportional  $\lambda'^{-4}$ ). Größere Kügelchen würden ein nahezu weißes Licht aussenden, mit einer schwachen, matten Farbentönung, die von der Größe des Teilchens abhängt. Eine optische Resonanz, die eine bestimmte Farbe kräftig heraushebt, ist, wenigstens bei kugelförmigen Teilchen, ausgeschlossen, und eine Erklärung der lebhaften Färbungen kolloidaler Lösungen durch Resonanz ist unmöglich.

8. Die diffuse Strahlung von Goldpartikelchen ist im allgemeinen viel stärker als die von gleich großen vollkommen leitenden Kügelchen sein würde. Außerdem zeigt sie bei den feinsten Verteilungen ein recht scharfes Maximum im Grün-

gelb. Später steigt das Strahlungsmaximum besonders hoch im Rotgelb. Wollte man von Resonanz sprechen, so müßte man schon von einer Resonanz der Goldatome auf Gelb sprechen, die sich über der an farblosen leitenden Partikelchen zu erwartenden Erscheinung überlagert.

9. Schon unendlich feine Trübungen durch Goldpartikelchen zeigen (im schärfsten Kontrast zu dem, was man von vollkommen leitenden Teilchen zu erwarten hätte) eine charakteristische Absorption, die nur von der Menge des suspendierten Metalls (der Konzentration), nicht aber von dem Feinheitsgrad der Verteilung abhängt. Es wäre interessant experimentell zu untersuchen, wie sich das schließlich bei äußerst feinen Teilchen, die nur noch einige Atome enthalten, ändern mag.

10. Allgemein hängt die Absorption der kolloidalen Goldlösungen von zwei Eigenschaften des metallischen Goldes ab: dem Absorptionsvermögen und dem Reflexionsvermögen. Lösungen, in denen die diffuse Reflexion zurücktritt gegen die eigentliche Absorption, zeigen das Absorptionsmaximum der Goldteilchen, das im Grün liegt, sie sind daher rubinrot. Lösungen, die starke diffuse Reflexion zeigen, sind dagegen blau-durchsichtig, weil Gold hauptsächlich das rotgelbe Licht reflektiert.

11. Für die Vollständigkeit der Theorie ist es unbedingt erforderlich, auch noch das Verhalten ellipsoidischer Teilchen zu untersuchen.

Greifswald, Physikalisches Institut.

(Eingegangen 7. Januar 1908.)

---