1 Mathematischer Anhang Papier 2

1.1 Autarkie Situation $\hat{=}$ später WM

Die Ableitungen nach der Zeit - die Bewegungsgleichungen - für physisches Kapital und Humankapital lauten:

$$\dot{k}(t) = A(v(t)k(t))^{\alpha}(u(t)h(t))^{1-\alpha} - c(t) \tag{1}$$

$$\dot{h}(t) = B((1-v(t))k(t))^{\eta}((1-u(t))h(t))^{1-\eta} \tag{2}$$

Aus Gründen der Anschaulichkeit wird im folgenden die Abhängigkeit der Variablen gegenüber der Zeit t vernachlässigt. Die Wachstumsrate des physischen Kapitals lautet:

$$\hat{k} = Av^{\alpha}k^{\alpha-1}(uh)^{1-\alpha} - \frac{c}{k}$$

mit $\chi = \frac{c}{k}$ ergibt sich

$$\hat{k} = Av^{\alpha}u^{1-\alpha}\left(\frac{k}{h}\right)^{\alpha-1} - \chi \tag{3}$$

Durch die Substitution von $x_1 = \frac{vk}{uh}$ lässt sich die Wachstumsrate in verkürzter Form darstellen.

$$\boxed{\hat{k} = Ax_1^{\alpha}\frac{uh}{k} - \chi} \tag{4}$$

Das Humankapital wächst in diesem Modell wie folgt.

$$\hat{h} = B\left[(1-v)\frac{k}{h}\right]^{\eta}(1-u)^{1-\eta} \tag{5}$$

Ebenfalls lässt sich die Wachstumsrate durch eine Substitution von $x_2 = \frac{(1-v)k}{(1-u)h}$ in einer verkürzten Form darstellen.

$$\boxed{\hat{h} = Bx_2^{\eta}(1-u)} \tag{6}$$

Der soziale Planer löst das Maximierungsproblem mit Hilfe der Hamiltonfunktion.

$$\begin{aligned}\mathbb{H} = {} & e^{-\rho t}\frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} \\ & + \gamma_1(A(vk)^{\alpha}(uh)^{1-\alpha} - c) \\ & + \gamma_2 B[(1-v)k]^{\eta}[(1-u)h]^{1-\eta}\end{aligned} \tag{7}$$

Die Bedingungen erster Ordnung werden bestimmt durch:

$$\frac{\partial\mathbb{H}}{\partial c} \stackrel{!}{=} 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial\mathbb{H}}{\partial v} \stackrel{!}{=} 0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial\mathbb{H}}{\partial k} \stackrel{!}{=} -\dot{\gamma_1} \tag{10}$$

$$\frac{\partial\mathbb{H}}{\partial u} \stackrel{!}{=} 0 \tag{11}$$

$$\frac{\partial\mathbb{H}}{\partial h} \stackrel{!}{=} -\dot{\gamma_2} \tag{12}$$

Die Berechnung von Gleichung (8) ergibt:

$$\partial \mathbb{H}/\partial c \stackrel{!}{=} 0$$

$$e^{-\rho t} c^{-\sigma} - \gamma_1 = 0 \tag{13}$$

$$\gamma_1 = e^{-\rho t} c^{-\sigma} \tag{14}$$

Die Bewegungsgleichung des Schattenpreises γ_1 wird später für die Herleitung der Keynes Ramsey Regel benötigt. Somit ist die Ableitung nach der Zeit von Gleichung (14) zu bilden.

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial t} = \dot{\gamma}_1 \tag{15}$$

$$\dot{\gamma}_1 = -e^{-\rho t} \rho c^{-\sigma} - e^{-\rho t} c^{-\sigma-1} \sigma \dot{c}$$

$$\dot{\gamma}_1 = -e^{-\rho t} c^{-\sigma} (\rho + \sigma \hat{c}) = -\gamma_1 (\rho + \sigma \hat{c}) \tag{16}$$

Dividiert man diesen Term durch γ_1 aus (14) dann lässt sich γ_1 kürzen und es ergibt sich die Wachstumsrate des Schattenpreises für Gut 1 in einer geschlossenen Volkswirtschaft.

$$\hat{\gamma_1} = -\rho - \sigma \hat{c} \tag{17}$$

Die Bedingung laut Gleichung (9) bestimmt die optimale Aufteilung des physischen Kapitals der Wirtschaftssubjekte zwischen dem Produktions- und Bildungssektor, die den Nutzen über die Zeit maximiert.

$$\partial \mathbb{H}/\partial v \stackrel{!}{=} 0$$

$$\gamma_1 A \alpha v^{\alpha-1} k^{\alpha} (uh)^{1-\alpha} - \gamma_2 B \eta (1-v)^{\eta-1} k^{\eta} [(1-u)h]^{1-\eta} \stackrel{!}{=} 0 \tag{18}$$

$$\gamma_1 A \alpha v^{\alpha-1} k^{\alpha} (uh)^{1-\alpha} = \gamma_2 B \eta (1-v)^{\eta-1} k^{\eta} [(1-u)h]^{1-\eta} \tag{19}$$

Daraus lässt sich das Verhältnis der Schattenpreise beider Güter herleiten.

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{A \alpha v^{\alpha-1} k^{\alpha} (uh)^{1-\alpha}}{B \eta (1-v)^{\eta-1} k^{\eta} [(1-u)h]^{1-\eta}} \tag{20}$$

$$= \frac{A\alpha \left(\frac{vk}{uh}\right)^{\alpha-1}}{B\eta \left(\frac{(1-v)k}{(1-u)h}\right)^{\eta-1}} = \frac{A\alpha x_1^{\alpha-1}}{B\eta x_2^{\eta-1}} \tag{21}$$

$$\gamma_2 = \gamma_1 \frac{A\alpha \left(\frac{vk}{uh}\right)^{\alpha-1}}{B\eta \left(\frac{(1-v)k}{(1-u)h}\right)^{\eta-1}} \Longleftrightarrow \gamma_1 = \gamma_2 \frac{B\eta \left(\frac{(1-v)k}{(1-u)h}\right)^{\eta-1}}{A\alpha \left(\frac{vk}{uh}\right)^{\alpha-1}} \tag{22}$$

Aus der Ableitung der Hamiltonian nach dem physischen Kapital gemäSS Gleichung (10), folgt die Wachstumsrate des Schattenpreises von Gut 2.

$$\partial \mathbb{H}/\partial k \stackrel{!}{=} -\dot{\gamma}_1$$

$$\gamma_1 A v^{\alpha} k^{\alpha-1} \alpha (uh)^{1-\alpha} + \gamma_2 B (1-v)^{\eta} k^{\eta-1} \eta \left[(1-u)h\right]^{1-\eta} \stackrel{!}{=} -\dot{\gamma}_1 \tag{23}$$

$$A\alpha v^{\alpha}k^{\alpha-1}(uh)^{1-\alpha}+\frac{\gamma_2}{\gamma_1}B\eta(1-v)^{\eta}k^{\eta-1}\left[(1-u)h\right]^{1-\eta}=-\hat{\gamma}_1$$

Dabei muss das Verhältnis beider Schattenpreise γ_2/γ_1 aus Gleichung (21) eingesetzt werden.

$$A\alpha v^{\alpha}u^{1-\alpha}\left(\frac{k}{h}\right)^{\alpha-1}+\frac{A\alpha\left(\frac{vk}{uh}\right)^{\alpha-1}}{B\eta\left(\frac{(1-v)k}{(1-u)h}\right)^{\eta-1}}B\eta(1-v)^{\eta}k^{\eta-1}\left[(1-u)h\right]^{1-\eta}=-\hat{\gamma}_1$$

$$A\alpha\left(\frac{vk}{uh}\right)^{\alpha-1}(v+(1-v))=-\hat{\gamma}_1$$

$$A\alpha\left(\frac{vk}{uh}\right)^{\alpha-1}=-\hat{\gamma}_1$$

$$\hat{\gamma}_1=-A\alpha\left(\frac{vk}{uh}\right)^{\alpha-1}\Longleftrightarrow\hat{\gamma}_1=-A\alpha x_1^{\alpha-1}\tag{24}$$

Die Keynes Ramsey Regel folgt aus der Kombination von Gleichung (23) mit γ_2 laut (22) und $\dot{\gamma}_1$ aus (16).

$$\gamma_1 A\alpha v^{\alpha}\left(\frac{k}{h}\right)^{\alpha-1}u^{1-\alpha}+\gamma_1\frac{A\alpha\left(\frac{vk}{uh}\right)^{\alpha-1}}{B\eta\left(\frac{(1-v)k}{(1-u)h}\right)^{\eta-1}}B\eta(1-v)^{\eta}k^{\eta-1}\left[h(1-u)\right]^{1-\eta}\stackrel{!}{=}\gamma_1(\rho+\sigma\hat{c})\tag{25}$$

$$A\alpha\left(\frac{vk}{uh}\right)^{\alpha-1}(v+(1-v))=\rho+\sigma\hat{c}$$

$$A\alpha\left(\frac{vk}{uh}\right)^{\alpha-1}-\rho=\sigma\hat{c}$$

$$\boxed{\hat{c}=\frac{1}{\sigma}\left(A\alpha\left(\frac{vk}{uh}\right)^{\alpha-1}-\rho\right)}\tag{26}$$

Aus der Bedingung laut Gleichung (11) folgt die optimale Aufteilung des Humankapitals zwischen dem Produktions- und Bildungssektor.

$$\partial\mathbb{H}/\partial u\stackrel{!}{=}0$$

$$\gamma_1 A(1-\alpha)(vk)^{\alpha}h^{1-\alpha}u^{-\alpha}-\gamma_2 B(1-\eta)[(1-v)k]^{\eta}(1-u)^{-\eta}h^{1-\eta}\stackrel{!}{=}0\tag{27}$$

$$\gamma_1 A(1-\alpha)(vk)^{\alpha}h^{1-\alpha}u^{-\alpha}=\gamma_2 B(1-\eta)[(1-v)k]^{\eta}(1-u)^{-\eta}h^{1-\eta}\tag{28}$$

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1}=\frac{A(1-\alpha)(vk)^{\alpha}h^{1-\alpha}u^{-\alpha}}{B(1-\eta)[(1-v)k]^{\eta}(1-u)^{-\eta}h^{1-\eta}}\tag{29}$$

Zunächst erhalten wir wieder ein Verhältnis beider Schattenpreise.

$$=\frac{A(1-\alpha)\left(\frac{vk}{uh}\right)^{\alpha}}{B(1-\eta)\left(\frac{(1-v)k}{(1-u)h}\right)^{\eta}}=\frac{A(1-\alpha)x_1^{\alpha}}{B(1-\eta)x_2^{\eta}}\tag{30}$$

$$\gamma_1=\gamma_2\frac{B(1-\eta)\left(\frac{(1-v)k}{(1-u)h}\right)^{\eta}}{A(1-\alpha)\left(\frac{vk}{uh}\right)^{\alpha}}\Longleftrightarrow\gamma_2=\gamma_1\frac{A(1-\alpha)\left(\frac{vk}{uh}\right)^{\alpha}}{B(1-\eta)\left(\frac{(1-v)k}{(1-u)h}\right)^{\eta}}=\gamma_1\frac{A(1-\alpha)x_1^{\alpha}}{B(1-\eta)x_2^{\eta}}\tag{31}$$

Daraus lässt sich die Wachstumsrate des Schattenpreises von Gut 2 herleiten.

$$\hat{\gamma}_2 = \hat{\gamma}_1 + \alpha\hat{x}_1 - \eta\hat{x}_2 \tag{32}$$

Es werden nun die aus Bedingung (9) und (11) berechneten Verhältnisse der Schattenpreise (21) und (30) miteinander gleichgesetzt und es ergibt sich:

$$\frac{A\alpha x_1^{\alpha-1}}{B\eta x_2^{\eta-1}} = \frac{A(1-\alpha)x_1^{\alpha}}{B(1-\eta)x_2^{\eta}} \tag{33}$$

$$\boxed{\frac{1-\alpha}{\alpha}x_1 = \frac{1-\eta}{\eta}x_2} \tag{34}$$

Aus der letzten Bedingung erster Ordnung gemäSS Gleichung (12) wurde folgende Gleichgewichtsbedingung hergeleitet.

$$\partial\mathbb{H}/\partial h \overset{!}{=} -\dot{\gamma}_2$$

$$\gamma_1 A(1-\alpha)(vk)^{\alpha}u^{1-\alpha}h^{-\alpha} + \gamma_2 B(1-\eta)[(1-v)k]^{\eta}(1-u)^{1-\eta}h^{-\eta} \overset{!}{=} -\dot{\gamma}_2 \tag{35}$$

Es wird zunächst γ_1 aus (**??**) ersetzt.

$$\gamma_2 \frac{B(1-\eta)\left(\frac{(1-v)k}{(1-u)h}\right)^{\eta}}{A(1-\alpha)\left(\frac{vk}{uh}\right)^{\alpha}} A(1-\alpha)\left(\frac{vk}{uh}\right)^{\alpha} u + \gamma_2 B(1-\eta)\left(\frac{(1-v)k}{(1-u)h}\right)^{\eta}(1-u) = -\dot{\gamma}_2$$

$$B(1-\eta)\left(\frac{(1-v)k}{(1-u)h}\right)^{\eta}[u+1-u] = -\hat{\gamma}_2$$

$$\hat{\gamma}_2 = -B(1-\eta)\left(\frac{(1-v)k}{(1-u)h}\right)^{\eta} \Longleftrightarrow \hat{\gamma}_2 = -B(1-\eta)x_2^{\eta} \tag{36}$$

AnschlieSSend werden in Gleichung (36) die in Gleichung (32) berechnete Wachstumsrate des Schattenpreises von Gut 2 eingesetzt und es ergibt sich

$$\hat{\gamma}_1 + \alpha\hat{x}_1 - \eta\hat{x}_2 = -B(1-\eta)x_2^{\eta} \tag{37}$$

In einem weiteren Schritt wird nun das Wachstum des Schattenpreises von Gut 1 aus Gleichung (17) substituiert.

$$\boxed{B(1-\eta)x_2^{\eta} = \rho - \sigma\hat{c} - \alpha\hat{x}_1 + \eta\hat{x}_2} \tag{38}$$

Demzufolge ergibt sich folgendes Gleichungssystem, welches das Gleichgewicht beschreibt.

$$\hat{k} = Ax_1^{\alpha}\frac{uh}{k} - \chi \tag{39}$$

$$\hat{h} = Bx_2^{\eta}(1-u) \tag{40}$$

$$x_1(1-\alpha)/\alpha = x_2(1-\eta)/\eta \tag{41}$$

$$\hat{c} = \frac{1}{\sigma}\left(A\alpha x_1^{\alpha-1} - \rho\right) \tag{42}$$

$$B(1-\eta)x_2^{\eta} = \rho - \sigma\hat{c} - \alpha\hat{x}_1 + \eta\hat{x}_2 \tag{43}$$

Die Gleichgewichtsbedingung (41) zeigt, wie sich die Relationen x_1 und x_2 langfristig verhalten, indem die Wachstumsrate von x_1 gebildet wird. Es zeigt sich, dass beide mit der gleichen Rate wachsen, denn es gilt:

$$\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = 0 \tag{44}$$

Des weiteren gilt im Steady State $\hat{c} = \hat{k} = \hat{h}$. Aus Bedingung (43) wird x_2^*.

$$B(1-\eta)x_2^\eta = \rho - \sigma\hat{c} \tag{45}$$

$$x_2^\eta = \frac{1}{B(1-\eta)}(\rho + \sigma)$$

$$x_2^* = \left(\frac{\rho + \sigma\hat{c}}{B(1-\eta)}\right)^{1/\eta} \tag{46}$$

Aus der Bedingung (41) wird x_1^* berechnet, indem x_2^* eingesetzt wird.

$$\frac{1-\alpha}{\alpha}x_1 = \frac{1-\eta}{\eta}\left(\frac{\rho + \sigma\hat{c}}{B(1-\eta)}\right)^{1/\eta} \tag{47}$$

$$x_1^* = \frac{\alpha(1-\eta)}{\eta(1-\alpha)}\left(\frac{\rho + \sigma\hat{c}}{B(1-\eta)}\right)^{1/\eta} \tag{48}$$

Aus dem gleichgewichtigen Wachstumspfad gemäSS (42) ergibt sich:

$$\hat{c} = \frac{1}{\sigma}\left(A\alpha\left[\frac{\alpha(1-\eta)}{\eta(1-\alpha)}\left(\frac{\rho + \sigma\hat{c}}{B1-\eta)}\right)^{1/\eta}\right]^{\alpha-1} - \rho\right) \tag{49}$$

$$\hat{c}\sigma + \rho = A\alpha\left(\frac{\alpha(1-\eta)}{\eta(1-\alpha)}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{\rho + \sigma\hat{c}}{B(1-\eta)}\right)^{\frac{\alpha-1}{\eta}}$$

$$(\hat{c}\sigma + \rho)^{1-\frac{\alpha-1}{\eta}} = A\alpha\left(\frac{\alpha(1-\eta)}{\eta(1-\alpha)}\right)^{\alpha-1}(B(1-\eta))^{\frac{1-\alpha}{\eta}}$$

$$\hat{c}\sigma + \rho = \left[A^\eta\alpha^{\alpha\eta}\left(\frac{1-\eta}{\eta(1-\alpha)}\right)^{(\alpha-1)\eta}(B(1-\eta))^{1-\alpha}\right]^{\frac{1}{1+\eta-\alpha}}$$

$$\boxed{\hat{c}^* = \frac{1}{\sigma}\left(\left[A^\eta\alpha^{\alpha\eta}(1-\eta)^{(1-\eta)(1-\alpha)}(\eta(1-\alpha))^{\eta(1-\alpha)}(B)^{1-\alpha}\right]^{\frac{1}{1+\eta-\alpha}} - \rho\right)} \tag{50}$$

Der Übersichtlichkeit halber wird für die weitere Berechnung des Gleichgewichts der Platzhalter $M = \left[A^\eta\alpha^{\alpha\eta}(1-\eta)^{(1-\eta)(1-\alpha)}(\eta(1-\alpha))^{\eta(1-\alpha)}(B)^{1-\alpha}\right]^{\frac{1}{1+\eta-\alpha}}$ für das Grenzprodukt verwendet. Die gleichgewichtige Aufteilung des Humankapitals u berechnet sich aus $\hat{c} = \hat{h}$ gemäSS Gleichung (40) unter Einbeziehung von x_2^* und $\hat{c}^*$.

$$\frac{1}{\sigma}(M-\rho) = B\left(\left(\frac{\rho + \sigma\frac{1}{\sigma}(M-\rho)}{B(1-\eta)}\right)^{1/\eta}\right)^\alpha(1-u) \tag{51}$$

$$\frac{\frac{1}{\sigma}(1-\eta)(M-\rho)}{M} = (1-u)$$

$$\boxed{u^* = \frac{\sigma M - (1-\eta)(M-\rho)}{\sigma M}} \tag{52}$$

Im Steady State gilt: $\hat{c} = \hat{k}$. Aus dieser Bedingung lässt sich das optimale Verhältnis von physischem Kapital zu Humankapital ableiten, indem man die entsprechenden Terme für x_1^*, x_2^* und $\hat{c}^*$ in Gleichung (39) einsetzt.

$$\frac{1}{\sigma}(M-\rho) = A\left(\frac{\alpha(1-\eta)}{\eta(1-\alpha)}\left(\frac{\rho+\sigma\frac{1}{\sigma}(M-\rho)}{B(1-\eta)}\right)^{1/\eta}\right)^{\alpha}\frac{h}{k}\frac{\sigma M-(1-\eta)(M-\rho)}{\sigma M} - \chi$$

$$\boxed{\chi^* = \frac{1}{\sigma}\left(\frac{A\alpha\sigma[-\eta\rho + M(\eta+\sigma-1)+\rho]\left(\frac{\alpha(\eta-1)\left(\frac{M}{B(1-\eta)}\right)^{1/\eta}}{(\alpha-1)\eta}\right)^{\alpha-1}}{\rho(\alpha-\eta)+M(\alpha(\sigma-1)+\eta)} - M + \rho\right)} \tag{53}$$

Die allgemeine Gleichung $v = \frac{vk}{uh}\frac{uh}{k}$ wird gelöst, indem man auch hier wieder x_1^* und x_2^* einsetzt, sowie unter zu Hilfe nahme von $\frac{k}{h} = ux_1 + (1-u)x_2$. [1]

$$\frac{v = \frac{\alpha(1-\eta)}{\eta(1-\alpha)}\left(\frac{\rho+\frac{1}{\sigma}\sigma(M-\rho)}{B(1-\eta)}\right)^{\frac{1}{\eta}}\frac{M\sigma-(1-\eta)(M-\rho)}{\sigma M}}{\frac{\sigma M-(1-\eta)(M-\rho)}{\sigma M}\frac{\alpha(1-\eta)}{\eta(1-\alpha)}\left(\frac{\rho+\frac{1}{\sigma}\sigma(M-\rho)}{B(1-\eta)}\right)^{1/\eta} + \left(1-\frac{\sigma M-(1-\eta)(M-\rho)}{\sigma M}\right)\left(\frac{\rho+\frac{1}{\sigma}\sigma(M-\rho)}{B(1-\eta)}\right)^{1/\eta}} \cdot 1 \tag{54}$$

Daraus ergibt sich schlieSSlich die optimale Aufteilung v^* des physischen Kapitals auf die Sektoren:

$$\boxed{v^* = \frac{\alpha(1-\eta)\left(\frac{M}{BC(1-\eta)}\right)^{1/\eta}(M\sigma-(1-\eta)(M-\rho))}{(1-\alpha)\eta M\sigma\left(\frac{\alpha(1-\eta)\left(\frac{M}{BC(1-\eta)}\right)^{1/\eta}(M\sigma-(1-\eta)(M-\rho))}{(1-\alpha)\eta M\sigma} + \left(\frac{M}{BC(1-\eta)}\right)^{1/\eta}\left(1-\frac{M\sigma-(1-\eta)(M-\rho)}{M\sigma}\right)\right)}} \tag{55}$$

1.2 Maximierungsproblem im offenen Entwicklungsland

Die Ableitungen nach der Zeit - die Bewegungsgleichungen - für physisches Kapital und Humankapital lauten:

$$\dot{k}(t) = Ak(t)^{\alpha}(u(t)h(t))^{1-\alpha} - c(t) - c_{ex}(t) + p^* c_{im}(t) \tag{56}$$

$$\dot{h}(t) = B\bar{B}(1-u(t))h(t) \tag{57}$$

Aus Gründen der Anschaulichkeit wird im folgenden die Abhängigkeit der Variablen gegenüber der Zeit t vernachlässigt. Die Wachstumsrate des physischen Kapitals lautet:

$$\hat{k} = Ak^{\alpha-1}(uh)^{1-\alpha} - \frac{c}{k} - \frac{c_{ex}}{k} + p^*\frac{c_{im}}{k}$$

[1] Diese Form leitet sich aus der allgemeinen Aufteilung des physischen Kapitals zwischen dem Bildungs- und Produktionssektors $k = vk + (1-v)k$ ab. Die gesamte Gleichung wurde durch h geteilt und anschlieSSend um die Faktoren u und $(1-u)$ erweitert.Daraus folgt $\frac{k}{h} = u\frac{vk}{uh} + (1-u)\frac{(1-v)k}{(1-u)h}$

mit $\chi = \frac{c}{k}$, $\chi_{ex} = \frac{c_{ex}}{k}$ sowie $\chi_{im} = \frac{c_{im}}{k}$ ergibt sich

$$\boxed{\hat{k} = Au^{1-\alpha}\left(\frac{k}{h}\right)^{\alpha-1} - \chi - \chi_{ex} + p^{*}\chi_{im}} \tag{58}$$

Das Humankapital wächst in diesem Modell wie folgt.

$$\hat{h} = B\bar{B}(1-u) \tag{59}$$

Der soziale Planer löst das Maximierungsproblem mit Hilfe der Hamiltonfunktion.

$$\begin{aligned}\mathbb{H} = e^{-\rho t}&\frac{(c^{\beta}c_{im}^{1-\beta})^{1-\sigma}}{1-\sigma} \\ &+ \gamma_1(Ak^{\alpha}(uh)^{1-\alpha} - c - c_{ex} + p^{*}c_{im}) \\ &+ \gamma_2 B\bar{B}(1-u)h\end{aligned} \tag{60}$$

Die Bedingungen erster Ordnung werden bestimmt durch:

$$\frac{\partial\mathbb{H}}{\partial c} \stackrel{!}{=} 0 \tag{61}$$

$$\frac{\partial\mathbb{H}}{\partial c_{im}} \stackrel{!}{=} 0 \tag{62}$$

$$\frac{\partial\mathbb{H}}{\partial k} \stackrel{!}{=} -\dot{\gamma_1} \tag{63}$$

$$\frac{\partial\mathbb{H}}{\partial k} \stackrel{!}{=} -\dot{\gamma}_{1im} \tag{64}$$

$$\frac{\partial\mathbb{H}}{\partial u} \stackrel{!}{=} 0 \tag{65}$$

$$\frac{\partial\mathbb{H}}{\partial h} \stackrel{!}{=} -\dot{\gamma_2} \tag{66}$$

Die Berechnung von Gleichung (61) ergibt:

$$\partial\mathbb{H}/\partial c \stackrel{!}{=} 0$$

$$e^{-\rho t}\beta c^{\beta-1}c_{im}^{1-\beta}(c^{\beta}c_{im}^{1-\beta})^{-\sigma} - \gamma_1 \stackrel{!}{=} 0 \tag{67}$$

$$\gamma_1 = e^{-\rho t}\beta c^{\beta-1}c_{im}^{1-\beta}(c^{\beta}c_{im}^{1-\beta})^{-\sigma} \tag{68}$$

Die Bewegungsgleichung des Schattenpreises γ_1 wird später für die Herleitung der Keynes Ramsey Regel benötigt. Somit ist die Ableitung nach der Zeit von Gleichung (68) zu bilden.

$$\frac{\partial\gamma_1}{\partial t} = \dot{\gamma_1} \tag{69}$$

$$\begin{aligned}\dot{\gamma_1} = &- e^{-\rho t}\beta\rho c^{\beta-1}c_{im}^{1-\beta}(c^{\beta}c_{im}^{1-\beta})^{-\sigma} + e^{-\rho t}\beta(\beta-1)c^{\beta-2}\dot{c}c_{im}^{1-\beta}(c^{\beta}c_{im}^{1-\beta})^{-\sigma} \\ &+ e^{-\rho t}\beta c^{\beta-1}(c^{\beta}c_{im}^{1-\beta})^{-\sigma}(1-\beta)c_{im}^{1-\beta-1}\dot{c}_{im} \\ &- e^{-\rho t}\beta\sigma c^{\beta-1}c_{im}^{1-\beta}(c^{\beta}c_{im}^{1-\beta})^{-1-\sigma}(c_{im}^{1-\beta}\beta c^{\beta-1}\dot{c} + c^{\beta}c_{im}^{1-\beta-1}(1-\beta)\dot{c}_{im})\end{aligned}$$

$$= e^{-\rho t}\beta c^{\beta-1}c_{im}^{1-\beta}(c^{\beta}c_{im}^{1-\beta})^{-\sigma}$$
$$\Big[-\rho+(\beta-1)\hat{c}+(1-\beta)\hat{c}_{im}-\sigma(c^{\beta}c_{im}^{1-\beta})^{-1}(c_{im}^{1-\beta}c^{\beta}(\beta\hat{c}+(1-\beta)\hat{c}_{im}))\Big]$$

$$= -\rho+(\beta-1)\hat{c}+(1-\beta)\hat{c}_{im}-\sigma\frac{c^{\beta}c_{im}^{1-\beta}}{c^{\beta}c_{im}^{1-\beta}}(\beta\hat{c}+(1-\beta)\hat{c}_{im})$$

$$= e^{-\rho t}\beta c^{\beta-1}c_{im}^{1-\beta}(c^{\beta}c_{im}^{1-\beta})^{-\sigma}$$
$$[-\rho+(\beta-1)\hat{c}+(1-\beta)\hat{c}_{im}-\sigma(\beta\hat{c}+(1-\beta)\hat{c}_{im})]$$

$$\dot{\gamma_1} = e^{-\rho t}\beta c^{\beta-1}c_{im}^{1-\beta}(c^{\beta}c_{im}^{1-\beta})^{-\sigma}[-\rho+\hat{c}(\beta-1-\sigma\beta)+\hat{c}_{im}(1-\beta+\sigma\beta-\sigma)] \tag{70}$$

umformuliert ist dies äquivalent mit

$$\dot{\gamma_1} = \gamma_1[-\rho+\hat{c}(\beta-1-\sigma\beta)+\hat{c}_{im}(1-\beta+\sigma\beta-\sigma)]$$

und es ergibt sich eine Wachstumsrate des Schattenpreises für Gut 1 gemäSS

$$\hat{\gamma_1} = -\rho+\hat{c}(\beta-1-\sigma\beta)+\hat{c}_{im}(1-\beta+\sigma\beta-\sigma) \tag{71}$$

Der Konsum ausländisch produzierter und somit importierter Güter bedingt die Nutzenmaximierung folgt aus Gleichung (62)

$$\partial\mathbb{H}/\partial c_{im} \overset{!}{=} 0$$
$$e^{-\rho t}(1-\beta)c^{\beta}c_{im}^{-\beta}(c^{\beta}c_{im}^{1-\beta})^{-\sigma}+p^{*}\gamma_1 \overset{!}{=} 0 \tag{72}$$
$$p^{*}\gamma_1 \hat{=} \gamma_{1im} = -e^{-\rho t}(1-\beta)c^{\beta}c_{im}^{-\beta}(c^{\beta}c_{im}^{1-\beta})^{-\sigma} \tag{73}$$

Der Schattenpreis des Importierten Gutes ergibt sich aus dem bekannten Schattenpreis γ_1, der den zukünftigen Grenznutzen einer zusätzliche Sachkapitaleinheit angibt bewertet mit dem Weltmarktpreis des Konsumgutes. Diese Gleichung (135) wird wiederum nach der Zeit abgeleitet.

$$\partial\gamma_{1im}/\partial t = \dot{\gamma}_{1im} \tag{74}$$

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}_{1im} =& [-e^{-\rho t}(1-\beta)\rho c^{\beta}(c^{\beta}c_{im}^{1-\beta})^{-\sigma}c_{im}^{-\beta}+e^{-\rho t}(1-\beta)(c^{\beta}c_{im}^{1-\beta})^{-\sigma}c_{im}^{-\beta}\beta c^{\beta-1}\dot{c}\\ &-e^{-\rho t}(1-\beta)\sigma c^{\beta}(c^{\beta}c_{im}^{1-\beta})^{-\sigma-1}c_{im}^{-\beta}(c_{im}^{1-\beta}\beta c^{\beta-1}\dot{c}+c^{\beta}c_{im}^{1-\beta-1}(1-\beta)\dot{c}_{im})\\ &+e^{-\rho t}(1-\beta)c^{\beta}(c^{\beta}c_{im}^{1-\beta})^{-\sigma}c_{im}^{-\beta-1}(-\beta)\dot{c}_{im}](-\frac{p}{p^{*}})\\ =& -\frac{p}{p^{*}}e^{-\rho t}(1-\beta)c^{\beta}(c^{\beta}c_{im}^{\beta-1})^{-\sigma}c_{im}^{-\beta}\\ &\Big[-\rho+\beta\hat{c}-\sigma(c^{\beta}c_{im}^{1-\beta})^{-1}(c_{im}^{1-\beta}c^{\beta}(\beta\hat{c}+(1-\beta)\hat{c}_{im})-\beta\hat{c}_{im})\Big]\end{aligned}$$

$$\dot{\gamma}_{1im} = -\frac{1}{p^{*}}e^{-\rho t}(1-\beta)c^{\beta}c_{im}^{-\beta}(c^{\beta}c_{im}^{1-\beta})^{-\sigma}[-\rho+\hat{c}(\beta-\sigma\beta)-\hat{c}_{im}(\beta-\sigma\beta+\sigma)] \tag{75}$$

$$\dot{\gamma}_{1im} = \gamma_{1im}[-\rho+\hat{c}(\beta-\sigma\beta)-\hat{c}_{im}(\beta-\sigma\beta+\sigma)] \tag{76}$$

Aus der Ableitung der Hamiltonian nach dem physischen Kapital gemäSS Gleichung (63), folgt die Wachstumsrate des Schattenpreises von Gut 2.

$$\partial\mathbb{H}/\partial k \stackrel{!}{=} -\dot{\gamma}_1$$

$$\gamma_1 A k^{\alpha-1}\alpha(uh)^{1-\alpha} \stackrel{!}{=} -\dot{\gamma}_1 \tag{77}$$

durch γ_1 teilen und $\hat{\gamma}_1$ einsetzten aus (71)

$$A\alpha k^{\alpha-1}(uh)^{1-\alpha} = \rho - \hat{c}(\beta - 1 - \sigma\beta) - \hat{c}_{im}(1 - \beta + \sigma\beta - \sigma)$$

$$A\alpha k^{\alpha-1}(uh)^{1-\alpha} - \rho + \hat{c}_{im}(1 - \beta + \sigma\beta - \sigma) = -\hat{c}(\beta - 1 - \sigma\beta)$$

$$\boxed{\hat{c} = \frac{1}{(1-\beta+\sigma\beta)}\left(A\alpha\left(\frac{k}{h}\right)^{\alpha-1} u^{1-\alpha} - \rho + \hat{c}_{im}(1 - \beta + \sigma\beta - \sigma)\right)} \tag{78}$$

Sie beschreibt das inländische Konsumwachstum der Volkswirtschaft. Für dieses Handelsmodell ist aber nicht nur der optimale Wachstumspfad der heimisch produzierten Güter interessant, sondern auch der der importierten und somit im Ausland produzierten Güter. Für die Herleitung der Konsumwachstumsrate importierter Güter wird zunächst die Hamiltonian nach dem physischen Kapital abgeleitet und gleich der Bewegungsgleichung des Schattenpreises importierter Güter gesetzt, gemäSS Gleichung (64).

$$\partial\mathbb{H}/\partial k \stackrel{!}{=} -\dot{\gamma_{1im}}$$

$$\gamma_{1im} A(hu)^{1-\alpha}\alpha k^{\alpha-1} \stackrel{!}{=} -\dot{\gamma}_{1im} \tag{79}$$

Es wird $\dot{\gamma}_{1im}$ aus Gleichungen (76) in Gleichung (79) ersetzt.

$$\gamma_{1im} A(hu)^{1-\alpha}\alpha k^{\alpha-1} = -\dot{\gamma}_{1m}$$

$$\gamma_{1im} A\alpha\left(\frac{k}{uh}\right)^{\alpha-1} = -\gamma_{1im}\left[-\rho + \hat{c}(\beta - \sigma\beta) - \hat{c}_{im}(\beta - \sigma\beta + \sigma)\right]$$

$$A\alpha\left(\frac{k}{uh}\right)^{\alpha-1} - \rho + \hat{c}(\beta - \sigma\beta) = \hat{c}_{im}(\beta - \sigma\beta + \sigma)$$

$$\boxed{\hat{c}_{im} = \frac{1}{\beta - \sigma\beta + \sigma}\left(A\alpha\left(\frac{k}{uh}\right)^{\alpha-1} - \rho + \hat{c}(\beta - \sigma\beta)\right)} \tag{80}$$

Aus der Bedingung laut Gleichung (65) folgt die optimale Aufteilung des Humankapitals zwischen dem Produktions- und Bildungssektor.

$$\partial\mathbb{H}/\partial u \stackrel{!}{=} 0 \tag{81}$$

$$\gamma_1 A k^{\alpha} h^{1-\alpha} u^{-\alpha}(1-\alpha) - \gamma_2 B\bar{B}h \stackrel{!}{=} 0 \tag{82}$$

$$\gamma_1 A k^{\alpha} h^{1-\alpha} u^{-\alpha}(1-\alpha) = \gamma_2 B\bar{B}h \tag{83}$$

Dieser Term wird nach γ_2 umgestellt, um anschlieSSend die Wachstumsrate des Schattenpreises in Sektor zwei bestimmen zu können.

$$\gamma_2 = \gamma_1 \frac{Ak^\alpha h^{1-\alpha} u^{-\alpha}(1-\alpha)}{B\bar{B}h} \tag{84}$$

$$\hat{\gamma}_2 = \hat{\gamma}_1 + \alpha\hat{k} - \alpha\hat{h} - \alpha\hat{u} \tag{85}$$

Das Verhältnis beider Schattenpreise lautet:

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{B\bar{B}h}{Ak^\alpha h^{1-\alpha} u^{-\alpha}(1-\alpha)} = \frac{B\bar{B}h^\alpha u^\alpha}{Ak^\alpha(1-\alpha)} \tag{86}$$

Aus der letzten Bedingung erster Ordnung gemäSS Gleichung (66) wurde folgende Gleichgewichtsbedingung hergeleitet.

$$\partial\mathbb{H}/\partial h \stackrel{!}{=} -\dot{\gamma}_2 \tag{87}$$

$$\gamma_1 Ak^\alpha u^{1-\alpha}(1-\alpha)h^{-\alpha} + \gamma_2 B\bar{B}(1-u) = -\dot{\gamma}_2 \tag{88}$$

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} Ak^\alpha u^{1-\alpha}(1-\alpha)h^{-\alpha} + B\bar{B}(1-u) = -\hat{\gamma}_2 \tag{89}$$

Es wird das Verhältnis $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ aus (154) ersetzt, sowie $\hat{\gamma}_2$ aus Gleichung (85).

$$\frac{B\bar{B}h}{Ak^\alpha h^{1-\alpha} u^{-\alpha}(1-\alpha)} Ak^\alpha u^{1-\alpha}(1-\alpha)h^{-\alpha} + B\bar{B}(1-u) = -\hat{\gamma}_1 - \alpha\hat{k} + \alpha\hat{h} + \alpha\hat{u}$$

$$B\bar{B}u + B\bar{B}(1-u) = A\alpha k^{\alpha-1}(uh)^{1-\alpha} + \alpha\hat{u} - \alpha(\hat{k} - \hat{h}) \tag{90}$$

$$B\bar{B}u + B\bar{B}(1-u) = A\alpha k^{\alpha-1}(uh)^{1-\alpha} + \alpha\hat{u} - \alpha(Ak^{\alpha-1}(uh)^{1-\alpha} - \chi - (1-u)B\bar{B}) \tag{91}$$

$$B\bar{B}(u+1-u) = \alpha(1-u)B\bar{B} + \alpha\hat{u} + \alpha\chi - \alpha(1-u)B\bar{B} \tag{92}$$

$$\alpha\hat{u} = B\bar{B} - \alpha(1-u)B\bar{B} - \alpha\chi \tag{93}$$

$$\hat{u} = \frac{1}{\alpha}B\bar{B} - (1-u)B\bar{B} - \chi \tag{94}$$

$$\hat{u} = B\bar{B}(\frac{1}{\alpha} - 1 + u) - \chi \tag{95}$$

$$\boxed{\hat{u} = B\bar{B}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) + B\bar{B}u - \chi} \tag{96}$$

Befindet sich die Volkswirtschaft im Gleichgewicht, dann entspricht dies in einem Handelsmodell dem AuSSenhandelsgewicht. Es kann davon ausgegangen werden, dass der optimale Konsumpfad der importieren Güter dem der heimisch produzierten Güter entspricht. Demzufolge gilt, dass $\hat{c} = \hat{c}_{im}$ ist. Nachfolgend werden die beiden Gleichungen (78) und (**??**) gleichgesetzt und es ergibt sich ein gleichgewichtiger optimaler Konsumpfad einer offenen Volkswirtschaft.

$$\hat{c} = \hat{c}_{im} \tag{97}$$

$$\frac{1}{(1-\beta+\sigma\beta)}\left[A\alpha\left(\frac{k}{h}\right)^{\alpha-1}u^{1-\alpha}-\rho+\hat{c}_{im}(1-\beta+\sigma\beta-\sigma)\right]=$$
$$\frac{1}{\sigma(1-\beta)+\beta}\left[A\alpha\left(\frac{k}{h}\right)^{\alpha-1}u^{1-\alpha}-\rho+\hat{c}(\beta-\sigma\beta)\right] \tag{98}$$

erneutes einsetzten von $\hat{c}_{im}$ und auflösen nach $\hat{c}$ führt zu:

$$\frac{1}{(1-\beta+\sigma\beta)}\left[A\alpha\left(\frac{k}{h}\right)^{\alpha-1}u^{1-\alpha}-\rho+\frac{1-\beta+\sigma\beta-\sigma}{\sigma-\sigma\beta+\beta}\left[A\alpha\left(\frac{k}{h}\right)^{\alpha-1}u^{1-\alpha}-\rho+\hat{c}(\beta-\sigma\beta)\right]\right]=$$
$$\frac{1}{\sigma-\sigma\beta+\beta}\left[A\alpha\left(\frac{k}{h}\right)^{\alpha-1}u^{1-\alpha}-\rho+\hat{c}(\beta-\sigma\beta)\right]$$

$$A\alpha\left(\frac{k}{h}\right)^{\alpha-1}u^{1-\alpha}-\rho+\frac{1-\beta+\sigma\beta-\sigma}{\sigma-\sigma\beta+\beta}\left[A\alpha\left(\frac{k}{h}\right)^{\alpha-1}u^{1-\alpha}-\rho+\hat{c}(\beta-\sigma\beta)\right]=$$
$$\frac{1-\beta+\sigma\beta}{\sigma-\sigma\beta+\beta}\left[A\alpha\left(\frac{k}{h}\right)^{\alpha-1}u^{1-\alpha}-\rho+\hat{c}(\beta-\sigma\beta)\right]$$

$$A\alpha\left(\frac{k}{h}\right)^{\alpha-1}u^{1-\alpha}-\rho=\frac{\sigma}{\sigma-\sigma\beta+\beta}\left[A\alpha\left(\frac{k}{h}\right)^{\alpha-1}u^{1-\alpha}-\rho+\hat{c}(\beta-\sigma\beta)\right]$$

$$A\alpha\left(\frac{k}{h}\right)^{\alpha-1}u^{1-\alpha}-\rho=\frac{\beta-1+\sigma}{\beta}\left(A\alpha\left(\frac{k}{h}\right)^{\alpha-1}u^{1-\alpha}-\rho\right)+\frac{\beta-1+\sigma}{\beta}\hat{c}(\beta-\sigma\beta)$$

$$\frac{A\alpha\left(\frac{k}{h}\right)^{\alpha-1}u^{1-\alpha}-\rho}{\beta-1+\sigma}=\frac{A\alpha\left(\frac{k}{h}\right)^{\alpha-1}u^{1-\alpha}-\rho}{\beta}+\hat{c}(1-\sigma)$$
$$\left(A\alpha\left(\frac{k}{h}\right)^{\alpha-1}u^{1-\alpha}-\rho\right)\left(\frac{1}{\beta-1+\sigma}-\frac{1}{\beta}\right)=\hat{c}(1-\sigma)$$
$$\left(A\alpha\left(\frac{k}{h}\right)^{\alpha-1}u^{1-\alpha}-\rho\right)\frac{1-\sigma}{\sigma}=\hat{c}(1-\sigma)$$
$$\boxed{\hat{c}=\frac{1}{\sigma}\left(A\alpha\left(\frac{k}{h}\right)^{\alpha-1}u^{1-\alpha}-\rho\right)} \tag{99}$$

Im Gleichgewicht gilt $\hat{u}=0$ Warum?

$$\frac{1-\alpha}{\alpha}B\bar{B}+B\bar{B}u-\chi=0 \tag{100}$$

$$\chi=\frac{1-\alpha}{\alpha}B\bar{B}+B\bar{B}u \tag{101}$$

Des weiteren gilt im Steady State $\hat{c}=\hat{k}=\hat{h}$. Somit gilt zum einen, dass

$$\hat{k}=\hat{h} \tag{102}$$

$$Ak^{\alpha-1}(uh)^{1-\alpha} - \chi = (1-u)B\bar{B} \tag{103}$$

$$Ak^{\alpha-1}(uh)^{1-\alpha} - \frac{1-\alpha}{\alpha}B\bar{B} - B\bar{B}u = (1-u)B\bar{B} \tag{104}$$

Verkürzt durch $z^* = Ak^{\alpha-1}(uh)^{1-\alpha}$ lässt sich dies darstellen als:

$$z + \frac{1}{\alpha}B\bar{B} + B\bar{B} - B\bar{B}u = B\bar{B} - B\bar{B}u \tag{105}$$

$$\boxed{z = \frac{1}{\alpha}B\bar{B}} \tag{106}$$

AuSSerdem entsprechen sich im Gleichgewicht auch:

$$\hat{c} = \hat{k} \tag{107}$$

$$\frac{1}{\sigma}(A\alpha k^{\alpha-1}(hu)^{1-\alpha} - \rho) = Ak^{\alpha-1}(uh)^{1-\alpha} - \chi \tag{108}$$

Da sich der Term $A\alpha k^{\alpha-1}(hu)^{1-\alpha}$ auch als αz und für $Ak^{\alpha-1}(uh)^{1-\alpha}$ auch z schreiben lässt ergibt sich zunächst:

$$\frac{1}{\sigma}(\alpha z - \rho) = z - \chi \tag{109}$$

Hier wiederum kann aus (106) eingesetzt werden.

$$(B\bar{B} - \rho)\frac{1}{\sigma} = \frac{B\bar{B}}{\alpha} - \chi \tag{110}$$

$$\boxed{\chi^* = \frac{B\bar{B}}{\alpha} - \frac{B\bar{B} - \rho}{\sigma}} \tag{111}$$

Um die maximierende Aufteilung des physischen Kapitals auf die beiden Sektoren u zu erhalten, werden Gleichung (101) und Gleichung (111) gleichgesetzt.

$$B\bar{B}\frac{1-\alpha}{\alpha} + B\bar{B}u = \frac{B\bar{B}\alpha}{\alpha} - \frac{B\bar{B} - \rho}{\sigma} \tag{112}$$

$$\frac{1-\alpha}{\alpha} + u = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\sigma} + \frac{\rho}{\sigma B\bar{B}}$$

$$u = \frac{1}{\alpha} - \frac{1-\alpha}{\alpha} - \frac{1}{\sigma}\left(1 - \frac{\rho}{B\bar{B}}\right)$$

$$\boxed{u^* = 1 - \frac{1}{\sigma}\left(1 - \frac{\rho}{B\bar{B}}\right)} \tag{113}$$

Es ergibt sich für das offenen Entwicklungsland der gleichgewichtige Wachstumspfad unter Berücksichtigung von (106)

$$\boxed{\hat{c}^* = \frac{1}{\sigma}\left(\frac{1}{\alpha}B\bar{B} - \rho\right)} \tag{114}$$

1.3 Maximierungsproblem im offenen Industrieland

Die Ableitungen nach der Zeit - die Bewegungsgleichungen - für physisches Kapital und Humankapital lauten:

$$\dot{k}(t) = A(v(t)k(t))^{\alpha}(u(t)h(t))^{1-\alpha} - c(t) - c_{ex}(t) + p^{*}c_{im}(t) \tag{115}$$

$$\dot{h}(t) = B\bar{B}((1-v(t))k(t))^{\eta}((1-u(t))h(t))^{1-\eta} \tag{116}$$

Aus Gründen der Anschaulichkeit wird im folgenden die Abhängigkeit der Variablen gegenüber der Zeit t vernachlässigt. Die Wachstumsrate des physischen Kapitals lautet:

$$\hat{k} = Av^{\alpha}k^{\alpha-1}(uh)^{1-\alpha} - \frac{c}{k} - \frac{c_{ex}}{k} + p^{*}\frac{c_{im}}{k}$$

mit $\chi = \frac{c}{k}$, $\chi_{ex} = \frac{c_{ex}}{k}$ sowie $\chi_{im} = \frac{c_{im}}{k}$ ergibt sich

$$\hat{k} = Av^{\alpha}u^{1-\alpha}\left(\frac{k}{h}\right)^{\alpha-1} - \chi - \chi_{ex} + p^{*}\chi_{im} \tag{117}$$

Durch die Substitution von $x_1 = \frac{vk}{uh}$ lässt sich die Wachstumsrate in verkürzter Form darstellen.

$$\boxed{\hat{k} = Ax_1^{\alpha}\frac{uh}{k} - \chi - \chi_{ex} + p^{*}\chi_{im}} \tag{118}$$

Das Humankapital wächst in diesem Modell wie folgt.

$$\hat{h} = B\bar{B}\left[(1-v)\frac{k}{h}\right]^{\eta}(1-u)^{1-\eta} \tag{119}$$

Ebenfalls lässt sich die Wachstumsrate durch eine Substitution von $x_2 = \frac{(1-v)k}{(1-u)h}$ in einer verkürzten Form darstellen.

$$\boxed{\hat{h} = B\bar{B}x_2^{\eta}(1-u)} \tag{120}$$

Der soziale Planer löst das Maximierungsproblem mit Hilfe der Hamiltonfunktion.

$$\begin{aligned}\mathbb{H} = {} & e^{-\rho t}\frac{(c^{\beta}c_{im}^{1-\beta})^{1-\sigma}}{1-\sigma} \\ & + \gamma_1(A(vk)^{\alpha}(uh)^{1-\alpha} - c - c_{ex} + p^{*}c_{im}) \\ & + \gamma_2 B\bar{B}[(1-v)k]^{\eta}[(1-u)h]^{1-\eta}\end{aligned} \tag{121}$$

Die Bedingungen erster Ordnung werden bestimmt durch:

$$\frac{\partial \mathbb{H}}{\partial c} \overset{!}{=} 0 \tag{122}$$

$$\frac{\partial \mathbb{H}}{\partial c_{im}} \overset{!}{=} 0 \tag{123}$$

$$\frac{\partial \mathbb{H}}{\partial v} \overset{!}{=} 0 \tag{124}$$

$$\frac{\partial \mathbb{H}}{\partial k} \overset{!}{=} -\dot{\gamma}_1 \tag{125}$$

$$\frac{\partial \mathbb{H}}{\partial k} \overset{!}{=} -\dot{\gamma}_{1im} \tag{126}$$

$$\frac{\partial \mathbb{H}}{\partial u} \overset{!}{=} 0 \tag{127}$$

$$\frac{\partial \mathbb{H}}{\partial h} \overset{!}{=} -\dot{\gamma}_2 \tag{128}$$

Die Berechnung von Gleichung (122) ergibt:

$$\partial \mathbb{H}/\partial c \overset{!}{=} 0$$

$$e^{-\rho t}\beta c^{\beta-1}c_{im}^{1-\beta}(c^\beta c_{im}^{1-\beta})^{-\sigma} - \gamma_1 \overset{!}{=} 0 \tag{129}$$

$$\gamma_1 = e^{-\rho t}\beta c^{\beta-1}c_{im}^{1-\beta}(c^\beta c_{im}^{1-\beta})^{-\sigma} \tag{130}$$

Die Bewegungsgleichung des Schattenpreises γ_1^* wird später für die Herleitung der Keynes Ramsey Regel benötigt. Somit ist die Ableitung nach der Zeit von Gleichung (130) zu bilden.

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial t} = \dot{\gamma}_1 \tag{131}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\gamma}_1 = &- e^{-\rho t}\beta\rho c^{\beta-1}c_{im}^{1-\beta}(c^\beta c_{im}^{1-\beta})^{-\sigma} + e^{-\rho t}\beta(\beta-1)c^{\beta-2}\dot{c}c_{im}^{1-\beta}(c^\beta c_{im}^{1-\beta})^{-\sigma} \\
&+ e^{-\rho t}\beta c^{\beta-1}(c^\beta c_{im}^{1-\beta})^{-\sigma}(1-\beta)c_{im}^{1-\beta-1}\dot{c}_{im} \\
&- e^{-\rho t}\beta\sigma c^{\beta-1}c_{im}^{1-\beta}(c^\beta c_{im}^{1-\beta})^{-1-\sigma}(c_{im}^{1-\beta}\beta c^{\beta-1}\dot{c} + c^\beta c_{im}^{1-\beta-1}(1-\beta)\dot{c}_{im})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-\rho t}\beta c^{\beta-1}c_{im}^{1-\beta}(c^\beta c_{im}^{1-\beta})^{-\sigma} \\
&\quad \Big[-\rho + (\beta-1)\hat{c} + (1-\beta)\hat{c}_{im} - \sigma(c^\beta c_{im}^{1-\beta})^{-1}(c_{im}^{1-\beta}c^\beta(\beta\hat{c} + (1-\beta)\hat{c}_{im}))\Big]
\end{aligned}$$

$$= -\rho + (\beta-1)\hat{c} + (1-\beta)\hat{c}_{im} - \sigma\frac{c^\beta c_{im}^{1-\beta}}{c^\beta c_{im}^{1-\beta}}(\beta\hat{c} + (1-\beta)\hat{c}_{im})$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-\rho t}\beta c^{\beta-1}c_{im}^{1-\beta}(c^\beta c_{im}^{1-\beta})^{-\sigma} \\
&\quad [-\rho + (\beta-1)\hat{c} + (1-\beta)\hat{c}_{im} - \sigma(\beta\hat{c} + (1-\beta)\hat{c}_{im})]
\end{aligned}$$

$$\dot{\gamma}_1 = e^{-\rho t}\beta c^{\beta-1}c_{im}^{1-\beta}(c^\beta c_{im}^{1-\beta})^{-\sigma}[-\rho + \hat{c}(\beta - 1 - \sigma\beta) + \hat{c}_{im}(1 - \beta + \sigma\beta - \sigma)] \tag{132}$$

umformuliert ist dies äquivalent mit

$$\dot{\gamma_1} = \gamma_1[-\rho + \hat{c}(\beta - 1 - \sigma\beta) + \hat{c}_{im}(1 - \beta + \sigma\beta - \sigma)]$$

und es ergibt sich eine Wachstumsrate des Schattenpreises für Gut 1 gemäSS

$$\hat{\gamma_1} = -\rho + \hat{c}(\beta - 1 - \sigma\beta) + \hat{c}_{im}(1 - \beta + \sigma\beta - \sigma) \tag{133}$$

Der Konsum ausländisch produzierter und somit importierter Güter bedingt die Nutzenmaximierung wie folgt aus Gleichung (123)

$$\partial\mathbb{H}/\partial c_{im} \overset{!}{=} 0$$

$$e^{-\rho t}(1-\beta)c^{\beta}c_{im}^{-\beta}(c^{\beta}c_{im}^{1-\beta})^{-\sigma} + p^{*}\gamma_1 \overset{!}{=} 0 \tag{134}$$

$$p^{*}\gamma_1 \hat{=} \gamma_{1im} = -e^{-\rho t}(1-\beta)c^{\beta}c_{im}^{-\beta}(c^{\beta}c_{im}^{1-\beta})^{-\sigma} \tag{135}$$

Diese Gleichung (135) wird wiederum nach der Zeit abgeleitet.

$$\frac{\partial\gamma_{1im}}{\partial t} = \dot{\gamma}_{1im} \tag{136}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\gamma}_{1im} =& [-e^{-\rho t}(1-\beta)\rho c^{\beta}(c^{\beta}c_{im}^{1-\beta})^{-\sigma}c_{im}^{-\beta} + e^{-\rho t}(1-\beta)(c^{\beta}c_{im}^{1-\beta})^{-\sigma}c_{im}^{-\beta}\beta c^{\beta-1}\dot{c} \\
&- e^{-\rho t}(1-\beta)\sigma c^{\beta}(c^{\beta}c_{im}^{1-\beta})^{-\sigma-1}c_{im}^{-\beta}(c_{im}^{1-\beta}\beta c^{\beta-1}\dot{c} + c^{\beta}c_{im}^{1-\beta-1}(1-\beta)\dot{c}_{im}) \\
&+ e^{-\rho t}(1-\beta)c^{\beta}(c^{\beta}c_{im}^{1-\beta})^{-\sigma}c_{im}^{-\beta-1}(-\beta)\dot{c}_{im}](-\frac{p}{p^{*}}) \\
=& -\frac{p}{p^{*}}e^{-\rho t}(1-\beta)c^{\beta}(c^{\beta}c_{im}^{\beta-1})^{-\sigma}c_{im}^{-\beta} \\
&\Big[-\rho + \beta\hat{c} - \sigma(c^{\beta}c_{im}^{1-\beta})^{-1}(c_{im}^{1-\beta}c^{\beta}(\beta\hat{c} + (1-\beta)\hat{c}_{im}) - \beta\hat{c}_{im})\Big]
\end{aligned}$$

$$\dot{\gamma}_{1im} = -\frac{1}{p^{*}}e^{-\rho t}(1-\beta)c^{\beta}c_{im}^{-\beta}(c^{\beta}c_{im}^{1-\beta})^{-\sigma}[-\rho + \hat{c}(\beta - \sigma\beta) - \hat{c}_{im}(\beta - \sigma\beta + \sigma)] \tag{137}$$

$$\dot{\gamma}_{1im} = \gamma_{1im}[-\rho + \hat{c}(\beta - \sigma\beta) - \hat{c}_{im}(\beta - \sigma\beta + \sigma)] \tag{138}$$

Die Bedingung laut Gleichung (124) bestimmt die optimale Aufteilung des physischen Kapitals der Wirtschaftssubjekte zwischen dem Produktions- und Bildungssektor.

$$\partial\mathbb{H}/\partial v \overset{!}{=} 0$$

$$\gamma_1 A\alpha v^{\alpha-1}k^{\alpha}(uh)^{1-\alpha} - \gamma_2 B\bar{B}\eta(1-v)^{\eta-1}k^{\eta}[(1-u)h]^{1-\eta} \overset{!}{=} 0 \tag{139}$$

$$\gamma_1 A\alpha v^{\alpha-1}k^{\alpha}(uh)^{1-\alpha} = \gamma_2 B\bar{B}\eta(1-v)^{\eta-1}k^{\eta}[(1-u)h]^{1-\eta} \tag{140}$$

Daraus lässt sich das Verhältnis der Schattenpreise beider Güter herleiten.

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{A\alpha v^{\alpha-1}k^{\alpha}(uh)^{1-\alpha}}{B\bar{B}\eta(1-v)^{\eta-1}k^{\eta}[(1-u)h]^{1-\eta}} \tag{141}$$

$$= \frac{A\alpha\left(\frac{vk}{uh}\right)^{\alpha-1}}{B\bar{B}\eta\left(\frac{(1-v)k}{(1-u)h}\right)^{\eta-1}} = \frac{A\alpha x_1^{\alpha-1}}{B\bar{B}\eta x_2^{\eta-1}} \tag{142}$$

$$\gamma_2 = \gamma_1 \frac{A\alpha \left(\frac{vk}{uh}\right)^{\alpha-1}}{B\bar{B}\eta \left(\frac{(1-v)k}{(1-u)h}\right)^{\eta-1}} \Longleftrightarrow \gamma_1 = \gamma_2 \frac{B\bar{B}\eta \left(\frac{(1-v)k}{(1-u)h}\right)^{\eta-1}}{A\alpha \left(\frac{vk}{uh}\right)^{\alpha-1}} \tag{143}$$

Aus der Ableitung der Hamiltonian nach dem physischen Kapital gemäSS Gleichung (125), folgt die Wachstumsrate des Schattenpreises von Gut 2.

$\partial \mathbb{H}/\partial k \stackrel{!}{=} -\dot{\gamma}_1$

$$\gamma_1 A v^\alpha k^{\alpha-1} \alpha (uh)^{1-\alpha} + \gamma_2 B\bar{B}(1-v)^\eta k^{\eta-1} \eta \left[(1-u)h\right]^{1-\eta} \stackrel{!}{=} -\dot{\gamma}_1 \tag{144}$$

$$A\alpha v^\alpha k^{\alpha-1}(uh)^{1-\alpha} + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} B\bar{B}\eta(1-v)^\eta k^{\eta-1}\left[(1-u)h\right]^{1-\eta} = -\hat{\gamma}_1$$

Dabei muss das Verhältnis beider Schattenpreise γ_2/γ_1 aus Gleichung (142) eingesetzt werden.

$$A\alpha v^\alpha u^{1-\alpha}\left(\frac{k}{h}\right)^{\alpha-1} + \frac{A\alpha \left(\frac{vk}{uh}\right)^{\alpha-1}}{B\bar{B}\eta \left(\frac{(1-v)k}{(1-u)h}\right)^{\eta-1}} B\bar{B}\eta(1-v)^\eta k^{\eta-1}\left[(1-u)h\right]^{1-\eta} = -\hat{\gamma}_1$$

$$A\alpha \left(\frac{vk}{uh}\right)^{\alpha-1} (v + (1-v)) = -\hat{\gamma}_1$$

$$A\alpha \left(\frac{vk}{uh}\right)^{\alpha-1} = -\hat{\gamma}_1$$

$$\hat{\gamma}_1 = -A\alpha \left(\frac{vk}{uh}\right)^{\alpha-1} \Longleftrightarrow \hat{\gamma}_1 = -A\alpha x_1^{\alpha-1} \tag{145}$$

Die Keynes Ramsey Regel folgt aus der Kombination von Gleichung (144) mit γ_2 laut (143) und $\dot{\gamma}_1$ aus (132).

$$\begin{aligned} &\gamma_1 A\alpha v^\alpha \left(\frac{k}{h}\right)^{\alpha-1} u^{1-\alpha} + \gamma_1 \frac{A\alpha \left(\frac{vk}{uh}\right)^{\alpha-1}}{B\bar{B}\eta \left(\frac{(1-v)k}{(1-u)h}\right)^{\eta-1}} B\bar{B}\eta(1-v)^\eta k^{\eta-1}\left[h(1-u)\right]^{1-\eta} \\ &\stackrel{!}{=} -\gamma_1\left[-\rho + \hat{c}(\beta - 1 - \sigma\beta) + \hat{c}_{im}(1 - \beta + \sigma\beta - \sigma)\right] \end{aligned} \tag{146}$$

$$A\alpha \left(\frac{vk}{uh}\right)^{\alpha-1} (v + (1-v)) = \rho - \hat{c}(\beta - 1 - \sigma\beta) - \hat{c}_{im}(1 - \beta + \sigma\beta - \sigma)$$

$$A\alpha \left(\frac{vk}{uh}\right)^{\alpha-1} - \rho + \hat{c}_{im}(1 - \beta + \sigma\beta - \sigma) = -\hat{c}(\beta - 1 - \sigma\beta) \stackrel{\wedge}{=} \hat{c}(1 - \beta + \sigma\beta)$$

$$\boxed{\hat{c} = \frac{1}{(1 - \beta + \sigma\beta)} \left(A\alpha \left(\frac{vk}{uh}\right)^{\alpha-1} - \rho + \hat{c}_{im}(1 - \beta + \sigma\beta - \sigma)\right)} \tag{147}$$

Sie beschreibt das inländische Konsumwachstum der Volkswirtschaft. Für dieses Handelsmodell ist aber nicht nur der optimale Wachstumspfad der heimisch produzierten Güter interessant, sondern auch der der importierten und somit im Ausland produzierten Güter. Für die Herleitung der Konsumwachstumsrate importierter Güter wird zunächst die Hamiltonian nach dem physischen Kapital abgeleitet und gleich der Bewegungsgleichung des Schattenpreises importierter Güter gesetzt, gemäSS Gleichung (126).

$\partial \mathbb{H}/\partial k \stackrel{!}{=} -\dot{\gamma}_{1im}$

$$\gamma_{1im} A(hu)^{1-\alpha} \alpha v^{\alpha} k^{\alpha-1} + \gamma_2 B\bar{B}[h(1-u)]^{1-\eta} \eta (1-v)^{\eta} k^{\eta-1} \stackrel{!}{=} -\dot{\gamma}_{1im} \tag{148}$$

Auch hier werden die folgenden Variablen, $\dot{\gamma}_{1im}$ und γ_2 durch die entsprechenden Gleichungen (138) und (143) in Gleichung (148) ersetzt.

$$\gamma_{1im} A(hu)^{1-\alpha} \alpha v^{\alpha} k^{\alpha-1} + \gamma_{1im} \frac{A\alpha \left(\frac{vk}{uh}\right)^{\alpha-1}}{B\bar{B}\eta \left(\frac{(1-v)k}{(1-u)h}\right)^{\eta-1}} B\bar{B}[h(1-u)]^{1-\eta} \eta (1-v)^{\eta} k^{\eta-1} = -\dot{\gamma}_{1m}$$

$$\gamma_{1im} A\alpha \left(\frac{vk}{uh}\right)^{\alpha-1} (v + (1-v)) = -\gamma_{1im} \left[-\rho + \hat{c}(\beta - \sigma\beta) - \hat{c}_{im}(\beta - \sigma\beta + \sigma)\right]$$

$$A\alpha \left(\frac{vk}{uh}\right)^{\alpha-1} - \rho + \hat{c}(\beta - \sigma\beta) = \hat{c}_{im}(\beta - \sigma\beta + \sigma)$$

$$\boxed{\hat{c}_{im} = \frac{1}{\beta - \sigma\beta + \sigma} \left(A\alpha \left(\frac{vk}{uh}\right)^{\alpha-1} - \rho + \hat{c}(\beta - \sigma\beta) \right)} \tag{149}$$

Aus der Bedingung laut Gleichung (127) folgt die optimale Aufteilung des Humankapitals zwischen dem Produktions- und Bildungssektor.

$$\partial \mathbb{H} / \partial u \stackrel{!}{=} 0$$

$$\gamma_1 A(1-\alpha)(vk)^{\alpha} h^{1-\alpha} u^{-\alpha} - \gamma_2 B\bar{B}(1-\eta)[(1-v)k]^{\eta} (1-u)^{-\eta} h^{1-\eta} \stackrel{!}{=} 0 \tag{150}$$

$$\gamma_1 A(1-\alpha)(vk)^{\alpha} h^{1-\alpha} u^{-\alpha} = \gamma_2 B\bar{B}(1-\eta)[(1-v)k]^{\eta} (1-u)^{-\eta} h^{1-\eta} \tag{151}$$

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{A(1-\alpha)(vk)^{\alpha} h^{1-\alpha} u^{-\alpha}}{B\bar{B}(1-\eta)[(1-v)k]^{\eta} (1-u)^{-\eta} h^{1-\eta}} \tag{152}$$

Zunächst erhalten wir wieder ein Verhältnis beider Schattenpreise.

$$= \frac{A(1-\alpha)\left(\frac{vk}{uh}\right)^{\alpha}}{B\bar{B}(1-\eta)\left(\frac{(1-v)k}{(1-u)h}\right)^{\eta}} = \frac{A(1-\alpha)x_1^{\alpha}}{B\bar{B}(1-\eta)x_2^{\eta}} \tag{153}$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 \frac{B\bar{B}(1-\eta)\left(\frac{(1-v)k}{(1-u)h}\right)^{\eta}}{A(1-\alpha)\left(\frac{vk}{uh}\right)^{\alpha}} \Longleftrightarrow \gamma_2 = \gamma_1 \frac{A(1-\alpha)\left(\frac{vk}{uh}\right)^{\alpha}}{B\bar{B}(1-\eta)\left(\frac{(1-v)k}{(1-u)h}\right)^{\eta}} = \gamma_1 \frac{A(1-\alpha)x_1^{\alpha}}{B\bar{B}(1-\eta)x_2^{\eta}} \tag{154}$$

Daraus lässt sich die Wachstumsrate des Schattenpreises von Gut 2 herleiten.

$$\hat{\gamma}_2 = \hat{\gamma}_1 + \alpha\hat{x}_1 - \eta\hat{x}_2 \tag{155}$$

Es werden nun die aus Bedingung (124) und (127) berechneten Verhältnisse der Schattenpreise (142) und (153) miteinander gleichgesetzt und es ergibt sich:

$$\frac{A\alpha x_1^{\alpha-1}}{B\bar{B}\eta x_2^{\eta-1}} = \frac{A(1-\alpha)x_1^{\alpha}}{B\bar{B}(1-\eta)x_2^{\eta}} \tag{156}$$

$$\boxed{\frac{1-\alpha}{\alpha} x_1 = \frac{1-\eta}{\eta} x_2} \tag{157}$$

Aus der letzten Bedingung erster Ordnung gemäSS Gleichung (128) wurde folgende Gleichgewichtsbedingung hergeleitet.

$\partial \mathbb{H}/\partial h \overset{!}{=} -\dot{\gamma}_2$

$$\gamma_1 A(1-\alpha)(vk)^{\alpha} u^{1-\alpha} h^{-\alpha} + \gamma_2 B\bar{B}(1-\eta)[(1-v)k]^{\eta}(1-u)^{1-\eta} h^{-\eta} \overset{!}{=} -\dot{\gamma}_2 \tag{158}$$

Es wird zunächst γ_1 aus (154) ersetzt.

$$\gamma_2 \frac{B\bar{B}(1-\eta)\left(\frac{(1-v)k}{(1-u)h}\right)^{\eta}}{A(1-\alpha)\left(\frac{vk}{uh}\right)^{\alpha}} A(1-\alpha)\left(\frac{vk}{uh}\right)^{\alpha} u + \gamma_2 B\bar{B}(1-\eta)\left(\frac{(1-v)k}{(1-u)h}\right)^{\eta}(1-u) = -\dot{\gamma}_2$$

$$B\bar{B}(1-\eta)\left(\frac{(1-v)k}{(1-u)h}\right)^{\eta}[u+1-u] = -\hat{\gamma}_2$$

$$\hat{\gamma}_2 = -B\bar{B}(1-\eta)\left(\frac{(1-v)k}{(1-u)h}\right)^{\eta} \iff \hat{\gamma}_2 = -B\bar{B}(1-\eta)x_2^{\eta} \tag{159}$$

AnschlieSSend werden in Gleichung (159) die in Gleichung (155) berechnete Wachstumsrate des Schattenpreises von Gut 2 eingesetzt und es ergibt sich

$$\hat{\gamma}_1 + \alpha\hat{x}_1 - \eta\hat{x}_2 = -B\bar{B}(1-\eta)x_2^{\eta} \tag{160}$$

In einem weiteren Schritt wird nun das Wachstum des Schattenpreises von Gut 1 aus Gleichung (17) substituiert.

$$\boxed{B\bar{B}(1-\eta)x_2^{\eta} = \rho - \hat{c}(\beta - 1 - \sigma\beta) - \hat{c}_{im}(1-\beta+\sigma\beta-\sigma) - \alpha\hat{x}_1 + \eta\hat{x}_2} \tag{161}$$

Demzufolge ergibt sich folgendes Gleichungssystem, welches das Gleichgewicht beschreibt.

$$\hat{k} = Ax_1^{\alpha}\frac{uh}{k} - \chi - \chi_{ex} + p^*\chi_{im} \tag{162}$$

$$\hat{h} = B\bar{B}x_2^{\eta}(1-u) \tag{163}$$

$$x_1(1-\alpha)/\alpha = x_2(1-\eta)/\eta \tag{164}$$

$$\hat{c} = \frac{1}{(1-\beta+\sigma\beta)}\left(A\alpha x_1^{\alpha-1} - \rho + \hat{c}_{im}(1-\beta+\sigma\beta-\sigma)\right) \tag{165}$$

$$B\bar{B}(1-\eta)x_2^{\eta} = \rho - \hat{c}(\beta-1-\sigma\beta) - \hat{c}_{im}(1-\beta+\sigma\beta-\sigma) - \alpha\hat{x}_1 + \eta\hat{x}_2 \tag{166}$$

Befindet sich die Volkswirtschaft im Gleichgewicht, dann entspricht dies in einem Handelsmodell dem AuSSenhandelsgewicht. Es kann davon ausgegangen werden, dass der optimale Konsumpfad der importieren Güter dem der heimisch produzierten Güter entspricht. Demzufolge gilt, dass $\hat{c} = \hat{c}_{im}$ ist. Nachfolgend werden die beiden Gleichungen (147) und (149) gleichgesetzt und es ergibt sich ein gleichgewichtiger optimaler Konsumpfad einer offenen Volkswirtschaft.

$\hat{c} = \hat{c}_{im}$

$$\frac{1}{(1-\beta+\sigma\beta)}[A\alpha x_1^{\alpha-1} - \rho + \hat{c}_{im}(1-\beta+\sigma\beta-\sigma)] = \frac{1}{\sigma(1-\beta)+\beta}[A\alpha x_1^{\alpha-1} - \rho + \hat{c}(\beta-\sigma\beta)] \tag{167}$$

erneutes einsetzten von $\hat{c}_{im}$ und auflösen nach $\hat{c}$ führt zu:

$$\frac{1}{(1-\beta+\sigma\beta)}\left[A\alpha x_1^{\alpha-1}-\rho+\frac{1-\beta+\sigma\beta-\sigma}{\sigma-\sigma\beta+\beta}[A\alpha x_1^{\alpha-1}-\rho+\hat{c}(\beta-\sigma\beta)]\right]=\frac{1}{\sigma-\sigma\beta+\beta}[A\alpha x_1^{\alpha-1}-\rho+\hat{c}(\beta-\sigma\beta)]$$

$$A\alpha x_1^{\alpha-1}-\rho+\frac{1-\beta+\sigma\beta-\sigma}{\sigma-\sigma\beta+\beta}[A\alpha x_1^{\alpha-1}-\rho+\hat{c}(\beta-\sigma\beta)]=\frac{1-\beta+\sigma\beta}{\sigma-\sigma\beta+\beta}[A\alpha x_1^{\alpha-1}-\rho+\hat{c}(\beta-\sigma\beta)]$$

$$A\alpha x_1^{\alpha-1}-\rho=\frac{\sigma}{\sigma-\sigma\beta+\beta}[A\alpha x_1^{\alpha-1}-\rho+\hat{c}(\beta-\sigma\beta)]$$

$$A\alpha x_1^{\alpha-1}-\rho=\frac{\beta-1+\sigma}{\beta}(A\alpha x_1^{\alpha-1}-\rho)+\frac{\beta-1+\sigma}{\beta}\hat{c}(\beta-\sigma\beta)$$

$$\frac{A\alpha x_1^{\alpha-1}-\rho}{\beta-1+\sigma}=\frac{A\alpha x_1^{\alpha-1}-\rho}{\beta}+\hat{c}(1-\sigma)$$

$$(A\alpha x_1^{\alpha-1}-\rho)\left(\frac{1}{\beta-1+\sigma}-\frac{1}{\beta}\right)=\hat{c}(1-\sigma)$$

$$(A\alpha x_1^{\alpha-1}-\rho)\frac{1-\sigma}{\sigma}=\hat{c}(1-\sigma)$$

$$\boxed{\hat{c}=\frac{1}{\sigma}(A\alpha x_1^{\alpha-1}-\rho)} \tag{168}$$

Die Gleichgewichtsbedingung (164) zeigt, wie sich die Relationen x_1 und x_2 langfristig verhalten, indem die Wachstumsrate von x_1 gebildet wird. Es zeigt sich, dass beide mit der gleichen Rate wachsen, denn es gilt:

$$\hat{x}_1=\hat{x}_2=0 \tag{169}$$

Des weiteren gilt im Steady State $\hat{c}=\hat{k}=\hat{h}$. Aus Bedingung (166) wird x_1^* berechnet mit $\hat{c}=\hat{c}_{im}$.

$$B\bar{B}(1-\eta)x_2^{\eta}=\rho-\hat{c}(\beta-1-\sigma\beta)-\hat{c}(1-\beta+\sigma\beta-\sigma) \tag{170}$$

$$x_2^{\eta}=\frac{1}{B\bar{B}(1-\eta)}[\rho+\hat{c}(-\beta+1+\sigma\beta+\beta-\sigma\beta+\sigma)]$$

$$x_2^*=\left(\frac{\rho+\sigma\hat{c}}{B\bar{B}(1-\eta)}\right)^{1/\eta} \tag{171}$$

Aus der Bedingung (164) wird x_1^* berechnet, indem x_2^* eingesetzt wird.

$$\frac{1-\alpha}{\alpha}x_1=\frac{1-\eta}{\eta}\left(\frac{\rho+\sigma\hat{c}}{B\bar{B}(1-\eta)}\right)^{1/\eta} \tag{172}$$

$$x_1^*=\frac{\alpha(1-\eta)}{\eta(1-\alpha)}\left(\frac{\rho+\sigma\hat{c}}{B\bar{B}(1-\eta)}\right)^{1/\eta} \tag{173}$$

Aus dem gleichgewichtigen Wachstumspfad gemäSS (169) ergibt sich:

$$\hat{c}=\frac{1}{\sigma}\left(A\alpha\left[\frac{\alpha(1-\eta)}{\eta(1-\alpha)}\left(\frac{\rho+\sigma\hat{c}}{B\bar{B}(1-\eta)}\right)^{1/\eta}\right]^{\alpha-1}-\rho\right) \tag{174}$$

$$\hat{c}\sigma+\rho=A\alpha\left(\frac{\alpha(1-\eta)}{\eta(1-\alpha)}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{\rho+\sigma\hat{c}}{B\bar{B}(1-\eta)}\right)^{\frac{\alpha-1}{\eta}}$$

$$(\hat{c}\sigma+\rho)^{1-\frac{\alpha-1}{\eta}} = A\alpha\left(\frac{\alpha(1-\eta)}{\eta(1-\alpha)}\right)^{\alpha-1}\left(B\bar{B}(1-\eta)\right)^{\frac{1-\alpha}{\eta}}$$

$$\hat{c}\sigma+\rho = \left[A^{\eta}\alpha^{\alpha\eta}\left(\frac{1-\eta}{\eta(1-\alpha)}\right)^{(\alpha-1)\eta}\left(B\bar{B}(1-\eta)\right)^{1-\alpha}\right]^{\frac{1}{1+\eta-\alpha}}$$

$$\boxed{\hat{c}^* = \frac{1}{\sigma}\left(\left[A^{\eta}\alpha^{\alpha\eta}(1-\eta)^{(1-\eta)(1-\alpha)}(\eta(1-\alpha))^{\eta(1-\alpha)}(B\bar{B})^{1-\alpha}\right]^{\frac{1}{1+\eta-\alpha}}-\rho\right)} \tag{175}$$

Der Übersichtlichkeit halber wird für die weitere Berechnung des Gleichgewichts der Platzhalter $M = \left[A^{\eta}\alpha^{\alpha\eta}(1-\eta)^{(1-\eta)(1-\alpha)}(\eta(1-\alpha))^{\eta(1-\alpha)}(B\bar{B})^{1-\alpha}\right]^{\frac{1}{1+\eta-\alpha}}$ für das Grenzprodukt verwendet. Die gleichgewichtige Aufteilung des Humankapitals u berechnet sich aus $\hat{c}=\hat{h}$ gemäSS Gleichung (163) unter Einbeziehung von x_2^* und $\hat{c}^*$.

$$\frac{1}{\sigma}(M-\rho) = B\bar{B}\left(\left(\frac{\rho+\sigma\frac{1}{\sigma}(M-\rho)}{B\bar{B}(1-\eta)}\right)^{1/\eta}\right)^{\alpha}(1-u) \tag{176}$$

$$\frac{\frac{1}{\sigma}(1-\eta)(M-\rho)}{M} = (1-u)$$

$$\boxed{u^* = \frac{\sigma M-(1-\eta)(M-\rho)}{\sigma M}} \tag{177}$$

Im Steady State gilt: $\hat{c}=\hat{k}$. Aus dieser Bedingung lässt sich das optimale Verhältnis von physischem Kapital zu Humankapital ableiten, indem man die entsprechenden Terme für x_1^*, x_2^* und $\hat{c}^*$ in Gleichung (162) einsetzt.

$$\boxed{\chi^* = \frac{1}{\sigma}\left(\frac{A\alpha\sigma[-\eta\rho+M(\eta+\sigma-1)+\rho]\left(\frac{\alpha(\eta-1)\left(\frac{M}{B\bar{B}(1-\eta)}\right)^{1/\eta}}{(\alpha-1)\eta}\right)^{\alpha-1}}{\rho(\alpha-\eta)+M(\alpha(\sigma-1)+\eta)}-M+\rho\right)} \tag{178}$$

Die allgemeine Gleichung $v=\frac{vk}{uh}\frac{uh}{k}$ wird gelöst, indem man auch hier wieder x_1^* und x_2^* einsetzt, sowie unter zu Hilfe nahme von $\frac{k}{h}=ux_1+(1-u)x_2$. [2]

$$v = \frac{\frac{\alpha(1-\eta)}{\eta(1-\alpha)}\left(\frac{\rho+\frac{1}{\sigma}\sigma(M-\rho)}{B\bar{B}(1-\eta)}\right)^{\frac{1}{\eta}}\frac{M\sigma-(1-\eta)(M-\rho)}{\sigma M}}{\frac{\sigma M-(1-\eta)(M-\rho)}{\sigma M}\frac{\alpha(1-\eta)}{\eta(1-\alpha)}\left(\frac{\rho+\frac{1}{\sigma}\sigma(M-\rho)}{B\bar{B}(1-\eta)}\right)^{1/\eta}+\left(1-\frac{\sigma M-(1-\eta)(M-\rho)}{\sigma M}\right)\left(\frac{\rho+\frac{1}{\sigma}\sigma(M-\rho)}{B\bar{B}(1-\eta)}\right)^{1/\eta}} \tag{179}$$

Daraus ergibt sich schlieSSlich die optimale Aufteilung v^* des physischen Kapitals auf die Sektoren:

$$\boxed{v^* = \frac{\alpha(1-\eta)\left(\frac{M}{B\bar{B}(1-\eta)}\right)^{1/\eta}(M\sigma-(1-\eta)(M-\rho))}{(1-\alpha)\eta M\sigma\left(\frac{\alpha(1-\eta)\left(\frac{M}{B\bar{B}(1-\eta)}\right)^{1/\eta}(M\sigma-(1-\eta)(M-\rho))}{(1-\alpha)\eta M\sigma}+\left(\frac{M}{B\bar{B}(1-\eta)}\right)^{1/\eta}\left(1-\frac{M\sigma-(1-\eta)(M-\rho)}{M\sigma}\right)\right)}} \tag{180}$$

[2] Diese Form leitet sich aus der allgemeinen Aufteilung des physischen Kapitals zwischen dem Bildungs- und Produktionssektors $k=vk+(1-v)k$ ab. Die gesamte Gleichung wurde durch h geteilt und anschlieSSend um die Faktoren u und $(1-u)$ erweitert.Daraus folgt $\frac{k}{h}=u\frac{vk}{uh}+(1-u)\frac{(1-v)k}{(1-u)h}$