Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)
Заочная физико-техническая школа

ФИЗИКА

Статика.
Равновесие твёрдых тел и жидкостей

Задание №4 для 9-х классов

(2021 – 2022 учебный год)

г. Долгопрудный, 2021

Составитель: В.И. Чивилев, доцент кафедры общей физики МФТИ.

Физика: задание №4 для 9-х классов (2021 – 2022 учебный год). 2021, 28с.

Дата отправления заданий по физике и математике – 25 января 2022 г.

Составитель:
Чивилев Виктор Иванович
Подписано в печать 14.12.21. Формат 60×90 1/16.
Бумага типографская. Печать офсетная.
Усл. печ. 1,75. Уч.-изд. л. 1,55.

Заочная физико-техническая школа
Московского физико-технического института
(национального исследовательского университета)

Институтский пер., 9, г. Долгопрудный, Москов. обл., 141700.
ЗФТШ, тел. (495) 408-51-45 – **заочное отделение,**
тел. (498) 744-63-51 – **очно-заочное отделение,**
тел. (498) 744-65-83 – **очное отделение.**

e-mail:* *zftsh@mail.mipt.ru

Наш сайт: https://zftsh.online/

Предисловие

В этом задании логически увязаны статика и динамика, уточнены такие основные понятия, как сила, равнодействующая, момент силы, центр масс и центр тяжести. Вы заметите, что методы решения многих задач статики и динамики совпадают. Задание может показаться несколько излишне строгим и объёмным. Постарайтесь всё же разобраться в нём, и Вы получите цельное представление о затронутых в задании частях механики. Это полезно для формирования ясного и чёткого физического мышления.

Глава 1

СТАТИКА

§ 1. Введение

Окружающие нас тела движутся, взаимодействуют друг с другом, некоторые тела покоятся. Условия, при которых тело покоится при наличии внешних воздействий, изучает часть механики, называемая *статикой*. Статика как наука возникла в глубокой древности и развивалась под влиянием практических нужд человечества, связанных со строительством различных наземных сооружений, мостов, кораблей.

Прежде чем говорить об условиях равновесия тела, следует договориться о том, что подразумевается под равновесием, иначе могут возникнуть недоразумения.

Будем считать, что *тело находится в равновесии в некоторой системе отсчёта*, если в этой системе отсчёта оно покоится, т. е. все макроскопические части тела неподвижны. Приведём примеры нахождения тел в равновесии.

Книжная полка, висящая на стене в комнате, находится в равновесии относительно инерциальной системы отсчёта, связанной с комнатой. Стул, стоящий на вращающейся сцене театра, находится в равновесии относительно неинерциальной системы, связанной со сценой. Чемодан, стоящий на полу движущегося вагона, находится в равновесии в системе отсчёта, связанной с вагоном. Если вагон движется прямолинейно и равномерно, то эта система отсчёта инерциальна, а если ускоренно, то неинерциальна.

Статика – частный случай динамики, когда все скорости равны нулю. Поэтому все условия, при которых наступает равновесие тела, могут быть получены из законов динамики, а значит, и из законов Ньютона, лежащих в основе динамики. В дальнейшем при исследовании условий равновесия тела ограничимся рассмотрением условий равновесия только в инерциальных системах отсчёта, поскольку в них нами уже изучены законы динамики. В следующем параграфе уточним, как работать с силами, и понятие равнодействующей силы. Затем разберём частные случаи равновесия тела и общий случай.

§ 2. Сила. Эквивалентность сил. Равнодействующая. Сложение сил. Разложение силы

Сила характеризуется точкой приложения к телу, направлением в пространстве и численным значением, что даёт основание считать силу векторной величиной.

Но силу нельзя полностью отождествлять с таким математическим понятием, как вектор. Вектор можно переносить в пространстве параллельно самому себе, и он остаётся по определению тем же вектором. Это означает, что в математике мы имеем дело с так называемыми *свободными векторами*. Операции с такими векторами и изучаются в курсе математики. Одной из важных операций является операция сложения двух векторов по известному правилу параллелограмма.

Однако попробуйте перенести силу параллельно самой себе, т. е. перенести точку приложения силы. Вы увидите, что характер движения тела изменится. Например, потяните за верёвку, привязанную к одной из ножек стула, а затем потяните с той же по модулю и направлению силой за верёвку, привязанную уже к другой ножке.

Итак, результат действия силы зависит от точки её приложения, и сила не является свободным вектором. Возникает вопрос о том, как работать с силами и какие математические операции над свободными векторами будут справедливы для сил? Ответ на этот вопрос может дать только опыт.

Многочисленные опытные факты подтверждают справедливость того, что *точку приложения силы можно переносить по линии её действия в любую точку твёрдого тела и что две силы* $\vec{F}_1$ *и* $\vec{F}_2$, *приложенные в одной точке тела и направленные под углом друг к другу, оказывают на тело такое же воздействие*, *как и одна сила* $\vec{F}$, *найденная как их векторная сумма* $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ *по правилу параллелограмма и приложенная в той же точке.*

Напомним, что *твёрдое тело* – это тело, расстояние между частями которого, не изменяется при действии на него сил.

Несколько сил, приложенных к твёрдому телу, будем называть *системой сил*. Если одну систему сил можно заменить другой системой сил, не изменив при этом характер движения тела, то такие системы сил называются *эквивалентными*. В частности, если систему сил удаётся заменить одной силой, то эта сила называется *равнодействующей* силой. Следовательно, равнодействующая сила оказывает на тело такое же воздействие, как и эквивалентная ей система сил. Равнодействующая считается равной нулю, если приложенные к телу силы не изменяют характер движения тела.

В курсах теоретической механики показывается, как произвольную пространственную систему сил, действующих на тело, можно заменить более простой эквивалентной системой, а в некоторых случаях и только одной силой, т. е. равнодействующей. Оказывается, что не всякую систему сил можно привести к равнодействующей, т. е. не у всякой системы сил есть равнодействующая сила. В наиболее общем случае пространственная система сил приводится к совокупности одной силы, вызывающей движение тела как целого, и так называемой пары сил, вызывающей вращение тела.

Парой сил называются две равные по модулю и противоположно направленные силы, не лежащие на одной прямой (рис. 1).

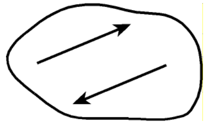

Рис. 1

Пара сил является наиболее простым примером системы сил, не имеющих равнодействующей. Действительно, попытайтесь мысленно найти точку приложения какой-либо одной силы, вызывающей у тела (рис. 1) такое же движение, как пара сил.

Операция нахождения равнодействующей силы называется *сложением сил*. Сложение сил не надо путать со сложением векторов. При сложении векторов получается свободный вектор, а при сложении сил получается векторная величина, имеющая точку приложения.

Для нахождения равнодействующей двух сил, линии действия которых пересекаются в точке O, переносят силы вдоль их линий действия и прикладывают в точке O, а затем складывают по правилу параллелограмма.

При выяснении существования равнодействующей нескольких сил имеет смысл попытаться её найти. Для этого находят равнодействующую каких-либо двух сил, затем складывают эту равнодействующую с третьей силой и т. д., т. е. заменяют систему сил более простой эквивалентной системой. Если в результате такого последовательного сложения сил получается одна сила, то она и будет равнодействующей. Из предложенного метода поиска равнодействующей ясно следующее: если равнодействующая нескольких сил существует, то она равна векторной сумме этих сил.

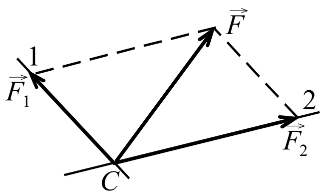

Рис. 2

Операция замены одной силы эквивалентной системой из нескольких сил называется *разложением силы*. На практике часто приходится разлагать одну силу $\vec{F}$ (рис. 2) по двум направлениям 1 и 2, проходящим через точку C приложения силы. В этом случае при замене одной силы на две удобно использовать *правило параллелограмма*. Для этого через конец вектора $\vec{F}$ проведём прямые, параллельные направлениям

1 и 2, и на сторонах получившегося параллелограмма построим векторы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, начинающиеся в точке C. Так осуществляется разложение одной силы $\vec{F}$ на две составляющие силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ по направлениям 1 и 2.

§ 3. Равновесие материальной точки

Перед нами стоит задача выяснить, при каких условиях материальная точка, т. е. тело, размеры которого можно не учитывать, находится в равновесии в некоторой инерциальной системе отсчёта. Поскольку материальная точка покоится в этой системе отсчёта, то её ускорение равно нулю. Тогда, согласно второму закону Ньютона, $\sum_i \vec{F}_1 = m \cdot 0 = 0.$

Итак, *условием равновесия материальной точки в некоторой инерциальной системе отсчёта будет равенство нулю суммы всех сил, действующих на материальную точку*:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0. \tag{1}$$

Поскольку все силы приложены в одной точке, то их можно сложить с использованием правила параллелограмма. Получим равнодействующую $\vec{R}$, равную сумме этих сил и приложенную к материальной точке. Тогда можно сказать, что условием равновесия материальной точки будет равенство нулю равнодействующей силы, т. е. $\vec{R} = 0.$

Векторное равенство (1) можно записать в проекциях на любую ось в пространстве. Записав (1) в проекциях на три координатные оси x, y и z в пространстве, получим систему из трёх скалярных равенств, эквивалентных одному равенству (1):

$$\sum_i F_{ix} = 0, \qquad \sum_i F_{iy} = 0, \qquad \sum_i F_{iz} = 0. \tag{2}$$

Здесь F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} – проекции силы $\vec{F}_i$ на оси координат x, y, z. Каждое из равенств системы (2) утверждает, что при равновесии материальной точки алгебраическая сумма проекций на соответствующую ось всех сил, действующих на материальную точку, равна нулю.

Заметим, что система координат x, y, z не обязательно прямоугольная. Если только оси x, y, z не параллельны друг другу и не лежат сразу все три в одной плоскости, то (1) и (2) будут всё равно эквивалентны. Эквивалентность означает, что при выполнении (1) обязательно будет выполняться (2), а если справедливы сразу все три равенства системы (2), то отсюда последует и справедливость векторного равенства (1).

В технике встречается значительное число практических задач, когда все силы лежат в одной плоскости (плоский случай). Совместим с этой плоскостью оси координат x и y, а ось z направим перпендикулярно ей. Тогда в системе (2) последнее равенство обратится в тождество, и условия равновесия материальной точки в плоском случае запишутся в виде:

$$\sum_i F_{ix} = 0, \qquad \sum_i F_{iy} = 0.$$

Условие (1) являются необходимым, но недостаточным условием равновесия. Это означает, что из того факта, что материальная точка находится в равновесии, обязательно (необходимо) следует справедливость (1). Но из того, что для материальной точки выполняется равенство (1), ещё не следует, что она будет в равновесии. Из равенства нулю суммы всех сил следует, согласно второму закону Ньютона, равенство нулю ускорения материальной точки. А это говорит о том, что она может не только покоиться, но и двигаться прямолинейно и равномерно.

Ещё раз подчеркнём, что условие равновесия (1) есть фактически уравнение второго закона Ньютона для материальной точки, записанное для частного случая, когда ускорение равно нулю. Поэтому методы и приёмы, используемые при решении задач на равновесие материальной точки, аналогичны тем, которые используются в задачах, связанных с применением уравнения второго закона Ньютона.

Задача 1. Шар массой $m = 0,2$ кг удерживается двумя нитями, прикреплёнными к потолку и стене (рис. 3). Одна нить горизонтальна, другая составляет угол $\alpha = 60^\circ$ с потолком. Найти силы натяжения нитей.

Решение. На шар действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и силы натяжения нитей $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ (рис. 3). Запишем условие равновесия шара, считая его материальной точкой:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + m\vec{g} = 0. \tag{3}$$

Дальнейшее решение задачи проведём тремя способами, что очень полезно для получения практических навыков. Фактически это будут три математических приёма, с помощью которых из записанного векторного равенства, отражающего физику явления, мы найдём интересующие нас величины.

1-й способ решения. Сложим какие-нибудь две силы, например $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Получим силу $\vec{F}_{12}$ (рис. 3), заменяющую эти две силы. Поскольку сумма сил $\vec{F}_{12}$ и $m\vec{g}$ равняется нулю, то сила $\vec{F}_{12}$ равна по модулю и противоположна по направлению силе $m\vec{g}$. Из полученного параллелограмма сил находим $F_1 = mg\,\mathrm{ctg}\,\alpha$, $F_2 = \dfrac{mg}{\sin\alpha}$. С учётом числовых данных $F_1 = \dfrac{mg}{\sqrt{3}} \approx 1{,}1$ Н, $F_2 = \dfrac{2mg}{\sqrt{3}} \approx 2{,}2$ Н.

2-й способ решения. Запишем векторное равенство (3) в проекциях на горизонтальную ось x и вертикальную ось y (рис. 4):

$$\begin{cases} -F_1 + F_2\cos\alpha = 0, \\ F_2\sin\alpha - mg = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений относительно F_1 и F_2, получаем:

$$F_1 = mg\,\mathrm{ctg}\,\alpha, \qquad F_2 = \frac{mg}{\sin\alpha}.$$

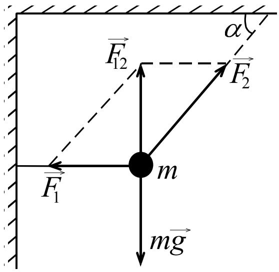

Рис. 3

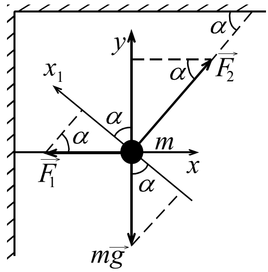

Рис. 4

3-й способ решения. Иногда возникает необходимость или желание получить из векторного равенства такое скалярное, в которое не входила бы проекция конкретного (обычно неизвестного) вектора. Нетрудно догадаться, что для этого надо записать векторное равенство в проекциях на ось, перпендикулярную этому вектору.

В нашей задаче направим ось x_1 (рис. 4) перпендикулярно силе F_2, а ось y перпендикулярно силе F_1. Условие равновесия (3), записанное в проекциях на эти оси, имеет вид:

$$\begin{cases} F_1\sin\alpha - mg\cos\alpha = 0 & \text{на } x_1, \\ F_2\sin\alpha - mg = 0 & \text{на } y. \end{cases}$$

В каждом уравнении получили только по одной неизвестной величине, что очень удобно. Из первого уравнения находим F_1, из второго F_2.

Анализ третьего способа решения задачи 1 позволяет дать два полезных практических совета при решении задач.

1) Для получения из векторного равенства независимых скалярных уравнений, т. е. не следующих друг из друга, *можно записать векторное равенство в проекциях не только на взаимно перпендикулярные оси, но и на оси, направленные друг к другу под острым или тупым углом.* Вопрос об эквивалентности векторного равенства и совокупности скалярных равенств уже затрагивался в начале параграфа.

2) *Выбирать оси координат следует из соображений удобства*, стараясь направить их перпендикулярно неизвестным векторам, в особенности тем, которые в данной задаче не просят искать. Например, пусть в задаче 1 требуется найти только F_1. Тогда записываем лишь одно уравнение в проекциях на ось x_1 и находим из него F_1. Рациональный выбор осей координат помогает сократить математические выкладки.

§ 4. Равновесие тела при отсутствии вращения

Пусть по каким-либо причинам твёрдое тело, имеющее конечные размеры, ограничено в своём движении так, что не может вращаться. Например, брусок на наклонной плоскости или поршень в цилиндре. Если тело находится в равновесии, то ускорение его центра масс $\vec{a}_c$ равно нулю. Из динамики известно, что $\sum\limits_i \vec{F}_i = m\vec{a}_c$. Отсюда следует, что сумма всех внешних сил $\sum\limits_i \vec{F}_i$, действующих на него, равна нулю.

Таким образом, *условием равновесия твёрдого тела при отсутствии вращения в некоторой инерциальной системе отсчёта будет равенство нулю суммы всех внешних сил, действующих на тело:*

$$\sum_i \vec{F}_i = 0. \qquad (4)$$

Условие равновесия (4) совпало с условием равновесия (1) для материальной точки. И это не случайно, т. к. при отсутствии вращения тела на него можно смотреть как на материальную точку, о чём уже говорилось в динамике.

Векторное равенство (4) даёт возможность записать условие равновесия тела в виде трёх скалярных уравнений: $\sum\limits_i F_{ix} = 0$, $\sum\limits_i F_{iy} = 0$, $\sum\limits_i F_{iz} = 0$. Всё сказанное в § 3 об осях координат, эквивалентности равенств, необходимости, но недостаточности условий равновесия остаётся справедливым и здесь.

Задача 2. На наклонной плоскости (рис. 5) с углом наклона $\alpha = 30^\circ$ лежит брусок массой $m = 1$ кг. Найти силу трения между бруском и наклонной плоскостью.

Решение. На брусок действует сила тяжести $m\vec{g}$, сила трения покоя $\vec{F}_{\text{тр}}$ и сила нормального давления $\vec{N}$. Вопрос о точке приложения силы $\vec{N}$ затрагивать пока не будем, т. к. это не существенно для решения данной задачи. Условие равновесия бруска:

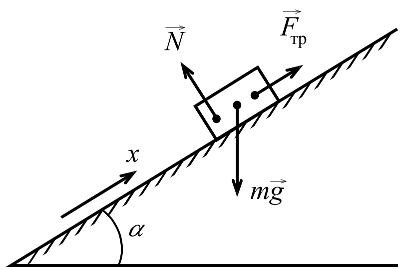

Рис. 5

$$m\vec{g} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{N} = 0.$$

Неизвестную силу $\vec{N}$ искать в задаче не требуется. Поэтому направим ось x перпендикулярно ей и запишем условие равновесия бруска в проекциях на эту ось: $-mg\sin\alpha + F_{\text{тр}} = 0.$ Отсюда $F_{\text{тр}} = mg\sin\alpha.$

§ 5. Равновесие тела с закреплённой осью вращения в плоском случае. Момент силы

Пусть твёрдое тело может только поворачиваться вокруг неподвижной фиксированной оси O (рис. 6) и не может перемещаться вдоль этой оси. На рисунке ось O перпендикулярна плоскости рисунка. Напомним, что твёрдым телом называется тело, деформациями которого под действием сил можно пренебречь. Рассмотрим плоский случай, т. е. случай, когда все силы, действующие на тело, лежат в одной плоскости, перпендикулярной оси вращения. Чтобы не загромождать рисунок, показаны только две силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, приложенные в точках K и E. Нас интересуют условия, при которых тело не вращается, т. е. находится в равновесии.

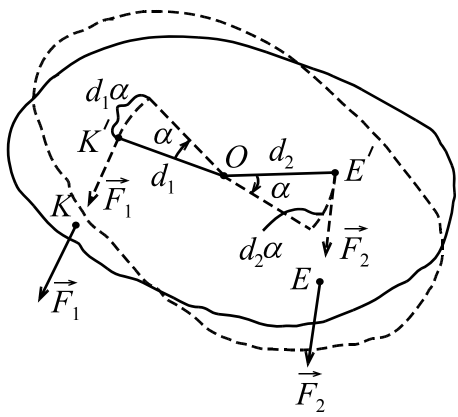

Рис. 6

Опустим из т. O на линии действия сил перпендикуляры OK' и OE' и обозначим расстояния от оси вращения до этих линий через d_1 и d_2. Перенесём точки приложения сил вдоль линий их действия в точки K' и E'.

Если Вы слабо знакомы с понятием работы силы, то следующий абзац текста, являющийся выводом условия равновесия, можно опустить и начинать чтение с уравнения (5).

Проведём мысленно такой эксперимент. Пусть в результате незначительного нарушения равновесия, к примеру, из-за очень малого увеличения силы $\vec{F}_2$ или слабого толчка тело бесконечно медленно повернулось на сколь угодно малый угол α по часовой стрелке. В итоге точки K' и E' приложения сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ переместятся на малые расстояния $d_1\alpha$ и $d_2\alpha$. При этом сила $\vec{F}_1$ совершит над телом отрицательную работу $A_1 = -F_1 d_1 \alpha$, а сила $\vec{F}_2$ – положительную работу $A_2 = F_2 d_2 \alpha$. Работа всех сил над телом равна изменению его кинетической энергии. Но при бесконечно медленном повороте тела кинетическая энергия была и остаётся нулевой. Итак, учитывая, что на тело кроме указанных двух сил действуют ещё и другие силы, имеем $A_1 + A_2 + A_3 + ... = 0$,

$$-F_1 d_1 + F_2 d_2 + ... = 0. \qquad (5)$$

Последнее равенство и есть условие равновесия.

Видим, что количественной величиной, отвечающей за равновесие тела и характеризующей способность отдельной силы вращать тело, является не сама сила, а величина, равная произведению модуля силы на расстояние от оси вращения до линии действия силы.

Расстояние от оси вращения до линии действия силы называется плечом силы.

Для плоского случая *величина произведения модуля силы на плечо называется моментом силы относительно оси*: $M = F \cdot d$. По этой формуле определяется абсолютная величина момента силы.

Если *моментам*, *вызывающим вращение по часовой стрелке, приписывать знак плюс* (*считать положительными*), *а моментам*, *вызывающим вращение против часовой стрелки, – знак минус* (*считать отрицательными*), то условие равновесия (5) принимает вид:

$$M_1 + M_2 + ... = 0.$$

Итак, *твёрдое тело с закреплённой осью вращения находится в равновесии в некоторой инерциальной системе отсчёта*, *если алгебраическая сумма моментов относительно этой оси всех действующих на тело внешних сил равна нулю*.

По-другому можно сказать, что равновесие достигается, когда сумма моментов, вращающих тело по часовой стрелке, равна сумме моментов, вращающих тело против часовой стрелки. Если у сил, действующих на тело, существует равнодействующая сила, то условие равновесия формулируется так: момент равнодействующей силы относительно оси вращения равен нулю, т. е. линия действия равнодействующей силы (если она при этом отлична от нуля) проходит через ось вращения.

Сформулированное условие равновесия является необходимым, но недостаточным. Действительно, при равенстве нулю суммы моментов действующих на тело сил тело может не только покоиться, но и равномерно вращаться.

Следует отметить, что на тело действует и сила со стороны оси вращения, на которую оно посажено. Ясно, что независимо от направления этой силы её момент относительно оси вращения равен нулю из-за равенства нулю плеча силы. Поэтому в записи условия равновесия тела с закреплённой осью вращения силу реакции, действующую на тело со стороны оси, иногда вообще исключают из рассмотрения.

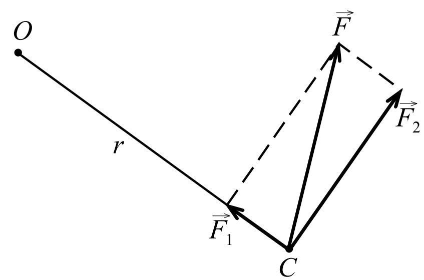

Рис. 7

Покажем ещё один удобный на практике метод нахождения момента относительно оси O силы $\vec{F}$ (рис. 7), точка C приложения которой находится на расстоянии r от оси. Разложим вектор силы $\vec{F}$ на силу $\vec{F}_1$ с линией действия, проходящей через ось O, и силу $\vec{F}_2$, перпендикулярную $\vec{F}_1$, т. е. заменим одну силу эквивалентной системой двух сил. Момент силы $\vec{F}_1$ относительно оси O равен нулю, плечо силы $\vec{F}_2$ равно r. Поэтому момент M силы $\vec{F}$ равен моменту силы $\vec{F}_2$ относительно оси O, т. е. $M = F_2 \cdot r$.

Задача 3. Однородный стержень массой m_1 (рис. 8) шарнирно закреплён в нижней точке A и удерживается за верхний конец лёгким тросом BC, составляющим угол β со стержнем. В т. B подвешен груз массой m_2. Угол наклона стержня к горизонту α. Найти силу натяжения троса.

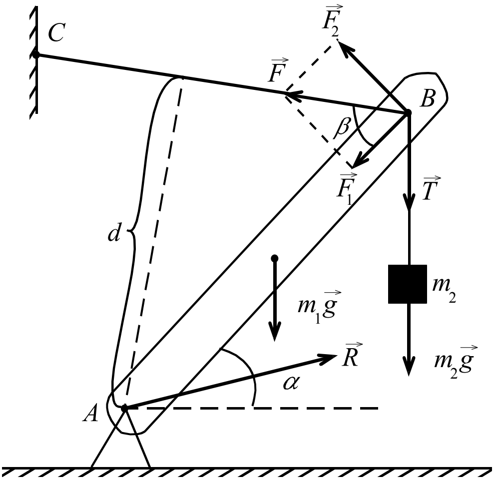

Рис. 8

Решение. На стержень действуют сила натяжения троса $\vec{F}$, сила $\vec{T}$ со стороны груза, сила тяжести $m_1\vec{g}$, приложенная в центре стержня, и сила реакции $\vec{R}$ со стороны шарнира. Обозначим длину стержня через L. Запишем выражение для моментов сил относительно оси A. Момент силы $\vec{R}$ равен нулю. Момент силы m_1g есть $M_1 = m_1g\dfrac{L}{2}\cos\alpha$. Момент силы $T = m_2g$ равен $M_2 = m_2gL\cos\alpha$. Плечо силы $\vec{F}$ есть $d = L\sin\beta$, её момент $M_3 = -Fd = -FL\sin\beta$.

Момент M_3 можно найти и другим способом, разложив силу $\vec{F}$ на две составляющие $\vec{F_1}$ и $\vec{F_2}$ и заметив, что $M_3 = -F_2L = -(F\sin\beta)L$.

Запишем условие равновесия стержня с закреплённой осью A:

$$M_1 + M_2 + M_3 = 0.$$

Таким образом, $m_1g\dfrac{L}{2}\cos\alpha + m_2gL\cos\alpha - FL\sin\beta = 0.$ Отсюда

$$F = \left(m_2 + \frac{m_1}{2}\right)g\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}.$$

§ 6. Равновесие тела в общем случае

Предварительно обобщим понятие момента силы относительно оси, когда сила $\vec{F}$, действующая на тело, не перпендикулярна оси OO_1 (рис. 9). Ось OO_1 – это мысленная ось в пространстве. Проведём через т. A приложения силы $\vec{F}$ плоскость перпендикулярно оси. Пусть ось пересекает эту плоскость в т. C. Разложим силу $\vec{F}$ на две составляющие $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ так, чтобы $\vec{F}_2$ была параллельна оси, т. е. перпендикулярна этой плоскости, а $\vec{F}_1$ лежала в этой плоскости. Тогда $\vec{F}_1$ будет перпендикулярна оси.

Моментом силы, не перпендикулярной оси, называется момент относительно этой же оси её составляющей, перпендикулярной оси.

Таким образом, моментом силы $\vec{F}$ относительно оси OO_1 называется момент силы $\vec{F}_1$ относительно этой же оси, т. е. $M = F_1 d$, где d – плечо силы $\vec{F}_1$. Это определение легко запомнить, поскольку на интуитивном уровне ясно, что сила $\vec{F}_2$ не вызывает вращения тела вокруг оси OO_1, и её момент потому должен равняться нулю.

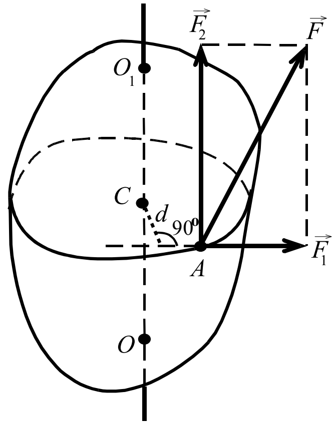

Рис. 9

Если на тело действуют несколько сил, то моменты сил, стремящихся повернуть тело вокруг выбранной оси в одном направлении, берутся положительными, а в противоположном – отрицательными.

Пусть на твёрдое тело действуют несколько произвольно направленных в пространстве сил, и оно находится в равновесии. Сформулируем без доказательства условие равновесия тела в таком наиболее общем случае.

Если твёрдое тело находится в равновесии в некоторой инерциальной системе отсчёта, то сумма всех внешних сил, действующих на тело, равна нулю и сумма моментов всех внешних сил относительно любой оси в пространстве тоже равна нулю:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0, \qquad \sum_i M_i = 0. \tag{6}$$

Ось можно выбирать произвольно, и не обязательно, чтобы эта ось проходила через тело, и чтобы тело могло реально вращаться вокруг оси.

Условия (6) называются уравнениями равновесия твёрдого тела.

Сформулированные условия равновесия являются необходимыми, но недостаточными условиями равновесия. Действительно, при выполнении этих условий тело может не только покоиться, т. е. находиться в равновесии. Центр масс тела может ещё двигаться прямолинейно и равномерно, а тело может вращаться вокруг центра масс с постоянной угловой скоростью. Например, для катящегося по столу шара условия (6) выполнены, но он не находится в равновесии в инерциальной системе отсчёта, связанной со столом.

§ 7. Сложение параллельных сил

Нахождение равнодействующей нескольких параллельных сил удобно производить, используя условие равновесия, записанное для моментов сил. Покажем это на примере.

Задача 4. На пластину в форме квадрата со стороной $a = 10$ см действуют в плоскости пластины три параллельные силы $F_1 = 20$ Н, $F_2 = 40$ Н, $F_3 = 100$ Н (рис. 10). Найти равнодействующую.

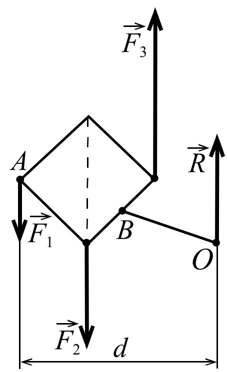

Рис. 10

Решение. Если равнодействующая есть, то $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$. Отсюда $R = F_3 - F_2 - F_1 = 40$ Н и направлена в сторону $\vec{F}_3$. Для нахождения точки приложения равнодействующей воспользуемся тем, что она оказывает на тело такое же действие, как и складываемые силы. Это значит, что момент равнодействующей относительно любой оси равен сумме моментов всех сил относительно той же оси. Ось удобно взять проходящей через точку A перпендикулярно плоскости пластины. Плечи сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$ равны соответственно нулю, $a\sqrt{2}/2$ и $a\sqrt{2}$. Пусть плечо силы $\vec{R}$, т. е. расстояние от линии её действия до оси A, равно d. Тогда

$$-Rd = F_1 \cdot 0 + F_2 a(\sqrt{2}/2) - F_3 a\sqrt{2}.$$

Отсюда $d = \dfrac{2F_3 - F_2}{2R} a\sqrt{2} = 20\sqrt{2}$ см ≈ 28 см.

Равнодействующую $\vec{R}$ можно приложить в любой точке O на линии её действия. Реально воздействовать на пластину с силой $\vec{R}$ можно с помощью лёгкого стержня BO, жёстко скреплённого с пластиной.

Ответ. Модуль равнодействующей $R = 40$ Н. Линия её действия параллельна силам и лежит в плоскости пластины на расстоянии $d \approx 28$ см от точки A.

§ 8. Центр масс. Центр тяжести

Пусть дано тело или система тел. Мысленно разобьём тело на сколь угодно малые части с массами m_1, m_2, m_3, … . Каждую из этих частей можно рассматривать как материальную точку. Положение в пространстве i-ой материальной точки с массой m_i определяется радиус – вектором $\vec{r}_i$ (рис. 11). Масса тела есть сумма масс отдельных его частей: $m = \sum\limits_i m_i$. По определению центром масс тела

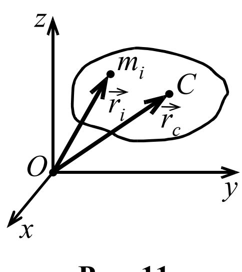

Рис. 11

(системы тел) называется такая точка C, радиус-вектор которой $\vec{r}_c$ определяется по формуле $\vec{r}_c = \frac{1}{m}\sum_i m_i\vec{r}_i$.

Можно показать, что положение центра масс относительно тела не зависит от выбора начала координат O, т. е. данное выше определение центра масс однозначно и корректно.

Не вдаваясь в методы нахождения центра масс, скажем, что центр масс однородных симметричных тел расположен в их геометрическом центре или на оси симметрии, центр масс у плоского тела в виде произвольного треугольника находится на пересечении его медиан.

Оказывается, что у центра масс тела (или системы тел) есть ряд замечательных свойств. В динамике показывается, что импульс произвольно движущегося тела равен произведению массы тела на скорость его центра масс и что центр масс движется так, как если бы все внешние силы, действующие на тело, были приложены в центре масс, а масса всего тела была сосредоточена в нём.

Центром тяжести тела, находящегося в поле тяготения Земли, называют точку приложения равнодействующей всех сил тяжести, действующих на все части тела. Эта равнодействующая называется силой тяжести, действующей на тело. Сила тяжести, приложенная в центре тяжести тела, оказывает на тело такое же воздействие, как и все силы тяжести, действующие на отдельные части тела.

Интересен случай, когда размеры тела намного меньше размеров Земли. Тогда можно считать, что на все части тела действуют параллельные силы тяжести, т. е. тело находится в однородном поле тяжести. У параллельных и одинаково направленных сил всегда есть равнодействующая, что можно доказать. Но при определённом положении тела в пространстве можно указать только линию действия равнодействующей всех параллельных сил тяжести, точка её приложения останется пока неопределённой, т. к. для твёрдого тела любую силу можно переносить вдоль лини её действия. Как же быть с точкой приложения?

Можно показать, что при любом положении тела в однородном поле тяжести линия действия равнодействующей всех сил тяжести, действующих на отдельные части тела, проходят через одну и ту же точку, неподвижную относительно тела. В этой точке и прикладывается равнодействующая, а сама точка будет центром тяжести тела.

Положение центра тяжести относительно тела зависит только от формы тела и распределения массы в теле и не зависит от положения тела в однородном поле тяжести. Центр тяжести не обязательно находится в самом теле. Например, у обруча в однородном поле тяжести центр тяжести лежит в его геометрическом центре.

Сообщим без доказательства чрезвычайно любопытный и важный факт. Оказывается, *в однородном поле тяжести центр тяжести тела совпадает с его центром масс.* Напомним, что центр масс тела существует независимо от наличия поля тяжести, а о центре тяжести можно говорить только при наличии силы тяжести.

Местоположение центра тяжести тела, а значит, и центра масс, удобно находить, учитывая симметричность тела и используя понятие момента силы.

Задача 5. На лёгком стержне (рис. 12) закреплены шары массами $m_1 = 3$ кг, $m_2 = 2$ кг, $m_3 = 6$ кг, $m_4 = 3$ кг. Расстояние между центрами любых ближайших шаров $a = 10$ см. Найти положение центра тяжести и центра масс конструкции.

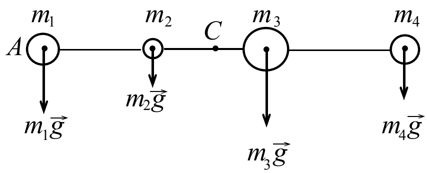

Рис. 12

Решение. Положение относительно шаров центра тяжести конструкции не зависит от ориентации стержня в пространстве. Для решения задачи удобно расположить стержень горизонтально, как показано на рисунке 12. Пусть центр тяжести находится на расстоянии L от центра левого шара, т. е. от т. A. В центре тяжести приложена равнодействующая всех сил тяжести, и её момент относительно оси A равен сумме моментов сил тяжести шаров.

Имеем: $R = (m_1 + m_2 + m_3 + m_4)g$, $RL = m_2ga + m_3g2a + m_4g3a.$

Отсюда $L = \dfrac{m_2 + 2m_3 + 3m_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} a \approx 16,4$ см.

Ответ. Центр тяжести совпадает с центром масс и находится в точке C на расстоянии $L \approx 16,4$ см от центра левого шара.

§ 9. Решение задач

Задача 6. Лестница массой m, приставленная к гладкой стене, покоится (рис. 13). Центр тяжести лестницы в её середине, нижний конец лестницы на расстоянии l от стены, а верхний на расстоянии h от пола. Найти силы, действующие на лестницу со стороны стены и пола.

Решение. На лестницу действуют сила $\vec{N}$ со стороны стены перпендикулярно ей, сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции $\vec{R}$ со стороны стола. Для удобства разложим силу $\vec{R}$ на горизонтальную и вертикальную составляющие $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Кстати, $\vec{F}_1$ называется силой трения, а $\vec{F}_2$ – силой нормального давления.

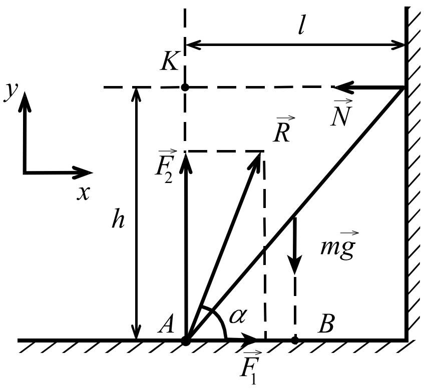

Рис. 13

Найдя $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, легко найти R и угол α. Мы имеем дело с плоской системой сил. Решим задачу тремя способами.

1-й способ. Запишем уравнения равновесия лестницы для проекций сил на оси x и y, а уравнение равновесия для моментов сил запишем для оси A: $F_1 - N = 0, \quad F_2 - mg = 0, \quad mg\dfrac{l}{2} - Nh = 0.$

Отсюда $F_1 = N = \dfrac{mg}{2}\cdot\dfrac{l}{h}$, $F_2 = mg$. Теперь находим R и α:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = mg\sqrt{1 + \left(\frac{l}{2h}\right)^2}, \quad \text{tg}\alpha = \frac{F_2}{F_1} = \frac{2h}{l}.$$

2-й способ. Запишем уравнение равновесия для проекций сил только на ось y, а уравнение равновесия для моментов сил запишем для двух осей A и K:

$$F_2 - mg = 0, \quad mg\frac{l}{2} - Nh = 0, \quad mg\frac{l}{2} - F_1h = 0.$$

Заметим, что в каждом уравнении получилось только по одной неизвестной силе, что очень удобно. Из последних трёх уравнений находим F_1, F_2, N, а затем R и α.

3-й способ. Теперь запишем все три уравнения для моментов сил. Возьмём оси A, K и B: $mg\dfrac{l}{2} - Nh = 0, \quad mg\dfrac{l}{2} - F_1h = 0, \quad F_2\dfrac{l}{2} - Nh = 0.$

Эти три уравнения тоже дают возможность найти все неизвестные силы.

Ответ. Стена действует на лестницу с силой $N = \dfrac{mg}{2}\cdot\dfrac{l}{h}$, а пол с силой $R = mg\sqrt{1 + (l/2h)^2}$ под углом α $\left(\text{tg}\alpha = \dfrac{2h}{l}\right)$ к горизонту.

Задача 7. Однородная горизонтальная балка массой $m = 60$ кг опирается на опоры в точках A и B (рис. 14). На конце балки висит груз массой $m_1 = 50$ кг. Определить силы действия балки на опоры, если $l_1 = 2$ м, $l_2 = 0{,}5$ м.

Решение. На балку действуют силы: $\vec{Q}$ со стороны груза, сила тяжести $m\vec{g}$, силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ в опорах. Ясно, что $Q = m_1 g$. Балка находится в равновесии под действием плоской системы параллельных сил. Решим задачу двумя способами.

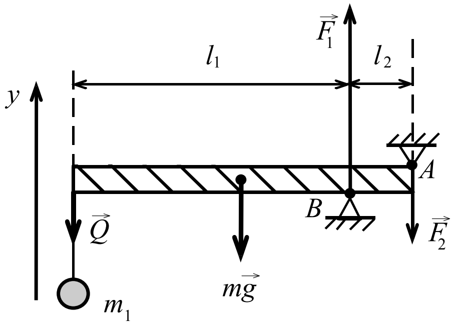

Рис. 14

1-й способ. Запишем уравнения равновесия балки для проекций сил на ось y и для моментов сил относительно оси A:

$$-m_1 g - mg + F_1 - F_2 = 0,$$

$$-m_1 g(l_1 + l_2) - mg\frac{1}{2}(l_1 + l_2) + F_1 l_2 = 0.$$

Имеем два уравнения с двумя неизвестными силами $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Подставив в уравнение числовые данные из условия задачи, находим $F_1 \approx 4 \cdot 10^3$ Н, $F_2 \approx 2{,}9 \cdot 10^3$ Н. Мы нашли силы, действующие на балку. Но по третьему закону Ньютона, балка давит на опоры с такими же по модулю силами.

2-й способ. Уравнения равновесия балки запишем для моментов сил относительно осей A и B:

$$-m_1 g(l_1 + l_2) - mg\frac{1}{2}(l_1 + l_2) + F_1 l_2 = 0,$$

$$-m_1 g l_1 - mg\left(\frac{l_1 + l_2}{2} - l_2\right) + F_2 l_2 = 0.$$

В каждом уравнении оказалось только по одной неизвестной силе, их легко найти.

Ответ. Балка давит на опоры с силами $F_1 \approx 4 \cdot 10^3$ Н, $F_2 \approx 2{,}9 \cdot 10^3$ Н.

Задача 8. На двух взаимно перпендикулярных гладких плоскостях (рис. 15) лежит однородный шар массой m $(mg = 60\ \text{Н})$. Определить силы давления шара на плоскости, если одна из плоскостей составляет с горизонтом угол $\alpha = 30^\circ$.

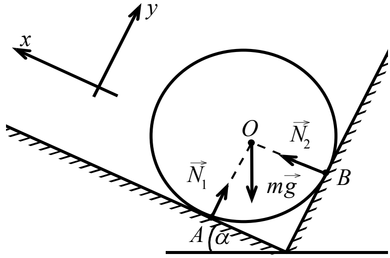

Рис. 15

Решение. На шар действуют перпендикулярно плоскостям силы $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$. Сила тяжести $m\vec{g}$ приложена в центре шара. Имеем дело с плоской системой сил, линии действия которых, пересекаются в одной точке. Решим задачу тремя способами.

1-й способ. Направим ось x перпендикулярно одной плоскости, а ось y – другой. Запишем уравнения равновесия шара для проекций сил на эти оси: $N_2 - mg\sin 30^\circ = 0,\quad N_1 - mg\cos 30^\circ = 0.$

Отсюда $N_2 = mg \cdot \sin 30^\circ = 30\ \text{Н}$, $N_1 = mg \cdot \cos 30^\circ \approx 52\ \text{Н}$. По третьему закону Ньютона с такими же по модулю силами $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ шар давит на плоскости.

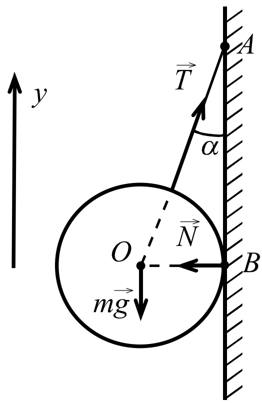

Рис. 16

2-й способ. Запишем одно уравнение равновесия для проекций сил на ось x, а второе уравнение равновесия для моментов сил относительно оси B: $N_2 - mg\sin 30^\circ = 0,\ N_1R - mgR\cos 30^\circ = 0$. Здесь R – радиус шара. Из этих уравнений находим N_1 и N_2.

3-й способ. Запишем уравнения равновесия для моментов сил относительно осей A и B:

$$-N_2R + mgR\sin 30^\circ = 0,$$

$$N_1R - mgR\cos 30^\circ = 0.$$

Отсюда легко находятся N_1 и N_2.

Ответ. $N_2 = 30\ \text{Н},\ \ N_1 \approx 52\ \text{Н}.$

Задача 9. К вертикальной гладкой стене (рис. 16) подвешен на нити длиной l однородный шар радиусом R и массой m. Определить натяжение нити и силу давления шара на стену.

Решение. На шар действуют сила тяжести, приложенная в центре тяжести шара O, сила давления $\vec{N}$ стены на шар, направленная из-за отсутствия трения перпендикулярно стене к т. O, и сила натяжения нити $\vec{T}$. Поскольку шар находится в равновесии, то сумма моментов всех трёх сил относительно т. O должна равняться нулю. Линии действия сил $m\vec{g}$ и $\vec{N}$ проходят через т. O и их моменты – нуль. Значит, и момент силы $\vec{T}$ тоже нуль, т. е. линия действия силы $\vec{T}$ должна проходить через центр шара.

Постараемся составить такие уравнения равновесия, в которые бы входило только по одной неизвестной силе. Уравнение равновесия для моментов сил относительно оси A даёт уравнение с одной неизвестной силой N: $-mgR + N \cdot AB = 0$. Отсюда $N = \dfrac{mgR}{AB} = mg\dfrac{R}{\sqrt{l^2 + 2Rl}}$. С такой же по модулю силой шар давит на стену.

Уравнение равновесия для моментов сил относительно оси B даёт уравнение, содержащее только вторую неизвестную силу T:

$$-mgR + TR\cos\alpha = 0. \text{ Откуда } T = \frac{mg}{\cos\alpha} = mg\frac{R+l}{\sqrt{l^2+2Rl}}.$$

Найти силу T можно ещё проще, записав уравнение равновесия для проекций сил на вертикальную ось y: $-mg + T\cos\alpha = 0$.

Ответ. $T = mg\dfrac{R+l}{\sqrt{l^2+2Rl}}$, $N = mg\dfrac{R}{\sqrt{l^2+2Rl}}$.

Глава 2

ГИДРОСТАТИКА

§ 10. Давление

Отличительной особенностью жидкостей и газов является их текучесть, что проявляется в способности принимать форму сосудов. В жидкости нет сил, препятствующих сдвигу с бесконечно малыми скоростями одних слоёв жидкости относительно других. Этим объясняется текучесть и то, что одни слои жидкости могут действовать на неподвижные относительно них другие слои только перпендикулярно поверхности соприкосновения слоёв, а также перпендикулярность действия сил давления со стороны жидкости на стенки и дно сосуда.

Характеристикой такого взаимодействия служит *давление*. Давлением называется величина, равная отношению модуля силы F, действующей по нормали к плоской поверхности, к площади этой поверхности: $p = F / S.$ При этом величина давления в данной точке жидкости не зависит от ориентировки плоской поверхности, что следует из свойства текучести жидкости. Поэтому можно говорить о давлении в данной точке жидкости. Не следует смешивать давление и силу давления. Давление – величина скалярная по определению. Всё сказанное выше справедливо и для газов.

§ 11. Закон Паскаля. Сообщающиеся сосуды

Пусть жидкость (или газ) заключена в замкнутый сосуд (рис. 17). *Давление, оказываемое на жидкость в каком-либо одном месте на её границе, например поршнем, передаётся без изменений во все точки жидкости* – **закон Паскаля.** Закон Паскаля справедлив и для газов. Этот закон можно вывести, рассматривая условия равновесия произвольных, мысленно выделенных в жидкости цилиндрических объёмов (рис. 17) с учётом того, что жидкость давит на любую поверхность только перпендикулярно ей.

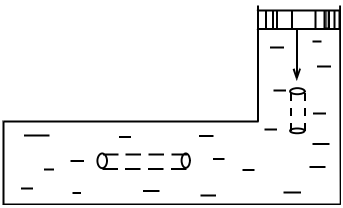

Рис. 17

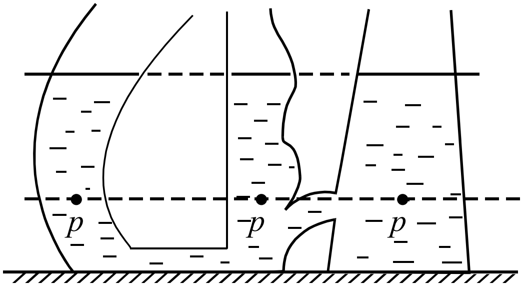

Рис. 18

Используя этот же приём, можно показать, что из-за наличия однородного поля тяжести разность давлений на двух уровнях жидкости, отстоящих по высоте друг от друга на расстоянии H, даётся соотношением $\Delta p = \rho g H$, где $\rho -$ плотность жидкости. Отсюда следует **закон сообщающихся сосудов:** *в сообщающихся сосудах, заполненных однородной жидкостью, давление во всех точках жидкости, распо-*

ложенных в одной горизонтальной плоскости, одинаково независимо от формы сосудов. При этом поверхности жидкости в сообщающихся сосудах устанавливаются на одном уровне (рис. 18).

Давление, которое появляется в жидкости из-за поля тяжести, называется гидростатическим. В жидкости на глубине H, считая от поверхности жидкости, гидростатическое давление равно $p = \rho g H$. Полное давление в жидкости складывается из давления на поверхности жидкости (обычно это атмосферное давление) и гидростатического.

§ 12. Закон Архимеда

На поверхность твёрдого тела, опущенного в жидкость (газ), действуют силы давления. Эти силы увеличиваются с глубиной погружения, и на нижнюю часть тела будет действовать со стороны жидкости большая сила, чем на верхнюю. Появляется так называемая *выталкивающая сила*, называемая ещё *силой Архимеда*.

Выталкивающая сила – это сумма всех сил, действующих на поверхность погружённого в жидкость тела, со стороны жидкости (рис. 19). Истинная причина появления выталкивающей силы – наличие различного гидростатического давления в разных точках жидкости.

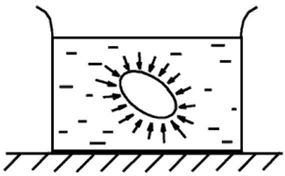

Рис. 19

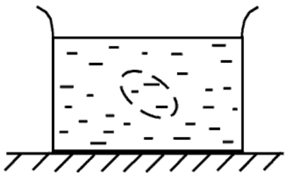

Рис. 20

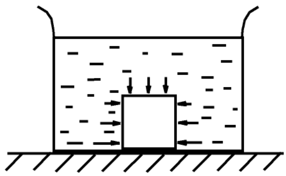

Рис. 21

Для нахождения силы Архимеда мысленно заменим тело жидкостью в объёме тела (рис. 20). Ясно, что выделенный объём жидкости будет неподвижен относительно остальной жидкости. На него со стороны окружающей жидкости будет действовать такая же сила, как и на погружённое тело. Напомним, что эту силу мы назвали выталкивающей. По третьему закону Ньютона, выделенная в объёме тела жидкость (вытесненная телом) будет действовать на окружающую жидкость с той же по модулю, но противоположно направленной силой. Эта сила называется по определению весом вытесненного объёма жидкости. Вспомним, что весом тела неподвижного в некоторой системе отсчёта (не обязательно инерциальной) называется сила, с которой тело действует на подставку или тянет за подвес.

В нашем случае роль подставки (подвеса) для выделенного объёма жидкости играет окружающая жидкость. Итак, *выталкивающая сила, действующая на тело, погружённое в жидкость, равна по модулю весу* *вытесненной жидкости и противоположно ему направлена.* Это и есть **закон Архимеда.** Заметим, что в формулировке закона говорится о весе вытесненной жидкости, а не о силе тяжести. И это весьма существенно, т. к. вес тела не всегда совпадает с силой тяжести, действующей на него. Например, ящик массы m в кабине поднимающегося вверх с ускорением a лифта давит на пол с силой $m(g+a)$. Это значит, что вес ящика будет $Q=m(g+a)$, в то время как сила тяжести, действующая на ящик, будет mg.

Теперь ясно, что выталкивающая сила появляется тогда, когда нет состояния невесомости, т. е. когда любое тело (в том числе и жидкость) имеет вес. Причиной возникновения веса в некоторой системе отсчёта могут быть поле тяжести или наличие ускорения у этой системы отсчёта (по отношению к инерциальной системе отсчёта). Если сосуд с жидкостью свободно падает, то жидкость находится в состоянии невесомости и на погружённое в неё тело сила Архимеда не действует. Не действует эта сила и в космическом корабле, двигатели которого не работают.

При доказательстве закона Архимеда мы считали, что тело полностью погружено в жидкость и вся поверхность тела соприкасается с жидкостью. Если часть поверхности тела плотно прилегает к стенке или дну сосуда так, что между ними нет прослойки жидкости, то закон Архимеда не применим.

Яркой иллюстрацией к сказанному служит опыт, когда ровную нижнюю поверхность деревянного кубика натирают парафином и плотно приставляют ко дну сосуда. Затем осторожно наливают воду. Брусок не всплывает, т. к. со стороны воды на него действует сила, прижимающая его ко дну, а не выталкивающая вверх (рис. 21). Известно, что это явление представляет опасность для подводной лодки, лёгшей на грунт.

Приведённая формулировка закона Архимеда остаётся справедливой и в случае, когда тело плавает в жидкости или частично опущено в неё через свободную, т. е. не соприкасающуюся со стенками сосуда, поверхность жидкости. Доказательство аналогично случаю полностью погружённого в жидкость тела.

Нам осталось научиться находить вес вытесненной жидкости и линию действия выталкивающей силы. В общем случае это не так легко сделать, что видно на примере погружения тела в жидкость, вращающуюся вместе с сосудом.

Рассмотрим наиболее простой и часто встречающийся на практике случай. Пусть сосуд с жидкостью неподвижен в некоторой инерциальной системе отсчёта и находится в однородном поле тяжести. Например, кастрюля с водой на столе, озеро в лесу и т. д. Тогда, как известно, вес любого неподвижного тела равен силе тяжести, действующей на тело. Поэтому, вес вытесненной жидкости равен силе тяжести, действующей на неё, а выталкивающая сила равна по модулю этой силе тяжести и противоположно ей направлена. Линия действия выталкивающей силы будет проходить через центр тяжести вытесненного объёма жидкости.

Действительно, на этот объём жидкости действуют две силы – сила тяжести $m\vec{g}$, приложенная в центре тяжести (ц. т.), и выталкивающая сила $\vec{F}$ (рис. 22). Так как выделенный объём жидкости находится в равновесии, то сумма моментов этих двух сил относительно любой оси, проходящей через ц. т., должна быть равна нулю. Момент силы тяжести равен нулю, а значит, и момент выталкивающей силы тоже нуль, т. е. линия действия выталкивающей силы проходит через ц. т. вытесненного объёма жидкости. Так как точку приложения силы можно переносить вдоль линии её действия, то обычно точку приложения выталкивающей силы помещают в ц. т. вытесненной жидкости (т. C на рис. 22) и называют эту точку *центром давлений*, поскольку выталкивающая сила есть сумма всех сил давления со стороны жидкости на поверхность погружённого в неё тела.

Обратите внимание на то, что ц. т. вытесненного телом объёма жидкости может и не совпадать с ц. т. самого тела. Погрузите полностью в воду, например, кусок льда с вмёрзшим в него стальным болтом.

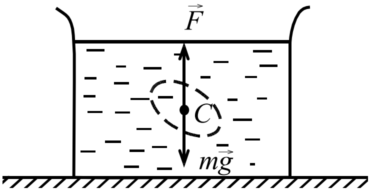

Рис. 22

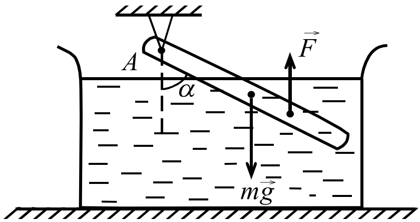

Рис. 23

Задача 10. Тонкий однородный стержень, укреплённый вверху шарнирно (рис. 23), опущен в воду так, что две трети стержня оказались в воде. Определите плотность материала стержня, считая плотность воды известной.

Решение. На стержень действуют сила тяжести стержня $m\vec{g}$, приложенная в центре стержня, сила Архимеда $\vec{F}$, приложенная в центре давлений, т. е. в центре погружённой в воду части стержня, и сила реакции шарнира, проходящая через т. A (на рис. не показана).

Стержень находится в равновесии. Поэтому сумма моментов относительно оси A всех действующих на стержень сил равна нулю. Обозначим угол стержня с вертикалью через α, а длину стержня через l. Имеем:

$$mg\frac{l}{2}\sin\alpha - F\cdot\frac{2}{3}l\sin\alpha = 0.$$

Пусть S – площадь поперечного сечения стержня, ρ – плотность материала стержня, $\rho_0 = 1\ \text{г}/\text{см}^3$ – плотность воды. Тогда масса стержня $m = \rho l S$, а сила Архимеда $F = \rho_0 \frac{2}{3} lSg$. Из записанных уравнений находим $\rho = \frac{8}{9}\rho_0 \approx 0{,}9\,\text{г/см}^3$.

Контрольные вопросы

1. Как можно переносить точку приложения силы в твёрдом теле?

2. Чем отличается свободный вектор от силы?

3. Чем отличается сложение сил от сложения векторов?

4. На тело действуют вдоль одной прямой в противоположных направлениях силы $F_1 = 17$ Н и $F_2 = 21$ Н. Найти равнодействующую силу (модуль, направление и точку приложения). Сколько точек приложения можно указать?

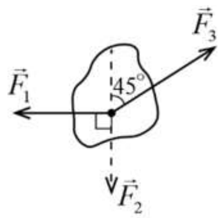

Рис. 24

5. На тело действуют три силы (рис. 24), лежащие в одной плоскости. Известно, что $F_1 = F_2 = 15$ Н. Найти равнодействующую силу (модуль, направление и точку приложения) для двух случаев:

а) $F_3 = 15$ Н; б) $F_3 = 15\sqrt{2}$ Н.

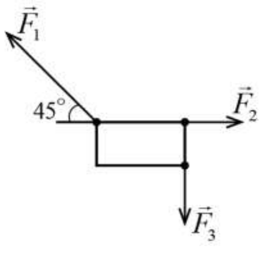

Рис. 25

6. К материальной точке приложены две силы $F_1 = 11$ Н и $F_2 = 7$ Н. Найти максимально возможное значение равнодействующей силы.

7. На прямоугольную пластину (рис. 25) в её плоскости действуют силы $F_3 = F_2 = 17$ Н, $F_1 = 17\sqrt{2}$ Н. Покажите, что у такой системы сил нет равнодействующей. Опишите качественно начальный характер движения пластины под действием этих сил из неподвижного состояния.

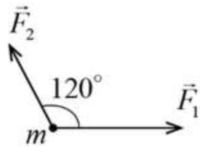

Рис. 26

8. На тело массой $m = 19$ кг действуют силы $F_1 = 30$ Н, $F_2 = 20$ Н, направления которых, составляют угол 120° (рис. 26). Найти модуль ускорения тела.

Указание: удобно предварительно разложить силу $\vec{F}_2$ на две составляющие, направленные вдоль силы $\vec{F}_1$ и перпендикулярно ей.

9. На тело действуют две параллельные силы $F_1 = 72$ Н и $F_2 = 48$ Н (рис. 27). Расстояние между точками приложения сил $AB = 100$ см. Найти равнодействующую силу (модуль, направление, линию действия).

10. На тело действуют две антипараллельные силы $F_1 = 62$ Н и $F_2 = 112$ Н (рис. 28). Расстояние между точками приложения сил $AB = 100$ см. Найти равнодействующую силу (модуль, направление, линию действия).

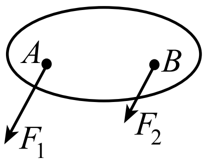

Рис. 27

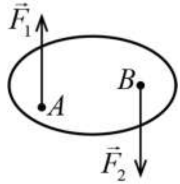

Рис. 28

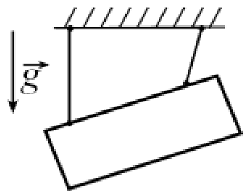

Рис. 29

11. На двух верёвках висит плита (рис. 29). Найдите ошибку в рисунке.

12. Как найти опытным путём положение центра тяжести плоского куска фанеры произвольной формы?

13. Сравнить на одной и той же глубине гидростатические давления в озере на равнине и в высокогорном озере. Сравнить полные давления на одной и той же глубине в этих озёрах.

14. Выполняется или нет закон Паскаля в невесомости?

15. Что можно сказать о силе Архимеда на орбитальной космической станции?

16. Ведро частично заполнено водой. В воду погрузили кисть руки. Как изменилась сила давления воды на дно ведра?

Задачи

1. Пять шаров с массами $m, 2m, 3m, 4m$ и $5m$ насажены на тонкий однородный стержень постоянного сечения массой $3m$ так, что центры соседних шаров находятся на расстоянии l друг от друга (рис. 30). На каком расстоянии от центра меньшего шара находится центр тяжести системы?

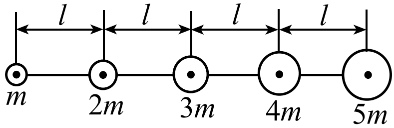

Рис. 30

2. Две девочки массами $m_1 = 26$ кг и $m_2 = 36$ кг качаются, сидя на концах доски длиной $L = 4$ м и массой $M = 18$ кг. На каком расстоянии от более тяжёлой девочки должна быть у доски точка опоры?

3. Однородная балка (рис. 31) массы m $\left(mg = 1200\ \text{Н}\right)$ и длины 3 м опирается о гладкий пол и гладкий выступ *B*, расположенный на высоте $2,25$ м над полом. Балка составляет с вертикалью угол 30° и удерживается верёвкой *AC*, натянутой у пола. Найти силу натяжения верёвки и силы реакции пола и выступа.

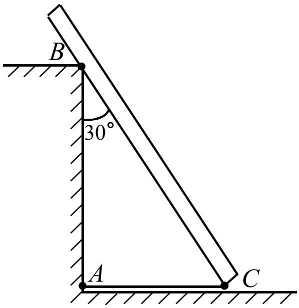

Рис. 31

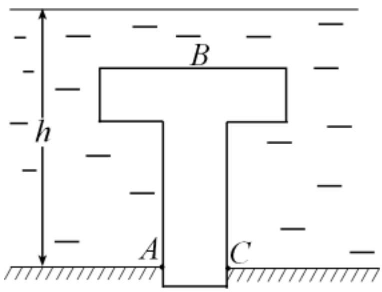

Рис. 32

4. Вес бруска, полностью погруженного на нити в жидкость с известной плотностью ρ_1, равен P_1, а в жидкость с неизвестной плотностью ρ_2 равен P_2. Определить ρ_2, зная, что плотность тела равна ρ.

5. Подводная опора, забитая в глинистый грунт водоёма глубиной $h = 3$ м, представляет из себя два соосных цилиндра различного диаметра (рис. 32). Найти силу, действующую на опору со стороны воды в водоёме, если площадь сечения цилиндра меньшего диаметра, забитого в грунт, равна $S = 1\ \text{м}^2$, объем части опоры ABC, находящейся в воде, $V = 4\ \text{м}^3$, плотность воды $\rho = 1\ \text{г/см}^3$, атмосферное давление $P = 10^5$ Па.