Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)
Заочная физико-техническая школа

ФИЗИКА

Работа. Энергия

Задание № 5 для 9-х классов

(2021 – 2022 учебный год)

Долгопрудный, 2022

Составитель: А.А. Лукьянов, к. ф.-м. н., доцент, ведущий инженер лаборатории по работе с одарёнными детьми МФТИ.

Физика: задание №5 для 9-х классов (2021–2022 учебный год), 2022, 32с.

Дата отправления заданий по физике и математике – 06 марта 2022 г.

Настоящее Задание с кратким изложением теории не претендует на то, чтобы заменить учебник по физике или обстоятельные учебные пособия (см. [1–3] в списке литературы). Изложение теоретических вопросов в нём направлено лишь на то, чтобы нужным образом расставить ударения, отметить тонкие места в курсе, а главное – облегчить Читателю решение предлагаемых задач.

Учащийся должен стараться выполнять все задачи и контрольные вопросы в заданиях. Некоторая часть теоретического материала, а также часть задач и контрольных вопросов являются сложными и потребуют от учащегося значительных усилий при изучении и решении. В целях повышения эффективности работы с материалами они обозначены символом «*» (звёздочка). Мы рекомендуем приступать к этим задачам и контрольным вопросам в последнюю очередь, разобравшись вначале с более простыми.

Составитель:
Лукьянов Андрей Александрович
Подписано 03.02.22. Формат 60×90 1/16.
Бумага типографская. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 2,0 Уч.-изд. л. 1,7.

Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)
Заочная физико-техническая школа

Институтский пер., г. Долгопрудный, 9, Москов. обл., 141700.
ЗФТШ, тел. (495) 408-51-45 – **заочное отделение,**
тел. (498) 744-63-51 – **очно-заочное отделение,**
тел. (498) 744-65-83 – **очное отделение.**

E.mail: zftsh@mail.mipt.ru

Наш сайт: https://zftsh.online/

§ 1. Работа силы

1.1. ***Работой постоянной силы*** $\vec{F}$, *составляющей угол* α *с направлением прямолинейного движения*, называется скалярная величина, равная произведению модуля вектора силы на модуль вектора перемещения и на косинус угла между векторами (см. рис. 1):

$$A_F = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\Delta\vec{r}\right| \cos\alpha, \qquad (1.1)$$

или в более простых обозначениях $\left(F = |\vec{F}|,\ s = |\Delta\vec{r}|\right)$

$$A_F = F \cdot s \cdot \cos\alpha = F_s \cdot s, \qquad (1.1^*)$$

где $F_s = F \cdot \cos\alpha -$ проекция вектора $\vec{F}$ на $\Delta\vec{r}$. В зависимости от величины угла α работа силы может быть положительной (если $0 \le \alpha < \pi/2$), отрицательной (если $\pi/2 < \alpha \le \pi$) и равной нулю (если $\alpha = \pi/2$).

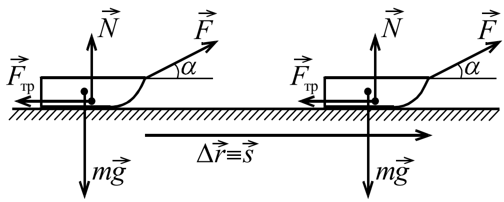

Рис. 1

Заметим, что так определённая работа есть скалярное произведение векторов силы $\vec{F}$ и перемещения $\Delta\vec{r}$:

$$A_F = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}. \qquad (1.1')$$

В системе СИ работа измеряется в джоулях: $1\,\text{Дж} = 1\,\text{Н} \times 1\,\text{м}$. По основному свойству скалярного произведения работа может быть представлена в виде суммы произведений проекций на оси координат векторов силы и перемещения

$$A_F = F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z. \qquad (1.1'')$$

Реально к телу почти всегда приложена не одна, а несколько сил (см. рис. 1). Формула (1.1) даёт работу одной из них (конкретно силы $\vec{F}$). Часто приходится вычислять работу *каждой* силы и работу *всех* сил (эта величина нам понадобится). *По определению* работой всех сил, приложенных к телу, называется *алгебраическая* сумма работ всех этих сил (*с учётом знаков* каждой):

$$A_{\text{всех сил}} = \sum_k A_{F_k}, \qquad (1.2)$$

т. е. работа определена как <u>*аддитивная*</u> величина (от английского слова *add* – добавлять, прибавлять, складывать).

Попытка определить работу всех сил как скалярное произведение *равнодействующей силы* на перемещение в некоторых случаях связано с затруднением: например, невозможно определить равнодействующую пары сил (двух сил равных по величине, но противоположно направленных, приложенных к разным точкам тела).

1.2. ***Если сила не постоянна или/и движение не является прямолинейным***, то обобщение понятия работы силы таково (*по определению*!). Ограничимся рассмотрением материальной точки (*не протяжённого тела*). Сначала всю траекторию движения (см. рис. 2) мысленно разбивают на очень большое число n очень маленьких перемещений $\Delta\vec{r}_j$ $\left(j = 1, 2, 3, \ldots, n\right)$, так что на протяжении отдельного участка сила $\vec{F}$ может считаться постоянной величиной $\vec{F}_j$. Далее на каждом участке (элементе траектории) $\Delta\vec{r}_j$ вычисляется элементарная работа (как от постоянной силы) $\Delta A_j = \vec{F}_j \cdot \Delta\vec{r}_j = F_{sj}\Delta s_j$, а затем суммируются вклады от каждого участка. *По определению работой силы* при перемещении тела из точки 1 в точку 2 называется скалярная величина, равная *алгебраической* сумме (с учётом знаков) работ на всех участках движения

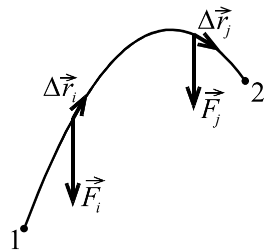

Рис. 2

$$A_{12} = \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_j \cdot \Delta\vec{r}_j. \qquad (1.3)$$

Работа *аддитивна* и в этом смысле.

1.3. *Геометрический смысл работы*

Пусть сила приложена к материальной точке и *постоянна*, а её проекция на ось Ox положительна. Пусть, кроме того, точка движется в положительном направлении оси Ox. Тогда работа силы при перемещении материальной точки из точки пространства с координатой x_1 в точку с координатой x_2 равна

$$A_{12} = F_x \cdot \Delta x = F(x_2 - x_1) = S$$

площади заштрихованного прямоугольника на графике зависимости силы от координаты (см. рис. 3).

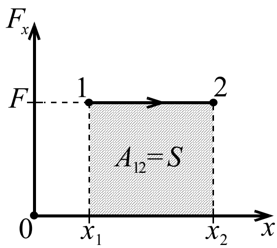

Рис. 3

Этот наглядный образ во многих случаях облегчает вычисление работы непостоянной силы. Общий принцип такой. Пусть график зависимости проекции силы на ось $Ox -$ это кривая на рис. 4 и пусть материальная точка, к которой приложена эта сила, перемещается в положительном направлении оси Ox из точки пространства с координатой x_1 в точку с координатой x_2. Утверждается, что и в этом случае работа силы равна площади «под кривой» (площади соответству-

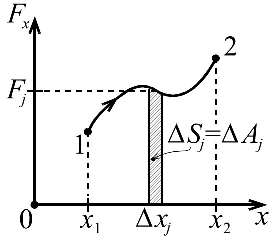

Рис. 4

ющей криволинейной трапеции; см. рис. 4). Мысленно разбиваем криволинейную трапецию на очень большое число очень узких вертикальных полосок ширины Δx_j $(j = 1,2,3,\ldots,n)$ почти прямоугольной формы. Считая, что на протяжении одной полоски сила практически не изменяется, вычисляем сначала элементарную работу $\Delta A_j = F_j \cdot \Delta x_j$. Она совпадает с площадью соответствующей полоски $\Delta A_j = \Delta S_j$. Чтобы найти работу силы на всём интервале от x_1 до x_2, нужно просуммировать вклады по всем Δx_j (работа – величина аддитивная!): $A_{12} = \sum_{j=1}^{n} F_j \cdot \Delta x_j = \sum_{j=1}^{n} \Delta S_j = S,$ что совпадает с площадью криволинейной трапеции (площадь – тоже величина аддитивная!).

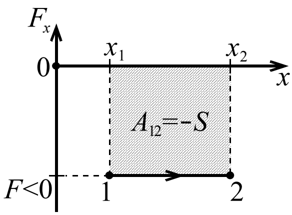

Рис. 5

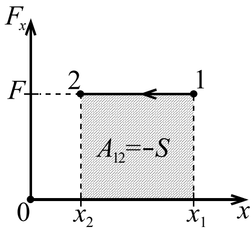

Рис. 6

N.B. Наглядный способ нахождения работы силы (как площади) требует осторожности. На рисунках 5 – 6 показаны случаи, когда работа силы (которая может иметь любой знак) равна соответствующей площади с точностью до знака (площадь фигуры положительна). Нужно ещё иметь в виду, что на некоторых участках работа силы может быть положительной, а на других отрицательной. Это важно при вычислении суммы вкладов от каждого участка.

1.4. *Работа силы тяжести вблизи поверхности Земли*

Вблизи поверхности Земли на любое тело действует сила тяжести $m\vec{g}$, где m – масса тела, g – ускорение свободного падения. Вычислим работу силу тяжести для трёх случаев движения материальной точки из точки пространства 1 в точку 2: а) вертикально верх; б) вертикально вниз; в) сложным образом – сначала вертикально вверх до точки 3, а затем вертикально вниз до точки 2 (рис. 7).

В случае

а) $A_{12} = -mg \cdot s = -mg(y_2 - y_1) = -mg \cdot \Delta h.$

При этом учтено, что вектор силы тяжести $m\vec{g}$ и вектор перемещения направлены в противоположные стороны, угол между ними равен 180°, косинус которого равен минус единице (отсюда – знак минус в формуле). $\Delta h = h_2 - h_1 > 0,$ поэтому работа $A_{12} = -mg\Delta h$ силы тяжести при подъёме тела отрицательна.

В случае

б) $A_{12} = +mg \cdot s = +mg(y_1 - y_2) = -mg(y_2 - y_1) = -mg \cdot \Delta h.$ При этом учтено, что сила $m\vec{g}$ и вектор перемещения направлены в одну сторону, угол между ними равен нулю, косинус которого равен плюс единице. Последнюю формулу мы для единообразия записали в виде $A_{12} = -mg\Delta h$, но в ней $\Delta h = h_2 - h_1 < 0$, поэтому работа силы тяжести при опускании тела положительна.

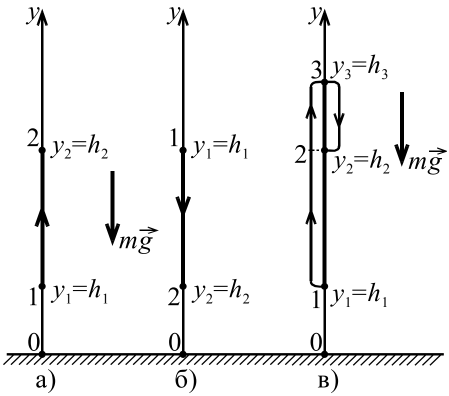

Рис. 7

В случае

в) $A_{12\,32} = A_{12} + A_{23} + A_{32} = A_{12}$ получаем такое же значение работы, как при простом вертикальном подъёме. Учтено, что сумма работ $A_{23} + A_{32} = 0$ (см. **N.B.** выше!), поскольку работа

$$A_{23} = -mg \cdot s_{23} = -mg \cdot (y_3 - y_2),$$

а $$A_{32} = +mg \cdot s_{32} = +mg \cdot (y_3 - y_2).$$

Отсюда легко понять: как бы сложно ни двигалась материальная точка, **если начальная и конечная точки движения одни и те же, то и работа силы тяжести будет одной и той же** и будет даваться формулой

$$A_{12} = -mg(h_2 - h_1). \qquad (1.4)$$

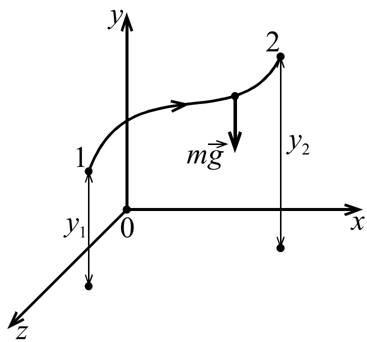

Рис. 8

Это утверждение можно существенно усилить: не только для движения по вертикали, но **и для движения по произвольной траектории** работа силы тяжести при перемещении материальной точки из точки пространства 1 в точку 2 (рис. 8) даётся формулой (1.4). Для доказательства воспользуемся формулами (1.3) и $(1.1'')$:

$$A_{12} = \sum_{j=1}^{n} m\vec{g} \cdot \Delta\vec{r}_j = \sum_{j=1}^{n} (mg_x \Delta x_j + mg_y \Delta y_j + mg_z \Delta z_j) = \sum_{j=1}^{n} (-mg)\Delta y_j .$$

При этом учтено, что проекции ускорения свободного падения на оси равны

$g_x = g_z = 0,\ g_y = -g.$ Далее: $A_{12} = -mg\sum_{j=1}^{n} \Delta y_j = -mg(y_2 - y_1).$

1.5. *Работа силы упругости*

Рассмотрим *небольшой* шарик на пружинке, который может двигаться вдоль оси Ox. В процессе движения на него действует сила упругости со стороны растягивающейся или сжимающейся пружины $F_{\text{упр}}(x) = -k \cdot x$, где k – коэффициент жёсткости пружины, x – растяжение пружины; $x = 0$ – координата шарика для недеформированной пружины (считаем шарик материальной точкой). Вычислим работу силы упругости (именно её, а, например, **не** внешней силы, подталкивающей или тормозящей шарик) при изменении растяжения от x_1 до x_2. В данном случае сила **не** постоянна, поэтому нет простой формулы $A_{12} = F_x \cdot \Delta x = F(x_2 - x_1)$. Наглядный геометрический образ работы позволяет, однако, легко провести её вычисление. Работа силы упругости равна (с точностью до знака!) площади заштрихованной на рис. 9 трапеции:

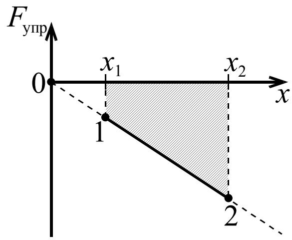

Рис. 9

$$A_{12} = -S = -\frac{a+b}{2}h = -\frac{|-kx_1| + |-kx_2|}{2}(x_2 - x_1) = -\frac{k(x_1 + x_2)}{2}(x_2 - x_1),$$

или окончательно

$$A_{12} = -\left(\frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}\right). \tag{1.5}$$

Как и в случае силы тяжести (см. рассуждения п. 1.4), **работа силы упругости зависит только от начального и конечного растяжения пружины**, но не зависит от того, какие промежуточные состояния прошёл шарик. Силы, обладающие таким свойством, называются ***консервативными***.

Разберите *самостоятельно* случай, когда шарик проскакивает точку с координатой x_2, доходит до точки с координатой $x_3 > x_2$, после чего возвращается в точку с координатой x_2. Докажите, что, как и в случае силы тяжести, работа сил упругости пружины $A_{1232} = A_{12}$ и здесь будет даваться формулой (1.5).

Не все силы консервативны. Сила трения **не** консервативна: работа силы трения, действующей на санки, существенно зависит от пути, по какому перемещались санки. Далеко не одно и то же – перевезти груз на санках от одного подъезда до другого или сделать то же самое, но ещё протащить его несколько раз вокруг дома, – работа силы трения в последнем случае будет существенно другой.

Примеры к §1

Пример 1.1. Шкаф массой 100 кг передвинули по горизонтальному полу на 2 м. Чему равна работа силы тяжести при таком перемещении?

Решение. Работа силы тяжести в данном случае равна нулю, т. к. угол между направлением действия силы тяжести и перемещением (горизонтальным направлением) равен 90°, косинус которого равен нулю (см. формулу (1.1) и рис. 1).

Пример 1.2. Лифт массой 1 т начинает подниматься с постоянным ускорением $0,2$ м/с^2.

1) Чему равна работа силы натяжения троса, с помощью которого поднимают лифт, за первые 4 с движения?

2) Чему равна работа силы натяжения троса за 4-ю секунду движения?

Решение. В нашем примере сила натяжения троса и перемещение лифта направлены в одном направлении (вверх); угол между этими векторами равен нулю, косинус которого равен единице. Работу силы F натяжения троса поэтому ищем по простой формуле («без косинуса») $A = F \cdot s = F \cdot \dfrac{at^2}{2}$.

Силу найдём из 2-го закона Ньютона $m\vec{a} = \vec{F} + m\vec{g}$, или в проекциях на вертикальное направление: $ma = F - mg$, откуда $F = m(g+a)$.

Работа за первые 4 секунды движения равна

$$A(t=4) = m(g+a)\left.\frac{at^2}{2}\right|_{t=4} = 16 \text{ кДж}.$$

Работу за 4-ую секунду можно найти как разность $A(t=4) - A(t=3) =$

$$m(g+a)\left.\frac{at^2}{2}\right|_{t=4} - m(g+a)\left.\frac{at^2}{2}\right|_{t=3} = 16000 - 9000 = 7000 \text{ Дж} = 7 \text{ кДж}.$$

***Пример 1.3.** Доску массой $m = 5$ кг и длиной $L = 1$ м вытягивают со льда на асфальт параллельно длине доски. Коэффициент трения между доской и асфальтом $\mu = 0,5$. Трение доски о лёд пренебрежимо мало. Какую работу совершит сила трения к моменту, когда доска полностью окажется на асфальте? Дорога горизонтальна. Доску вытягивают горизонтально направлен-ной силой; $g = 10$ м/с^2. Считать, что доска давит на асфальт только той частью, которая находится асфальте.

Решение. Пусть доска продвинулась по асфальту на расстояние x. Сила трения приложена лишь к той части доски, которая уже находится на асфальте и будет равна

$$F_{\text{тр}} = \mu \frac{x}{L} mg. \tag{1}$$

Здесь учтено, что нормальная сила реакции со стороны асфальта на ту часть доски, которая уже оказалась на нём, составляет долю, равную x/L от полной силы реакции N, причём для горизонтальной дороги и горизонтальной тянущей силы $N = mg$.

С работой силы, линейно зависящей от координаты (от удлинения), мы имели дело, когда рассматривали силу, действующую на тело со стороны деформированной пружины. Там модуль силы упругости равнялся $|f(x)| = k|x|$, где k – коэффициент жёсткости пружины, x – её удлинение. Абсолютное значение работы силы упругости при удлинении пружины $x = L$ (из недеформированного состояния $x = 0$) давалось формулой

$$|A| = \frac{kL^2}{2}. \tag{2}$$

В нашем случае (1) роль коэффициента жёсткости играет величина

$$k = \frac{\mu \cdot mg}{L}. \tag{3}$$

Учтём ещё, что работа силы трения в данном случае будет отрицательной, т. к. сила трения и перемещение доски во все моменты времени направлены в противоположные стороны (угол между ними равен 180°), так что $\Delta A_{\text{тр}} = F_{\text{тр}} \cdot \Delta x \cdot \cos 180^\circ = -F_{\text{тр}} \cdot \Delta x$. Поэтому окончательный ответ таков:

$$A_{\text{тр}} = -\frac{\mu \cdot mg}{2} L. \tag{*}$$

Подстановка чисел даёт $A_{\text{тр}} \approx -12{,}5$ Дж.

Пример 1.4. Всегда ли работа силы трения отрицательна?

Решение. Нет. Простейший пример – сила трения, действующая на автомобиль, трогающийся с места. Какая сила в этом случае разгоняет автомобиль? Сила трения покрышек о полотно дороги. Колеса в точке соприкосновения с дорогой стремятся провернуться в сторону, противоположную направлению разгона автомобиля (или даже проворачиваются, пробуксовывают). Поэтому сила трения направлена в ту же сторону, в какую ускоряется автомобиль.

§2. Кинетическая энергия тела. Теорема об изменении кинетической энергии

2.1. Определение. Кинетической энергией материальной точки (частицы) массой m, движущейся со скоростью $\overline{v}$, называется неотрицательная *скалярная* (никуда не направленная) величина

$$K = \frac{mv^2}{2}. \quad (2.1)$$

В некоторых случаях более удобна другая форма записи кинетической энергии – через импульс частицы $\vec{p} = m\vec{v}$: $K = \frac{(mv)^2}{2m}$, откуда

$$K = \frac{p^2}{2m}. \quad (2.2)$$

2.2. **Справедлива очень важная** *Теорема об изменении кинетической энергии*: приращение кинетической энергии материальной точки при перемещении из одной точки пространства в другую равно алгебраической сумме работ всех сил, действующих на материальную точку при этом перемещении:

$$\Delta K = \frac{mv^2_{\text{конечн}}}{2} - \frac{mv^2_{\text{начальн}}}{2} = A_{\text{всех сил}} = \sum_k A_{F_k}. \quad (2.3)$$

Из последней формулы видно, что кинетическая энергия измеряется в тех же единицах, что и работа, т. е. в джоулях. Теорема (2.3) есть следствие 2-го закона Ньютона. Докажем это. В самом деле, согласно этому закону для малых интервалов времени Δt и, соответственно, малых приращений скорости частицы $\Delta\vec{v}$ имеем:

$$m \cdot \Delta\vec{v} = \sum_k \vec{F}_k \cdot \Delta t, \quad (2.4)$$

где суммирование ведётся по всем действующим на частицу силам. Масса частицы считается постоянной: в противном случае нужно было бы писать не

$$m \cdot \Delta\vec{v} = \sum_k \vec{F}_k \cdot \Delta t, \text{ а } \Delta(m\vec{v}) = \sum_k \vec{F}_k \cdot \Delta t.$$

Умножим обе части уравнения (2.4) скалярно на $\vec{v}$:

$$m \cdot \vec{v} \cdot \Delta\vec{v} = \sum_k \vec{F}_k \cdot \vec{v} \cdot \Delta t. \quad (2.4')$$

Здесь учтено, что в скалярном произведении векторов безразличен порядок сомножителей: $\vec{v}\cdot\vec{F}_k = \vec{F}_k\cdot\vec{v}$ и $\Delta\vec{v}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\Delta\vec{v}$. Учтём ещё, что произведение $\vec{v}\cdot\Delta t$ даёт малое (за малое приращение времени Δt) перемещение материальной точки: $\vec{v}\cdot\Delta t = \Delta\vec{r}$. При этом отдельные слагаемые в сумме $(2.4')$ можно представить в виде $\vec{F}_k\cdot\vec{v}\Delta t = \vec{F}_k\cdot\Delta\vec{r} = \Delta A_{F_k}$ работ отдельных сил $\vec{F}_k$ при малом перемещении частицы $\Delta\vec{r}$.

Левая часть $(2.4')$ представляет собой приращение кинетической энергии $\Delta\dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{m}{2}\Delta v^2$ (масса частицы, напомним, считается постоянной). В самом деле,

$$\Delta v^2 = (\vec{v}+\Delta\vec{v})^2 - v^2 = 2\vec{v}\cdot\Delta\vec{v} + \Delta\vec{v}\cdot\Delta\vec{v} \cong 2\vec{v}\cdot\Delta\vec{v}. \qquad (*)$$

При этом мы пренебрегли слагаемым $\Delta\vec{v}\cdot\Delta\vec{v}$. Разумеется, оба слагаемых в сумме $2\vec{v}\cdot\Delta\vec{v} + \Delta\vec{v}\cdot\Delta\vec{v}$ малы, но второе значительно меньше первого. Проще всего это понять, если записать эту сумму в виде $(2\vec{v}+\Delta\vec{v})\cdot\Delta\vec{v}$; при этом первое слагаемое в скобке **не** мало, а второе мало.

Таким образом, для *малых* Δt (малых участков траектории) получаем

$$\Delta\frac{mv^2}{2} = \sum_k \Delta A_{F_k}.$$

Так как это соотношение выполняется *последовательно на каждом* малом участке траектории, оно будет верно и *для всей траектории* в форме (2.3).

2.3. **Кинетической энергией системы *N* материальных точек** (частиц) называют (по определению) сумму кинетических энергий отдельных частиц:

$$K_{\text{системы}} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \ldots + \frac{m_N v_N^2}{2} = \sum_{i=1}^{N}\frac{m_i v_i^2}{2}. \qquad (2.1^*)$$

Если все частицы системы обладают одинаковой скоростью $\vec{v}$ (как это бывает, например, в твёрдом теле при его поступательном (без вращения) движении), то кинетическая энергия системы равна

$$K_{\text{системы}} = \sum_{i=1}^{N}\frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{v^2}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i = \frac{(\sum_{i=1}^{N} m_i)v^2}{2} = \frac{Mv^2}{2}, \text{ где } M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

есть масса всей системы (например, твёрдого тела).

Для системы материальных точек также справедлива теорема об изменении кинетической энергии:

$$\Delta K_{\text{системы}} = \sum_i \frac{m_i v_{i\,\text{конечн}}^2}{2} - \sum_i \frac{m_i v_{i\,\text{начальн}}^2}{2} = A_{\text{всех сил}} = \sum_k A_{F_k}. \qquad (2.3^*)$$

Заметим, что в формуле (2.3*) стоит сумма работ **всех** сил, а **не только внешних**. Последнее легко понять. Представим себе два шарика одинаковой массы m, скреплённые лёгкой пружинкой. Пусть на эту систему не действуют никакие внешние силы и пусть в начальный момент пружинка не деформирована, а шарики имели равные по модулю, но противоположно направленные скорости $\vec{v}$ и $-\vec{v}$ вдоль пружинки. В такой системе возникнут колебания. В начальный момент система обладала кинетической энергией $K_1 = 2\dfrac{mv^2}{2} = mv^2$. Ясно, что в какой-то момент силы упругости со стороны пружины (это – *внутренние* силы; пружинка есть *часть нашей системы*) обратят скорости шариков в нуль. Обратится в нуль при этом и кинетическая энергия системы $K_2 = 0$. Изменение кинетической энергии системы равно работе сил упругости пружины $\Delta K = K_2 - K_1 = -mv^2 = A_{\text{внутр}}$.

Примеры к § 2

Пример 2.1. Автомобиль, движущийся со скоростью 60 км/ч по мокрому асфальту горизонтальной дороги, резко тормозит и до полной остановки едет юзом (колеса не вращаются). Коэффициент трения между покрышками автомобиля и дорогой равен 0,4. Вычислите тормозной путь автомобиля. Торможение осуществляется одновременно передними и задними колёсами. Автомобиль рассматривать как брусок с равномерно распределённой массой.

Решение. Работа силы тяжести и работа нормальной силы реакции со стороны дороги равны нулю, т. к. обе эти силы перпендикулярны вектору перемещения и соответствующие косинусы в выражениях для работ в обоих случаях равны нулю. Изменение кинетической энергии автомобиля в нашем случае связано лишь с действием силы трения покрышек колёс автомобиля об асфальт: $\Delta K = \dfrac{mv_{\text{конечн}}^2}{2} - \dfrac{mv_{\text{начальн}}^2}{2} = A_{\text{тр}}$. В нашем случае $v_{\text{конечн}} = 0$ (полная остановка автомобиля), $v_{\text{начальн}} = v_0 = 60\text{ км/ч} = \dfrac{60}{3,6}\text{ м/с}$. Работа силы трения равна $A_{\text{тр}} = -F_{\text{тр}} \cdot s$. В данном случае (при езде юзом) угол между силой трения и перемещением равен 180°, косинус которого равен -1. Модуль силы трения *скольжения* (автомобиль движется, как санки) $F_{\text{тр}} = \mu \cdot N$, где $\mu = 0,4 -$ коэффициент трения скольжения, $N-$нормальная сила реакции со стороны дороги. В случае горизонтальной дороги без провалов, куда бы мог «ухнуть» автомобиль, нормальная сила реакции уравновешивает силу тяжести: $\vec{N}+m\vec{g}=0$, т. е. модуль силы $N=mg$. В результате имеем $F_{\text{тр}}=\mu\cdot mg$ и $-\frac{mv_0^2}{2}=-\mu\cdot mg\cdot s$, откуда после сокращения на массу автомобиля находим

$$s=\frac{v_0^2}{2\mu g}\approx 35\text{ м.}$$

***Пример 2.2**. Как измениться результат предыдущей задачи, если торможение будет осуществляться только задними (или только передними) колёсами?

Решение. В этом случае $F_{\text{тр}}=\mu\cdot N_{\text{задн}}=\mu\cdot mg/2$ (считаем, что нагрузка равномерно распределена на передние и задние колеса). В результате

$$-\frac{mv_0^2}{2}=-\mu\cdot\frac{mg}{2}\cdot s \text{ и } s=\frac{v_0^2}{\mu g}\approx 70\text{ м.}$$

***Пример 2.3**. Пуля, летящая со скоростью v_0, пробивает несколько одинаковых досок, расположенных на некотором расстоянии друг от друга. В какой по счёту доске застрянет пуля, если её скорость после прохождения первой доски равна $v_1=0{,}83v_0$?

Решение. Считаем, что при движении между досками сопротивление движению пули со стороны воздуха значительно меньше силы сопротивления со стороны древесины, и будем им пренебрегать. Кроме того, будем пренебрегать размерами пули; это позволит считать силу сопротивления со стороны древесины F_c постоянной: пренебрегаем тем, что пуля в какие-то моменты лишь частично находится в доске, в другие моменты располагается полностью в доске (если размер пули меньше толщины доски). Пусть $l-$толщина одной доски, а $L-$суммарный путь, который пройдёт пуля во всех досках до момента остановки. Запишем теорему о приращении кинетической энергии в двух случаях: 1) для прохождения пулей только одной первой доски и 2) для движения пули от начала первой доски до момента, когда она остановится (застрянет) в доске (неизвестной нам пока по счёту):

$$\frac{mv_1^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=-F_c\cdot l \qquad (1)$$

и
$$0-\frac{mv_0^2}{2}=-F_c\cdot L. \qquad (2)$$

Или с учётом условия $v_1=0,83v_0$:
$$\frac{mv_0^2}{2}(1-0,83^2)=F_c\cdot l \qquad (1')$$

и
$$\frac{mv_0^2}{2}=F_c\cdot L. \qquad (2')$$

Деля второе уравнение на первое, получаем $\frac{L}{l}=\frac{1}{1-0,83^2}\approx 3,2$, то есть $3l<L<4l$: пуля пробьёт 3-ю доску, но застрянет в 4-й.

***Пример 2.4**. Парашютист массой 80 кг падает при открытом парашюте с установившейся скоростью 18 км/ч. Считая, что падение происходило с высоты 4 км без начальной скорости и что при раскрытии парашюта скорость быстро гасится до допустимого значения 18 км/ч, определите работу силы сопротивления воздуха на всём пути.

Решение. Ясно, что прямое вычисление работы силы сопротивления воздуха невозможно, т. к. ничего не сказано о зависимости силы сопротивления от скорости парашютиста (ни до раскрытия парашюта, ни после), не сказано также, на какой высоте произошло раскрытие парашюта. Тем не менее, задача в той постановке, в какой дана, решается до конца.

В какие формулы может войти искомая работа силы сопротивления? Например, в формулу для приращения кинетической энергии парашютиста. Приращение кинетической энергии парашютиста ΔK от момента старта до момента приземления равно приращению его кинетической энергии от момента старта до момента, когда скорость станет равной установившейся $v=18$ км/ч $=5$ м/с. Начиная с этого момента ни скорость, ни кинетическая энергия парашютиста не изменяются. С другой стороны, приращение кинетической энергии равно сумме работ всех сил, приложенных к парашютисту; в нашем случае – силы тяжести и силы сопротивления со стороны воздуха:
$$\Delta K=\frac{mv^2}{2}-0=A_{mg}+A_{\text{сопр}}. \qquad (1)$$

Заметим, как удачно вышло: можно искать приращение кинетической энергии от момента начала падения до момента приземления, а не до момента раскрытия парашюта (в условии задачи ничего не сказано о высоте, на которой раскрывается парашют). Из формулы (1) получаем
$$A_{\text{сопр}}=\frac{mv^2}{2}-A_{mg}=\frac{mv^2}{2}-mgh.$$

Вычисления дают значения:

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{80\cdot 5^2}{2}=1000\text{ Дж},\quad mgh\approx 80\cdot 10\cdot 4000=3,2\cdot 10^6\text{ Дж}=3,2\text{ МДж}.$$

В итоге $A_{\text{сопр}}\approx -3,2$ МДж.

Пример 2.5. (**МФТИ**, из старых задач) Шарик для игры в настольный теннис радиусом $r=15$ мм и массой $m=5$ г погружён в воду на глубину $h=30$ см. Когда шарик отпустили, он выпрыгнул из воды на высоту $h_1=10$ см. Сколько энергии перешло в теплоту вследствие трения шарика о воду? Сопротивлением воздуха пренебречь. Считать, что количество энергии, перешедшей в теплоту, равно работе силы сопротивления воды, взятой с противоположным знаком:

$$Q=-A_{\text{сопр}}. \tag{1}$$

Решение. Вычислить работу силы сопротивления воды прямым методом затруднительно: как и в случае с парашютистом из Примера 2.4, зависимость силы сопротивления от скорости шарика в воде весьма непростая и не известная нам. Зато нам известен экспериментальный факт, что шарик выпрыгнул из воды на высоту $h_1=10$ см. Начальная кинетическая энергия шарика K_1 равна нулю (шарик вначале покоился). В момент достижения шариком высоты h_1 его скорость, а значит, и кинетическая энергия K_2 снова равны нулю. Приращение кинетической энергии тоже равно нулю

$$\Delta K=K_2-K_1=0. \tag{2}$$

С другой стороны, приращение кинетической энергии шарика равно сумме работ всех сил, действовавших на шарик. Пока шарик двигался в воде, на него действовали три силы: сила Архимеда, направленная вверх и равная $F_A=\rho_{\text{воды}}V_{\text{шарика}}g=\rho_{\text{воды}}\frac{4\pi}{3}r^3g\approx 0,14$ Н, и две силы, действовавшие вниз, – сила тяжести $mg\approx 0,049$ Н и сила сопротивления воды. Пока шарик поднимается (а мы рассматриваем только этот этап движения), угол между силой тяжести и перемещением равен 180°, косинус которого равен минус единице. При движении в воздухе нужно учесть лишь действие силы тяжести шарика: сила Архимеда в воздухе (с плотностью $1,3$ кг/м^3) $F^{\text{возд}}_{\text{Арх}}=\rho_{\text{воздуха}}\frac{4\pi}{3}r^3g\approx 0,00018$ Н примерно в 270 раз меньше силы тяжести.

По теореме об изменении кинетической энергии:

$$\Delta K = \sum_i A_i = (F_A - mg)h - mgh_1 + A_{\text{сопр}}, \qquad (3)$$

и эта величина должна равняться нулю (см. (2)). Отсюда получаем $(F_A - mg)h - mgh_1 - Q = 0$ и далее находим

$$Q = (F_A - mg)h - mgh_1 \approx 0{,}022 \text{ Дж.}$$

§ 3. Потенциальная энергия. Закон сохранения механической энергии

3.1. Потенциальная энергия тела вблизи поверхности Земли

Рассмотрим движение материальной точки под действием силы тяжести (см. рис. 10). Считаем, что *никаких других сил на неё не действует*, т. е. нет сопротивления воздуха или «тянущей» силы. По общей теореме об изменении кинетической энергии имеем

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A_{12} = mg(h_1 - h_2),$$

т. е. для двух произвольных точек траектории выполняется равенство

$$\frac{mv_2^2}{2} + mgh_2 = \frac{mv_1^2}{2} + mgh_1, \qquad (3.1)$$

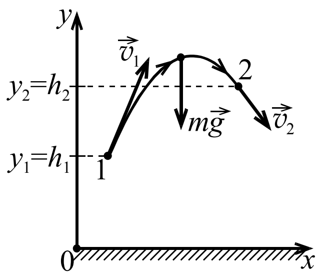

Рис. 10

или иначе: в процессе движения сохраняется постоянной величина

$$E = \frac{mv^2}{2} + mgh = \text{const}, \qquad (3.1')$$

Говорят, что имеет место ***закон сохранения механической энергии*** – сумма кинетической энергии $K = mv^2/2$ и потенциальной энергии

$$\Pi = mgh \qquad (3.2)$$

остаётся неизменной:

$$E = K + \Pi = \text{const}. \qquad (3.1'')$$

Заметим, что потенциальную энергию мы могли определить и несколько иначе, добавив к ней произвольную константу C; при этом все равенства (3.1) остались бы в силе, например, $\frac{mv_2^2}{2} + mgh_2 + C = \frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 + C.$ Когда мы определяем потенциальную энергию формулой $\Pi = mgh,$ мы полагаем, что на поверхности Земли (при $h = 0$) потенциальная энергия равна нулю. Но поверхность Земли не ровная! Например, мы бросаем камень с обрыва. Где выбрать «нуль» потенциальной энергии – вверху или внизу?

Ответ: безразлично, где именно. Главное – в процессе решения задачи не переопределять этот «нуль», иначе запутаетесь.

3.2. Потенциальная энергия упруго деформированной пружины (шарика на пружине)

Рассмотрим маленький шарик на пружинке из п.1.5. Пусть $x = 0 -$ координата шарика для недеформированной пружины. При перемещении шарика из точки с координатой x_1 в точку с координатой x_2 силы упругости со стороны пружины совершат работу (1.5) $A_{12} = -\left(\frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}\right)$. Если никаких других сил на шарик не действовало, то по теореме об изменении кинетической энергии имеем $\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A_{12} = -\left(\frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}\right)$. Последнее равенство снова можно переписать в форме ***закона сохранения механической энергии***

$$\frac{mv_2^2}{2} + \frac{kx_2^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{kx_1^2}{2}. \tag{3.3}$$

При этом потенциальную энергию упруго деформированной пружины определяют формулой

$$\Pi = \frac{kx^2}{2}. \tag{3.4}$$

Как и потенциальная энергия силы тяжести, потенциальная энергия упруго деформированной пружины определена не однозначно: к ней можно добавить произвольную константу, которая не должна переопределяться в ходе решения задачи. Чаще всего константу выбирают так, что в недеформированном состоянии потенциальная энергия пружины равна нулю (см. формулу (3.4)). В реальных процессах механическая энергия далеко не всегда сохраняется: **из-за наличия трения** часть механической энергии переходит **в тепло** (см. Пример 2.5). Величина Q перешедшей в тепло энергии может быть вычислена как разность:

$$Q = K_1 + \Pi_1 - (K_2 + \Pi_2). \tag{3.5}$$

Примеры к § 3

Пример 3.1. Лёгкий стержень длиной L с грузом малых размеров на одном конце может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через другой конец. Сначала груз находится в низшем положении. Какую минимальную скорость нужно сообщить грузу, чтобы он совершил полный оборот? Сопротивлением воздуха и трением в оси пренебречь.

Решение. Задача легко решается по закону сохранения механической энергии. Пусть $v_0 -$ искомая *минимальная* скорость груза, когда он находится в низшей точке. Что значит *минимальная* скорость? Это такая скорость, которой достаточно, чтобы груз достиг высшей точки (высоты $h = 2L$) и имел бы там *нулевую кинетическую энергию*, т. е. нулевую скорость (остановился бы в высшей точке). Если скорость груза внизу будет хотя бы чуть-чуть больше минимальной, он совершит полный оборот. Итак, в случае минимальной скорости начальная кинетическая энергия по закону сохранения энергии полностью перейдёт в потенциальную: $\frac{mv_{0,\min}^2}{2} = mg \cdot 2L,$ откуда

$$v_{0,\min} = 2\sqrt{gL}.$$

***Пример 3.2**. Груз малых размеров висит на лёгкой нерастяжимой *нити* длиной L. Какую минимальную скорость v_0 надо сообщить грузу, чтобы он сделал полный оборот в вертикальной плоскости? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. Эта задача кажется очень похожей на предыдущую, однако замена лёгкого стержня на лёгкую нерастяжимую нить не так безобидна. Если только представить, что и для нити справедливо решение из предыдущего примера для лёгкого стержня, то мы немедленно придём к абсурдному результату: если в высшей точке скорость груза обратится в нуль, то дальше и очень резко началось бы его … вертикальное падение вниз. Пока был жёсткий стержень, он этому препятствовал, вынуждая груз двигаться по окружности. Нитка не жёсткий стержень, – она мягкая, и препятствовать вертикальному падению груза вниз из высшей точки она не смогла бы. Но таких движений никто не наблюдал. Чтобы сделать полный оборот, груз в высшей точке должен иметь конечную (не равную нулю) скорость v. Какое же требование определяет *минимальность* скорости v_0, о которой спрошено в условии задачи?

Ответ: обращение в ноль натяжения нити в верхней точке $T = 0.$ При этом центростремительное ускорение грузу $a_{\text{ц.с.}} = v^2/L$ будет сообщать только сила тяжести $mg.$ Уравнение 2-го закона Ньютона при этом для груза в верхней точки запишется в виде

$$m\frac{v^2}{L} = mg. \tag{1}$$

(Если бы нить была натянута, то уравнение содержало бы слагаемое с силой натяжения нити $m\frac{v^2}{L} = mg + T;$ скорость при этом была бы больше, чем по уравнению (1), соответственно, больше была бы и начальная скорость груза $v_0,$ т. е. не была бы минимальной.) Уравнение (1) дополним уравнением закона сохранения механической энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mg \cdot 2L. \tag{2}$$

Подстановка $v^2 = gL$ (по уравнению (1)) в уравнение (2) даёт $\frac{v_0^2}{2} = \frac{gL}{2} + 2gL,$ откуда $v_0 = \sqrt{5gL},$ что больше, чем $2\sqrt{gL}$ (см. предыдущий пример для стержня).

Пример 3.3. Шарик массой m висит на пружине жёсткости $k.$ В начальный момент пружина не деформирована (шарик придерживают). Затем шарик освобождают, и он начинает опускаться.

1) На какую максимальную длину растянется пружина?

*2) Какую максимальную скорость будет иметь шарик в процессе опускания?

Решение. Здесь мы имеем дело сразу *с двумя потенциальными энергиями* – потенциальной энергией mgh шарика в поле тяжести вблизи поверхности Земли и энергией деформированной пружины $\frac{kx^2}{2}$ («потенциальной энергией шарика на пружинке»). В процессе движения выполняется закон сохранения энергии: сумма кинетической энергии и *двух потенциальных энергий* остаётся в процессе движения неизменной.

1) В начальном и конечном положениях скорости шарика равны нулю, поэтому равны нулю кинетические энергии шарика в обоих положениях. Шарик опустится вниз, при этом уменьшится его потенциальная энергия в поле тяжести Земли. Одновременно растянется пружина, поэтому увеличится энергия её упругой деформации. Пусть $H -$ искомая максимальная высота, на которую опустится шарик (длина, на которую растянется пружина). По закону сохранения энергии $mgH = \frac{kH^2}{2}$ (на сколько одна энергия уменьшится, на столько другая увеличится). Отсюда сразу получаем $H = \frac{2mg}{k}.$

*2) По мере опускания шарика, его скорость сначала возрастает от нулевой до максимальной $v_{\max},$ а затем убывает, и при максимальном растяжении пружины скорость шарика снова обращается в нуль. Пока шарик опустился не очень сильно – мала деформация пружины – мала и сила упругости, тормозящая шарик. Пока она меньше силы тяжести, скорость шарика растёт. При некотором удлинении пружины h эти две силы сравняются друг с другом; при этом ускорение шарика обратится в нуль:

$$ma = mg - kh = 0. \qquad (1)$$

Удлинение пружины в этом положении равно

$$h = mg / k. \qquad (1')$$

(Заметим, что $h = H / 2$ из предыдущего пункта.) Этому удлинению и соответствует максимум скорости шарика. При дальнейшем опускании шарика (дальнейшем растяжении пружины) модуль силы упругости станет больше силы тяжести, – и начнётся замедление шарика. Максимальную скорость шарика найдём из закона сохранения энергии:

$$mgh = \frac{mv_{\max}^2}{2} + \frac{kh^2}{2}. \qquad (2)$$

Отсчёт высоты в потенциальной энергии в поле тяжести Земли ведём от высоты, на которой $v = v_{\max}$, так что в этой точке потенциальная энергия в поле тяжести равна нулю. Однако в этой точке есть кинетическая энергия шарика и энергия упругой деформации пружины (см. правую часть в уравнении (2)). В исходном положении пружина не деформирована, и шарик имеет равную нулю скорость; зато есть потенциальная энергия шарика mgh. Подставим в (2) значение h $(1')$: $mg\frac{mg}{k} = \frac{mv_{\max}^2}{2} + \frac{k(mg/k)^2}{2}$, отсюда получаем $\frac{mv_{\max}^2}{2} = \frac{m^2g^2}{2k}$, и окончательно $v_{\max} = g\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Пример 3.4. На гладком горизонтальном полу лежит доска массой $M = 3$ кг, а на ней – брусок массой $m = 1$ кг. Коэффициент трения между бруском и доской $\mu = 0,6$. В начальный момент брусок и доска покоятся относительно пола. К бруску прикладывают горизонтальную силу $F = 9$ Н. Определить количество тепла Q, которое выделится за время $t = 1$ с движения бруска и доски вследствие трения между ними. Найти также КПД силы F, тянущей грузы, считая полезной работу, затраченную на разгон бруска (рис. 11).

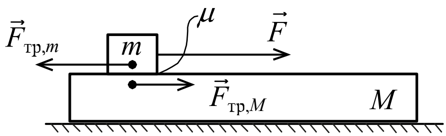

Рис. 11

Решение. Предположим, что сила F достаточно велика, так что возникнет проскальзывание бруска относительно доски.

Запишем уравнения движения бруска и доски и решим их:

$$\begin{cases} ma_m = F - \mu mg, & (1) \\ Ma_M = +\mu mg & (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_m = F / m - \mu g = 3\text{м/с}^2, \\ a_M = \mu mg / M = 2\text{м/с}^2. \end{cases}$$

Ускорение бруска, как видим, оказалось больше ускорения доски, поэтому скольжение между ними, действительно, будет происходить, что оправдывает формулу для силы трения: это будет именно сила трения *скольжения,* и она будет равна $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg$. На самом деле будет две силы трения – одна со стороны доски, тормозящая брусок, $\vec{F}_{\text{тр}\,m}$; другая, $\vec{F}_{\text{тр}\,M}$ – со стороны бруска, тянущая доску. По 3-му закону Ньютона $\vec{F}_{\text{тр}\,m} = -\vec{F}_{\text{тр}\,M}$, что учтено в уравнениях (1-2) разными знаками при μmg в двух уравнениях.

Найдём скорости бруска и доски в момент времени t = 1 с, приращения их кинетических энергий, а также пройдённый за это время бруском путь, и работу силы F за время t = 1 с. При нулевых начальных скоростях бруска и доски:

$$v_m(t) = a_m t = 3 \text{ м/с}, \qquad v_M(t) = a_M t = 2 \text{ м/с}, \qquad s_m(t) = \frac{a_m t^2}{2} = 1{,}5 \text{ м},$$

$$\Delta K_m = \frac{m v_m^2}{2} = 4{,}5 \text{ Дж}, \ \Delta K_M = \frac{M v_M^2}{2} = 6 \text{ Дж}, \ \Delta K = \Delta K_m + \Delta K_M = 10{,}5 \text{ Дж}.$$

Работа силы F за время $t = 1$ с равна $A_F(t) = F \cdot s_m(t) = 13{,}5$ Дж.

Количество тепла найдём из условия, что работа внешней силы F пойдёт на увеличение кинетической энергии и бруска, и доски, а также на выделение тепла Q в местах их контакта во время движения бруска по доске: $A_F = \Delta K + Q,$ откуда находим Q = 13,5 Дж – 10,5 Дж = 3 Дж.

Наконец, найдём $\text{КПД} = \dfrac{\Delta K_m}{A_F} = \dfrac{4{,}5}{13{,}5} \approx 0{,}33$ (т. е. 33%).

Пример 3.5. На пути тележки массой m, скользящей по гладкому горизонтальному столу, находится незакреплённая горка высотой H и массой M (рис. 12). При какой минимальной скорости $V_{\min}$ тележка сможет преодолеть горку? Считать, что тележка движется, не отрываясь от горки. Тележка по горке, а также горка по столу скользят без трения.

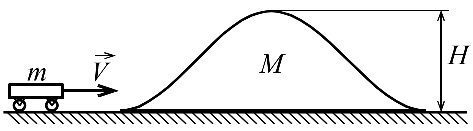

Рис. 12

Решение. Минимальной скорости соответствует случай, когда тележка въедет на вершину горки (поднимется на максимальную высоту H), но не проедет дальше, а остановится относительно горки: скорости тележки и горки относительно стола в этот момент сравняются друг с другом (и они продолжат движение относительно стола как единое целое). Обозначим эту скорость буквой u . По закону сохранения импульса

$$mV_{\min} = (m + M)u, \tag{1}$$

а по закону сохранения энергии

$$\frac{mV^2_{\min}}{2} = \frac{(m+M)u^2}{2} + mgH. \qquad (2)$$

Решение системы уравнений (1 – 2) даёт $V_{\min} = \sqrt{\left(1+\frac{m}{M}\right)2gH}.$

***Пример 3.6**. Пусть в предыдущем примере $V > V_{\min}$. Какую скорость u приобретёт горка, когда тележка с неё съедет?

Решение. Кажется, что задача решается просто: из двух законов сохранения импульса и энергии. Пусть $v -$ скорость тележки в момент, когда она съедет с горки. Запишем законы сохранения импульса и энергии:

$$mV = Mu + mv, \qquad (1)$$

$$\frac{mV^2}{2} = \frac{Mu^2}{2} + \frac{mv^2}{2} \qquad (2)$$

(Такие же уравнения мы написали бы и в случае *упругого столкновения* лоб в лоб двух шаров, когда один из них до столкновения покоился. Задачи о законах сохранения при столкновениях будут рассмотрены в другом Задании.)
Перепишем систему уравнений (1 – 2) в виде

$$m(V - v) = Mu, \qquad (1')$$

$$m(V^2 - v^2) = Mu^2. \qquad (2')$$

Учитывая формулу для разности квадратов $V^2 - v^2 = (V - v)(V + v)$ и деля $(2')$ на $(1')$, получаем

$$u = V + v. \qquad (3)$$

Подставляя соотношение (3) в первое из уравнений системы $(1' - 2')$ (линейное!), находим

$$m(V - v) = M(V + v),$$

откуда получаем для окончательной скорости тележки

$$v = \frac{m-M}{m+M}V \qquad (4)$$

и после подстановки в (3) – формулу для скорости горки в момент, когда с неё съедет тележка,

$$u = \frac{2m}{m+M}V. \qquad (5)$$

В формулах смущают, как минимум, две особенности. Во-первых, знак скорости тележки зависит от того, каков знак разности масс $m-M$. Этого не может быть, т. к. при условии, что $V > v_{\min}$ тележка, переехав горку, должна двигаться в ту же сторону, что и в самом начале (до наезда на горку). Во-вторых, по смыслу, если уж тележка переехала горку, то она должна в конце иметь скорость больше, чем горка, т. е. должно выполняться неравенство

$$v > u. \tag{6}$$

Проверим его выполнимость. Согласно формулам (4 – 5) имеем $\dfrac{m-M}{m+M}V > \dfrac{2m}{m+M}V,$ откуда $-M > m,$ но это – абсурд: отрицательное число не может быть больше положительного.

В чём же мы делаем ошибку? Ответ: производя деление $(2')$ на $(1')$, мы **молчаливо предполагали**, что $V - v \neq 0$ (иначе делили бы на ноль!). **Вывод**: *наше предположение (молчаливое!) не верно*. **Правильно**: $v = V$ (тележка после того как переедет горку, будет иметь ту же скорость, что и до наезда на горку), а **горка остановится:** в силу (1) $u = 0$ при $v = V$.

Пример 3.7. Пуля массой $m = 5$ г попадает в покоящийся деревянный шар массой $M = 2$ кг и застревает в его центре. Найдите долю кинетической энергии пули, перешедшей в тепло.

Решение. Пусть $v -$ скорость пули до того, как она врезалась в шар, $u -$ скорость шара вместе с пулей после того, как в нём застряла пуля. (Скорости шара и пули теперь одинаковы!) По закону сохранения импульса имеем

$$mv = (M+m)u, \tag{1}$$

откуда находим
$$u = \frac{mv}{M+m}. \tag{1'}$$

Количество энергии, перешедшей в тепло, найдём по формуле (3.5):

$$Q = K_1 - K_2 = \frac{mv^2}{2} - \frac{(M+m)u^2}{2} = \frac{mv^2}{2} - \frac{(M+m)}{2}\cdot\left(\frac{mv}{M+m}\right)^2 = \frac{M}{M+m}\cdot\frac{mv^2}{2}$$

Отсюда искомая доля кинетической энергии, перешедшей в тепло,

$$Q \Big/ \frac{mv^2}{2} = \frac{M}{M+m} = \frac{2000}{2005} \approx 0,998 \text{ (99,8\% – почти вся энергия пули!).}$$

§ 4. Мощность силы и мощность механизмов

Для того чтобы характеризовать скорость совершения работы, вводится понятие мощности. Точнее, вводится даже несколько близких и связанных друг с другом понятий, ключевое слово в которых «*мощность*».

Средняя мощность силы есть отношение работы ΔA к промежутку времени Δt, в течение которого она совершена:

$$P_{\text{ср}} = \frac{\Delta A}{\Delta t}. \qquad (4.1)$$

Как и средняя скорость движения, средняя мощность есть довольно грубая характеристика быстроты совершения работы. За достаточно большой промежуток времени интенсивность совершения работы могла то возрастать, то убывать. Для учёта этого вводится понятие ***мгновенной мощности силы*** (или просто мощности) в момент времени t, которая определена как предел отношения (4.1) при $\Delta t \to 0$ (когда интервал рассматриваемых времён вблизи момента времени t стягивается к нулю):

$$P(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{F}(t) \cdot \Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{F}(t) \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t). \qquad (4.2)$$

Единица мощности в СИ есть *ватт*: 1 Вт = 1 Дж/с.

До сих пор говорилось *о мощности силы*. В быту мы часто слышим о <u>*мощности механизмов*</u> – насоса, автомобиля, электровоза. И это ещё не всё. Иногда говорят о *потребляемой мощности*, в других случаях – о *полезной мощности* (причём и о средних их значениях, и о мгновенных мощностях). Усугубляет сложности то, что в конкретном механизме не всегда легко указать (показать в виде явной стрелки) силу, которая что-то движет.

Потребляемой мощностью называют количество *энергии*, которое получает в единицу времени машина для своей работы (автомобиль или аэросани – от сгорания бензина в двигателе, электровоз – от электрической сети):

$$P_{\text{потребл}} = \Delta E_{\text{потребл}} / \Delta t. \qquad (4.3)$$

(при $\Delta t \to 0$ говорят о мгновенной потребляемой мощности). Не вся потреблённая энергия $\Delta E_{\text{потребл}}$ тратится именно на то, что нужно (говорят – «на совершение *полезной работы*»). Часть её (иногда – значительная) расходуется впустую: например, из-за трения в различных частях сложного механизма автомобиля или аэросаней происходит разогрев деталей машины (к чему никто не стремился). Пусть нам надо, чтобы аэросани перевезли какой-то груз. Для этого (даже без всяких подъёмов) нужно преодолеть силу трения о снег. Энергия, которая будет истрачена на разгон саней и преодоление силы трения о снег (для поддержания конечной скорости), считается истраченной с пользой. Сила тяги двигателя аэросаней совершит *полезную работу* $\Delta A_{\text{полезн}}$. ***Полезной мощностью*** механизма называют отношение

$$P_{\text{полезн}} = \Delta A_{\text{полезн}} / \Delta t. \qquad (4.4)$$

Полезная работа всегда меньше потреблённой механизмом энергии: $\Delta A_{\text{полезн}} < \Delta E_{\text{потребл}}$. Долю потреблённой энергии, пошедшую на совершение полезной работы, называют ***коэффициентом полезного действия***

$$\text{КПД} = \frac{\Delta A_{\text{полезн}}}{\Delta E_{\text{потребл}}} \cdot 100\% = \frac{P_{\text{полезн}}}{P_{\text{потребл}}} \cdot 100\%. \qquad (4.5)$$

Величина КПД всегда меньше ста процентов. У бензиновых двигателей *КПД* порядка $25-30\%$, у дизельных $-40-50\%$, у ракетных двигателей на жидком топливе он близок к 50%. У простых механизмов (блок, рычаг) КПД может быть близок к 100%.

Примеры к § 4

Пример 4.1. Лифт массой 1 т начинает подниматься с помощью троса с постоянным ускорением $0{,}2$ м/с^2 (см. Пример 1.2). Найдите:

1) среднюю мощность силы натяжения троса и
2) мощность, развиваемую ею в конце 4-ой секунды.

Решение. 1) Средняя мощность

$$P_{\text{ср}}(0 < t < 4) = \left.\frac{A(t)}{t}\right|_{t=4} = m(g+a)\left.\frac{at}{2}\right|_{t=4} = 4000\ \text{Вт} = 4\ \text{кВт}.$$

2) Мгновенную мощность в конце 4-ой секунды вычислим по формуле

$$P_{\text{мгн}}(t=4) = F \cdot v(t=4) = m(g+a)\,at\big|_{t=4} = 8\ \text{кВт}.$$

Обратим внимание: мгновенная мощность в конце 4-й секунды не равна работе силы за 4-ую секунду (см. Пример 1.2).

Пример 4.2. Какую среднюю полезную мощность развивает при разбеге самолёт массой $m = 1$ тонна, если длина разбега $s = 300$ м, взлётная скорость $v = 30$ м/с? Силу сопротивления движению считать постоянной и равной $F_{\text{с}} = 300$ Н.

Решение.

$$P_{\text{ср}} = A/t = F_{\text{тяги}} \cdot v_{\text{ср}} = F_{\text{тяги}} \cdot \frac{v}{2} \qquad (1)$$

(учтено ещё, что средняя скорость для равноускоренного движения равна среднему арифметическому начальной и конечной скоростей, причём, $v_0 = 0$). Силу тяги найдём из уравнения 2-го закона Ньютона

$$ma = F_{\text{тяги}} - F_c. \qquad (2)$$

Для постоянных сил постоянным будет и ускорение, поэтому ускорение может быть найдено из кинематической формулы

$$2as = v^2 \qquad (3)$$

(учтено, что $v_0 = 0$). В результате получаем $F_{\text{тяги}} = m\dfrac{v^2}{2s} + F_c$, откуда

$$P_{\text{ср}} = \left(m\frac{v^2}{2s} + F_c\right) \cdot \frac{v}{2} = 27\ \text{кВт}.$$

Пример 4.3. Аэросани массой 2 т движутся в гору с постоянной скоростью (рис. 13). Развиваемая аэросанями полезная мощность – 30 кВт, коэффициент трения 0,1, угол наклона «горы» 5°.

1) Определите скорость аэросаней.

2) Какую полезную мощность должны развивать сани, чтобы двигаться с той же горы вниз с той же скоростью?

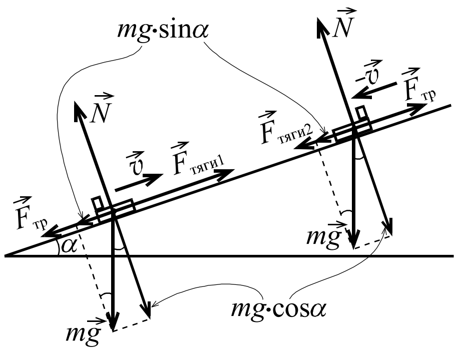

Рис. 13

Решение. 1) При движении саней с *постоянной скоростью* сумма проекций сил вдоль склона горы равна нулю: $F_{\text{тяги}\,1} - mg\sin\alpha - F_{\text{тр}} = 0$ (знаками учтено направление сил; см. рис. 13), или

$$F_{\text{тяги}\,1} - mg\sin\alpha - \mu N = 0. \qquad (1)$$

Поскольку движения саней перпендикулярно склону нет (и соответственно, проекция ускорения на направление поперёк склона горы равно нулю), то сумма проекций сил на это направление тоже равна нулю:

$$N - mg\cos\alpha = 0, \qquad (2)$$

откуда

$$N = mg\cos\alpha. \qquad (2')$$

По формулам $(2')$ в (1) получаем выражение для силы тяги аэросаней

$$F_{\text{тяги}\,1} = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha). \qquad (3)$$

Подставляя это его в формулу для мощности

$$P_1 = F_{\text{тяги}\,1} \cdot v_1, \qquad (4)$$

находим скорость движения аэросаней

$$v_1 = \frac{P_1}{mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}. \qquad (5)$$

Числовое значение $v_1 \approx 8{,}2$ м/с (≈ 30 км/ч).

2) При движении саней вниз также с *постоянной скоростью*

$$v_2 = v_1 \qquad (6)$$

вместо равенства (3) будем иметь:

$$F_{\text{тяги}\,2} + mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = 0 \qquad (7)$$

(см. рис. 13), откуда

$$F_{\text{тяги}\,2} = mg(-\sin\alpha + \mu\cos\alpha). \qquad (7')$$

Далее, по формуле для мощности

$$P_2 = F_{\text{тяги}\,2} \cdot v_2 = mg(-\sin\alpha + \mu\cos\alpha) \cdot v_2 = mg(-\sin\alpha + \mu\cos\alpha)v_1 =$$

$$= \frac{-\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} P_1 \approx 0{,}067 P_1 \approx 2 \text{ кВт}.$$

***Пример 4.4**. Локомотив, работая с одинаковой полезной мощностью, может вести поезд массой 2000 т вверх по уклону 0,005 рад со скоростью 30 км/ч, а по уклону 0,0025 рад со скоростью 40 км/ч. Определите силу сопротивления, считая её в обоих случаях одинаковой. $g = 10$ м/с^2.

Решение. В обоих случаях локомотив движется с постоянной скоростью, так что ускорения и в том, и в другом случае равны нулю. Уравнения 2-го закона Ньютона запишутся в виде:

$$ma_1 = 0 = F_{\text{Т1}} - mg\sin\alpha_1 - F_{\text{сопр}} \qquad (1)$$

и

$$ma_2 = 0 = F_{\text{Т2}} - mg\sin\alpha_2 - F_{\text{сопр}}, \qquad (2)$$

откуда находим выражения для сил тяги локомотива в обоих случаях:

$$F_{\text{Т1}} = mg\sin\alpha_1 + F_{\text{сопр}} \qquad (1')$$

и

$$F_{\text{Т2}} = mg\sin\alpha_2 + F_{\text{сопр}}. \qquad (2')$$

В силу равенства мощностей имеем:

$$(mg\sin\alpha_1 + F_{\text{сопр}})v_1 = (mg\sin\alpha_1 + F_{\text{сопр}})v_2,$$

откуда находим силу сопротивления

$$F_{\text{сопр}} = \frac{mg(v_1\sin\alpha_1 - v_2\sin\alpha_2)}{v_2 - v_1} \approx 100 \text{ кН}.$$

Важное замечание. Спросим себя: «Что представляет собой *сила тяги* в нашем случае?» Ясно, что у локомотива нет реактивного двигателя. Сила, которая заставляет его двигаться, есть сила трения колёс о рельсы (см. Пример 1.4). Если имеет место проскальзывание колёс, то это – *сила трения скольжения*, для которой справедлива формула

$$F_{\text{тр скольж}} = \mu_{\text{скольж}} \cdot N, \qquad (*)$$

где N – нормальная сила реакции со стороны ж. д. путей, $\mu_{\text{скольж}}$ – коэффициент трения скольжения. Если проскальзывания нет (чистое качение), то мы имеем дело с *силой трения покоя*, формулу для которой написать труднее. А что же тогда такое *сила сопротивления*, о которой идёт речь в задаче, и которая препятствует движению локомотива? (Заметим, что сила тяги (трения) и сила сопротивления входят в уравнения (1 – 2) с *разными знаками*!) В силу сопротивления включают силу трения качения и силу сопротивления воздуха. Последняя зависит от скорости движущегося тела. Если она мала, остаётся лишь сила трения качения. В этом случае силу сопротивления можно записать в виде, очень похожем на (*):

$$F_{\text{сопр}} = \mu_{\text{сопр}} \cdot N, \qquad (**)$$

где $\mu_{\text{сопр}}$ – так называемый коэффициент сопротивления. В нашем примере в случае двух разных углов наклона мы имели, строго говоря, разные силы $N_i = mg\cos\alpha_i$. Однако вследствие малости углов значения косинусов обоих углов оказались близки друг другу и близки к единице: $\cos 0{,}005 \approx 0{,}999988 \approx 1,$ $\cos 0{,}0025 \approx 0{,}9999997 \approx 1,$ поэтому $N_1 \cong N_2 \cong mg$. Как следствие, $F_{\text{сопр}1} \cong F_{\text{сопр}2}$.

Пример 4.5. Автомобиль массой 2000 кг трогается с места и едет равноускорено в гору, угол наклона которой равен 0,02 радиана. Пройдя расстояние 100 м, он развивает скорость 32,4 км/ч. Коэффициент сопротивления – 0,05. Определите среднюю полезную мощность, развиваемую двигателем автомобиля.

Решение. О коэффициенте сопротивления см. **Важное замечание** к предыдущему примеру. В нашем примере ясно сказано о *равноускоренном* движении (а не равномерном, как в Примере 4.4). Поэтому запишем уравнение 2-го закона Ньютона:

$$ma = F_{\text{т}} - mg\sin\alpha - F_{\text{сопр}}, \qquad (1)$$

или иначе

$$ma = F_{\text{т}} - mg\sin\alpha - \mu_c N = F_{\text{т}} - mg\sin\alpha - \mu_c mg\cos\alpha. \qquad (1')$$

Находя отсюда силу тяги $F_{\text{т}}$, подставляя её в формулу для средней мощности $P_{\text{ср}} = F_{\text{т}} v_{\text{ср}}$ и принимая во внимание формулы равноускоренного движения

$$v_{\text{ср}} = \frac{v_{\text{нач}} + v_{\text{конечн}}}{2} = \frac{v}{2} \text{ и } a = \frac{v^2}{2s},$$

получаем $P_{\text{ср}} = m(g\sin\alpha + \mu_c g\cos\alpha + \dfrac{v^2}{2s})\dfrac{v}{2} \approx 9{,}8$ кВт.

*__Пример 4.6__. Два автомобиля одинаковой массы одновременно трогаются с места и движутся равноускорено. Во сколько раз средняя полезная мощность одного автомобиля больше, чем у другого, если за одно и то же время один из них достигает вдвое большей скорости, чем другой? Силой сопротивления движению автомобилей пренебречь.

Решение. Запишем формулы для средних мощностей обоих автомобилей:

$$P_{\text{ср}\,1} = F_{\text{тяги}\,1} v_{\text{ср}\,1} = F_{\text{тяги}\,1} \frac{v}{2} \tag{1}$$

и

$$P_{\text{ср}\,2} = F_{\text{тяги}\,2} v_{\text{ср}\,2} = F_{\text{тяги}\,2} \frac{2v}{2}. \tag{2}$$

Отсюда

$$\frac{P_{\text{ср}\,2}}{P_{\text{ср}\,1}} = \frac{F_{\text{тяги}\,2}}{F_{\text{тяги}\,1}} \frac{v}{v/2} = 2\frac{F_{\text{тяги}\,2}}{F_{\text{тяги}\,1}}. \tag{3}$$

Отношение сил тяги найдём из 2-го закона Ньютона для обоих автомобилей:

$$m\frac{v}{t} = F_{\text{тяги}\,1} \tag{4}$$

и

$$m\frac{2v}{t} = F_{\text{тяги}\,2}, \tag{5}$$

откуда

$$\frac{F_{\text{тяги}\,2}}{F_{\text{тяги}\,1}} = 2. \tag{6}$$

Подставляя (6) в (3), окончательно получаем $\frac{P_{\text{ср}\,2}}{P_{\text{ср}\,1}} = 2 \cdot 2 = 4.$

***Пример 4.7.** (**МФТИ**, из старых задач) Легковой автомобиль массой $M = 1000$ кг равномерно движется по наклонному участку шоссе, поднимаясь на $h = 10$ м на каждый $s = 1$ км пути. На сколько в этом случае расход бензина больше, чем при движении с той же скоростью по горизонтальному участку шоссе. Теплотворная способность бензина равна $q = 4{,}6\ 10^7$ Дж/кг. Коэффициент полезного действия двигателя равен $\eta = 10\%$ (старый автомобиль). Считать, что сила сопротивления движению автомобиля – это сила сопротивления со стороны воздуха (силой трения качения пренебречь).

Примечание. Расход бензина принято относить к пути $l = 100$ км.

Решение. Пусть m_1 и $m_2 -$ массы бензина, которые тратит автомобиль на 100 км пути в двух рассмотренных случаях; $m_1 - m_2 -$ искомая разность масс. Количества энергии, которые он получает в обоих случаях, равны $m_1 q$ и $m_2 q$. Лишь часть этой энергии идёт на совершение полезной работы по преодолению силы сопротивления и на преодоление «скатывающей силы» (в первом случае). Полезные работы, которые совершит автомобиль в этих двух случаях, равны $A_{\text{полезн}\,1} = \eta m_1 q$ и $A_{\text{полезн}\,2} = \eta m_2 q.$

Говоря о полезной работе, совершённой автомобилем, имеют в виду *работу, которую совершает сила тяги автомобиля*. Поскольку считается, что автомобиль движется равномерно (без ускорения), то при движении по горизонтальной дороге сила тяги просто равна силе сопротивления $F_{\text{т}2} = F_{c2}$, а в случае движения в гору сила тяги к ней нужно ещё добавить «скатывающую силу» $F_{\text{т}1} = Mg\sin\alpha + F_{\text{c}1}$ $\left(\sin\alpha = h/s = 0{,}01\right)$. Две силы сопротивления равны друг другу, поскольку скорости автомобиля в обоих случаях одинаковы: $F_{c1} = F_{c2} = F_c$. В результате получаем:

$$A_{\text{полезн }1} = \eta m_1 q = P_{\text{полезн }1} t = (Mg\sin\alpha + F_c)vt = (Mg\sin\alpha + F_c)l \qquad (1)$$

и

$$A_{\text{полезн }2} = \eta m_2 q = P_{\text{полезн }2} t = F_c vt = F_c l. \qquad (2)$$

Вычитая второе уравнение из первого, получаем

$\eta m_1 q - \eta m_2 q = (Mg\sin\alpha + F_c)l - F_c l,$ откуда $\eta q(m_1 - m_2) = Mg\sin\alpha \cdot l$ и

$$m_1 - m_2 = \frac{Mg \cdot h \cdot l}{\eta q \cdot s} \approx 2{,}1 \text{ кг.}$$

Заметим, что «счастливым образом» взаимно уничтожились слагаемые, содержащие неизвестную силу сопротивления воздуха.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Козел С.М.** Физика. 10 – 11 классы: пособие для учащихся и абитуриентов. В 2 ч. Ч.1. / С.М. Козел – М.: Мнемозина, 2010. – 400 с.
2. **Павленко Ю.Г.** Начала физики: Учебник / Ю.Г. Павленко. – 2-е изд. – М.: Изд-во «Экзамен», 2005. – 864 с.
3. **Черноуцан А.И.** ФИЗИКА для поступающих в вузы. Краткий курс физики / Под ред. А.А. Леоновича. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 224 с.

Контрольные вопросы (лёгкие задачи)

1. Камень вращают с помощью верёвки постоянной длины. Чему равна работа силы натяжения верёвки за время половины полного оборота камня?

2. Какую работу – положительную или отрицательную – мы совершаем, 1) растягивая пружину? 2) сжимая её?

3. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы увеличить скорость поезда массой 800 т от 36 км/ч до 54 км/ч? Во сколько рублей обойдётся эта работа? Стоимость 1 кВт-часа электроэнергии – 4,5 руб. (по состоянию на 2014 г.).

4. Мяч брошен вертикально вверх со скоростью 20 м/с. На какой высоте кинетическая энергия мяча будет равна его потенциальной энергии? $g \approx 10$ м/с^2.

5. Тело массой m брошено вертикально вверх. Если бы сопротивление со стороны воздуха отсутствовало, тело поднялось бы на высоту h. Из-за сопротивления воздуха реальный подъём тела составил $0{,}9h$. Определите работу силы сопротивления воздуха.

6. Толкатель ядра сообщает ядру массой 7,3 кг такое ускорение, что скорость ядра за время 0,2 с становится равной 15 м/с. Найдите среднюю мощность, которую развивает спортсмен при толкании ядра.

7. Определите полезную мощность трамвая (в кВт) к концу 5-й секунды после начала движения, если он развил к этому моменту скорость 18 км/ч. Масса трамвая 10 т. Сопротивлением движению пренебречь.

Задачи

1. (**МФТИ**, из старых задач) На наклонной плоскости с тангенсом угла наклона $\mathrm{tg}\,\alpha = 1/4$ лежит коробка. Чтобы передвинуть коробку вниз по наклонной плоскости на некоторое расстояние, нужно совершить минимальную работу $A_1 = 15$ Дж. Для перемещения коробки назад (вверх по наклонной плоскости) требуется совершить работу не менее $A_2 = 65$ Дж. В обоих случаях силы прикладываются вдоль наклонной плоскости; величины перемещений вверх и вниз равны друг другу. Определите по этим данным коэффициент трения между коробкой и наклонной плоскостью.

2. Гвоздь, длина цилиндрической части которого 8 см, забит по шляпку в доску толщиной 3 см. Чтобы гвоздь начал двигаться, к нему надо приложить силу 20 Н. Какую минимальную работу надо совершить, чтобы вытащить гвоздь?

3. (**МФТИ**, из старых задач) Какую работу нужно совершить. Чтобы длинную доску, лежащую на земле, повернуть в горизонтальной плоскости вокруг одного из концов на угол α? Длина доски L, масса M, коэффициент трения между доской и землёй μ.

4. Сила $F = 2$ Н, действовавшая в течение короткого промежутка времени $\tau = 10^{-2}$ с на покоящееся тело, сообщило ему кинетическую энергию $E_{\text{к}1} = 3$ Дж. Какую энергию сообщит эта сила тому же телу за то же время τ, если начальная скорость тела $v_0 = 19$ м/с, а сила действует в направлении вектора скорости.

5. На гладком горизонтальном полу лежит доска массой $M = 3$ кг, а на ней – брусок массой $m = 1$ кг. Коэффициент трения между бруском и доской $\mu = 0{,}6$. В начальный момент брусок и доска покоятся относительно пола. К бруску прикладывают горизонтальную силу $F = 7$ Н. Определить количество тепла Q, которое выделится за время $t = 1$ с движения бруска и доски вследствие трения между ними. Найти также *КПД* силы F, считая полезной работу, затраченную на разгон бруска. $g = 10$ м/с^2.

6. Гибкая однородная цепь длиной L может двигаться по жёлобу, имеющему форму равнобедренного треугольника с углом 2α при вершине и расположенному в вертикальной плоскости. Трение отсутствует, предполагается, что цепь прилегает к жёлобу. Найти наименьшую начальную скорость цепи, необходимую для преодоления такой горки. В начальный момент времени расстояние между горизонтальными прямыми, проходящими через центр тяжести цепи и вершину желоба, равно H (см. рис. 14).

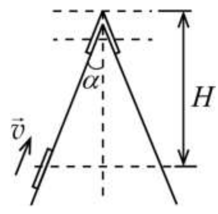

Рис. 14

7. Алюминиевый шар диаметром 20 см лежит на дне цилиндрического бака, имеющего чуть больший диаметр. В бак наливают воду до тех пор, пока она не покроет шар. Какую минимальную работу надо совершить, чтобы полностью извлечь шар из воды? $g = 9{,}8$ м/с^2, $\rho_{\text{ал}} = 2{,}7$ г/см^3.

8*. На пути шайбы массой *m*, скользящей по гладкому горизонтальному столу со скоростью *V*, находится незакреплённая горка высотой *H* и массой *M* (см. рис. 15).

Шайба по горке, а также горка по столу скользят без трения. Скорость шайбы $V = 1{,}0$ м/с **недостаточна**, чтобы преодолеть горку. После того, как шайба съедет с горки, не добравшись до вершины, она движется по горизонтальному столу со скоростью в 2 раза меньшей, чем её скорость до въезда на горку (см. нижнюю часть рис. 15). При какой минимальной высоте горки *H* это возможно?

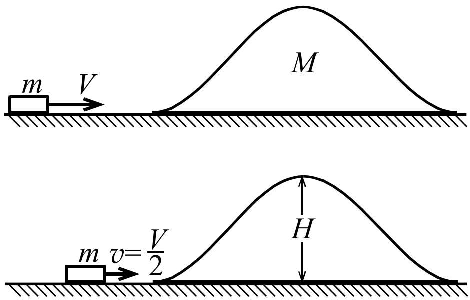

Рис. 15

9. Буксир тянет баржу со скоростью 9 км/ч; при этом натяжение буксируемого троса составляет 140 кН, а полезная мощность двигателя 400 кВт. Какой будет скорость (в км/ч) буксира, если он будет плыть без баржи при той же полезной мощности двигателя? Сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости движения.

10. Аэросани движутся вверх по участку с небольшим уклоном со скоростью $v_1 = 10$ м/с; если же они движутся в обратном направлении, т.е. под уклон, то при той же полезной мощности двигателя, скорость саней равна $v_2 = 30$ м/с. Какая скорость установится при той же полезной мощности двигателя во время движения по горизонтальному участку пути? Угол наклона дороги принять равным $\alpha = 5^\circ$.