Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)
Заочная физико-техническая школа

ФИЗИКА

Кинематика

Задание №2 для 9-х классов

(2021 – 2022 учебный год)

г. Долгопрудный, 2021

Составитель: А.З. Нусратуллин, научный сотрудник МФТИ.

Физика: задание №2 для 9-х классов (2021 – 2022 учебный год), 2021, 28 с.

Дата отправления заданий по физике и математике – 06 ноября 2021 г.

Учащийся должен стараться выполнить все задачи и контрольные вопросы в заданиях. Некоторая часть теоретического материала, а также часть задач и контрольных вопросов, являются сложными и потребуют от учащегося больше усилий при изучении и решении. В целях повышения эффективности работы с материалом они обозначены символом «*» (звёздочка). Мы рекомендуем приступать к этим задачам и контрольным вопросам в последнюю очередь, разобравшись вначале с более простыми.

Составитель:
Нусратуллин Ахат Зинурович

Подписано 18.06.21. Формат 60×90 1/16.
Бумага типографская. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1,75. Уч.-изд. л. 1,55.

Заочная физико-техническая школа
Московского физико-технического института
(национального исследовательского университета)

Институтский пер., 9, г. Долгопрудный, Московская обл., 141700.
ЗФТШ, тел./факс (495) 408-51-45 – **заочное отделение,**
тел./факс (498) 744-63-51 – **очно-заочное отделение,**
тел. (498) 755-55-80 – **очное отделение.**

e-mail: zftsh@mail.mipt.ru

Наш сайт: https://zftsh.online/

Введение

Предлагаемое Задание посвящено изложению *кинематических* способов описания механического движения. Кинематика представляет собой раздел механики, в котором изучается движение тел без исследования причин, вызывающих это движение и определяющих тот или иной его характер. Такой подход позволяет выявить особенности различных вариантов механического движения и рассмотреть их физические закономерности.

§1. Система отсчёта

В предыдущем Задании по физике *механическое движение* было определено как *изменение положения тел или их частей в пространстве относительно друг друга с течением времени.* Следовательно, чтобы узнать, движется ли конкретное тело и как оно движется, необходимо указать, относительно каких тел (объектов) рассматривается это движение. *Тела, относительно которых рассматривается изучаемое движение, называются телами отсчёта,* а само движение при этом является *относительным.*

В то же время выбор одного лишь тела отсчёта не даёт возможности полностью описать изучаемое движение, поэтому с телом отсчёта связывают так называемую *систему координат,* а отсчёт времени ведут с помощью часов, наличие которых предполагается изначально. Выбор той или иной системы координат для решения конкретной задачи осуществляется по соображениям удобства. Наиболее привычной и распространённой для нас является декартова прямоугольная система координат, с которой мы и будем работать в дальнейшем. *Тело отсчёта и связанная с ним система координат в совокупности с часами для отсчёта времени образуют систему отсчёта.*

§2. Физические модели

Реальные движения тел порой так сложны, что при их изучении необходимо постараться пренебречь несущественными для рассмотрения деталями. С этой целью в физике прибегают к моделированию, т. е. к составлению упрощённой схемы (модели) явления, позволяющей понять его основную суть, не отвлекаясь на второстепенные обстоятельства. Среди общепринятых физических моделей важную роль в механике играют модель материальной точки и модель абсолютно твёрдого тела.

Материальная точка – это тело, геометрическими размерами которого в условиях задачи можно пренебречь и считать, что вся масса тела сосредоточена в геометрической точке.

Абсолютно твёрдое тело (просто *твёрдое тело*) *– это система, состоящая из совокупности материальных точек, расстояния между которыми в условиях задачи можно считать неизменными.*

Модель материальной точки применима прежде всего в случаях, когда размеры тела много меньше других характерных размеров в условиях конкретной задачи. Например, можно пренебречь размерами искусственного спутника по сравнению с расстоянием до Земли и рассматривать спутник как материальную точку. Это – верно! Но вместе с тем не стоит ограничиваться лишь подобными случаями.

Дело в том, что сложное движение реального тела можно «разложить» на два простых вида движения: поступательное и вращательное (см. Задание №1). Если при сложном движении заменить тело материальной точкой, то мы исключим из рассмотрения вращение тела, т. к. говорить о вращении точки вокруг самой себя бессмысленно (точка не имеет геометрических размеров). Следовательно, заменив тело материальной точкой при сложном движении, мы допустим ошибку. Однако часто *в случаях, когда тело движется поступательно, не вращаясь, его можно считать материальной точкой независимо от размеров, формы и пройденного им пути.*

Модель абсолютно твёрдого тела можно применять, когда в условиях рассматриваемой задачи деформации реального тела пренебрежимо малы. Так, например, в задании, посвящённом вопросам статики (Задание №4), мы будем изучать условия равновесия твёрдого тела и при решении задач часто применять указанную модель. Вместе с тем, данная модель неуместна, если суть задачи состоит, например, в изучении деформаций тела в результате тех или иных воздействий в процессе его движения или в состоянии покоя.

Таким образом, мы будем изучать механическое движение не самих реальных тел, а упомянутых выше моделей. Из них основной и наиболее употребимой для нас станет модель материальной точки. В то же время там, где это необходимо, мы будем ради наглядности изображать на рисунках тела не в виде точек, а в виде объектов, геометрические размеры которых не равны нулю.

§3. Изменение физической величины

Изучая физику, часто приходится использовать понятие *изменения* физической величины. При этом следует иметь в виду, что изменение какой-либо физической величины можно характеризовать либо её *приращением,* либо *убылью.* Приращением называется разность конечного и начального значений этой величины, в то время как убыль, напротив, представляет собой разность начального и конечного её значений. Иными словами, убыль и приращение отличаются знаком. Мы чаще будем пользоваться понятием приращения и обозначать его в соответствии со сложившейся традицией с помощью греческой буквы «дельта»: Δ. Таким образом, если этот символ стоит перед обозначением какой-либо векторной или скалярной величины, то такое выражение означает приращение соответствующей величины.

Так, выражение $\Delta\vec{A}$ означает приращение вектора $\vec{A}$, а выражение Δx – приращение скалярной величины x. Вместе с тем во избежание недоразумений следует проявлять известную осторожность при использовании символа Δ. Например, убедитесь самостоятельно, что, вообще говоря, $\left|\Delta\vec{A}\right| \neq \Delta\left|\vec{A}\right|$, хотя в некоторых частных случаях возможно равенство.

§4. Способы описания движения

В кинематике существуют три способа аналитического описания движения материальной точки в пространстве. Рассмотрим их, ограничившись случаем движения материальной точки на плоскости, что позволит нам при выборе системы отсчёта задавать лишь две координатные оси.

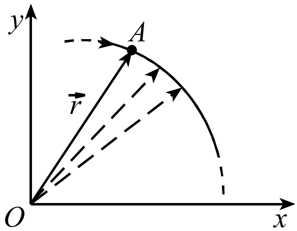

Рис. 1

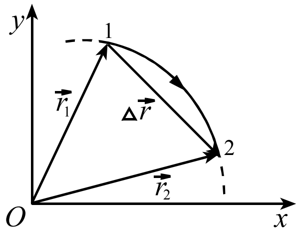

Рис. 2

1. <u>*Векторный способ.*</u> В этом способе положение материальной точки A задаётся с помощью так называемого *радиус-вектора* $\vec{r}$, *который представляет собой вектор, проведённый из точки* O, *соответствующей началу отсчёта выбранной системы координат, в интересующую нас точку* A (рис. 1). В процессе движения материальной точки её радиус-вектор может изменяться как по модулю, так и по направлению, являясь функцией времени $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Геометрическое место концов радиус-вектора $\vec{r}(t)$ *называют траекторией точки* A. В известном смысле траектория движения представляет собой след (явный или воображаемый), который «оставляет за собой» точка A после прохождения той или иной области пространства. Понятно, что *геометрическая форма траектории зависит от выбора системы отсчёта, относительно которой ведётся наблюдение за движением точки.*

Пусть в процессе движения по некоторой траектории в выбранной системе отсчёта за промежуток времени Δt тело (точка A) переместилось из начального положения 1 с радиус-вектором $\vec{r}_1$ в конечное положение 2 с радиус-вектором $\vec{r}_2$ (рис. 2). Приращение $\Delta\vec{r}$ радиус-вектора тела в таком случае равно: $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$.

Вектор $\Delta\vec{r}$, *соединяющий начальное и конечное положения тела, называют перемещением тела.*

Отношение $\Delta\vec{r}/\Delta t$ *называют средней скоростью (средним вектором скорости)* $\vec{v}_{\text{ср}}$ *тела за время* Δt:

$$\vec{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \qquad (1)$$

Вектор $\vec{v}_{\text{ср}}$ коллинеарен и сонаправлен с вектором $\Delta\vec{r}$, так как отличается от последнего лишь скалярным неотрицательным множителем $1/\Delta t$.

Предложенное определение средней скорости справедливо для любых значений Δt, кроме $\Delta t = 0$. Однако ничто не мешает брать промежуток времени Δt сколь угодно малым, но отличным от нуля.

Для точного описания движения вводят понятие *мгновенной скорости,* то есть скорости в конкретный момент времени t или в конкретной точке траектории. С этой целью промежуток времени Δt устремляют к нулю. Вместе с ним будет стремиться к нулю и перемещение $\Delta\vec{r}$. При этом отношение $\Delta\vec{r}/\Delta t$ стремится к определённому значению, не зависящему от Δt.

Величина, к которой стремится отношение $\Delta\vec{r}/\Delta t$ *при стремлении* Δt *к нулю, называется мгновенной скоростью* $\vec{v}$:

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \text{ при } \Delta t \to 0.$$

Теперь заметим, что чем меньше Δt, тем ближе направление $\Delta\vec{r}$ к направлению касательной к траектории в данной точке. Следовательно, *вектор мгновенной скорости направлен по касательной к траектории в данной точке в сторону движения тела.*

В дальнейшем там, где это не повлечёт недоразумений, мы будем опускать прилагательное «мгновенная» и говорить просто о *скорости* $\vec{v}$ тела (материальной точки).

Движение тела принято характеризовать также *ускорением*, по которому судят об изменении скорости в процессе движения. Его определяют через отношение приращения вектора скорости $\Delta\vec{v}$ тела к промежутку времени Δt, в течение которого это приращение произошло. *Ускорением* $\vec{a}$ *тела называется величина, к которой стремится отношение* $\Delta\vec{v}/\Delta t$ *при стремлении к нулю знаменателя* Δt:

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \text{ при } \Delta t \to 0. \qquad (2)$$

При уменьшении Δt ориентация вектора $\Delta\vec{v}$ будет приближаться к определённому направлению, которое принимается за направление вектора ускорения $\vec{a}$. Заметим, что *ускорение направлено в сторону малого приращения скорости,* а не в сторону самой скорости!

Таким образом, зная зависимость $\vec{r}(t)$, можно найти скорость $\vec{v}$ и ускорение $\vec{a}$ тела в каждый момент времени. В этой связи возникает и обратная задача о нахождении скорости $\vec{v}(t)$ и радиус-вектора $\vec{r}(t)$ по известной зависимости от времени ускорения $\vec{a}$. Для однозначного решения этой задачи необходимо знать *начальные условия,* т. е. скорость $\vec{v}_0$ и радиус-вектор $\vec{r}_0$ тела в начальный момент времени $t = 0$.

Напомним, что в системе СИ единицами длины, скорости и ускорения являются соответственно *метр* (м), *метр в секунду* (м/с) и *метр на секунду в квадрате* (м/с^2).

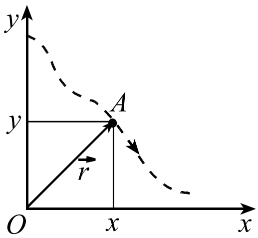

Рис. 3

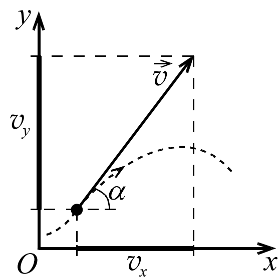

Рис. 4

2. <u>*Координатный способ.*</u> В этом способе положение материальной точки A на плоскости в произвольный момент времени t определяется двумя координатами x и y, которые представляют собой проекции радиус-вектора $\vec{r}$ тела на оси Ox и Oy соответственно (рис. 3). При движении тела его координаты изменяются со временем, т. е. являются функциями t: $x = x(t)$ и $y = y(t)$. Если эти функции известны, то они определяют положение тела на плоскости в любой момент времени.

В свою очередь, вектор скорости $\vec{v}$ можно спроецировать на оси координат и определить таким образом скорости v_x и v_y изменения координат тела (рис. 4). В самом деле, v_x и v_y будут равны значениям, к которым стремятся соответственно отношения $\Delta x/\Delta t$ и $\Delta y/\Delta t$ при стремлении к нулю промежутка времени Δt.

Аналогично с помощью проецирования вектора $\vec{a}$ определяются ускорения a_x и a_y тела по направлениям координатных осей.

Таким образом, зная зависимости $x(t)$ и $y(t)$, можно найти не только положение тела, но и проекции его скорости и ускорения, а следовательно, модуль и направление векторов $\vec{v}$ и $\vec{a}$ в любой момент времени. Например, модуль вектора скорости будет равен $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, а его направление может быть задано углом между этим вектором и любой осью координат. Так, угол α между вектором $\vec{v}$ и осью Ox определяется отношением $\mathrm{tg}\alpha = v_y / v_x$. Аналогичными формулами определяются модуль и направление вектора $\vec{a}$.

Обратная задача – нахождение скорости и зависимостей $x(t)$ и $y(t)$ по заданному ускорению – будет иметь однозначное решение, если кроме ускорения заданы ещё и *начальные условия:* проекции скорости и координаты точки в начальный момент времени $t = 0$.

3. *Естественный (или траекторный) способ.* Этот способ применяют тогда, когда траектория материальной точки известна заранее. На заданной траектории LM (рис. 5) выбирают начало отсчёта – неподвижную точку O, а положение движущейся материальной точки A определяют при помощи так называемой дуговой *координаты l, которая представляет собой расстояние вдоль траектории от выбранного начала отсчёта O до точки A*. При этом положительное направление отсчёта координаты l выбирают произвольно, по соображениям удобства, например так, как показано стрелкой на рисунке 5.

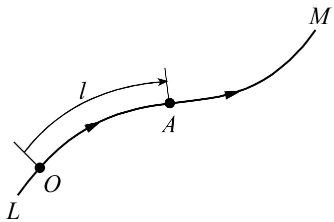

Рис. 5

Движение тела определено, если известны его траектория, начало отсчёта O, положительное направление отсчёта дуговой координаты l и зависимость $l(t)$.

Следующие два важных механических понятия – это *пройденный путь* и *средняя путевая скорость.*

По определению, *путь ΔS – это длина участка траектории, пройденного телом за промежуток времени Δt.*

Ясно, что пройденный путь – величина скалярная и неотрицательная, а потому его нельзя сравнивать с перемещением $\Delta\vec{r}$, представляющим собой вектор. Сравнивать можно только путь ΔS и модуль перемещения $|\Delta\vec{r}|$. Очевидно, что $\Delta S \geq |\Delta\vec{r}|$.

Средней путевой скоростью $v_{\text{ср}}$ тела называют отношение пути ΔS к промежутку времени Δt, в течение которого этот путь был пройден:

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}. \qquad (3)$$

Определённая ранее средняя скорость $\vec{v}_{\text{ср}}$ (см. формулу (1)) и средняя путевая скорость отличаются друг от друга так же, как $\Delta\vec{r}$ отличается от $\Delta S,$ но при этом важно понимать, что *обе средние скорости имеют смысл только тогда, когда указан промежуток времени усреднения* Δt. Само слово «средняя» означает усреднение по времени.

Пример 1. Городской троллейбус утром вышел на маршрут, а через 8 часов, проехав в общей сложности 72 км, возвратился в парк и занял своё обычное место на стоянке. Какова средняя скорость $\vec{v}_{\text{ср}}$ и средняя путевая скорость $v_{\text{ср}}$ троллейбуса?

Решение. Поскольку начальное и конечное положения троллейбуса совпадают, то его перемещение $\Delta\vec{r}$ равно нулю: $\Delta\vec{r}=0$, следовательно, $\vec{v}_{\text{ср}}=\Delta\vec{r}/\Delta t=0$ и $\left|\vec{v}_{\text{ср}}\right|=0$. Но средняя путевая скорость троллейбуса не равна нулю:

$$v_{\text{ср}}=\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{72\text{км}}{8\text{ч}}=9\ \text{км/ч}.$$

§5. Преобразование скорости и ускорения при переходе в другую систему отсчёта

В рамках классической механики скорость и ускорение тела преобразуются по определённым правилам при переходе от одной системы отсчёта к другой.

Пусть имеются две произвольные системы отсчёта K и K' (рис. 6). Известны скорость $\vec{v}'$ и ускорение $\vec{a}'$ тела (точки A) в K'-системе. Рассмотрим случай, когда *K'-система движется поступательно по отношению к K-системе*, и определим значения скорости $\vec{v}$ и ускорения $\vec{a}$ тела в K-системе.

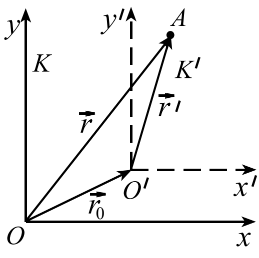

Рис. 6

Если за малый промежуток времени Δt тело (точка A) переместилось относительно K'-системы на величину $\Delta\vec{r}'$, а K'-система переместилась относительно K-системы на $\Delta\vec{r}_0$, то из правила векторного сложения следует, что перемещение $\Delta\vec{r}$ тела относительно K-системы будет равно $\Delta\vec{r}=\Delta\vec{r}_0+\Delta\vec{r}'$. Разделив обе части этого равенства на Δt и обозначив через $\vec{v}_0$ скорость K'-системы относительно K-системы, получим:

$$\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{v}'. \tag{4}$$

Рассуждая аналогично, найдём формулу преобразования ускорения:

$$\vec{a}=\vec{a}_0+\vec{a}'. \tag{5}$$

Из формулы (5) вытекает важное следствие: при $\vec{a}_0 = 0$ ускорения $\vec{a}$ и $\vec{a}'$ равны. Иными словами, если система отсчёта K' движется *поступательно* без ускорения относительно системы отсчёта K, то ускорения тела в обеих системах отсчёта будут одинаковы.

Переход из одной системы отсчёта в другую довольно часто применяется на практике и порой существенно облегчает решение некоторых физических задач, поэтому к данному приёму желательно привыкнуть и научиться умело его использовать.

Часто встречаются задачи, в которых два тела движутся независимо друг от друга в некоторой системе отсчёта, и требуется определить какие-либо величины (перемещение, скорость), характеризующие движение одного тела относительно другого. В таких случаях, как правило, удобно перейти в систему отсчёта, связанную с тем телом, относительно которого рассматривается движение другого тела, и применить полученные выше формулы преобразований. *Относительные перемещение и скорость двух тел определяются векторной разностью их перемещений и скоростей, заданных по отношению к одной и той же* (чаще всего – неподвижной) *системе отсчёта*. Рассмотрим следующий пример.

Пример 2. Два корабля движутся с постоянными скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ под углом α друг к другу (рис. 7). Найти скорость первого корабля относительно второго.

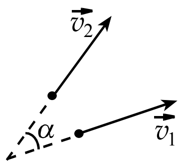

Рис. 7

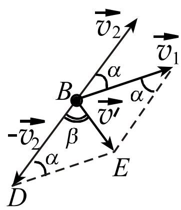

Рис. 8

Решение. Перейдём в систему отсчёта, связанную со вторым кораблём, движущимся со скоростью $\vec{v}_2$. В этой системе отсчёта относительная скорость $\vec{v}'$ первого корабля согласно (4) будет равна $\vec{v}' = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$. Вектор $\vec{v}'$ определим геометрически, используя правило построения векторной разности (рис. 8). Из треугольника BDE с помощью теоремы косинусов найдём модуль искомого вектора:

$$v' = \sqrt{v_1^{\,2} + v_2^{\,2} - 2v_1v_2\cos\alpha}.$$

Направление вектора $\vec{v}'$ зададим, например, углом β (рис. 8), который определим из ΔBDE по теореме синусов: $\dfrac{v_1}{\sin\beta} = \dfrac{v'}{\sin\alpha}$. Отсюда

$$\sin\beta = \frac{v_1}{v'}\sin\alpha = \frac{v_1\sin\alpha}{\sqrt{v_1^{\,2} + v_2^{\,2} - 2v_1v_2\cos\alpha}}.$$

§6. Примеры движения тела. Методы решения задач

Рассмотрим некоторые характерные примеры движения тела, знание которых будет полезно при дальнейшем изучении физики.

1. <u>*Равномерное прямолинейное движение тела.*</u> При равномерном прямолинейном движении *тело совершает равные перемещения* $\Delta\vec{r}$ *за одинаковые промежутки времени* Δt. Иными словами, скорость $\vec{v}$ тела не зависит от времени и остаётся постоянной в процессе движения:

$$\vec{v} = \text{const}. \qquad (6)$$

При этом зависимость $\vec{r}(t)$ имеет вид:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}t, \qquad (7)$$

где $\vec{r}_0$ – радиус-вектор тела в начальный момент времени $t = 0$. В этой связи вспомним замечание о *начальных условиях,* сделанное на стр. 7 и стр. 8. Вектор $\vec{r}_0$ здесь является тем начальным условием, которое позволяет однозначно определить радиус-вектор $\vec{r}$ тела в любой момент времени в процессе движения.

Векторное уравнение (7) равносильно системе двух скалярных уравнений, выражающих зависимость от времени t координат x и y движущегося тела:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_x t, \\ y(t) = y_0 + v_y t, \end{cases} \qquad (8)$$

где x_0 и y_0 – начальные координаты тела в момент времени $t = 0$, а v_x и v_y – проекции вектора скорости $\vec{v}$ на координатные оси Ox и Oy соответственно. Траектория равномерного прямолинейного движения тела графически представляет собой отрезок прямой линии (рис. 9), тангенс угла наклона которой к оси абсцисс равен отношению проекций скорости на оси координат: $\text{tg}\alpha = v_y / v_x$. Аналитическое уравнение траектории, т. е. зависимость $y(x)$, легко получить, исключив параметр t из системы уравнений (8):

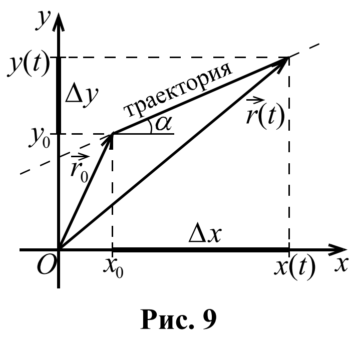

Рис. 9

$$y(x) = \frac{v_y}{v_x}(x - x_0) + y_0. \qquad (9)$$

Пример 3. Равномерное прямолинейное движение тела на плоскости xOy описывается уравнениями: $x(t) = 6 + 3t$, $y(t) = 4t$ (величины измерены в СИ). Запишите уравнение траектории тела. Изобразите графически зависимость модуля вектора скорости от времени $v(t)$. Определите путь, пройденный телом в течение первых пяти секунд движения.

Решение. Сравнивая уравнения движения, представленные в условии задачи, с системой уравнений (8), находим:

$$x_0 = 6\text{ м},\quad y_0 = 0,\quad v_x = 3\text{ м/с},\quad v_y = 4\text{ м/с}.$$

Уравнение траектории получим, подставив эти значения в общее уравнение (9): $y(x) = \frac{4}{3}(x-6)$, или $y(x) = \frac{4}{3}x - 8.$

Модуль v скорости тела определим, зная v_x и v_y:

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = 5\text{ м/с}.$$

График зависимости $v(t)$ представлен на рис. 10.

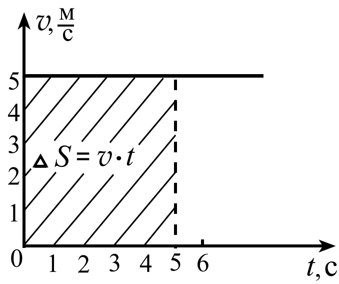

Рис. 10

При равномерном прямолинейном движении пройденный путь ΔS численно равен модулю вектора $\Delta\vec{r}$ перемещения тела. Вектор $\Delta\vec{r}$ для такого движения найдём из уравнения (7): $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \vec{v}t.$ Его модуль равен: $\Delta r = vt.$ Таким образом, при равномерном движении путь, пройденный телом в течение времени t, определяется по формуле $\Delta S = vt$, т. е. численно равен площади прямоугольника под графиком зависимости $v(t)$. Этот вывод можно обобщить и на случай неравномерного движения.

В нашем примере путь равен площади прямоугольника, заштрихованного на рис. 10: $\Delta S = vt = 5\,\frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 5\text{ с} = 25\text{ м}.$

Замечание: Используя рассуждения аналогичные **примеру 3**, несложно показать, что *путь численно равен площади фигуры под графиком скорости* при любом произвольном движении материальной точки.

Пример 4. Координаты тела при равномерном прямолинейном движении на плоскости xOy за время $t = 2\,\text{с}$ изменились от начальных значений $x_0 = 5\,\text{м}$, $y_0 = 7\,\text{м}$ до значений $x = -3\,\text{м}$ и $y = 1\,\text{м}$. Найдите модуль скорости тела. Запишите уравнение траектории тела. Изобразите графически траекторию тела и направление вектора его скорости. Постройте графики зависимости координат тела от времени.

Решение. Проекции скорости на оси координат можно найти с помощью уравнений движения (8) и численных данных задачи:

$$v_x = \frac{x - x_0}{t} = \frac{-3-5}{2} = -4\ \text{м/с}, \qquad v_y = \frac{y - y_0}{t} = \frac{1-7}{2} = -3\ \text{м/с}.$$

Тогда модуль скорости $v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = 5\,\text{м/с}$. Уравнение траектории $y(x)$ с учётом (9) и численных данных задачи имеет вид:

$$y(x) = \frac{3}{4}(x-5) + 7, \quad \text{или} \quad y(x) = \frac{3}{4}x + \frac{13}{4}.$$

Положение тела в начальный и конечный моменты времени (точки A и B), его траектория и направление скорости изображены на рис. 11.

Зависимость координат тела от времени легко найти аналитически, подставляя начальные условия и значения v_x и v_y в общие уравнения движения (8): $x(t) = 5 - 4t$, $y(t) = 7 - 3t$. Графически эти зависимости представлены в виде отрезков прямых на рис. 12.

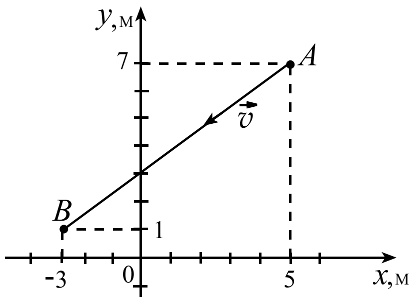

Рис. 11

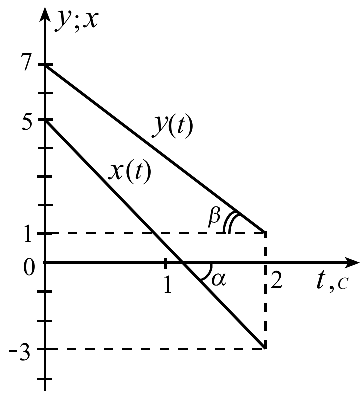

Рис. 12

Заметим, что тангенсы углов наклона отрезков прямых на рис. 12 численно равны коэффициентам при t в соответствующих уравнениях $x(t)$ и $y(t)$, т. е. значениям v_x и v_y: $\text{tg}\alpha = -4$, $\text{tg}\beta = -3$. (Т. к. в данном случае графики уравнений движения представляют собой убывающие функции, то значения тангенсов берём отрицательными.)

2. <u>*Неравномерное движение тела.*</u> Для неравномерного движения характерно то, что с *течением времени изменяется скорость движущегося тела, а в общем случае и его ускорение.* В качестве примера может служить движение, при котором тело проходит различные участки своего пути с разной скоростью. Такое движение принято характеризовать, прежде всего, средней путевой скоростью. Причём прилагательное «путевая» в условиях задач часто опускается.

Пример 5*. Любитель бега трусцой пробежал половину пути со скоростью $v_1 = 10$ км/ч. Затем половину оставшегося времени бежал со скоростью $v_2 = 8$ км/ч, а потом до конца пути шёл пешком со скоростью $v_3 = 4$ км/ч. Определить среднюю скорость движения бегуна.

Решение. Из смысла условия задачи следует, что здесь речь идёт о средней путевой скорости. Разобьём весь путь ΔS на три участка $\Delta S_1, \Delta S_2$ и ΔS_3. Время движения на каждом участке обозначим соответственно $\Delta t_1, \Delta t_2$ и Δt_3. Средняя скорость бегуна согласно определению, выраженному формулой (3), будет равна:

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3}.$$

По условию задачи $\Delta S_1 = \Delta S/2, \Delta S_2 + \Delta S_3 = \Delta S/2$. Поскольку $\Delta S_1 = v_1 \Delta t_1$, $\Delta S_2 = v_2 \Delta t_2$, $\Delta S_3 = v_3 \Delta t_3$ и, учитывая, что $\Delta t_2 = \Delta t_3$, найдём время движения на отдельных участках:

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta S_1}{v_1} = \frac{\Delta S}{2v_1}; \quad \Delta t_2 = \frac{\Delta S_2}{v_2} = \frac{\Delta S}{2(v_2 + v_3)}; \quad \Delta t_3 = \frac{\Delta S_3}{v_3} = \frac{\Delta S}{2(v_2 + v_3)}.$$

Подставляя эти значения в выражение для $v_{\text{ср}}$, получим:

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\dfrac{\Delta S}{2v_1} + \dfrac{\Delta S}{2(v_2 + v_3)} + \dfrac{\Delta S}{2(v_2 + v_3)}} = \frac{2v_1(v_2 + v_3)}{2v_1 + v_2 + v_3} = 7{,}5 \text{ км/ч.}$$

Заметим, что иногда учащиеся подсчитывают среднюю путевую скорость движения по формуле $v_{\text{ср}} = (v_1 + v_2 + \ldots + v_n)/n$, где $v_i -$ скорость движения на i-м участке, $n -$ число участков пути. Аналогично поступают и с вектором средней скорости $\vec{v}_{\text{ср}}$. Следует иметь в виду, что такой расчёт в общем случае является ошибочным.

Другим характерным примером неравномерного движения служит так называемое *равнопеременное движение,* которое целесообразно рассмотреть подробно, не выходя при этом за рамки школьной программы.

3. *<u>Равнопеременное движение.</u> Равнопеременным называется такое неравномерное движение, при котором скорость $\vec{v}$ за любые равные промежутки времени Δt изменяется на одинаковую величину $\Delta\vec{v}$.* В этом случае ускорение $\vec{a}$ тела не зависит от времени и остаётся постоянным в процессе движения:

$$\vec{a} = \text{const} \tag{10}$$

(при этом $\vec{v} \neq \text{const},$ и траектория движения не обязательно прямолинейная).

При равнопеременном движении скорость $\vec{v}$ тела изменяется с течением времени по закону

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t, \tag{11}$$

где $\vec{v}_0 -$ скорость тела в начальный момент времени $t = 0.$

В свою очередь, зависимость $\vec{r}(t)$ имеет вид:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}. \tag{12}$$

где $\vec{r}_0 -$ начальный радиус-вектор тела при $t = 0$. Вновь заметим, что величины $\vec{v}_0$ и $\vec{r}_0$ представляют собой начальные условия, позволяющие в любой момент времени однозначно определить векторы $\vec{v}$ и $\vec{r}$.

При координатном способе описания равнопеременного движения векторным уравнениям (11) и (12) равносильны следующие системы уравнений для проекций скорости и радиус-вектора тела на оси выбранной системы отсчёта. Здесь мы ограничиваемся случаем плоского движения, при котором траектория тела лежит в одной плоскости, совпадающей с координатной:

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{0x} + a_x t, \\ v_y(t) = v_{0y} + a_y t. \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}t + \dfrac{a_x t^2}{2}, \\ y(t) = y_0 + v_{0y}t + \dfrac{a_y t^2}{2}. \end{cases} \tag{14}$$

где x_0 и $y_0 -$ начальные абсцисса и ордината тела (при $t = 0$), v_{0x} и $v_{0y} -$ проекции начальной скорости $\vec{v}_0$ тела на координатные оси, a_x и $a_y -$ проекции вектора ускорения на оси Ox и Oy соответственно. В принципе формулы (11) и (12), или равносильные им системы уравнений (13) и (14) позволяют решить любую задачу на движение тела с постоянным ускорением.

В случае прямолинейного движения тела удобнее одну координатную ось, например ось Ox, совместить с траекторией тела. Тогда для описания движения будет достаточно одной этой оси, в проекциях на которую векторные уравнения (11) и (12) дают:

$$v_x = v_{0x} + a_x t, \quad x = x_0 + v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}.$$

Если на промежутке времени от 0 до t направление движения тела не изменялось на противоположное, то разность $x - x_0$ текущей и начальной координат тела совпадает с пройденным путём S, следовательно,

$$S = v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}.$$

Эту формулу можно записать по-другому, если подставить в неё время t, выраженное из уравнения $v_x = v_{0x} + a_x t$. Это время будет

$$t = \frac{v_x - v_{0x}}{a_x}.$$

Тогда для пути S после несложных преобразований получим

$$S = \frac{{v_x}^2 - {v_{0x}}^2}{2a_x}.$$

Удобство этой формулы заключается в том, что она не содержит времени t в явном виде. Вместе с тем надо помнить, что формула получена в предположении о неизменности направления движения тела.

Пример 6. За $2\ \text{с}$ прямолинейного равноускоренного движения тело прошло $20\ \text{м}$, увеличив свою скорость в 3 раза. Определите конечную скорость тела. (ЕГЭ, 2005г., уровень B.)

Решение. Пусть за время $t = 2\ \text{с}$ скорость тела изменилась от v_0 до v. Направим координатную ось Ox вдоль траектории тела в сторону движения. Тогда в проекциях на эту ось можно записать $v = v_0 + at$, где $a -$ модуль ускорения тела. По условию $v_0 = \frac{1}{3} v$ и, следовательно,

$$a = \frac{2}{3}\frac{v}{t}.$$

За время t тело, движущееся с таким ускорением, пройдёт путь

$$S = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}.$$

С учётом выражений для v_0 и a получим $S = \frac{2}{3} vt$. Откуда искомая скорость $v = \frac{3}{2}\frac{S}{t}$. Подставляя сюда значения $S = 20\ \text{м}$ и $t = 2\ \text{с}$, найдём окончательно $v = 15\ \text{м/с}$.

Одним из наиболее наглядных примеров равнопеременного движения является движение тела в поле тяжести Земли, которое мы имеем возможность наблюдать повседневно. Для решения задач в этом случае надо заменить в приведённых выше формулах вектор $\vec{a}$ на ускорение свободного падения $\vec{g}$, сообщаемое силой гравитационного притяжения всякому телу, движущемуся в поле тяжести Земли. Рассмотрим три конкретных случая такого движения.

Пример 7. _Движение тела, брошенного вертикально._

Тело бросили с поверхности земли, сообщив ему начальную скорость $\vec{v}_0$, направленную вертикально вверх. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите время τ полёта тела до момента падения на землю; скорость тела в момент падения; максимальную высоту H подъёма тела над землёй; время τ_1 подъёма тела на максимальную высоту; путь S, пройденный телом за время полёта и перемещение тела. Начертите графики зависимости от времени t вертикальной координаты тела и проекции на вертикальную ось его скорости в процессе полёта.

Решение. Поскольку движение полностью происходит в вертикальном направлении, то для определения пространственного положения тела достаточно одной координатной оси Oy. Направим её вертикально вверх, начало отсчёта O поместим в точку бросания (рис. 13). Начальные условия движения тела: $y_0 = 0$, $v_{0y} = v_0$.

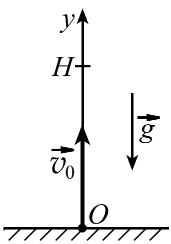

Рис. 13

Проекция ускорения тела на ось Oy в отсутствие сопротивления воздуха равна $a_y = -g$, т. к. вектор $\vec{g}$ направлен вертикально вниз противоположно направлению координатной оси. Вторые уравнения систем (13) и (14) с учётом начальных условий имеют вид:

$$v_y = v_0 - gt, \tag{15}$$

$$y = v_0 t - \frac{gt^2}{2}. \tag{16}$$

Пусть при $t = \tau$ тело упало на землю. В этот момент $y = 0$ и уравнение (16) даёт: $0 = v_0\tau - \frac{g\tau^2}{2}$. Откуда для τ получаем: $\tau = 0$ или $\tau = \frac{2v_0}{g}$. Значение $\tau = 0$ соответствует начальному моменту бросания тела с поверхности земли, и для нас интереса не представляет. Следовательно, время полёта тела $\tau = \frac{2v_0}{g}$.

Согласно (15), при $t=\tau$ имеем: $v_y = v_0 - g\tau$. Тогда с учётом найденного значения τ получим $v_y = v_0 - 2v_0 = -v_0$. Таким образом, скорость тела в момент падения равна по величине начальной скорости v_0, но направлена вертикально вниз, её проекция на ось Oy отрицательна.

Пусть при $t=\tau_1$ тело находится в наивысшей точке подъёма. Это значит, что $y=H$ и $v_y=0$. С учётом этих значений уравнения (15) и (16) дают: $0 = v_0 - g\tau_1$, $H = v_0\tau_1 - \frac{g\tau_1^2}{2}$. Из первого уравнения определяем время подъёма тела $\tau_1 = \frac{v_0}{g}$ и, подставляя τ_1 во второе уравнение, найдём $H = \frac{v_0^2}{2g}$.

Заметим, что время τ_1 подъёма тела на максимальную высоту вдвое меньше времени τ полёта тела: $\tau = 2\tau_1$.

Путь S, пройденный телом за время полёта, складывается из двух участков: подъёма до высшей точки траектории и падения с высшей точки траектории на поверхность земли. Очевидно, что длины траекторий движения тела на этих участках одинаковы и, значит, $S = 2H$. Перемещение тела равно нулю, поскольку начальная и конечная точки траектории тела совпадают.

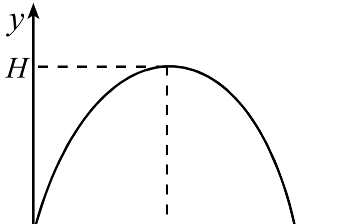

Рис. 14

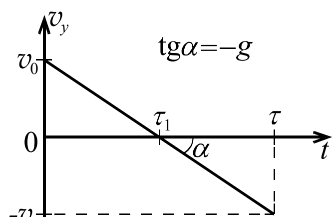

Рис. 15

Зависимость $y(t)$ в соответствии с (16) представляет собой квадратичную функцию, графиком которой, как известно, является парабола (рис. 14). Ветви параболы направлены вниз, т. к. в формуле (16) коэффициент при t^2 отрицателен.

Зависимость $v_y(t)$ является линейной, и её график представляет собой отрезок прямой линии (рис. 15), тангенс угла наклона которой к оси абсцисс равен коэффициенту при t в формуле (15): $\mathrm{tg}\alpha = -g$.

Пример 8. _Движение тела, брошенного горизонтально_. Тело бросили с высоты H над поверхностью земли, сообщив ему начальную скорость $\vec{v}_0$, направленную горизонтально (рис. 16). Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите время τ полёта тела до его падения на землю, дальность l полёта тела, скорость $\vec{v}$ тела в момент падения. Выбрав прямоугольную систему координат так, как показано на рис. 16, запишите уравнение траектории движения тела, начертите графики зависимости от времени t координат тела и проекций скорости тела на координатные оси.

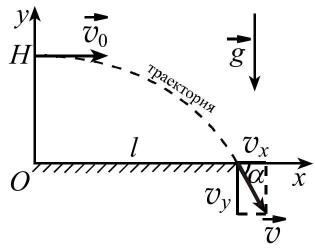

Рис. 16

Решение. Начало отсчёта O поместим на поверхности земли под точкой бросания (рис. 16). Начальные условия движения тела: $x_0 = 0$, $y_0 = H, v_{0x} = v_0, v_{0y} = 0$. Проекции ускорения тела на оси координат при отсутствии сопротивления воздуха равны: $a_x = 0,\ a_y = -g.$

Запишем системы уравнений (13) и (14) с учётом этих значений:

$$\begin{cases} v_x = v_0, \\ v_y = -gt, \end{cases} \qquad (17) \qquad\qquad \begin{cases} x = v_0 t, \\ y = H - \dfrac{gt^2}{2}. \end{cases} \qquad (18)$$

Пусть при $t = \tau$ тело упало на землю. Это означает, что $y = 0,$ а $x = l,$ и уравнения системы (18) принимают вид:

$$l = v_0\tau, \quad 0 = H - \frac{g\tau^2}{2}.$$

Решая их, находим: $\tau = \sqrt{\dfrac{2H}{g}},\ \ l = v_0\sqrt{\dfrac{2H}{g}}.$

В свою очередь, система уравнений (17) даёт: $v_x = v_0, v_y = -g\tau.$ С учётом значения τ получим $v_y = -\sqrt{2gH}$, и модуль скорости $\vec{v}$ будет равен: $v = \sqrt{v_x^{\,2} + v_y^{\,2}} = \sqrt{v_0^{\,2} + 2gH}$. Направление вектора $\vec{v}$ определим с помощью угла α (рис. 16): $\mathrm{tg}\alpha = v_y / v_x = (-\sqrt{2gH}) / v_0.$

Уравнение $y(x)$ траектории движения тела получим, исключив параметр t из системы (18): $y(x) = -\frac{g}{2{v_0}^2}x^2 + H$. Так как $y(x)$ представляет собой квадратичную функцию, то траекторией движения тела является участок параболы с вершиной в точке бросания. Ветви параболы направлены вниз. Графики, требуемые в условии данного примера, представлены соответственно на рис. 17 и рис. 18.

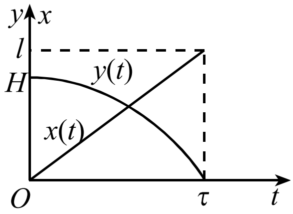

Рис. 17

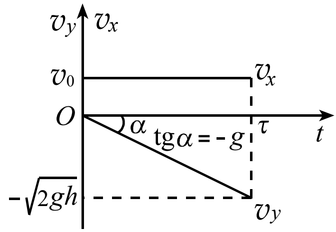

Рис. 18

Пример 9. <u>*Движение тела, брошенного под углом к горизонту.*</u>

Тело бросили с поверхности земли с начальной скоростью v_0, направленной под углом α к горизонту (рис. 19). Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите время τ полёта тела до его падения на землю, дальность l полёта тела, скорость тела в момент падения на землю, максимальную высоту H подъёма тела над землёй, время τ_1 подъёма тела на максимальную высоту. Запишите уравнение траектории тела.

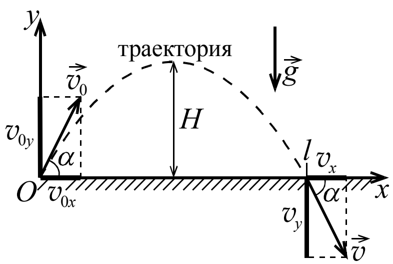

Рис. 19

Решение. Направим оси прямоугольной системы координат, как показано на рис. 19. Начало отсчёта O поместим в точку бросания. Тогда начальные условия движения тела таковы: $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$, $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$. При отсутствии сопротивления воздуха $a_x = 0$, $a_y = g$. С учётом этих значений системы уравнений (13) и (14) имеют вид:

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha, \\ v_y = v_0 \sin\alpha - gt \end{cases} \qquad (19) \qquad\qquad \begin{cases} x = \left(v_0 \cos\alpha\right) t, \\ y = \left(v_0 \sin\alpha\right) t - \dfrac{gt^2}{2}. \end{cases} \qquad (20)$$

Пусть при $t=\tau$ тело упало на землю, тогда: $y=0,\ x=l.$ Уравнения системы (20) дают: $l=\left(v_0\cos\alpha\right)\tau,\ 0=\left(v_0\sin\alpha\right)\tau-\dfrac{g\tau^2}{2}.$ Откуда находим $\tau=\dfrac{2v_0\sin\alpha}{g},\ l=\dfrac{v_0{}^2\sin 2\alpha}{g}.$ (Здесь использовано равенство $2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha.$)

Из полученного выражения для l легко определить угол α, при котором дальность полёта тела будет максимальной. Действительно, величина l как функция от α принимает максимальное значение в том случае, когда $\sin 2\alpha=1$. Это возможно, если $2\alpha=90^\circ$, т. е. $\alpha=45^\circ$.

Модуль скорости тела в момент падения на землю определим с помощью теоремы Пифагора: $v=\sqrt{v_x{}^2+v_y{}^2}$. В соответствии с системой уравнений (19) в этот момент (при $t=\tau$) имеем: $v_x=v_0\cos\alpha,$ $v_y=v_0\sin\alpha-g\tau=-v_0\sin\alpha$. Следовательно,

$$v=\sqrt{v_0{}^2\cos^2\alpha+v_0{}^2\sin^2\alpha}=v_0 \text{ (так как } \cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1\text{)}.$$

Направление скорости тела в момент падения составляет угол α с направлением оси Ox. Этот угол отсчитывается по часовой стрелке от направления оси Ox.

Пусть при $t=\tau_1$ тело достигло максимальной высоты. В этот момент $v_y=0,\ y=H$. Соответствующие уравнения систем (19) и (20) дают:

$$0=v_0\sin\alpha-g\tau_1,\ H=\left(v_0\sin\alpha\right)\tau_1-\frac{g\tau_1{}^2}{2}.$$

Отсюда последовательно находим: $\tau_1=\dfrac{v_0\sin\alpha}{g},\quad H=\dfrac{v_0{}^2\sin^2\alpha}{2g}.$

Видим, что $\tau=2\tau_1$.

Уравнение траектории получим, исключив из системы (20) время t: $y(x)=-\dfrac{g}{2v_0{}^2\cos^2\alpha}x^2+\operatorname{tg}\alpha\, x$. График траектории тела представляет собой участок параболы, ветви которой направлены вниз.

§7. Примеры решения задач

Пример 10. Два маленьких стальных шарика брошены одновременно из одной и той же точки с поверхности земли с начальными скоростями $v_{01} = 5$ м/с и $v_{02} = 8$ м/с, направленными под углами $\alpha_1 = 80^\circ$ и $\alpha_2 = 20^\circ$ к горизонту соответственно. Чему равно расстояние между шариками, спустя время $t = \frac{1}{3}$ с после броска?

Траектории шариков лежат в одной вертикальной плоскости. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. Шарики движутся в поле тяжести Земли с постоянным ускорением $\vec{g}$ (сопротивлением воздуха пренебрегаем).

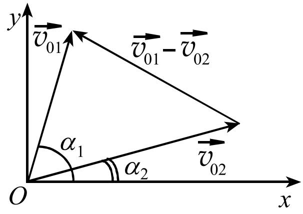

Рис. 20

Выберем систему координат так, как показано на рис. 20, начало отсчёта поместим в точку бросания. Для радиус-векторов шариков $\vec{r}_1(t)$ и $\vec{r}_2(t)$ имеем: $\vec{r}_1(t) = \vec{r}_{01} + \vec{v}_{01}t + \frac{\vec{g}t^2}{2}$, $\vec{r}_2(t) = \vec{r}_{02} + \vec{v}_{02}t + \frac{\vec{g}t^2}{2}$.

Искомое расстояние l равно модулю разности радиус-векторов шариков в момент времени $t = \frac{1}{3}$ с. Так как шарики были брошены из одной и той же точки, то $\vec{r}_{01} = \vec{r}_{02}$, следовательно:

$$l = \left|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)\right| = \left|\vec{v}_{01} - \vec{v}_{02}\right| \cdot t.$$

(Остальные слагаемые при вычитании радиус-векторов уничтожились.)

В свою очередь, по теореме косинусов (см. рис. 20):

$$\left|\vec{v}_{01} - \vec{v}_{02}\right| = \sqrt{v_{01}{}^2 + v_{02}{}^2 - 2v_{01}v_{02}\cos(\alpha_1 - \alpha_2)}.$$

Подставляя в это равенство числовые значения входящих в него величин, получим $\left|\vec{v}_{01} - \vec{v}_{02}\right| = 7$ м/с.

Тогда искомое расстояние между шариками в момент времени $t = \frac{1}{3}$ с будет равно $l = 7\ \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot \frac{1}{3}\text{с} = \frac{7}{3}\text{м} \approx 2{,}3\,\text{м}$.

Пример 11*. Два тела брошены вертикально вверх с поверхности земли из одной точки вслед друг за другом с интервалом времени τ, с одинаковыми начальными скоростями $\vec{v}_0$. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить, через сколько времени они «встретятся»? Прокомментируйте решение для $v_0 < g\frac{\tau}{2}$.

Решение. Направим ось Oy вертикально вверх, начало отсчёта поместим в точку бросания. Отсчёт времени будем вести, начиная с момента бросания первого тела. Начальные условия движения тел: 1) $t_0 = 0, y_{01} = 0, v_{y01} = v_0$; 2) $t_0 = \tau, y_{02} = 0, v_{y02} = v_0$. Проекции ускорений тел при отсутствии сопротивления воздуха равны: $a_{y1} = a_{y2} = -g$. Уравнения движения тел в проекциях на ось Oy с учётом начальных условий имеют вид:

$$y_1(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}, \quad y_2(t) = v_0(t-\tau) - \frac{g(t-\tau)^2}{2}.$$

(Заметим, что $y_2 = 0$ при $0 < t \le \tau$.)

Для наглядности изобразим графики этих функций на одном чертеже (рис. 21). Из чертежа видно, что «встреча» произойдёт в некоторый момент времени t_x в точке А, где пересекаются графики $y_1(t)$ и $y_2(t)$. Таким образом, условие «встречи»: $y_1(t_x) = y_2(t_x)$, то есть

$$v_0 t_x - \frac{gt_x^2}{2} = v_0(t_x - \tau) - \frac{g(t_x-\tau)^2}{2}.$$

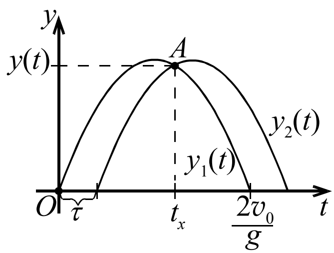

Рис. 21

Решая это уравнение относительно t_x, находим: $t_x = \frac{v_0}{g} + \frac{\tau}{2}$. Проанализируем полученное выражение при $v_0 < g\tau/2$. Известно (см. Пример 7), что время полёта тела, брошенного вертикально, равно $2v_0/g$. Поэтому, если $v_0 < g\tau/2$, то $\tau > 2v_0/g$. Это означает, что сначала упадёт на землю первое тело, а только затем будет брошено вверх второе. Иными словами, тела «встретятся» в точке бросания.

Пример 12*. Мальчик, находясь на плоском склоне горы с углом наклона $\varphi = 30^\circ$, бросает камень в сторону подъёма горы, сообщив ему начальную скорость v_0, направленную под углом $\beta = 60^\circ$ к горизонту. На каком расстоянии от мальчика упадёт камень? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. Выберем систему отсчёта так, как показано на рис. 22, поместив начало отсчёта O в точку бросания. В этой системе отсчёта начальная скорость камня составляет с осью Ox угол $\alpha = \beta - \varphi = 30°$. Начальные условия: $x_0 = 0,\ y_0 = 0,\ v_{0x} = v_0 \cos\alpha,\ v_{0y} = v_0 \sin\alpha.$ Проекции ускорения камня в отсутствие сопротивления воздуха равны (см. рис. 22): $a_x = g_x = -g\sin\varphi,$ $a_y = g_y = -g\cos\varphi.$ Здесь мы учли, что угол между вектором $\vec{g}$ и перпендикуляром к поверхности горы равен углу наклона горы $\varphi = 30^{\circ}$, кроме того, по условию задачи $\varphi = \alpha$.

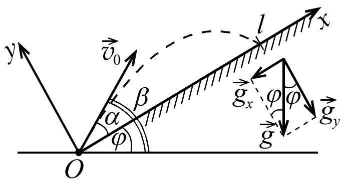

Рис. 22

Запишем уравнения системы (14) с учётом начальных условий:

$$x(t) = (v_0 \cos\alpha)\,t - (g\sin\varphi)\frac{t^2}{2}, \quad y(t) = (v_0 \sin\alpha)\,t - (g\cos\varphi)\frac{t^2}{2}.$$

Время полёта τ камня найдём из последнего уравнения, зная, что

$$y(\tau) = 0,\ \cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\alpha = \frac{1}{2}.$$

А именно $\tau = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{v_0}{g}$. (Значение $\tau = 0$ мы отбросили, т. к. оно не связано с вопросом задачи).

Подставляя найденное значение τ в уравнение для $x(t)$, определим искомое расстояние (иными словами, дальность полёта):

$$l = x(\tau) = \frac{2}{3}\frac{{v_0}^2}{g}.$$

Пример 13. Массивная платформа движется с постоянной скоростью $\vec{V_0}$ по горизонтальному полу. С заднего края платформы производится удар по мячу. Модуль начальной скорости мяча относительно платформы равен $u = 2V_0$, причём вектор $\vec{u}$ составляет угол $\alpha = 60^{\circ}$ с горизонтом (рис. 23). На какую максимальную высоту над полом поднимется мяч? На каком расстоянии от края платформы будет находиться мяч в момент приземления. Высотой платформы и сопротивлением воздуха пренебречь. Все скорости лежат в одной вертикальной плоскости. (ФЗФТШ при МФТИ, 2009.)

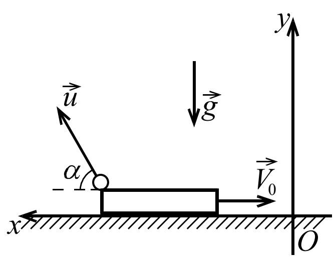

Рис. 23

Решение. Для описания движения мяча и платформы введём систему отсчёта, связанную с полом. Ось Ox направим горизонтально в направлении удара, а ось Oy – вертикально вверх (рис. 23).

Движение мяча происходит с постоянным ускорением $\vec{a}$, причём $a_x = 0$, $a_y = -g$, где g – величина ускорения свободного падения.

Проекции начальной скорости $\vec{v}_0$ мяча на оси Ox и Oy равны:

$$v_{0,x} = V_{0,x} + u_x = -V_0 + 2V_0 \cdot \cos 60^\circ = -V_0 + V_0 = 0,$$

$$v_{0,y} = V_{0,y} + u_y = 0 + 2V_0 \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}V_0.$$

Равенство нулю горизонтальной скорости мяча означает, что его движение происходит только по вертикали, и он упадёт в точке удара.

Максимальную высоту подъёма $\left(y_{\max}\right)$ и время полёта мяча найдём из законов кинематики равноускоренного движения:

$$v_y^2 - v_{0,y}^2 = 2a_y\left(y - y_0\right), \quad y = y_0 + v_{0,y}t + \frac{a_y t^2}{2}.$$

Учитывая, что при $y = y_{\max}$ проекция вертикальной скорости обращается в ноль $\left(v_y = 0\right)$, а в момент приземления мяча $(t = T_{\text{полёта}})$ его координата по оси Oy обращается в ноль $\left(y = 0\right)$, имеем:

$$y_{\max} = \frac{v_{0,y}^2}{2g} = \frac{3V_0^2}{2g}, \quad T_{\text{полёта}} = \frac{2\sqrt{3}V_0}{g}.$$

За время полёта мяча платформа сместится на расстояние

$$L = V_0 T_{\text{полёта}} = \frac{2\sqrt{3}V_0^2}{g},$$

которое и является искомым расстоянием между мячом и платформой в момент приземления мяча.

Контрольные вопросы

1. Тело движется равномерно и прямолинейно на плоскости xOy. Его координаты в зависимости от времени изменяются в соответствии с уравнениями $x(t) = -4t$ и $y(t) = 6 + 2t$ (величины измерены в СИ). Запишите уравнение $y = y(x)$ траектории тела. Чему равны начальные координаты тела и его координаты через 2 сек после начала движения?

2. Движение тела на плоскости xOy описывается уравнениями:

$$\begin{cases} x\left(t\right) = 2 - 5t + 4t^2, \\ y\left(t\right) = 7 + 12t - 3t^2 \end{cases}$$

(величины измерены в СИ). Найдите начальные координаты тела, модуль его начальной скорости и модуль его ускорения.

3. Материальная точка движется с начальной скоростью $v_0 = 6\ \text{м/с}$ и постоянным ускорением $a = 4\ \text{м/с}^2$, направленным под углом $120°$ к начальной скорости. Найдите модуль перемещения материальной точки за первые $3\ \text{с}$ своего движения.

4. Пловец переплывает реку перпендикулярно течению. Скорость течения реки 0,4 м/с. Скорость пловца относительно воды 0,85 м/с. Найти скорость пловца относительно берега.

5. Водитель автомобиля ехал из пункта А в пункт Б. Первые полтора часа он ехал со скоростью $80\ \text{км/ч}$, потом он сделал остановку на отдых на полчаса, а затем, следуя со скоростью $90\ \text{км/ч}$, через час прибыл в пункт Б. Расстояние между пунктами А и Б 120 км по прямой. Какова средняя путевая скорость и средняя скорость автомобиля.

6. Автомобиль ехал со скоростью 30 м/с. Перед опасным участком дороги он сбросил скорость до 10 м/с. При этом тормозной путь автомобиля составил 200 м. Чему равно время торможения автомобиля и его ускорение во время торможения?

7. С высокого обрыва свободно падает камень. Какую скорость он будет иметь через $3\ \text{с}$ после начала падения? Сопротивлением воздуха пренебречь, $g = 10\ \text{м/с}^2$.

8. Мяч брошен горизонтально с высоты 3,2 м. При этом дальность его полёта составила 16 м. Найдите начальную скорость полёта мяча. Сопротивлением воздуха пренебречь, $g = 10\ \text{м/с}^2$.

9. Начальная скорость снаряда 500 м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, покажите, под каким углом к горизонту должен производиться выстрел для достижения максимальной дальности, и определите максимальную дальность полёта.

10. Материальная точка движется прямолинейно. График зависимости скорости точки от времени представлен на рис. 24. Определите по этому графику среднюю путевую скорость движения материальной точки на первой половине пути.

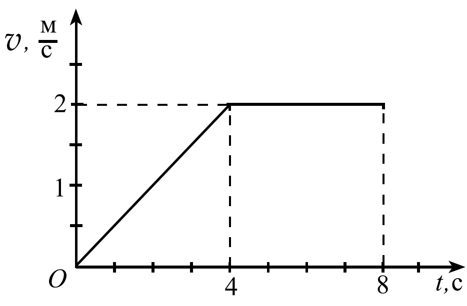

Рис. 24

Задачи

Во всех задачах сопротивлением воздуха пренебречь, ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ *м/с*^{2}.

1. Один поезд шёл половину пути S со скоростью $v_1 = 80$ км/ч, а половину пути – со скоростью $v_1' = 40$ км/ч. Другой поезд шёл половину времени t со скоростью $v_2 = 80$ км/ч, а половину времени – со скоростью $v_2' = 40$ км/ч. Какова средняя скорость каждого поезда?

2. Пешеход треть всего пути бежал со скоростью $v_1 = 9$ км/ч, треть всего времени шёл со скоростью $v_2 = 4$ км/ч, а оставшуюся часть шел со скоростью, равной средней скорости на всем пути. Найдите эту скорость.

3. Самолёт летит из пункта A в пункт B и возвращается назад в пункт A. Скорость самолёта в безветренную погоду равна v. Найти отношение средних скоростей всего перелёта для двух случаев, когда во время перелета ветер дует: а) вдоль линии AB; б) перпендикулярно линии AB. Скорость ветра равна u.

4. Два автомобиля приближаются к перекрёстку по взаимно перпендикулярным траекториям с постоянными скоростями v_1 и v_2. В момент времени, когда первый автомобиль достиг перекрёстка, второй находился на расстоянии l_0 от него. Определите минимальное расстояние между автомобилями в процессе движения (см. рис. 25).

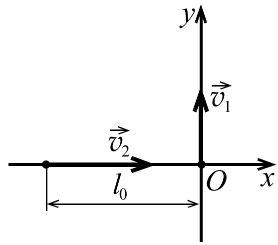

Рис. 25

5. Материальная точка движется с начальной скоростью $v_0 = 8$ м/с и постоянным ускорением $a = 2$ м/с^2, направленным перпендикулярно начальной скорости. Найдите модуль скорости и перемещения материальной точки через 3 с после начала движения.

6. Камень, брошенный с поверхности земли под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту, дважды побывал на одной и той же высоте h спустя время $t_1 = 3$ с и $t_2 = 5$ с после начала движения. Найдите начальную скорость камня v_0.

7*. Мальчик, находясь на плоском склоне горы с углом наклона $\varphi = 30^\circ$, бросает камень в сторону подъёма горы, сообщив ему начальную скорость $v_0 = 20$ м/с, направленную под углом $\beta = 60^\circ$ к горизонту. На каком расстоянии от мальчика упадёт камень?

8. Дальность полёта снаряда составляет 22 км. При этом он достигает высоты 3 км. Найдите начальную скорость снаряда.

9*. Два мяча брошены одновременно навстречу друг другу вдоль одной вертикальной прямой с одинаковыми скоростями: один вертикально вверх с поверхности земли, другой вертикально вниз – с высоты H. Найти эти скорости, если известно, что к моменту «встречи» мячей один из них пролетел путь $\frac{1}{3}H$. Сопротивлением воздуха пренебречь.

10. Тело брошено с поверхности земли под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту со скоростью $v_0 = 20$ м/с. Определите скорость (модуль и направление), а также модуль перемещения тела через $t = 1{,}5$ с после начала движения.

Некоторые справочные данные из курса тригонометрии:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \begin{array}{l} \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}, \quad 0^\circ < \alpha < 90^\circ \\ \cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha}, \quad 90^\circ < \alpha < 180^\circ \end{array}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \sin\alpha = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}}, \quad 0^\circ < \alpha < 90^\circ \\ \cos\alpha = \sqrt{\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}}, \quad 0^\circ < \alpha < 90^\circ \end{array}$$