Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)
Заочная физико-техническая школа

МАТЕМАТИКА

Иррациональные уравнения.
Системы уравнений

Задание №4 для 9-х классов

(2021 – 2022 учебный год)

г. Долгопрудный, 2021

Составитель: С.Е. Городецкий, доцент кафедры высшей математики МФТИ.
Я.С. Агаханова, доцент кафедры высшей математики МФТИ.

Математика: задание №4 для 9-х классов (2021 – 2022 учебный год), 2021, 26 с.

Дата отправки заданий по физике и математике – 25 января 2022 г.

Учащийся должен стараться выполнять все задачи и контрольные вопросы в заданиях. Некоторая часть теоретического материала, а также часть задач и контрольных вопросов, являются сложными и потребуют от учащегося больше усилий при изучении и решении. В целях повышения эффективности работы с материалом они обозначены символом «*» (звёздочка). Мы рекомендуем приступать к этим задачам и контрольным вопросам в последнюю очередь, разобравшись вначале с более простыми.

Составитель:
Городецкий Сергей Евгеньевич
Агаханова Яна Сергеевна

Подписано 08.12.21. Формат 60x90 1/16.
Бумага типографская. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1,62. Уч.-изд. л. 1,44.

Заочная физико-техническая школа
Московского физико-технического института
(национального исследовательского университета)

Институтский пер., 9, г. Долгопрудный, Московская обл., 141700.
ЗФТШ, тел. (495) 408-51-45 – **заочное отделение,**
тел. (498) 744-63-51 – **очно-заочное отделение,**
тел. (498) 744-65-83 – **очное отделение.**

e-mail: zftsh@mail.mipt.ru

Наш сайт: https://zftsh.online/

§1. Иррациональные уравнения

Уравнение называют **иррациональным**, если оно содержит переменное выражение под знаком корня.

Напомним, что квадратный корень из $f(x)$, т. е. $\sqrt{f(x)}$, *определён лишь для тех значений* x, *для которых* $f(x) \geq 0$.

Все значения $\sqrt{f(x)}$ *неотрицательны.*

Для любого значения x из области определения $f(x)$ определён $\sqrt{(f(x))^2}$, поскольку $(f(x))^2 \geq 0$. При этом

$$\sqrt{(f(x))^2} = f(x), \quad \text{если } f(x) \geq 0,$$

$$\sqrt{(f(x))^2} = -f(x), \quad \text{если } f(x) \leq 0,$$

или, короче, $\sqrt{(f(x))^2} = |f(x)|$.

Область определения и область значений квадратного корня необходимо учитывать при решении задач.

Пример 1. Решите уравнение $\sqrt{x+4}\left(25-x^2\right)=0$.

Решение. Уравнение *определено лишь для тех значений* x, *для которых* $x+4 \geq 0$, т. е. $x \geq -4$. Первый множитель равен нулю при $x=-4$, и это число − решение уравнения. Второй множитель равен нулю при $x=5$ и $x=-5$. Из них области определения принадлежит лишь 5, это решение уравнения. Второе число $x=-5$ не является решением уравнения.

Ответ: – 4; 5.

По области определения и по области значений выражений, входящих в иррациональное уравнение, иногда легко обнаружить, что оно не имеет решений. Например, это видно для уравнений

$$\sqrt{x}=-1 \text{ и } 3\sqrt{x-3}=1-x.$$

В первом уравнении левая часть неотрицательна $\left(\sqrt{x} \geq 0\right)$, поэтому равенство *неверно* при любом $x \geq 0$. Во втором уравнении левая часть также неотрицательна. Уравнение определено лишь при $x \geq 3$. Для этих x имеем: $1-x \leq -2$, т. е. правая часть отрицательна. Значит, равенство неверно при любом $x \geq 3$, решений нет.

При возведении частей уравнения в квадрат получаемое новое *уравнение-следствие* иногда оказывается равносильным исходному, а иногда – нет. Например, возведя в квадрат обе части уравнения $\sqrt{x}=1$, получим равносильное уравнение $x=1$. А возведя в квадрат обе части уравнения $\sqrt{x}=-1$, не имеющего решений, получим неравносильное ему уравнение $x=1$, имеющее решение 1.

Хотелось бы подчеркнуть, что возведение обеих частей уравнения в квадрат, вообще говоря, не является равносильным преобразованием, и это ни как не связано с наличием знака корня в исходном уравнении. Пусть обе части уравнения $f(x)=g(x)$ возвели в квадрат и получили $f^2(x)=g^2(x)$. Последнее уравнение можно преобразовать к виду

$$\big(f(x)-g(x)\big)\big(f(x)+g(x)\big)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x), \\ f(x)=-g(x). \end{array}\right.$$

Таким образом, мы возможно приобрели лишние корни – решения уравнения $f(x)=-g(x)$. Чтобы их отбросить, можно добавить следующее ограничение: $f(x)=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f^2(x)=g^2(x), \\ \text{знаки } f(x) \text{ и } g(x) \text{ совпадают.} \end{cases}$

(При этом под *совпадением знаков мы понимаем, что либо оба выражения* $f(x)$ и $g(x)$ *неотрицательны, либо оба неположительны*). Действительно, уравнение $f(x)=-g(x)$ при указанных условиях может иметь только такие решения, при которых обе его части равны нулю. Но эти значения переменной являются также решениями уравнения $f(x)=g(x)$, поэтому множество решений совокупности $\left[\begin{array}{l} f(x)=g(x), \\ f(x)=-g(x) \end{array}\right.$ совпадает с множеством решений уравнения $f(x)=g(x)$.

Пример 2. Решить уравнения

1) $3\sqrt{x}=x+2$; 2) $\sqrt{x}=2-x$; 3) $\sqrt{x}=x-2$; 4) $3\sqrt{x}=-x-2$.

Решение. Возведя в квадрат обе части каждого из этих уравнений, после простых преобразований получим уравнение

$$x^2-5x+4=0, \qquad (1)$$

которое является *следствием* каждого из уравнений 1) – 4). Оно имеет корни $x=1$ и $x=4$.

1) Проверяем их подстановкой в исходное уравнение 1):

$x=1 \Rightarrow 3=1+2-$ верное равенство $\Rightarrow 1-$ корень 1);

$x=4 \Rightarrow 3\cdot 2=4+2-$ верное равенство $\Rightarrow 4-$ корень 1).

Уравнения 1) и (1) оказались равносильными.

Ответ: 1, 4.

2) Подстановка корней (1) в уравнение 2) даёт:

$x=1 \Rightarrow 1=2-1-$ верное равенство $\Rightarrow 1-$ корень 2);

$x=4 \Rightarrow 2=2-4-$ *неверное* равенство $\Rightarrow 4-$ *не корень* 2).

Ответ: 1.

3) Для этого уравнения

$x=1 \Rightarrow 1=1-2-$ *неверное* равенство $\Rightarrow 1-$ *не корень* 3);

$x=4 \Rightarrow 2=4-2-$ верное равенство $\Rightarrow 4-$ корень 3).

Ответ: 4.

4) Для уравнения 4) в обоих случаях получаем неверные равенства, а именно, $3\cdot 1=-3$ и $3\cdot 2=-6$.

Ответ: $\varnothing$.

Отметим, что уравнение-следствие (1) оказалось *неравносильно* каждому из уравнений 2), 3), 4). Потеря равносильности произошла при возведении обеих частей в квадрат.

Приобретение посторонних корней может произойти не только при возведении его частей в квадрат, но и при сокращении дробей, приведении подобных членов. Добавим к этому ещё замену произведения корней $\sqrt{f(x)}\cdot\sqrt{g(x)}$ на корень из произведения $\sqrt{f(x)g(x)}$ или замену отношения корней $\dfrac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{g(x)}}$ корнем из дроби $\sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}}$. Во всех этих случаях требуется проделать отбор корней.

Вместо проверки корней уравнения-следствия $(f(x))^2=(g(x))^2$ подстановкой их в уравнение $f(x)=g(x)$ можно добавить к уравнению-следствию такие ограничения в виде неравенств для неизвестного, что система из уравнения и этих неравенств будет иметь те же решения, что и исходное уравнение, т. е. будет равносильна ему. *Во-первых, значения неизвестного должны быть ограничены областью определения исходного уравнения. Во-вторых, должно быть обеспечено* ***совпадение знаков частей исходного уравнения*** *(т. е. того, что у нас было перед возведением в квадрат).*

В примере 2 уравнение (1) определено для всех x, а каждое из уравнений 1) – 4) лишь для $x\geq 0$. Значит, это условие необходимо добавить к (1). Получаемая система

$$\begin{cases} x^2-5x+4=0, \\ x\geq 0, \end{cases} \qquad (2)$$

оказывается равносильной уравнению 1), так как при условии $x\geq 0$ обе части исходного уравнения не отрицательны, но не равносильна уравнениям 2), 3), 4). Нужно ещё добавить условие совпадения знаков обеих частей исходного уравнения.

В уравнении 2) левая часть $\sqrt{x}$ неотрицательна, поэтому к (2) нужно добавить условие неотрицательности правой части $2 - x$. В результате получим систему $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 = 0, \\ x \ge 0, \\ 2 - x \ge 0, \end{cases}$ равносильную уравнению 2).

Действительно, из двух решений $x = 1$ и $x = 4$ лишь $x = 1$ удовлетворяет обоим добавленным неравенствам, и, как было проверено, является решением 2).

Аналогично, уравнению 3) примера 2 равносильна система

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 4 = 0, \\ x \ge 0, \\ x - 2 \ge 0. \end{cases}$$

Она, как и 3), имеет одно решение $x = 4$.

Уравнению 4) равносильна система $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 = 0, \\ x \ge 0, \\ -x - 2 \ge 0, \end{cases}$ не имеющая, как и 4), решений.

В следующих примерах показаны некоторые приёмы, используемые при решении иррациональных уравнений.

Пример 3. Решите уравнение $\sqrt{2 + 4x} = x$.

Решение. 1) Это уравнение равносильно системе $\begin{cases} 2 + 4x = x^2, \\ x \ge 0. \end{cases}$

Здесь неравенство $x \ge 0$ обеспечивает совпадение знаков частей исходного уравнения. Неотрицательность подкоренного выражения следует из уравнения системы[1].

Уравнение этой системы имеет корни $2 + \sqrt{6}$ и $2 - \sqrt{6}$. Неравенству $x \ge 0$ удовлетворяет только $2 + \sqrt{6}$.

Отметим, что проверка этих значений подстановкой в исходное уравнение технически *сложнее*, чем проверка условия $x \ge 0$.

Ответ: $2 + \sqrt{6}$.

Пример 4. Решить уравнения

1) $2\sqrt{2t^2 + 22t + 36} = 12 - 3t$; 2) $\sqrt{2t + 4} + \sqrt{t + 9} = 5$.

---

[1] Действительно, в левой части уравнения $2 + 4x = x^2$ записано подкоренное выражение, а в правой – полный квадрат

Решение. 1) Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 4(2t^2+22t+36)=(12-3t)^2, \\ 12-3t \ge 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Условие неотрицательности подкоренного выражения можно опустить, так как из первого уравнения системы (3) видно, что оно равно квадрату, и, следовательно, неотрицательно. Условие неотрицательности правой части, обеспечивающее совпадение знаков частей уравнения (или, что то же самое, обеспечивающее область значений корня) напротив *нельзя опустить, т. к. оно не следует из первого уравнения системы* (3).

Уравнение в (3) сводится к квадратному:

$$t^2-160t=0 \Leftrightarrow t_1=0,\ t_2=160.$$

Из его корней неравенству в системе удовлетворяет лишь $t_1=0$.

Ответ: 0.

2) Обе части уравнения на его области определения неотрицательны, поэтому данное уравнение *равносильно* следующему:

$$\left(\sqrt{2t+4}+\sqrt{t+9}\right)^2=5^2.$$

Применив формулу для квадрата суммы, преобразуем это уравнение к *следствию.*[2]

$$2\sqrt{2t^2+22t+36}=12-3t. \qquad (4)$$

Область определения исходного уравнения задаётся неравенствами

$$\begin{cases} 2t+4 \ge 0, \\ t+9 \ge 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Эти неравенства вместе с уравнением (4) составляют систему, равносильную исходному уравнению.

Уравнение (4) решено в п.1), его решение $t_1=0.$ Это значение удовлетворяет системе неравенств (5), т. е. принадлежит области определения уравнения 2), значит, является его решением.

Ответ: 0.

---

[2] Напомним, что «из уравнения 1 следует уравнение 2» означает, что множество решений первого уравнения является подмножеством множества решений второго. Действительно, пусть M_1 – множество решений уравнения 1, M_2 – множество решений уравнения 2. $1 \Rightarrow 2$ означает, что если некоторое x является решением 1 (т. е. $x \in M_1$), то оно является решением 2 (т. е. $x \in M_2$). Значит, любой элемент множества M_1 принадлежит также множеству M_2 (т. е. $M_1 \subset M_2$).

Показанный здесь способ решения уравнения 2) требует дважды возводить в квадрат – при переходе к (4) и при решении (4) (которое приведено в первом пункте). И *каждый раз* нужно добавлять условия, обеспечивающие равносильность преобразований.

Отметим, что найденное в 1) при решении уравнения значение $t_2 = 160$, удовлетворяет системе неравенств (5), т. е. принадлежит области определения уравнения 2). И не будучи исключённым при решении пункта 1), оно попало бы в решения 2), что привело бы к ошибке.

Для преобразования уравнения, содержащего несколько радикалов[3], один из них «*уединяют*», затем возводят обе части в подходящую степень. И *каждый раз* нужно добавлять условия, обеспечивающие равносильность преобразования.

Пример 5. Решить уравнение $\sqrt{5x+1} - \sqrt{3x-1} - \sqrt{x+1} = 0$.

Решение. В этом уравнении два из трёх радикалов имеют одинаковые знаки, их и отнесём к одной части уравнения, тем самым *«уединив»* третий радикал. Получим $\sqrt{5x+1} = \sqrt{3x-1} + \sqrt{x+1}$.

Область определения этого уравнения задаётся системой неравенств

$$\begin{cases} 5x+1 \ge 0, \\ 3x-1 \ge 0, \\ x+1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge \frac{1}{3}. \qquad (6)$$

Обе части уравнения неотрицательны, поэтому оно равносильно уравнению $5x+1 = \left(\sqrt{3x-1} + \sqrt{x+1}\right)^2$, которое при условиях (6) равносильно следующему $x+1 = 2\sqrt{3x^2+2x-1}$. В силу (6) обе части этого уравнения неотрицательны, поэтому оно равносильно уравнению

$$(x+1)^2 = 4\left(3x^2+2x-1\right).$$

Итак, исходное уравнение равносильно системе из этого последнего уравнения и неравенств (6).

Полученное уравнение сводим к квадратному $11x^2+6x-5=0$, его корни – числа $x = \frac{5}{11}$ и $x = -1$. Неравенству (6) удовлетворяет только $x = \frac{5}{11}$. **Ответ:** $\frac{5}{11}$.

Нередко иррациональное уравнение удаётся упростить, *введя новую переменную*.

Пример 6. Решите уравнение: $3x^2 + \sqrt{3x^2-8x+1} = 8x+19$.

[3] Радикал – символ, знак корня.

Решение. Перенесём всё в левую часть:
$3x^2-8x-19+\sqrt{3x^2-8x+1}=0.$ Введём обозначение:

$$\sqrt{3x^2-8x+1}=t. \qquad (7)$$

Тогда
$$3x^2-8x=t^2-1. \qquad (8)$$

Подставим в исходное уравнение: $t^2+t-20=0,$ откуда находим корни $t_1=4$ и $t_2=-5$. Подставляем найденные значения t в (7) и получаем:

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{3x^2-8x+1}=-5\\ \sqrt{3x^2-8x+1}=4\end{array}\right..$$

Первое из этих уравнений не имеет решений, а второе эквивалентно каждому из следующих:

$$3x^2-8x+1=16;\;\; 3x^2-8x-15=0,\;\; x=\frac{4\pm\sqrt{61}}{3}.$$

Ответ: $x=\dfrac{4\pm\sqrt{61}}{3}.$

Замечание. *Если для нахождения* x *вместо равенства* (7) *использовать равенство* (8)*, полученное из* (7) *возведением в квадрат, то это приведёт к возникновению посторонних корней* ($t=-5$ *при подстановке в* (8) *даёт уравнение* $3x^2-8x=24$).

Таким образом, каждое возведение в квадрат может привести к нарушению равносильности, а именно, к появлению лишних корней. В этой задаче возведение в квадрат было произведено при переходе от (7) к (8); как раз здесь и произошло приобретение посторонних корней.

Рассмотрим ещё несколько примеров.

Пример 7. Решите уравнение $\left(x^2-1\right)\sqrt{6x^2-7x-3}=0.$

Решение. *Произведение двух множителей равно нулю* $\Leftrightarrow$ *один из множителей равен нулю, а второй при этом имеет смысл*. Поэтому данное уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-1=0,\\ 6x^2-7x-3\ge 0,\end{cases}\\ 6x^2-7x-3=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\pm1,\\ 6x^2-7x-3\ge 0,\end{cases}\\ x=\dfrac{3}{2},\\ x=-\dfrac{1}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1,\\ x=\dfrac{3}{2},\\ x=-\dfrac{1}{3}.\end{array}\right.$$

Ответ: $x=-1,\; x=\dfrac{3}{2},\; x=-\dfrac{1}{3}.$

Пример 8. Решите уравнения:

а) $\sqrt{x^2-5x+2}-\sqrt{x^2+x+1}=1-6x;$

б) $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}+2\sqrt{x^2+7x}=35-2x;$

в) $\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2-3x-2}=\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-x+2}.$

Решение. а) Умножим обе части уравнения на «сопряжённое» к левой части, т. е. на $\sqrt{x^2-5x+2}+\sqrt{x^2+x+1}$ (поскольку оно положительно при всех x, то полученное уравнение равносильно исходному). Получаем

$$\left(x^2-5x+2\right)-\left(x^2+x+1\right)=(1-6x)\left(\sqrt{x^2-5x+2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-6x=(1-6x)\left(\sqrt{x^2-5x+2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)\overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}\left[\begin{array}{l}1-6x=0,\\ 1=\sqrt{x^2-5x+2}+\sqrt{x^2+x+1}.\end{array}\right.$$

Первое уравнение совокупности имеет корень $x=\dfrac{1}{6}$, который принадлежит ОДЗ (проверяем подставкой в неравенство $x^2-5x+2\geq 0$). Второе уравнение равносильно следующему:

$$\sqrt{x^2-5x+2}=1-\sqrt{x^2+x+1}\Leftrightarrow\begin{cases}1-\sqrt{x^2+x+1}\geq 0,\\ x^2-5x+2=x^2+x+2-2\sqrt{x^2+x+1}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x^2+x+1}\leq 1,\\ \sqrt{x^2+x+1}=3x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\leq x^2+x+1\leq 1,\\ x\geq 0,\\ x^2+x+1=9x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+x\leq 0,\\ x\geq 0,\\ 8x^2-x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-1\leq x\leq 0,\\ x\geq 0,\\ 8x^2-x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0,\\ 8x^2-x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\varnothing.$$

Итак, уравнение имеет единственный корень $x=\dfrac{1}{6}.$

Ответ: $x=\dfrac{1}{6}.$

б) Сделаем замену $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}=t$. Тогда при возведении обеих частей этого равенства в квадрат получаем $2x+7+2\sqrt{x^2+7x}=t^2$. Уравнение принимает вид $\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+7}\right)+\left(2\sqrt{x^2+7x}+2x\right)=35$,

$$t+\left(t^2-7\right)=35 \Leftrightarrow t^2+t-42=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=6, \\ t=-7. \end{array}\right.$$

Если $t=6$, то $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}=6$. Это уравнение на ОДЗ равносильно следующему:

$$2x+7+2\sqrt{x^2+7x}=36 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+7x}=29-2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 29-2x \ge 0, \\ 4x^2+28x=841-116x+4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 14{,}5, \\ x=\dfrac{841}{144} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{841}{144}.$$

Полученный корень принадлежит ОДЗ $(x \ge 0)$, поэтому он является решением уравнения.

Если $t=-7$, то $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}=-7$. Здесь решений нет, т. к. левая часть неотрицательна, а правая – отрицательна.

Ответ: $\dfrac{841}{144}$.

в) Перепишем уравнение в виде

$$\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{2x^2+2x+3}=\sqrt{x^2-x+2}-\sqrt{x^2-3x-2}.$$

Домножаем левую и правую части на «сопряжённое»

$$\frac{\left(\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{2x^2+2x+3}\right)\left(\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{2x^2+2x+3}\right)}{\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{2x^2+2x+3}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x^2-x+2}-\sqrt{x^2-3x-2}\right)\left(\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x^2-3x-2}\right)}{\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x^2-3x-2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(2x^2-1\right)-\left(2x^2+2x+3\right)}{\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{2x^2+2x+3}}=\frac{\left(x^2-x+2\right)-\left(x^2-3x-2\right)}{\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x^2-3x-2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2(x+2)}{\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{2x^2+2x+3}}=\frac{2(x+2)}{\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x^2-3x-2}} \overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x+2=0, \\ \dfrac{-2}{\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{2x^2+2x+3}}=\dfrac{2}{\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x^2-3x-2}}. \end{array}\right.$$

Первое уравнение совокупности имеет корень $x=-2,$ принадлежащий ОДЗ (убеждаемся в этом подстановкой). Второе уравнение не имеет решений, так как левая часть отрицательна, а правая – положительна.

Ответ: $x=-2.$

Пример 9. Решите уравнение $\sqrt[3]{72+x}+\sqrt[3]{80-x}=8.$

Способ 1. Возведём обе части уравнения в куб (в отличие от возведения в квадрат это преобразование равносильно).

Получаем

$$72+x+3\left(\sqrt[3]{72+x}\right)^2\cdot\sqrt[3]{80-x}+3\sqrt[3]{72+x}\left(\sqrt[3]{80-x}\right)^2+80-x=512\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{(72+x)(80-x)}\left(\sqrt[3]{72+x}+\sqrt[3]{80-x}\right)=360.$$

С учётом исходного уравнения выражение в скобках равно 8, откуда следует[4], что

$$3\sqrt[3]{(72+x)(80-x)}\cdot 8=360\Leftrightarrow\sqrt[3]{(72+x)(80-x)}=15\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(72+x)(80-x)=3375\Leftrightarrow -x^2+8x+2385=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=53,\\x=-45.\end{array}\right.$$

Подстановкой в исходное уравнение проверяем, что оба эти числа являются решениями.

Способ 2. Обозначим $\sqrt[3]{72+x}=u,$ $\sqrt[3]{80-x}=v.$ Тогда $u^3=72+x,$ $v^3=80-x,$ следовательно, $u^3+v^3=152.$ Кроме того, исходное уравнение можно записать в виде $u+v=8.$ Получаем систему уравнений

---

[4] Отметим, что этот переход может не являтся равносильным. Фактически мы уравнение $3\sqrt[3]{(72+x)(80-x)}\left(\sqrt[3]{72+x}+\sqrt[3]{80-x}\right)=360$ почленно разделили на равносильное ему уравнение $\sqrt[3]{72+x}+\sqrt[3]{80-x}=8.$ При таком действии могут появиться лишние корни (потерять корни мы при этом не можем, если только не делим на ноль). Почему? Пусть x_0 – корень уравнений $f_1(x)=f_2(x)$ и $g_1(x)=g_2(x),$ при этом $g_1(x)$ или $g_2(x)$ не обращаются в ноль. Тогда $f_1(x_0)=f_2(x_0)$ и $g_1(x_0)=g_2(x_0),$ откуда $\frac{f_1(x_0)}{g_1(x_0)}=\frac{f_2(x_0)}{g_2(x_0)},$ т. е. x_0 является корнем уравнения $\frac{f_1(x)}{g_1(x)}=\frac{f_2(x)}{g_2(x)}.$ Но при этом нет никаких гарантий, что у полученного в результате деления уравнения не появится лишние корни. Например, оба уравнения $x^2+2x=-1$ и $x+3=2$ имеют единственный корень $x=-1.$ В то же время уравнение $\frac{x^2+2x}{x+3}=\frac{-1}{2}$ имеет корни $x=-1$ и $x=-\frac{3}{2}.$ Приобретение лишних корней может также происходить при почленном умножении, сложении, вычитании равносильных уравнений.

$$\begin{cases} u+v=8, \\ u^3+v^3=152 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=8, \\ (u+v)\left(u^2-uv+v^2\right)=152 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=8-v, \\ u^2-uv+v^2=19 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u=8-v, \\ (8-v)^2-v(8-v)+v^2=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=8-v, \\ v^2-8v+15=0. \end{cases}$$

Если $v=5$, то $u=3$; тогда $x=-45$.

Если $v=3$, то $u=5$; тогда $x=53$.

Ответ: $x=53$, $x=-45$.

§2. Системы уравнений

1. Системы линейных уравнений

Их вы подробно изучали в 7 классе и они не вызывают существенных сложностей, так как всегда могут быть решены, например, подстановкой. Остановимся немного подробнее на геометрической интерпретации. Пусть дана система

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases} \tag{9}$$

Будем считать, что в каждом уравнении хотя бы один из коэффициентов при переменных x, y отличен от нуля. Иначе, например, при $a_1=b_1=0$, первое уравнение принимает вид $0=c_1$, т. е. оно либо выполняется при всех x, y (если $c_1=0$), либо не выполняется ни при каких x, y (если $c_1 \neq 0$).

Тогда каждое уравнение системы (9) задаёт прямую на плоскости. Возможны три ситуации.

1) Прямые пересекаются (если коэффициенты при переменных не пропорциональны, т. е. $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$). Тогда система имеет одно решение – точку пересечения прямых.

2) Прямые параллельны (если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$). Тогда решений нет.

3) Прямые совпадают (если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$). Тогда каждая точка, лежащая на прямой, является решением системы.

В качестве упражнения можете записать условия для коэффициентов в том случае, когда какие – либо из них обращаются в ноль.

Пример 10. Найдите все значения параметра, при каждом из которых система $\begin{cases}(a+1)x-y=a,\\(a-3)x+ay=-9\end{cases}$ имеет единственное решение.

Решение. Система имеет единственное решение при $\dfrac{a+1}{a-3}\neq-\dfrac{1}{a}$, откуда $a^2+2a-3\neq0$, т. е. $a\neq1$ и $a\neq-3$.

Ответ: $a\neq1$, $a\neq-3$.

Пример 11. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}ax-y=3a,\\y-|x|=1\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Складывая уравнения системы, получаем $ax-|x|=3a+1$. Заметим, что количество решений системы равно количеству решений этого уравнения. Действительно, из второго уравнения системы $y=|x|+1$, т. е. для каждого значения x существует единственное значение y.

1) Если $x\geq0$, то уравнение принимает вид $ax-x=3a+1$, откуда $x(a-1)=3a+1$. При $a=1$ решений нет, а при $a\neq1$ получаем $x=\dfrac{3a+1}{a-1}$.

Этот корень удовлетворяет условию $x\geq0$, если $a\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{3}\right]\cup(1;+\infty)$.

2) Если $x<0$, то $ax+x=3a+1\Leftrightarrow x(a+1)=3a+1$.

Если $a=-1$, то $\varnothing$, а если $a\neq-1$, то $x=\dfrac{3a+1}{a+1}$. Условие $x<0$ выполнено при $\dfrac{3a+1}{a+1}<0\Leftrightarrow a\in\left(-1;-\dfrac{1}{3}\right)$.

Корни, полученные в первом и втором случаях, не могут совпадать, так как в первом случае они неотрицательны, а во втором – отрицательны. Нас интересуют те значения a, при которых ровно один корень, т. е. те значения a, которые принадлежат ровно одному из множеств $\left(-\infty;-\dfrac{1}{3}\right]\cup(1;+\infty)$ и $\left(-1;-\dfrac{1}{3}\right)$. Это $(-\infty;-1]\cup\left\{-\dfrac{1}{3}\right\}\cup(1;+\infty)$.

Ответ: $a\in(-\infty;-1]\cup\left\{-\dfrac{1}{3}\right\}\cup(1;+\infty)$.

2. Нелинейные системы уравнений

В отличие от систем линейных уравнений общих методов решения нет. Системы, в которых одно из уравнений линейное, а второе нелинейное, как правило, решаются следующим образом. Из линейного уравнения одна из переменных выражается через другую и подставляется во второе уравнение.

Если в системе оба уравнения нелинейные, то можно попробовать разложить одно из уравнений на множители. Применяют также комбинирование уравнений с целью получения нового уравнения, которое можно разложить на множители.

Пример 12. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} 2x^2 - y^2 - x + y + 1 = 0, \\ 4x^2 - y^2 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x-y)xy = 30, \\ (x+y)xy = 120; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x(y+1) = 16, \\ \dfrac{x}{y+1} = 4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7, \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91. \end{cases}$

Решение. а) Из второго уравнения системы: $(2x-y)(2x+y) = 0$,

поэтому $\begin{cases} 2x^2 - y^2 - x + y + 1 = 0, \\ 4x^2 - y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - y^2 - x + y + 1 = 0, \\ \left[\begin{array}{l} 2x - y = 0, \\ 2x + y = 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 2x, \\ 2x^2 - y^2 - x + y + 1 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} y = -2x, \\ 2x^2 - y^2 - x + y + 1 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 2x, \\ 2x^2 - x - 1 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} y = -2x, \\ 2x^2 + 3x - 1 = 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решение каждой из этих систем сводится к решению квадратного уравнения, после чего находим соответствующие значения y.

Ответ: $(1;2), \left(-\dfrac{1}{2};-1\right), \left(\dfrac{-3+\sqrt{17}}{4};\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}\right), \left(\dfrac{-3-\sqrt{17}}{4};\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$.

б) Сложив оба уравнения, получаем $2x^2y = 150$, а вычитая из второго уравнения первое: $2xy^2 = 90$.

Таким образом, $\begin{cases} (x-y)xy = 30, \\ (x+y)xy = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2y = 75, \\ xy^2 = 45. \end{cases}$

Умножим первое уравнение на второе: $x^3y^3 = 75\cdot 45 \Leftrightarrow xy = 15.$ Тогда

$$\begin{cases} x^2y = 75, \\ xy^2 = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\cdot xy = 75, \\ xy\cdot y = 45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\cdot 15 = 75, \\ 15\cdot y = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5, \\ y = 3. \end{cases}$$

Подстановкой в исходные уравнения убеждаемся, что (5;3) – решение системы.

Ответ: $(5;3)$.

в) Почленно перемножив уравнения системы, получаем $x^2 = 64,$ отсюда $x = \pm 8.$

Если $x = 8,$ то из первого уравнения $8(y+1) = 16 \Leftrightarrow y = 1.$

Если $x = -8,$ то из первого уравнения $-8(y+1) = 16 \Leftrightarrow y = -3.$

Ответ: $(8;1), (-8;-3)$.

Замечание. *При почленном сложении, умножении уравнений системы (и подобных действиях) надо следить за равносильностью преобразований. Если оказывается, что при каком-либо переходе мы получили следствие вместо равносильности, то в конце решения надо будет делать проверку – подставлять найденные решения в исходную систему.*

Например, переход

$$\begin{cases} f_1 = f_2, \\ g_1 = g_2 \end{cases} \to \begin{cases} f_1 + g_1 = f_2 + g_2, \\ f_1 - g_1 = f_2 - g_2 \end{cases}$$

Является равносильным преобразованием. Действительно, складывая уравнения системы справа, получаем, что

$$(f_1 + g_1) + (f_1 - g_1) = (f_2 + g_2) + (f_2 - g_2) \Leftrightarrow 2f_1 = 2f_2.$$

Но тогда $g_1 = g_2$. *Таким образом, из уравнений новой системы следуют уравнения исходной системы, поэтому данный переход является равносильным.*

Если же почленно перемножить и разделить уравнения системы, то преобразование оказывается не равносильным. Рассмотрим такой переход:

$$\begin{cases} f_1 = f_2, \\ g_1 = g_2 \end{cases} \to \begin{cases} f_1g_1 = f_2g_2, \\ \dfrac{f_1}{g_1} = \dfrac{f_2}{g_2}. \end{cases}$$

Пусть для определённости $g_1 \neq 0, g_2 \neq 0.$ *Тогда из первого уравнения системы справа получаем* $f_1 = \dfrac{f_2g_2}{g_1}.$ *Подстановка во второе уравнение* *даёт* $\dfrac{f_2 g_2}{g_1^2}=\dfrac{f_2}{g_2}$, *откуда* $f_2\left(g_2^2-g_1^2\right)=0$, *т. е. либо* $f_2=0$, *либо* $g_2^2=g_1^2$, $g_2=\pm g_1$. *Значит, у новой системы могут появиться лишние решения. В этом легко убедиться на примере пункта в). Указанные преобразования приводят нас к следующему:*

$$\begin{cases} x(y+1)=16, \\ \dfrac{x}{y+1}=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=16\cdot 4, \\ (y+1)^2=\dfrac{16}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\pm 8, \\ y+1=\pm 2, \end{cases}$$

т. е. у новой системы 4 решения: $(8;-3),(-8;-3),(8;1),(-8;1)$, *но только два из них являются решениями исходной.*

г) Заметим, что

$$x^4+x^2y^2+y^4=\left(x^4+2x^2y^2+y^4\right)-x^2y^2=\left(x^2+y^2\right)^2-(xy)^2=$$

$$=\left(x^2+xy+y^2\right)\left(x^2-xy+y^2\right),$$

поэтому система равносильна следующей:

$$\begin{cases} x^2-xy+y^2=7, \\ \left(x^2-xy+y^2\right)\left(x^2+xy+y^2\right)=91 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-xy+y^2=7, \\ 7\left(x^2+xy+y^2\right)=91 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-xy+y^2=7, \\ x^2+xy+y^2=13 \end{cases} \Leftrightarrow \text{// почленно складываем и вычитаем уравнения системы //}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+2y^2=20, \\ -2xy=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=10, \\ 2xy=6 \end{cases} \Leftrightarrow \text{// почленно складываем и вычитаем //} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2+2xy+y^2=16, \\ x^2-2xy+y^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2=16, \\ (x-y)^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\pm 4, \\ x-y=\pm 2. \end{cases}$$

Рассматриваем 4 возможных случая. В каждом из них почленно складываем и вычитаем уравнения системы:

$$\begin{cases} x+y=4, \\ x-y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=2, \\ 2y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=3; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=4, \\ x-y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=6, \\ 2y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3, \\ y=1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=-4, \\ x-y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=-6, \\ 2y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3, \\ y=-1; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=-4, \\ x-y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=-2, \\ 2y=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1, \\ y=-3. \end{cases}$$

Ответ: $(1;3),(3;1),(-3;-1),(-1;-3)$.

3. Системы, сводящиеся к решению однородного уравнения

Уравнения вида $P(x,y)=0,$ где $P(x,y)-$ многочлен с двумя переменными x и $y,$ называются однородными относительно x и $y,$ степени $k,$ если в каждом из членов сумма степеней x и $y,$ одинакова и равна $k.$ Например, уравнение $x^2-3xy-7y^2=0$ является однородным второй степени, а $x^3-xy^2-2y^3=0-$ однородным третьей степени. Уравнение $\frac{x^3}{y}-xy-\frac{2y^3}{x}=0,$ вообще говоря, однородным не является, т. к. левая часть не многочлен. Тем не менее, в каждом из членов сумма степеней x и y равна двум (например, $\frac{x^3}{y}=x^3y^{-1},\ 3+(-1)=2$). В этом случае уравнение станет однородным, если избавиться от знаменателей, т. е. домножить обе части на xy (получится $x^4-x^2y^2-2y^4=0,$ т. е. однородное уравнение четвёртой степени).

Если обе части однородного уравнения степени k разделить на x^k или $y^k,$ то получится уравнение относительно дроби $\frac{y}{x}$ или $\frac{x}{y}$ (при этом перед делением надо отдельно разобрать случай $x=0,$ если делим на x^k, и $y=0,$ если делим на y^k).

Пример 13. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases}2x^2+y^2=6,\\3x^2+2xy-y^2=3;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\dfrac{3x-9y}{x+y}+\dfrac{2x+y}{x-y}=4,\\x^2-y^2=48;\end{cases}$

Решение. а) Складываем первое уравнение, умноженное на (-1) со вторым уравнением, умноженным на 2, и получаем $4x^2+4xy-3y^2=0$ (т. е. однородное уравнение).

Покажем два способа его решения.

1) Решаем как квадратное уравнение относительно $x.$ Тогда $D=(4y)^2+4\cdot4\cdot3y^2=64y^2;\ x=\frac{-4y\pm8y}{8};\ x=-\frac{3}{2}y$ или $x=\frac{1}{2}y.$

2) Если $y=0,$ то уравнение принимает вид $4x^2=0,$ т. е. $x=0.$ Но пара чисел $x=y=0$ не удовлетворяет уравнениям исходной системы, т. е. при $y=0$ решений нет. Если $y\neq0,$ то делим обе части уравнения

на y^2 и получаем $4\left(\frac{x}{y}\right)^2+4\left(\frac{x}{y}\right)-3=0.$ Это квадратное уравнение относительно дроби $\frac{x}{y}.$ Из него получаем, что $\frac{x}{y}=-\frac{3}{2}$ или $\frac{x}{y}=\frac{1}{2},$ т. е. $x=-\frac{3y}{2}$ или $x=\frac{y}{2}.$

Второй способ потребовал от нас несколько больше времени, но он более универсален, так как подходит не только для однородных уравнений второй степени, но и для более высоких степеней[5]. Вернёмся к нашей системе:

$$(1)\ \ y=2x\Rightarrow 2x^2+4x^2=6,\ \ x=\pm1.$$

$$(2)\ \ y=-\frac{2}{3}x\Rightarrow 2x^2+\frac{4}{9}x^2=6,\ \ x=\pm\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{11}}.$$

Находим соответствующие значения $y.$

Ответ: $(-1;-2),\ (1;2),\ \left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{11}};-\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{11}}\right),\ \left(-\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{11}};\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{11}}\right).$

б) Если обе части первого уравнения умножить на $(x-y)(x+y),$ а затем раскрыть скобки и привести подобные слагаемые, то получится однородное уравнение второй степени. Но можно поступить и по-другому. Если $y=0,$ то первое уравнение системы принимает вид $3+2=4,$ то есть здесь нет решений. Если $y\neq0,$ то разделив числитель и знаменатель каждой дроби на y и обозначив $\frac{x}{y}=t,$ получаем:

$$\frac{3t-9}{t+1}+\frac{2t+1}{t-1}=4\Leftrightarrow\begin{cases}t\neq\pm1,\\(3t-9)(t-1)+(2t+1)(t+1)=4(t^2-1)\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t\neq\pm1,\\t^2-9t+14=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2,\\t=7.\end{array}\right.$$

---

[5] Например, если обе части уравнения $x^3-xy^2-2y^3=0$ разделить на $y^3,$ то получим $\left(\frac{x}{y}\right)^3-\frac{x}{y}-2=0.$

Если $t=2,$ то $x=2y$ и второе уравнение исходной системы принимает вид $4y^2-y^2=48,$ откуда $y=\pm 4.$ Получаем два решения $(8;\,4)$ и $(-8;\,-4).$

Если $t=7,$ то $x=7y,$ $49y^2-y^2=48 \Leftrightarrow y=\pm 1.$

Если $y=1,$ то $x=7;$ если $y=-1,$ то $x=-7.$

Ответ: $(-7;\,-1),$ $(7;\,1),$ $(8;\,4),$ $(-8;\,-4).$

4. Симметрические системы

Многочлен с двумя переменными $F(x,y)$ называется **симметрическим**, если $F(x,y)=F(y,x)$. Иными словами, многочлен является симметрическим, если он не изменяется, когда переменные x и y меняются местами. Например, многочлены $x^3+y^3;$ $xy-590;$ $2x^2y+y+2xy^2+x$ являются симметрическими, а многочлены x^2+y^2-6x и $2x^5+2y$ симметрическими не являются.

Многочлены $u=x+y$ и $v=xy$ называются элементарными симметрическими многочленами. Оказывается, что любой симметрический многочлен можно представить в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов. Последнее утверждение часто оказывается полезным при решении систем, в которых оба уравнения симметрические. А именно, такие системы обычно упрощаются при замене $x+y=u,$ $xy=v.$ Заметим, что

$$x^2+y^2=(x^2+2xy+y^2)-2xy=(x+y)^2-2xy=u^2-2v; \tag{10}$$

$$\begin{aligned} x^3+y^3&=(x+y)(x^2-xy+y^2)=u((x^2+y^2)-xy)=\\ &=u(u^2-2v-v)=u^3-3uv; \end{aligned} \tag{11}$$

$$x^4+y^4=(x^4+2x^2y^2+y^4)-2x^2y^2=(x^2+y^2)^2-2(xy)^2=$$
$$=(u^2-2v)^2-2v^2=u^4-4u^2v+2v^2.$$

Если мы хотим получить выражение для $x^5+y^5,$ то можно, например, перемножить почленно два равенства (10) и (11), тогда получим:

$$(x^2+y^2)(x^3+y^3)=(u^2-2v)(u^3-3uv) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^5+y^5+x^2y^3+x^3y^2=u^5-5u^3v+6uv^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^5+y^5=u^5-5u^3v+6uv^2-x^2y^2(x+y),$$

откуда $x^5+y^5=u^5-5u^3v+6uv^2-v^2u=u^5-5u^3v+5uv^2$.

Пример 14. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x^3+y^3=7, \\ xy(x+y)=-2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2y-xy^2=6, \\ xy+x-y=5. \end{cases}$

Решение. а) После замены система принимает вид

$$\begin{cases} u^3-3uv=7, \\ uv=-2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3=1, \\ uv=-2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1, \\ v=-2. \end{cases}$$

Значит, $\begin{cases} x+y=1, \\ xy=-2. \end{cases}$

Решая эту систему[6], получаем две пары чисел: $(2;-1)$ и $(-1;2)$.

Ответ: $(2;-1),(-1;2)$.

б) Введём замену $x=-z.$ Тогда система принимает вид:

$$\begin{cases} z^2y+zy^2=6, \\ -zy-z-y=5, \end{cases}$$

т. е. она становится симметрической! Пусть $y+z=u,\quad yz=v.$ Система преобразуется к виду:

$$\begin{cases} uv=6, \\ u+v=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=-3,\ v=-2; \\ u=-2,\ v=-3. \end{array}\right.$$

Если $u=-3,\quad v=-2,$ то $\begin{cases} y+z=-3, \\ yz=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-3-z, \\ z^2+3z-2=0. \end{cases}$

Получаем две пары $y=\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2},\ z=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$ и $y=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2},$ $z=\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}.$

---

[6] Система уравнений $\begin{cases} x+y=a, \\ xy=b, \end{cases}$ где $a,b-$ известные числа, может иметь не более двух решений (т. к. при подстановке $y=a-x$ во второе уравнение получаем *квадратное* уравнение). Поэтому если нам удалось подобрать решение этой системы $(x_0;y_0),$ то вторым решением является $(y_0;x_0)$ в силу симметричности, а других решений нет. (Если оказалось, что $y_0=x_0,$ то можете в качестве упражнения показать, что такая система имеет ровно одно решение).

Если $u=-2,\ v=-3,$ то $\begin{cases} y+z=-2, \\ yz=-3, \end{cases}$

откуда $y=-3,\ z=1$ или $y=1,\ z=-3.$

Учитывая, что $x=-z,$ получаем такие решения:

$$\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2};\ \frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right),\ \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2};\ \frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right),\ (-1;\ -3),\ (3;\ 1).$$

Ответ: $\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2};\ \frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right),\ \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2};\ \frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right),\ (-1;\ -3),\ (3;\ 1).$

5. Графический метод решения системы.

Задача. Сумма квадратов двух чисел равна 25. Разность чисел равна 1. Найдите эти числа.

Решение. Пусть первое число *x*, а второе *y*. По условию задачи сумма из квадратов равна 25. Это можно записать в виде уравнения с двумя переменными $x^2+y^2=25.$

Разность чисел *x* и *y* равна 1. Это условие даёт ещё одно уравнение $x-y=1.$ Получим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ x-y=1. \end{cases} \tag{1}$$

Решим данную систему графически.

График первого уравнения есть окружность с центром в начале координат и радиусом равным 5. Графиком второго уравнения имеется прямая рис. 1.

Каждое решение системы есть координаты обеих точек графиков уравнений системы.

Графики уравнений системы (1) имеют две общие точки. Значит, эта система имеет два решения. Используя рис. 1, найдём (приблизительно) решения: $x_1\approx 4,\ y_1\approx 3$ и $x_2\approx -3,\ y_2\approx -4.$

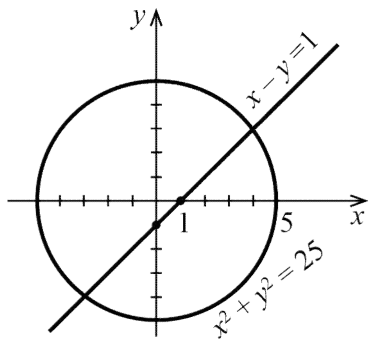

Рис. 1

Если найденные приблизительные значения x и y подставить в уравнение системы (1), то можно убедиться, что пара $(4;3)\cup(-3;-4)$ являются решениями этой системы.

Следовательно, имеется две пары чисел $(4;3)\cup(-3;-4)$ – удовлетворяющие условию задачи.

При решении задачи мы применили графический способ решения системы двух уравнений с двумя неизвестными. Он состоит в том, что строят графики обоих уравнений и находят координаты общих точек этих графиков. Необходимо заметить, что графический способ позволяет находить решения систем лишь приблизительно.

Контрольные вопросы

1(4). Докажите, что уравнения не имеют решений:

а)(1) $\sqrt{4-x}+4=0$; **б)(1)** $\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x+5}+4=0$;

в)(1) $\sqrt{1-x}+\sqrt[6]{3x-4}=1$; **г)(1)** $\sqrt{-2-x}=\sqrt[3]{x+1}$.

2(2). Равносильны ли уравнения

а)(1) $\sqrt{x-4}=x$ и $x^2=x-4$ **б)(1)** $\sqrt[4]{x-3}=|x|$ и $x-3=x^4$.

3(2). Используя графический подход, показать, что уравнение не имеет корней: $\sqrt{x-2}=1-\sqrt{x}$.

4(2). Решите графически систему уравнений:

$$\begin{cases}(x-3)^2+(y-2)^2=1;\\ x-y=4.\end{cases}$$

5(2). Найдите все значения параметра а, при которых система

$$\begin{cases}(a+1)x-y=a,\\ (a-3)x+ay=-9\end{cases}$$

имеет единственное решение.

6(5). Верно ли следующее решение уравнения

$\sqrt{x^2+3x-2}-\sqrt{x^2-x+1}=4x-3$? Ответ объясните.

Умножая обе части уравнения на положительное выражение $\sqrt{x^2+3x-2}+\sqrt{x^2-x+1}$, получаем:

$$(x^2+3x-2)-(x^2-x+1)=(4x-3)\left(\sqrt{x^2+3x-2}+\sqrt{x^2-x+1}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x-3=(4x-3)\left(\sqrt{x^2+3x-2}+\sqrt{x^2-x+1}\right),$$

откуда $x=\dfrac{3}{4}$ или $\sqrt{x^2+3x-2}+\sqrt{x^2-x+1}=1$.

Складывая это уравнение с исходным уравнением, получаем:

$$2\sqrt{x^2+3x-2}=4x-2\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+3x-2=(2x-1)^2,\\ 2x-1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 7x + 3 = 0, \\ 2x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7 \pm \sqrt{13}}{6}, \\ x \geq \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{6}.$$

Значит, уравнение имеет корни $x = \dfrac{3}{4}$, $x = \dfrac{7 \pm \sqrt{13}}{6}$.

7(2). Найдите область определения функции

$$y = \sqrt[4]{9 - x^2} + \sqrt[3]{\frac{x-2}{|x| - 2}}.$$

8(4). Равносильны ли следующие системы уравнений? Ответ объясните (уравнения систем слева пронумерованы; справа показан способ, как система получена из исходной).

а)(2) $\begin{cases} x + y = 4, & (1) \\ x + z = -2, & (2) \\ y + z = 7 & (3) \end{cases}$ и $\begin{cases} y - z = 6, & (1)-(2) \\ x - z = -3, & (1)-(3) \\ x - y = -9; & (2)-(3) \end{cases}$

б)(2) $\begin{cases} xy = -14, & (4) \\ \dfrac{x}{y} = -\dfrac{7}{2} & (5) \end{cases}$ и $\begin{cases} xy \cdot \dfrac{x}{y} = -49, & (4)\cdot(5) \\ xy : \dfrac{x}{y} = 4. & (4):(5) \end{cases}$

Указание. Есть два способа решения этого задания:

1) Можно решить каждую из систем и посмотреть совпадают ли множества их решений;

2) В каждом из пунктов видно, что из первой системы следует вторая. Надо проверить, что из уравнений второй системы следуют уравнения первой. Если мы смогли доказать это, то получаем, что системы равносильны. Если же мы смогли подобрать решение второй системы, не являющееся решением первой, то системы равносильными не являются.

9(3). Решите уравнение:

а)(1) $3\sqrt{5 - x} + 1 = x$;

б)(1) $\sqrt{9 - x^2} = -3$;

в)(1) $\sqrt{10 - x} + 9 = x$.

Задачи

1(6). Решите уравнения:

а)(1) $\sqrt[4]{11-x}=\sqrt{x+1}$;

б)(1) $\sqrt{10+\sqrt[3]{x^2-5}}=3$;

в)(2) $x+\sqrt{x^4-2x-19}=1$;

г)(2) $|x-3|=\sqrt{x^2+4x+4}+5$.

2(6). Решите уравнения, используя введения новой переменной:

а)(2) $\sqrt[7]{\dfrac{5-x}{x+3}}+\sqrt[7]{\dfrac{x+3}{5-x}}=2$;

б)(2) $\sqrt{x^2-3x+5}+x^2=3x+7$;

в)(2) $\sqrt{x^3+8}+\sqrt[4]{x^3+8}=6$.

3(3). Решите уравнения, используя умножение на сопряженное уравнение:

$$\sqrt{3x^2-7x+3}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3x^2-5x-1}-\sqrt{x^2-3x+4}.$$

4(3). Решите уравнения:

а)(1) $\sqrt[3]{\sqrt{x+1}-10}=-2$;

б)(2) $\sqrt{x+3}+\sqrt{6+x}=\dfrac{3}{\sqrt{x+3}}$.

5(4). Решите системы уравнений:

а)(2) $\begin{cases} x-y=1, \\ x^2+y^2=41; \end{cases}$

б)(2) $\begin{cases} xy=2, \\ 9x^2+y^2=13. \end{cases}$

6(6). Решите системы уравнений:

а)(3) $\begin{cases} x^2+y^2=34, \\ x+y+xy=23; \end{cases}$

б)(3) $\begin{cases} x^3y+xy^3=\dfrac{10}{9}(x+y)^2, \\ x^4y+xy^4=\dfrac{2}{3}(x+y)^3. \end{cases}$

7(4). Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 + 8x + 10y + 12 = 0, \\ x^2 + 3xy + 2y^2 - x + y - 6 = 0. \end{cases}$$

8(8). Решите системы уравнений:

а(3) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{y}{x}} - 2\sqrt{\dfrac{x}{y}} = 1, \\ \sqrt{5x+y} + \sqrt{5x-y} = 4; \end{cases}$

б(5) $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x+2y} = 10, \\ \sqrt{x+y} + 2x + y = 16. \end{cases}$

9(4). Решите уравнение $\sqrt[4]{x-15} = 4 - \sqrt[4]{97-x}$.

10(4). По окружности, длина которой 100м, движутся равномерно две точки. Они встречаются через каждые 4с, двигаясь в противоположных направлениях, и через каждые 20с, двигаясь в одном направлении. Найдите скорости этих точек.