Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)
Заочная физико-техническая школа

ФИЗИКА

Векторы в физике
(вводное задание)

Задание №1 для 9-х классов

(2021 – 2022 учебный год)

г. Долгопрудный, 2021

Составитель: А.А. Лукьянов, кандидат физико-математических наук, доцент.

Физика: задание №1 для 9-х классов (2021 – 2022 учебный год), 2021, 30 с.

Дата отправления заданий по физике и математике – 27 сентября 2021 г.

Задание посвящено изложению основ *векторной* алгебры в объёме, необходимом для дальнейшего изучения физики в рамках программы ЗФТШ.

Учащийся должен стараться выполнять все задачи и контрольные вопросы в заданиях. Некоторая часть примеров и задач может оказаться сложной, и потребуют основательных усилий при изучении этих примеров и решении задач; они обозначены звездочкой «*». Мы рекомендуем приступать к ним в последнюю очередь, разобравшись вначале с более простыми.

Составитель:
Лукьянов Андрей Александрович
Подписано в печать 29.06.21. Формат 60×90 1/16.
Бумага типографская. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1,87. Уч.-изд. л. 1,66.

Заочная физико-техническая школа
Московского физико-технического института
(национального исследовательского университета)

Институтский пер., 9, г. Долгопрудный, Московская обл., 141700.
ЗФТШ, тел. (495) 408-51-45 – **заочное отделение,**
тел. (498) 744-63-51 – **очно-заочное отделение,**
тел. (498) 744-65-83 – **очное отделение.**

e-mail: zftsh@mail.mipt.ru

Наш сайт: https://zftsh.online/

Введение

Традиционно курс физики начинается с изучения *механического движения*, которое определяют как изменение положения тел или их частей в пространстве относительно друг друга с течением времени. Уже описание движения простейшего объекта – материальной точки (тела, размерами которого в данной задаче можно пренебречь) – требует введения *векторных* величин: радиус-вектора $\vec{r}(t)$ (характеризующего положение точки в пространстве в каждый момент времени *t*), вектора перемещения $\Delta\vec{r}$ (см. рис. 1), скорости и др.

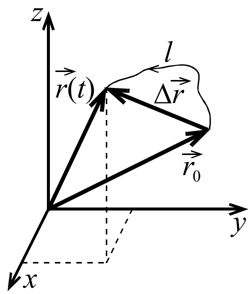


Рис. 1

Что же такое векторная величина? Напомним, что некоторые физические величины полностью характеризуются единственным числом, которое выражает отношение этой величины к единице измерения. Такие величины называются *скалярными.* Простейшие примеры их – масса, плотность, температура. Так, температура в Москве 25°C полностью задана *одним числом* (25°C); нельзя, например, сказать, что она направлена под каким-то углом к горизонту, температура никуда не направлена. То же самое относится к массе тела (но не к силе тяжести!), плотности вещества.

С другой стороны, для характеристики таких физических величин, как перемещение, скорость, сила, необходимо также знать и их направление. Такие величины называются *векторными.* Они являются предметом изучения специального раздела математики, называемого векторной алгеброй.

§1. Определение вектора. Операции над векторами

1. <u>*Основные определения.*</u> Удивительно, но с векторными величинами разной природы (перемещением, скоростью, силой, импульсом и др.) можно работать в значительной мере единообразно – как с геометрическими объектами – *геометрическими векторами*, или просто векторами, хотя есть и нюансы (см. ниже).

Вектор представляет собой направленный отрезок прямой, для которого *определены правила (законы) сложения с другими векторами, правило вычитания векторов, правило умножения вектора на число, скалярное произведение двух векторов* и некоторые другие операции.

Стрелка компаса – **не** вектор, т. к. для неё нет таких операций.

Мы будем рассматривать векторы на плоскости и в соответствии со сложившейся традицией обозначать их латинскими буквами со стрелками наверху, например: $\vec{v}, \vec{F}, \vec{a}, \vec{b}$ и т. п. Часто в целях экономии используют упрощённое обозначение – букву с чертой, например, $\overline{v}$ или $\overline{F}$.

Одну из граничных точек вектора называют его началом, а другую – концом. Направление вектора задаётся от начала к концу, причём на чертеже конец вектора отмечают стрелкой. Начало вектора называют также *точкой его приложения.* Если точка A является началом вектора $\vec{a}$, то мы будем говорить, что вектор $\vec{a}$ приложен в точке A (рис. 2).

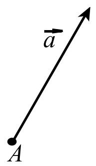


Рис. 2

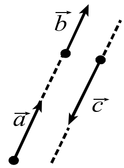


Рис. 3

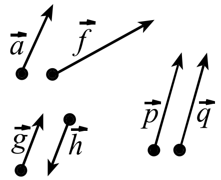


Рис. 4

Число, выражающее длину направленного отрезка, называют *модулем* вектора и обозначают той же буквой, что и сам вектор, но без стрелки наверху, например: модулем вектора $\vec{v}$ является число v. Часто для обозначения модуля вектора прибегают к помощи знака абсолютной величины и пишут, например, $|\vec{v}|$ или $|\vec{F}|$.

Вектор называется *нулевым*, если его начало и конец совпадают. Нулевой вектор не имеет определённого направления и его длина (модуль) равна нулю.

Векторы называются *коллинеарными*, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых. Так, например, на рис. 3 векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ коллинеарны.

Два вектора называются равными, если они коллинеарны, имеют одинаковую длину и одинаковое направление.

На рис. 4 слева изображены неравные векторы $\vec{a}$ и $\vec{f}$, $\vec{g}$ и $\vec{h}$, а справа – равные векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$. Точка приложения геометрического вектора $\vec{a}$ может быть выбрана произвольно. Мы не различаем двух равных векторов, имеющих разные точки приложения и получающихся один из другого параллельным переносом. В соответствии с этим векторы, изучаемые в геометрии, называют свободными (они определены с точностью до точки приложения).

В физике точка приложения вектора иногда имеет принципиальное значение. Достаточно вспомнить рычаг: две равные по модулю силы, направленные в одну и ту же сторону, производят на рычаг разное действие, если плечи сил не равны друг другу. И всё же сами силы равны друг другу! Бывают и случаи, когда вектору трудно приписать конкретную точку приложения. Например, если одна система отсчёта движется относительно другой со скоростью $\vec{v}$, то какой точке приписать эту скорость? Всем точкам движущейся системы!

2. <u>*Сложение двух векторов.*</u> Пусть даны два произвольных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 5а). Для нахождения их суммы нужно перенести вектор $\vec{b}$ параллельно самому себе так, чтобы его начало совпало с концом вектора $\vec{a}$. Тогда вектор, проведённый из начала вектора $\vec{a}$ в конец перенесённого вектора $\vec{b}$, и будет являться суммой $\vec{a}$ и $\vec{b}$. На рис. 5б – это вектор $\vec{c}$. Описанное правило есть просто *определение* суммы векторов. Как и в случае с числами, сумма векторов не зависит от порядка слагаемых, и поэтому можно записать

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}. \qquad (1)$$

Приведённое выше правило геометрического сложения векторов называется *правилом треугольника*.

Сумма векторов может быть найдена и по *правилу параллелограмма*. В этом случае параллельным переносом нужно совместить начала векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и построить на них, как на сторонах, параллелограмм. Тогда сумма $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будет представлять собой диагональ этого параллелограмма, конкретно – суммой $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будет вектор, начало которого совпадает с общим началом векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, конец расположен в противоположной вершине параллелограмма, а длина равна длине указанной диагонали (рис. 5в).

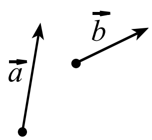


Рис. 5а

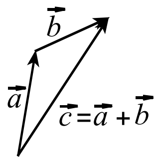


Рис. 5б

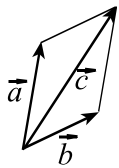


Рис. 5в

Оба способа сложения дают идентичный результат и одинаково часто применяются на практике. Когда речь идёт о нахождении суммы трёх и более векторов, часто последовательно используют правило треугольника. Поясним сказанное.

3. <u>*Сложение трёх и более векторов.*</u> Пусть нужно сложить три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{d}$ (рис. 6). Для этого по правилу треугольника сначала находится сумма любых двух векторов, например $\vec{a}$ и $\vec{b}$, потом полученный вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ по тому же правилу складывается с третьим вектором $\vec{d}$. Тогда полученный вектор $\vec{f} = \vec{c} + \vec{d}$ и будет представлять собой сумму трёх векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{d}$: $\vec{f} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{d}$. Как и в случае с двумя векторами, порядок слагаемых не влияет на конечный результат.

Чтобы упростить процесс сложения трёх и более векторов, обычно не находят промежуточные суммы типа $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, а применяют *правило многоугольника:* параллельными переносами из конца первого вектора откладывают второй, из конца второго – откладывают третий, из конца третьего – четвёртый и т. д. Так, на рис. 7 вектор $\vec{g}$ представляет собой сумму векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}, \vec{e}$, найденную по правилу многоугольника: $\vec{g} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{d} + \vec{e}$.

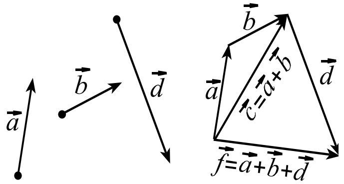


Рис. 6

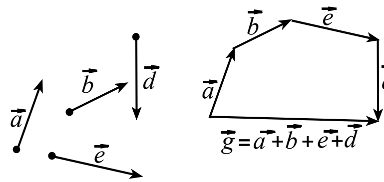


Рис. 7

Замечание. Не всякая векторная сумма может иметь физический смысл. Не всякие величины вообще имеет смысл складывать. Так, например, бессмысленно говорить, что, если у меня температура 36,6° и у вас тоже 36,6°, то вместе у нас температура 73,2°, хотя складывать температуры (числа) никто не запрещает. Всё же чаще всего сумма температур представляет собой никому не нужную величину; она редко входит в какие-либо уравнения (входит почти случайно).

Иное дело – с массой. Если система состоит из тел с массами m_1, m_2, m_3 и т. д., то масса всей системы равна $m = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots$ и т. д. (Если на лифте написано, что максимальный груз, перевозимый лифтом, равен 500 кг, то перед входом в лифт нужно убедиться, что **сумма масс** вносимых в лифт грузов не превышает 500 кг.) Говорят, что масса – есть *аддитивная величина* (от английского слова *add* – добавлять, прибавлять, складывать). А вот температура – не аддитивная величина.

Сила есть аддитивная векторная величина. Если к телу в точке (или к системе тел в разных точках!) приложены силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ и т. д., то сумма векторов сил $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots$ есть осмысленная и даже очень нужная величина. Например, в условиях равновесия тела сумма всех приложенных к нему сил $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots = 0$, даже если силы приложены в разных точках тела. Причём это относится не только к твёрдым телам. Если нитка подвешена за два конца к двум гвоздям, а в промежутке перекинута еще через какие-нибудь гвозди, то сначала нужно найти силы со стороны каждого из гвоздей и силу со стороны Земли (силу тяжести) $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, …; при этом говорят, что к нитке приложена сумма сил $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots$; в условиях равновесия эта сумма будет равна нулю.

Не так со скоростями. Если система состоит из двух частиц, имеющих в некоторый момент времени скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, то это **не** означает, что в этот момент вся система обладает скоростью равной векторной сумме $\vec{v}_1+\vec{v}_2$. Никто не запрещает складывать векторы скорости *разных частиц*; но с точки зрения физики вектор $\vec{v}_1+\vec{v}_2$ ничему приписать нельзя. В этом смысле скорость – не аддитивная величина. Суммой скоростей (векторной суммой) интересуются, когда одно движение накладывается на другое (например, Земля вращается вокруг Солнца, но вместе с Солнцем движется вокруг центра Галактики). А вот сумма скоростей отдельных частиц системы (например, сумма скоростей звезд в Галактике) физического интереса не представляет.

Родственная скорости величина, с которой вы еще не раз встретитесь в курсе физики, *импульс материальной точки*, равный произведению массы на скорость, $\vec{p}=m\vec{v}$ снова – величина аддитивная. В последнем равенстве мы встречаемся с умножением вектора на скаляр. Поясним эту процедуру.

4. *Умножение вектора на скаляр.* Произведением вектора $\vec{a}$ на число k называют новый вектор $\vec{b}=k\vec{a}$, коллинеарный вектору $\vec{a}$, направленный в ту же сторону, что и вектор $\vec{a}$, если $k>0$, и в противоположную сторону, если $k<0$, а модуль b равен

$$b=|k|a, \qquad (2)$$

где $|k|$ – абсолютная величина числа k.

Если два вектора коллинеарны, то они отличаются только скалярным множителем. Наоборот, если два вектора отличаются только скалярным множителем, не равным нулю, то они коллинеарны.

В случае, когда $k=0$ или $\vec{a}=0$, произведение $k\vec{a}$ представляет собой нулевой вектор, направление которого не определено. Если $k=1$, то согласно (2) $\vec{b}=\vec{a}$ и векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны (рис. 8а). При $k=-1$ получим $\vec{b}=-\vec{a}$. Вектор $-\vec{a}$ имеет модуль, равный модулю вектора $\vec{a}$, но направлен в противоположную сторону (рис. 8б). Два вектора, противоположно направленные и имеющие равные длины, называются *противоположными*.

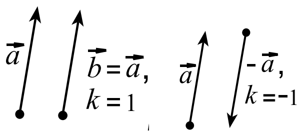


Рис. 8а **Рис. 8б**

Импульс тела $\vec{p}=m\vec{v}$ коллинеарен вектору скорости и направлен с ней в одну сторону, т. к. массы всех тел положительны. Чуть ранее говорилось об аддитивности импульса. Если система состоит из материальных точек с массами m_1, m_2, m_3 …, которые в некоторый момент времени имели скорости $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$, …, т. е. имели импульсы $\vec{p}_1=m_1\vec{v}_1$, $\vec{p}_2=m_2\vec{v}_2$, $\vec{p}_3=m_3\vec{v}_3$, …, то вся система в этот момент обладает импульсом $\vec{p}=\vec{p}_1+\vec{p}_2+\vec{p}_3+...=m_1\vec{v}+m_2\vec{v}_2+m_3\vec{v}_3+...$.

При этом каждое из слагаемых здесь должно быть найдено по правилу умножения вектора (скорости данной частицы) на скаляр (её массу), а затем все эти векторы должны быть сложены, например, по правилу многоугольника.

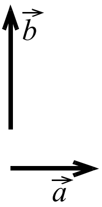


Рис. 9а

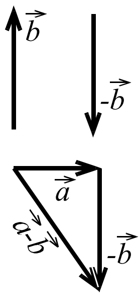


Рис. 9б

5. <u>*Разность двух векторов.*</u> Вычесть из вектора $\vec{a}$ вектор $\vec{b}$ означает прибавить к вектору $\vec{a}$ вектор $-\vec{b}$: $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$; см. рис. 9, а-б.

§2. Проекция вектора на заданное направление. Проектирование векторов на оси координат

1. <u>*Проекция вектора на заданное направление.*</u> Пусть заданы два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Приведём эти векторы к одному началу O (рис. 10). Угол, образованный лучами, исходящими из точки O и направленными вдоль векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, называют углом между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Обозначим этот угол через α.

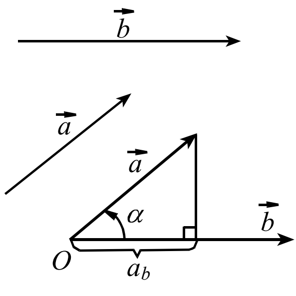


Рис. 10

Число $a_b = a\cos\alpha$ называется проекцией вектора $\vec{a}$ на направление вектора $\vec{b}$. Проекция вектора $\vec{a}$ получается, если из его конца опустить перпендикуляр на направление вектора $\vec{b}$ (рис. 10), тогда расстояние от общего начала векторов – точки O – до точки пересечения указанного перпендикуляра с прямой, на которой лежит вектор $\vec{b}$, будет равно модулю проекции вектора $\vec{a}$ на направление вектора $\vec{b}$.

Угол α может принимать различные значения, поэтому в зависимости от знака $\cos\alpha$ проекция может принимать положительные, отрицательные значения или нуль. Например, если угол α тупой, т. е. больше, чем 90°, но меньше 180°, то косинус такого угла отрицателен (см. рис. 11).

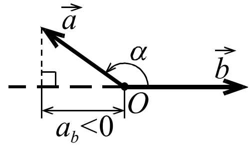


Рис. 11

Проекция равна нулю, если направления векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны (см. рис. 12).

Проекции равных векторов на любые направления равны друг другу. Проекции противоположных векторов отличаются знаком.

Легко показать, что проекция суммы векторов равна алгебраической сумме их проекций и что при умножении вектора на число его проекция умножается на то же число.

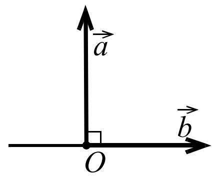


Рис. 12

2. *Разложение вектора*.

До сих пор мы говорили о сложении векторов. Для решения многих задач бывает необходимо произвести обратную процедуру – разложить вектор на составляющие, например, найти несколько сил, которые своим совместным действием могли бы заменить одну данную силу. Такая операция называется *разложением сил.*

Пусть на плоскости задан вектор $\vec{a}$ и две пересекающиеся в точке O прямые OA и OB (см. рис. 13). Вектор $\vec{a}$ можно представить в виде суммы двух векторов, направленных вдоль заданных прямых. Для этого параллельным переносом совместим начало вектора $\vec{a}$ с точкой O пересечения прямых. Из конца вектора $\vec{a}$ проведём два отрезка прямых, параллельных OA и OB. В результате получится параллелограмм. По построению $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$ (*). Векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ называются *составляющими* вектора $\vec{a}$ по заданным направлениям, а само представление вектора в виде суммы (*) – разложением вектора по двум направлениям.

Пример 1. В чём разница между проекцией вектора на ось и составляющей (компонентой) вектора вдоль этой оси?

Ответ. Проекция вектора – скаляр; составляющая вектора вдоль этой оси – вектор, направленный вдоль этой оси.

Пример 2. Пусть $a = 1$, угол между прямыми OA и OB равен $\varphi = 45°$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{a}_1$ равен $\varphi_1 = 15°$. Определите модули векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ в разложении (*), а также значения проекций вектора $\vec{a}$ на направления $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ (см. рис. 13).

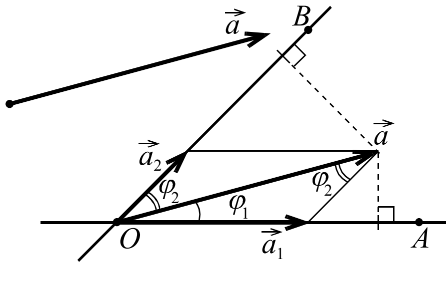


Рис. 13

Решение. $a_{a1} = a\cos\varphi_1 \approx 0{,}97$, $a_{a2} = a\cos\varphi_2 = \cos 30^\circ \approx 0{,}87$. Далее по теореме синусов $\dfrac{a_1}{\sin\varphi_2} = \dfrac{a}{\sin(180^\circ - \varphi_1 - \varphi_2)}$, откуда

$a_1 = \dfrac{\sin\varphi_2}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)} = \dfrac{\sin 30^\circ}{\sin 45^\circ} \approx 0{,}71$ и аналогично $a_2 = \dfrac{\sin 15^\circ}{\sin 45^\circ} \approx 0{,}37$.

3. _Проектирование вектора на оси координат_. Особенно важен частный случай разложения вектора по двум взаимно перпендикулярным направлениям. Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат xOy и некоторый вектор $\vec{a}$. Отложим из начала координат вдоль положительного направления осей Ox и Oy векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ соответственно такие, что $\left|\vec{i}\right| = 1$ и $\left|\vec{j}\right| = 1$. Векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ назовём *единичными векторами.*

Перенесём вектор $\vec{a}$ так, чтобы его начало совпало с началом координат. Пусть в этом положении он изображается направленным отрезком OA (рис. 14). Опустим из точки A перпендикуляры на оси Ox и Oy. Тогда векторы $\vec{a}_x$ и $\vec{a}_y$ будут составляющими вектора $\vec{a}$ по координатным осям, причём вектор $\vec{a}_x$ будет коллинеарен *вектору* $\vec{i}$, а вектор $\vec{a}_y$ – коллинеарен вектору $\vec{j}$. Следовательно, существуют такие числа a_x и a_y, что $\vec{a}_x = a_x\vec{i}$ и $\vec{a}_y = a_y\vec{j}$. Таким образом, вектор $\vec{a}$ может быть представлен в виде разложения по осям:

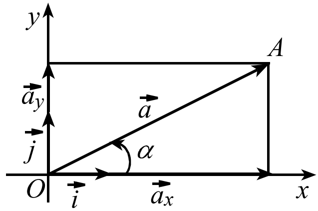


Рис. 14

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}. \qquad (3)$$

Числа a_x и a_y суть проекции вектора $\vec{a}$ на направления векторов $\vec{i}$ и $\vec{j}$ соответственно, то есть на оси Ox и Oy. Используется и иная, чем (3), форма записи векторов, а именно $\vec{a} = (a_x; a_y)$.

Иногда говорят о составляющей вектора вдоль **одной** единственной оси – без указания второй. Просто молчаливо предполагается, что вторая ось **перпендикулярна** первой (но почему-то не нарисована).

Пусть угол между положительным направлением оси Ox и вектором $\vec{a}$ равен α (рис. 14). Тогда $a_x = a\cos\alpha$, $a_y = a\sin\alpha$.

В зависимости от значения угла α проекции вектора $\vec{a}$ на оси прямоугольной системы координат могут быть положительными, отрицательными или равными нулю.

Зная проекции вектора $\vec{a}$ на оси координат, можно найти его величину и направление по формулам:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \text{ и } \operatorname{tg}\alpha = \frac{a_y}{a_x}, \qquad (4)-(5)$$

причём знаки a_x и a_y будут указывать на то, какому квадранту принадлежит значение α.

4. Пусть теперь нам задано векторное равенство $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ (рис. 15). Проектируя все векторы на оси координат, получим очевидные равенства

$$c_x = a_x + b_x, \quad c_y = a_y + b_y,$$

или

$$c_x = a\cos\alpha + b\cos\beta,$$
$$c_y = a\sin\alpha + b\sin\beta,$$

т. е. по проекциям векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ легко находятся проекции суммарного вектора $\vec{c}$.

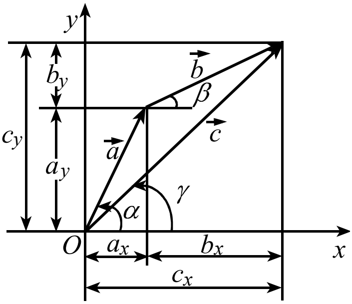


Рис. 15

§3. Скалярное произведение векторов

1. Определение. *Скалярным произведением* двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними, и обозначается $\vec{a}\cdot\vec{b}$. Таким образом,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a\cdot b\cdot\cos\alpha. \tag{6}$$

Иногда используют более сложные обозначения для скалярного произведения векторов: $(\vec{a}\vec{b})$ или даже $(\vec{a},\vec{b})$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны $\left(\vec{a}\perp\vec{b}\right)$, то $\cos\alpha = 0$ и поэтому $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. Скалярное произведение двух векторов также равно нулю, если хотя бы один из векторов является нулевым.

Если векторы коллинеарны и одинаково направлены, то $\cos\alpha = 1$, поэтому скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно произведению модулей векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. В частности, скалярное произведение вектора на самого себя равно квадрату его модуля: $\vec{a}\cdot\vec{a}=a^2$.

2. Имеется ещё одна важная форма записи скалярного произведения: через проекции векторов в прямоугольной системе координат *xOy*. Пусть в некоторой системе координат векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют координаты $(a_x;a_y)$ и $(b_x;b_y)$. Тогда для скалярного произведения векторов справедлива формула

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y. \tag{7}$$

Действительно, имеем $\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j})\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j})$, или после перемножения скобок $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x\vec{i}\vec{i} + a_x b_y\vec{i}\vec{j} + a_y b_x\vec{j}\vec{i} + a_y b_y\vec{j}\vec{j}$. Учитывая, что векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ единичные и взаимно перпендикулярные, $\left(\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=1 \text{ и } \vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{i}=0\right)$, получим (7).

Уточнение (написано по просьбе *Володковича Н.А.*, преподавателя школы Смоленской обл.). Кажущееся привычным перемножение скобок

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j})\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j})=a_xb_x\vec{i}\vec{i}+a_xb_y\vec{i}\vec{j}+a_yb_x\vec{j}\vec{i}+a_yb_y\vec{j}\vec{j}$$

не так очевидно для векторов. Во всяком случае, нужно ещё доказать, что оно согласуется с определением (6) скалярного произведения. Докажем, что

$$(\vec{a}+\vec{b})(\vec{c}+\vec{d})=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{d}\ . \qquad (*)$$

Для этого заметим, что скалярное произведение (6) можно переписать в виде $\vec{a}\cdot\vec{b}=a\cdot b_a\ \ (6')$, где b_a – проекция вектора $\vec{b}$ на направление вектора $\vec{a}$. (Можно было записать и иначе: $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_b\cdot b\ \ (6'')$, где a_b – проекция вектора $\vec{a}$ на направление вектора $\vec{b}$.) Далее – цепочка простых выкладок:

$$\vec{a}\cdot(\vec{c}+\vec{d})=(\vec{c}+\vec{d})\cdot\vec{a}=a(c_a+d_a)=a\cdot c_a+a\cdot d_a=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{d}\ ,$$

$$(\vec{a}+\vec{b})(\vec{c}+\vec{d})\equiv(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{e}=\vec{a}\cdot\vec{e}+\vec{b}\cdot\vec{e}=\vec{a}\cdot(\vec{c}+\vec{d})+\vec{b}\cdot(\vec{c}+\vec{d})\,,$$

откуда следует равенство (*) (было введено обозначение $\vec{c}+\vec{d}\equiv\vec{e}$).

При **другом выборе** системы координат векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имели бы **другие** координаты $(a_x;a_y)$ и $(b_x;b_y)$. Поэтому могло бы показаться, что в новой системе координат скалярное произведение векторов (7) будет иметь другое значение. На самом деле, согласно (6) величина скалярного произведения останется такой же: модули векторов и угол между ними не зависят от поворотов и сдвигов системы координат.

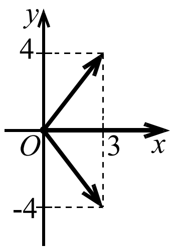


Рис. 16

Пример 3. $\vec{a}=(3;\lambda)$, $a=5$. Определите λ.

Решение. Согласно формуле (4) имеем $3^2+\lambda^2=5^2$, откуда $\lambda^2=16$ и $\lambda=\pm4$. Заметим, что условию задачи удовлетворяют два разных вектора (см. рис. 16).

Пример 4. Векторы $\vec{a}=(0;3)$ и $\vec{b}=(\lambda;5)$ коллинеарны друг другу. Определите λ.

Решение. Вектор $\vec{a}$ параллелен оси *Oy* (перпендикулярен оси *Ox*: $a_x=0$). Поэтому коллинеарный ему вектор $\vec{b}$ также должен быть перпендикулярен оси *Ox*, т. е. должно выполняться равенство $b_x=0$, или $\lambda=0$.

Пример 5. Векторы $\vec{a} = (-1;3)$ и $\vec{b} = (\lambda;5)$ перпендикулярны друг другу. Определите λ.

Решение. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны друг другу, поэтому равно нулю скалярное произведение этих векторов (см. формулу (6) и вывод после неё). Тогда по формуле (7) для скалярного произведения векторов имеем: $(-1)\cdot\lambda + 3\cdot 5 = 0$, откуда $\lambda = 15$.

Пример 6. $\vec{p} = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$. Докажите, что $\vec{p} \perp \vec{a}$.

Решение. Надо доказать, что скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{p}$ равно нулю. В самом деле, $\vec{a}\cdot\vec{p} = (\vec{a}\vec{b})(\vec{a}\vec{c}) - (\vec{a}\vec{c})(\vec{a}\vec{b}) \equiv 0$.

Пример 7. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ составляют треугольник (см. рис. 17). Воспользовавшись свойствами скалярного произведения векторов, докажите теорему косинусов

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi. \qquad (8)$$

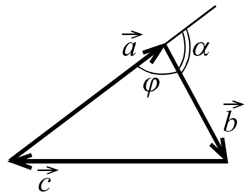


Рис. 17

Решение. По условию задачи имеем $\vec{c} = -(\vec{a}+\vec{b})$. Квадрат модуля вектора $\vec{c}$ можно представить как скалярное произведение его на самого себя: $c^2 = \vec{c}\cdot\vec{c}$. Вычислим это скалярное произведение:

$$\vec{c}\cdot\vec{c} = +(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b} = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha.$$

Угол α между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и угол φ (см. рис. 17) – два смежных угла, т. е. $\alpha = 180^\circ - \varphi$. Поэтому имеем $c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos(180^\circ - \varphi)$. Пользуясь известной из тригонометрии формулой приведения $\cos(180^\circ - \varphi) = -\cos\varphi$, получаем формулу (8).

Пример 8. Найдите угол α между векторами $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ и $\vec{b} = -2\vec{i} - \vec{j}$.

Решение. По определению скалярного произведения $\vec{a}\cdot\vec{b} = a\cdot b\cdot\cos\alpha$, где α – искомый угол, a и b – модули векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно. Отсюда $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a\cdot b}$. В свою очередь,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y = 3\cdot(-2) + 2\cdot(-1) = -8, \qquad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13},$$

$$b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}.$$

Тогда $\cos\alpha = \dfrac{-8}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{5}} = \dfrac{-8}{\sqrt{65}} \approx -0{,}992$. Отсюда $\alpha \approx 173^\circ$.

§4. Примеры из физики

Простейшие примеры векторов в физике – *скорость и сила*.

1. Всякое движение можно представить как результат сложения нескольких движений, его составляющих. Скорость результирующего движения изображается по величине и направлению диагональю параллелограмма, построенного на отрезках, изображающих составляющие скорости, как на сторонах. Рассмотрим конкретный пример.

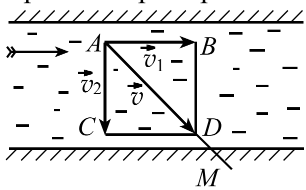


Рис. 18

Пример 9. Рыбак переправляется на лодке A через реку, которая течёт в сторону, указанную стрелкой (рис. 18). Пусть скорость течения воды $\vec{v}_1$ изображается по величине и направлению отрезком AB, а скорость $\vec{v}_2$ движения лодки относительно воды под влиянием усилий гребца изображается отрезком AC (в стоячей воде лодка двигалась бы по направлению AC со скоростью $\vec{v}_2$). Лодка будет двигаться относительно берега по направлению AM со скоростью $\vec{v}$, изображаемой диагональю AD параллелограмма, построенного на векторах $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ (в данном случае параллелограмм $ABDC$ является прямоугольником).

2. Сила – как векторная величина – всегда имеет определённое направление, модуль, а также точку приложения.

Часто встречаются случаи, когда на тело действуют несколько сил. Тогда бывает удобно заменить их одной силой, которая производит на тело такое же действие, как и несколько одновременно действующих сил. Такую силу (если она существует) называют *равнодействующей.* Нахождение равнодействующей нескольких сил осуществляется с помощью правил векторного сложения, при этом слагаемые силы называют *составляющими.*

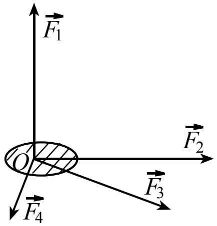


Рис. 19

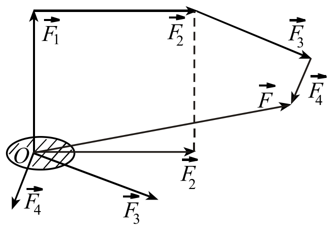


Рис. 20

Так, несколько сил, действующих на одну и ту же точку тела, *всегда* можно заменить одной равнодействующей, как бы ни были направлены силы и каковы бы ни были их величины. Пусть, например, на тело действуют четыре силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ и $\vec{F}_4$, приложенные к одной точке O и лежащие в одной плоскости (рис. 19). Тогда их равнодействующая $\vec{F}$ будет равна векторной сумме этих сил, найденной по правилу многоугольника (рис. 20).

Пример 10. Найти равнодействующую $\vec{R}$ трёх равных по модулю сил, приложенных к телу в одной точке и расположенных в одной плоскости, если углы между всеми силами равны между собой.

$$F_1 = F_2 = F_3 = F.$$

Решение. См. рис. 21. Углы между парами векторов $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$, а также между векторами $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_3$, равны друг другу и равны 120°. Сложим силы $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$ по правилу параллелограмма. Вследствие равенства модулей сил $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$ этот параллелограмм есть ромб. Сумма сил $\vec{F}_2+\vec{F}_3$ есть диагональ ромба, поэтому углы между парами векторов $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_2+\vec{F}_3$, а также $\vec{F}_3$ и $\vec{F}_2+\vec{F}_3$ равны по 60°,

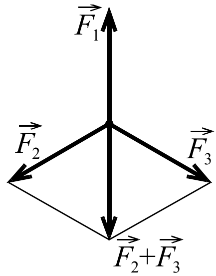


Рис. 21

т. е. векторы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2+\vec{F}_3$ направлены вдоль одной прямой, но в противоположные стороны. Силовой параллелограмм, построенный на векторах $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$, состоит из двух равносторонних треугольников, поэтому модуль силы

$$|\vec{F}_2+\vec{F}_3| = F_2 = F_3 = F = F_1, \text{ т. е } \vec{F}_1 = -(\vec{F}_2+\vec{F}_3),$$

откуда следует $\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3 = 0$.

Пример 11*. К телу приложено 6 сил, лежащих в одной плоскости и составляющих друг с другом углы в 60°. Силы последовательно равны 1, 2, 3, 4, 5 и 6 Н. Найти равнодействующую $\vec{R}$ этих 6-ти сил.

Решение. Сложение сил по правилу многоугольника здесь нецелесообразно. Поступим иначе. Сложим сначала попарно силы, направленные вдоль одной прямой (см. рис. 22, а-в). Получим

$$\left|\vec{F}_1+\vec{F}_4\right| = 4-1 = 3,$$

аналогично $\left|\vec{F}_2+\vec{F}_5\right| = 5-2 = 3$ и $\left|\vec{F}_3+\vec{F}_6\right| = 6-3 = 3$.

Сумма сил $\vec{F}_2+\vec{F}_5$ направлена вдоль вектора $\vec{F}_5$. Туда же направлена и сумма сил $\vec{F}_1+\vec{F}_4+\vec{F}_3+\vec{F}_6$, причём модуль этой силы равен 3. В итоге получаем, что сумма всех шести сил $\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3+\vec{F}_4+\vec{F}_5+\vec{F}_6$ направлена вдоль направления силы $\vec{F}_5$, а модуль этой силы $\left|\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3+\vec{F}_4+\vec{F}_5+\vec{F}_6\right| = 3+3 = 6$ Н.

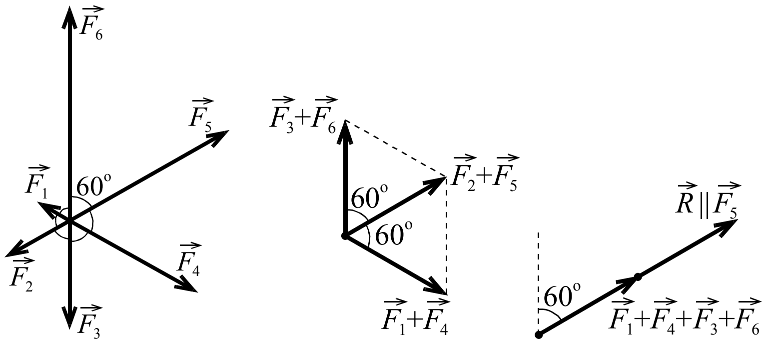


Рис. 22а **Рис. 22б** **Рис. 22в**

Пример 12*. Найти равнодействующую $\vec{R}$ пяти равных по модулю сил, приложенных к телу в одной точке и расположенных в одной плоскости, если углы между всеми соседними силами равны между собой (см. рис. 23). (Эти углы, разумеется, равны $360^\circ/5 = 72^\circ$.)

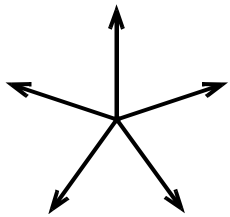


Рис. 23

Решение. В отличие от предыдущего примера здесь мы имеем нечётное число сил, поэтому невозможно образовать из них целое число пар. Поступим иначе. Возьмём какую-нибудь силу, например, $\vec{F}_1$, а остальные сгруппируем в пары и попарно сложим их (см. рис. 24): $\vec{F}_2 + \vec{F}_5$ и $\vec{F}_3 + \vec{F}_4$.

Почему удобна именно такая группировка сил в пары? Дело в том, что обе суммы сил (и $\vec{F}_2 + \vec{F}_5$ и $\vec{F}_3 + \vec{F}_4$) направлены вдоль линии действия силы $\vec{F}_1$. Ясно, что равнодействующая всех сил будет направлена вдоль линии действия силы $\vec{F}_1$. Модули сумм сил легко найти из геометрии. Например, в силовом параллелограмме, построенном на векторах $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_5$, который является ромбом, длина диагонали ромба (модуль силы $\vec{F}_2 + \vec{F}_5$) равна удвоенной половинке диагонали, а та легко ищется из любого из 4-х прямоугольных треугольников, на которые ромб разбивается диагоналями.

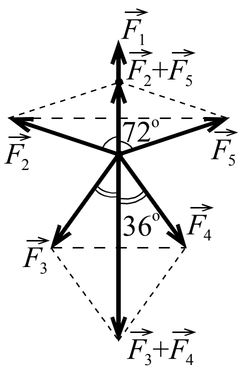


Рис. 24

В результате $|\vec{F}_2+\vec{F}_5|=2F\cos 72^\circ$, где F – модуль любой из 5-ти исходных сил. Аналогично $|\vec{F}_3+\vec{F}_4|=2F\cos 36^\circ$. В итоге для модуля искомой силы получаем формулу $R=F(1+2\cos 72^\circ-2\cos 36^\circ)$ (*). Для углов 72° и 36° нет таких простых формул, как для углов 30°, 45° или 60°. Пользуясь калькулятором, можно, однако, показать, что согласно формуле (*) $R=0$.

Имеется и более красивое доказательство того, что результирующий вектор есть нулевой вектор. В самом деле, мы довольно произвольно взяли в качестве силы, которой не хватило пары, силу $\vec{F}_1$. Если бы в качестве такой взять силу $\vec{F}_2$, а в пары объединить $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_3$ (одна пара) и $\vec{F}_4$ и $\vec{F}_5$, то, повторив рассуждения, получим, что равнодействующая всех пяти сил $\vec{R}$ должна быть направлена вдоль линии действия силы $\vec{F}_2$. Возможно ли, чтобы вектор был одновременно направлен вдоль двух несовпадающих друг с другом направлений (и $\vec{F}_1$, и $\vec{F}_2$; а на самом деле, как догадался читатель, ещё и вдоль направления действия сил $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$ и $\vec{F}_5$!)? **Ненулевым** вектор **не** может быть! Остаётся одна возможность: суммарный **вектор** – нулевой!

В примерах 10 и 11 мы искали по правилу параллелограмма **суммы сил**. В примере 12 нас интересовала лишь **проекция** равнодействующей силы на направление (например, силы $\vec{F}_1$). В следующих примерах наш интерес будет также скорее **не к равнодействующей силе**, а только к **каким-то её проекциям**.

Пример 13. Электрический фонарь весом Q = 16 Н укреплён, как показано на рис. 25. Определите отношение натяжений T_1 и T_2 в проволоках BA и BC, углы наклона которых даны на рисунке.

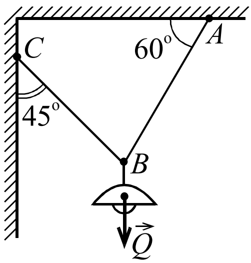


Рис. 25

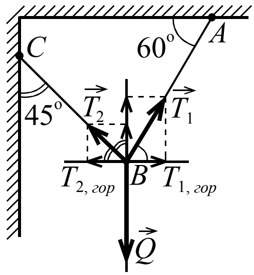


Рис. 26

Решение. В условиях равновесия сумма всех сил, приложенных к точке B, равна нулю. Поэтому проекция равнодействующей всех сил на горизонтальное направление тоже равна нулю. Проекция силы со стороны проволоки, идущей к фонарю, на это направление равна нулю (эта сила вертикальна). Остаются вклады от двух натяжений со стороны проволок BA и BC. Горизонтальную ось направим слева направо. Тогда имеем: $T_{1,\text{гор}} + T_{2,\text{гор}} = 0$ (см. рис. 26), т. е.

$$T_1 \cdot \cos 60^\circ - T_2 \cos 45^\circ = 0$$

(или $T_1 \cdot \sin 30^\circ - T_2 \sin 45^\circ = 0$), откуда получаем $T_1 / T_2 = \sqrt{2}$.

Пример 14*. Однородная массивная верёвка подвешена за два конца на разных высотах (см. рис. 27). Масса верёвки m. Углы, которые составляет верёвка с вертикалью в точках закрепления, равны 30° и 60°. Определите силы натяжения верёвки вблизи её точек крепления.

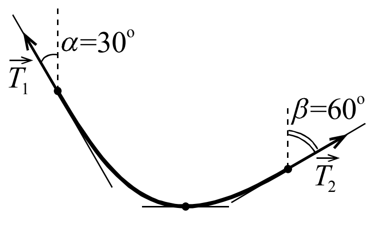


Рис. 27

Решение. Задача кажется очень трудной, т. к. не ясно, какую роль играет неизвестная нам форма верёвки, которую она примет под действием сил тяжести всех частей верёвки. (В предыдущем примере мы не интересовались провисанием проволок под действием силы тяжести, молчаливо считая провисание малым.) И всё же задача в той постановке, в какой дана, имеет простое решение. Мысленно проведём горизонтальную ось слева направо. Поскольку верёвка находится в равновесии, то сумма проекций всех сил на горизонтальное направление равна нулю. Сила тяжести верёвки имеет нулевую проекцию на это направление (эта сила направлена вертикально). Снова остаются вклады от двух натяжений (см. рис. 28): $T_{1,\text{гор}} + T_{2,\text{гор}} = 0,$ или $-T_1 \cdot \sin 30^\circ + T_2 \sin 60^\circ = 0$. Полагая $\sin 30^\circ = 1/2$ и $\sin 60^\circ = \sqrt{3}/2,$ находим $T_1 / T_2 = \sqrt{3}$. Мысленно проведём ещё и вертикальную ось,

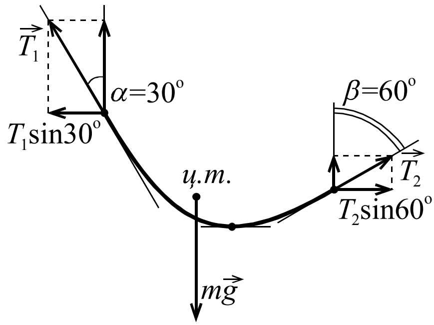


Рис. 28

направив её вниз. Сумма проекций всех сил на эту ось также равна нулю: $mg - T_1 \cos 30^\circ - T_2 \cos 60^\circ = 0.$ Учитывая найденное ранее соотношение между T_1 и T_2 и значения $\cos 60^\circ = 1/2$ и $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2,$ получаем: $mg - \sqrt{3} \cdot T_2 \cdot \sqrt{3}/2 - T_2/2 = 0,$ откуда $T_2 = mg/2$ и $T_1 = \sqrt{3}mg/2.$

Пример 15. На гладкой наклонной плоскости с углом наклона α лежит брусок массой m. Какую горизонтальную силу нужно приложить к бруску, чтобы он находился в покое (см. рис. 29)? Определите также модуль нормальной силы реакции на брусок со стороны наклонной плоскости.

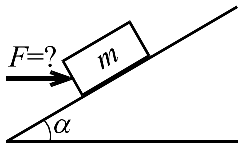


Рис. 29

Решение. Брусок по условию задачи покоится. Значит, сумма всех сил, приложенных к бруску, равна нулю. Равны нулю и суммы проекций сил на любые направления, в частности, на направление вдоль наклонной плоскости и перпендикулярное ему. Нормальная сила реакции $\vec{N}$ со стороны наклонной плоскости имеет равную нулю составляющую вдоль наклонной плоскости.

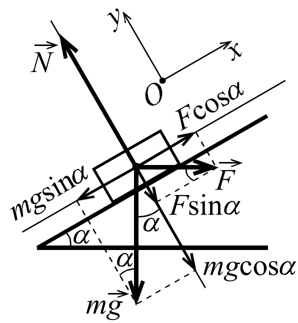


Рис. 30

Проекция сила тяжести $m\vec{g}$ на ось Ox вдоль наклонной плоскости (см. рис. 30) равна $-mg\sin\alpha,$ а проекция горизонтальной силы F на эту ось равна $F\cos\alpha.$ Других сил вдоль наклонной плоскости не действует (плоскость, по условию задачи, гладкая, т. е. сила трения пренебрежимо мала). Приравнивая нулю сумму проекций на ось Ox всех сил, действующих на тело, получаем: $-mg\sin\alpha + F\cos\alpha = 0,$ откуда находим

$$F = mg\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = mg \cdot \text{tg}\alpha.$$

Для отыскания N обратимся к проекциям сил на направление Oy. Приравняем нулю и сумму проекций на ось Oy:

$$N - mg\cos\alpha - F\sin\alpha = 0,$$

откуда $N = mg\cos\alpha + F\sin\alpha$, или с учётом найденного значения F:

$N = mg\cos\alpha + mg\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} = mg\dfrac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos\alpha}$, тогда с учётом основного тригонометрического тождества, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, получаем окончательно $N = \dfrac{mg}{\cos\alpha}$.

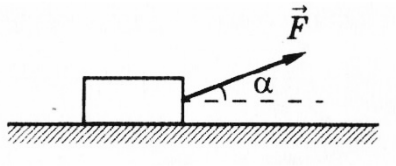


Рис. 31

Пример 16. На шероховатой поверхности доски лежит брусок массой m. К нему приложена сила, направленная под углом α к горизонту (см. рис. 31). Определите модуль нормальной силы реакции со стороны поверхности.

Решение. Поскольку брусок не проваливается и не подскакивает вверх, то сумма проекций сил на вертикальную ось равна нулю:

$$N + F\cdot\sin\alpha - mg = 0 \text{ (см. рис. 32)},$$

откуда находим

$$N = mg - F\cdot\sin\alpha.$$

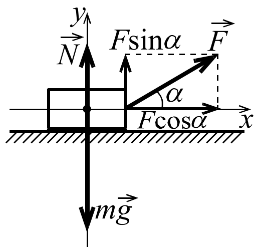


Рис. 32

Замечание. Часто совершенно безосновательно приравнивают силу реакции N силе тяжести mg. Мы видим, что даже в случае горизонтальной поверхности это в общем случае не так. Для наклонной плоскости это тоже не так. В предыдущем примере нормальная сила реакции равнялась $mg/\cos\alpha$. Кстати, если бы удерживающая сила F действовала там не вдоль горизонтали, а вдоль наклонной плоскости, то для удержания бруска на наклонной плоскости потребовалась бы сила величиной $F = mg\sin\alpha$, а нормальная сила реакции была бы равна $N = mg\cos\alpha$ (и снова **не** равнялась бы mg!) Докажите это самостоятельно.

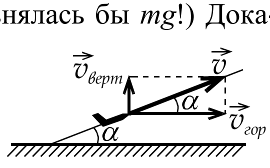


Рис. 33

Пример 17. Самолёт взлетает с аэродрома со скоростью $v = 220$ км/ч под углом $\alpha = 20^\circ$ к горизонту. Найдите модули горизонтальной и вертикальной составляющих скорости самолёта.

Решение. См. рис. 33. В данном примере мы имеем дело с весьма простым случаем *разложения* скорости на два взаимно перпендикулярных направления: $\vec{v} = \vec{v}_{\text{гор}} + \vec{v}_{\text{верт}}$,

$$v_{\text{гор}} = v\cos\alpha \approx 207 \text{ км/ч}, \quad v_{\text{верт}} = v\sin\alpha \approx 75 \text{ км/ч}.$$

Пример 18. В безветренную погоду самолёт летит на север со скоростью 180 км/ч (50 м/с) относительно земли. С какой скоростью относительно земли будет лететь самолёт, если дует западный ветер со скоростью 10 м/с?

Решение. См. рис. 34. В данном случае мы имеем дело со *сложением движений*: $\vec{v}_с = \vec{v}_{св} + \vec{v}_в$, где $\vec{v}_{св}$ – скорость самолёта относительно воздуха (модуль которой равен скорости самолёта относительно земли в безветренную погоду), а $\vec{v}_в$ – скорость воздуха. Далее по теореме Пифагора получаем:

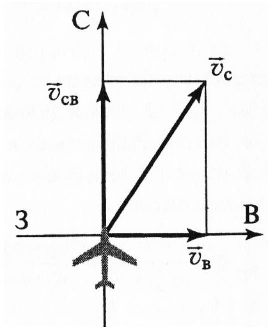


Рис. 34

$$v_с = \sqrt{50^2 + 10^2} = \sqrt{2600} \approx 51 \text{ м/с}.$$

Пример 19. Лодка пытается пересечь реку, текущую со скоростью $u = 3$ км/ч. Скорость лодки в стоячей воде $v = 5$ км/ч. Под каким углом α к нормали к берегу надо направить лодку, чтобы она двигалась поперек реки (без сноса)? Какой будет при этом модуль скорости лодки v относительно берега?

Решение. Как и в примере 9, мы также имеем дело со случаем *сложения движений*. Но там было проще: не требовалось выбирать никакой стратегии, рыбак лишь наблюдал, как снесёт его лодку течением воды в реке. Если бы вода в реке покоилась, то, направив корпус лодки под углом α к нормали, мы заставили бы её двигаться в направлении вектора $\vec{V}$ (см. рис. 35). В действительности, вода в реке не стоячая, а имеет скорость $\vec{u}$. Поэтому сносимая течением лодка

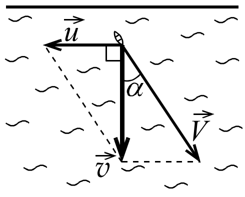


Рис. 35

будет двигаться в направлении вектора $\vec{v}$ таком, что $\vec{v} = \vec{V} + \vec{u}$. Учитывая, что оба треугольника в параллелограмме на рис. 35 прямоугольные (по условию, лодка должна двигаться перпендикулярно берегам), находим

$$\sin\alpha = u / V = 3/5, \ \ \alpha \approx 37^\circ,$$

а по теореме Пифагора $v = \sqrt{V^2 - u^2} = 4$ м/с.

Пример 20*. Лодка пытается пересечь реку, текущую со скоростью $u = 5$ км/ч. Скорость лодки в стоячей воде $V = 3$ км/ч. Под каким углом α к нормали к берегу надо направить корпус лодки, чтобы её снесло как можно меньше? Под каким углом β к нормали к берегу будет при этом плыть лодка?

Решение: В данном примере скорость лодки относительно воды меньше, чем скорость воды в реке, $V < u$, поэтому реализовать план из предыдущего примера (рис. 35) невозможно. Наша цель состоит в том, чтобы направить корпус лодки под таким углом α к нормали к берегу, чтобы сносимая течением лодка двигалась под углом β, по возможности наименьшим (см. рис. 36а – в). В данном примере складывать скорости (лодки относительно воды $\vec{V}$ и воды в реке $\vec{u}$) удобно по правилу треугольника, а не параллелограмма: приставим начало вектора $\vec{V}$ к концу вектора $\vec{u}$. Выбирая оптимальный план (с наименьшим углом сноса), будем мысленно поворачивать вектор $\vec{V}$. При этом конец вектора будет описывать окружность с центром в конце вектора $\vec{u}$. Из рисунков 36а – в видно, что минимальному углу сноса лодки β соответствует случай, когда вектор $\vec{v} = \vec{V} + \vec{u}$ направлен по касательной к этой окружности. При этом вектор $\vec{V} \perp \vec{v}$, т. е. треугольник скоростей на рис. 36в прямоугольный. Отсюда получаем: $\sin\alpha = V/u = 3/5$; $\alpha \approx 37^\circ$; $\beta = 90^\circ - \alpha \approx 53^\circ$.

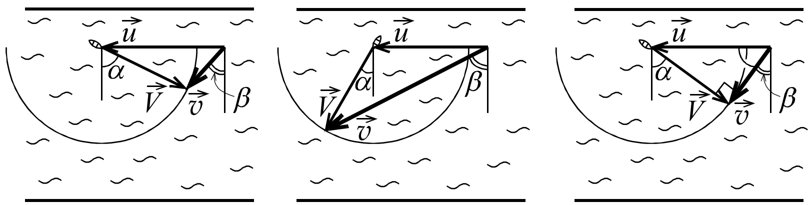


Рис. 36а **Рис. 36б** **Рис. 36в**

Пример 21*. Лодку вытягивают из воды, стоя на крутом берегу и выбирая верёвку, которая привязана к носу лодки, со скоростью v (см. рис. 37). Какой будет скорость лодки u в момент, когда верёвка будет составлять угол α с горизонтом? Верёвка нерастяжима.

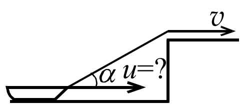


Рис. 37

Решение. Традиционная ошибка решающих эту задачу состоит в том, что пытаются *разложить движение лодки на два направления* – горизонтальное и вертикальное, делая (**неправильное!**) построение, как показано на рис. 38а и получая **неверный ответ** $u = v \cdot \cos\alpha$. Что здесь неправильно? В отличие от самолёта из примера 17, который двигался под отличным от нуля углом к горизонту (см. рис. 33), здесь лодка движется *горизонтально*! Сделаем другое разложение скорости лодки $\vec{u}$ по двум направлениям – вдоль верёвки (в данный момент времени!) и перпендикулярно ей (см. рис. 38б).

Неверно!

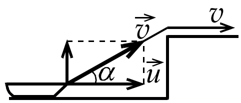


Рис. 38а

Верно!

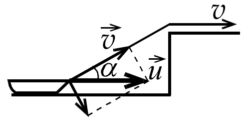


Рис. 38б

Проекция вектора $\vec{u}$ на направление верёвки будет равна скорости v, с которой выбирают верёвку: $v = u\cos\alpha$, поэтому $u = \dfrac{v}{\cos\alpha}$.

Поясним ещё, почему проекция вектора $\vec{u}$ на направление верёвки будет равна скорости v, с которой выбирают верёвку. Если мы имеем абсолютно твердое тело (АТТ), деформациями в котором можно пренебречь, или нерастяжимую нить (но уже максимально натянутую), то как бы ни двигались АТТ или нерастяжимая нить, они будут обладать следующим свойством. Возьмём две произвольные точки A и B нити или АТТ и мысленно соединим их прямой. Тогда составляющие скоростей выбранных точек вдоль этой прямой в любой момент времени будут равны друг другу: $\vec{v}_{A\parallel} = \vec{v}_{B\parallel}$ (см. рис. 39). В противном случае изменялось бы расстояние между точками A и B. Составляющие скорости, перпендикулярные отрезку прямой AB, могут быть при этом любыми.

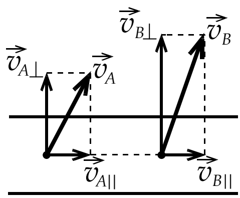


Рис. 39

Пример 22. Две лодки 1 и 2 буксируют третью лодку с помощью двух тросов (см. рис. 40). В некоторый момент времени силы натяжения тросов, идущих от лодок 1 и 2, равны друг другу по модулю и равны F. Угол между тросами равен 2α. Какая равнодействующая сила приложена к буксируемой лодке со стороны тянущих её лодок? Чему будет равна эта сила в случае малого угла α (когда буксирующие лодки тянут третью лодку почти в одном направлении)?

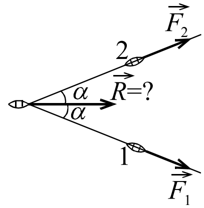


Рис. 40

Решение. Две силы нужно сложить по правилу параллелограмма, который в данном случае будет ещё и ромбом с перпендикулярными друг другу диагоналями, разбивающими его на четыре равных прямоугольных треугольника. Из геометрии рис. 41 видно, что модуль равнодействующей силы R равен удвоенной длине прилежащего катета: $R = 2F\cos\alpha.$ При стремлении угла между направлениями тросов к нулю $R \to 2F$ ($\cos\alpha \to 1$ при $\alpha \to 0$).

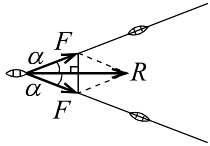
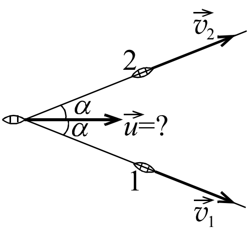
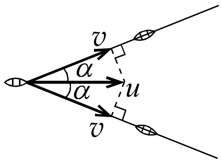


Рис. 41

Хитрее оказывается похожая задача, когда заданы не силы, а скорости.

Пример 23*. Две лодки 1 и 2 буксируют третью лодку с помощью двух тросов (см. рис. 42). В некоторый момент времени модули скоростей лодок 1 и 2 равны друг другу и равны $v_1 = v_2 = v$. Найти модуль и направление скорости буксируемой лодки u. Тросы нерастяжимы. Чему будет равна эта скорость в случае малого угла α (когда буксирующие лодки тянут третью лодку почти в одном направлении)?





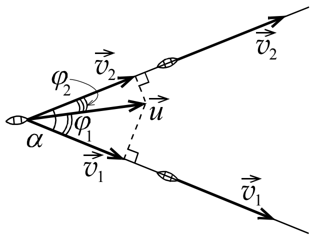


Рис. 42 **Рис. 43** **Рис. 44**

Решение. Ясно, что «решение» $u = 2v\cos\alpha$ (как в предыдущем примере) не подходит, т. к. при $\alpha \to 0$ мы получили бы, что $u \to 2v,$ чего не может быть. Если, например, две собаки в упряжке бегут с одинаковыми скоростями v в одном направлении, то и скорость упряжки будет равна этой же скорости v (если, конечно, упряжка не отцепилась или к ней не подключили дополнительно мотор).

Решение задачи такое же, как в примере 21. В данном примере важнейшими словами являются «Тросы нерастяжимы». Ясно, что правильное построение, учитывающее это условие, должно быть таким, как на рис. 43, откуда немедленно получаем $v = u\cos\alpha,$ поэтому $u = \dfrac{v}{\cos\alpha}$.
Тогда в предельном случае, когда $\alpha \to 0$, имеем $u \to v$, как и должно быть.

Заметим, что четырёхугольник на рис. 43 весьма мало похож на параллелограмм из предыдущего примера. Еще меньше будет похож на параллелограмм этот четырёхугольник, когда модули скоростей $v_1 \neq v_2$ (см. рис. 44).

Пример 24. Лестница (для простоты – тонкая жёсткая пластина) опирается своими концами о стороны прямого угла, образованного полом и стеной (см. рис. 45). Нижний её конец (A) двигают с постоянной скоростью V вдоль пола без нарушения контакта другого конца лестницы со стеной. Чему равна скорость v верхнего конца (B) в момент, когда угол между полом и лестницей равен φ?

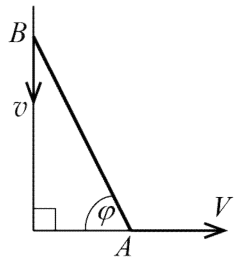


Рис. 45

Решение. Эту задачу можно решать разными способами. Один из способов – сказать, что координата x точки A и координата y точки B даются формулами

$$x = l\cos\varphi \ (1), \quad y = l\sin\varphi \ (2),$$

где l – длина лестницы (которая считается неизменной) и далее – рассмотреть малые смещения точек A и B, Δx и Δy, а также изменение угла $\Delta\varphi$ за малый промежуток времени Δt (см. рис. 46). Увы, здесь нам понадобились бы ещё формулы тригонометрии для синуса и косинуса суммы углов. На самом деле, и ещё кое-что. Мы пойдём другим путём – без привлечения тригонометрии. Учтём, что квадрат длины лестницы $l^2 = x^2 + y^2$ остаётся при её движении неизменным (как и сама длина), то есть $l^2 = (x+\Delta x)^2 + (y+\Delta y)^2$. Вычитая из этого уравнения предыдущее, для малых приращений Δx и Δy тогда имеем простое соотношение $2x\cdot\Delta x + 2y\cdot\Delta y \approx 0$ (при этом мы пренебрегли очень малыми слагаемыми $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$). Отсюда получаем $2l\cos\varphi\cdot V\cdot\Delta t - 2l\sin\varphi\cdot v\cdot\Delta t = 0$ (учтено, что $\Delta x = V\cdot\Delta t$ и $\Delta y = -|\Delta y| = -v\cdot\Delta t$) и далее приходим к формуле

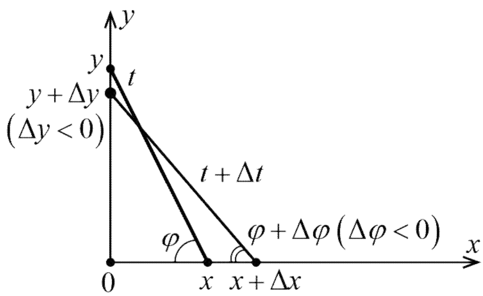


Рис. 46

$$v = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}V. \qquad (3)$$

Видимо, самый простой способ получить эту формулу – действовать в духе того, что сказано на стр. 23 (см. рис. 39). Ввиду неизменности в процессе движения расстояния между концами A и B лестницы, составляющие скорости этих концов вдоль лестницы (вдоль линии, соединяющей точки A и B) должны быть равны друг другу (иначе бы расстояние между точками A и B изменялось). Далее см. рис. 47; ответ (3) получается мгновенно.

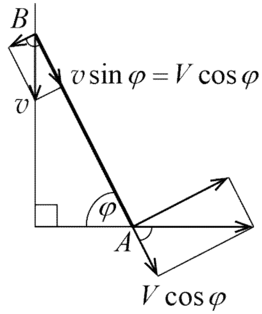


Рис. 47

Пример 25. ***Как складывать параллельные силы?*** Две параллельные силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ приложены в точках A и B твёрдого тела. Действие этих двух сил не изменится, если в точках A и B по линии AB приложить две равные и противоположно направленные силы $\vec{F}$ и $-\vec{F}$. Сложив в точке A силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}$, найдем силу $\vec{F}_1 + \vec{F}$. Аналогично в точке B сложим силы $\vec{F}_2$ и $-\vec{F}$, получив силу $\vec{F}_2 - \vec{F}$ (рис. 48).

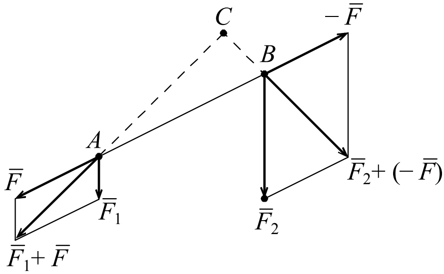


Рис. 48

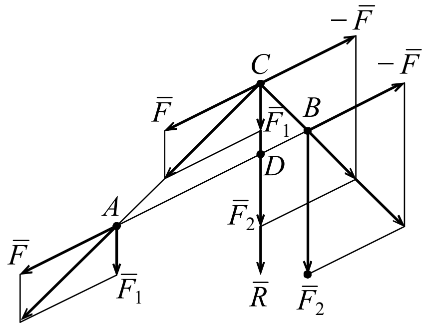


Рис. 49

Силы $\vec{F}_1 + \vec{F}$ и $\vec{F}_2 - \vec{F}$ – уже не параллельные и складываются по правилу параллелограмма $\vec{F}_1 + \vec{F} + \vec{F}_2 - \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{R}$. Из подобия соответствующих треугольников на рис. 49 (ACD и подобного ему силового треугольника с силой $\vec{F}_1$, а также BCD и подобного ему силового треугольника с силой $\vec{F}_2$) легко видеть, что $\dfrac{F_1}{F} = \dfrac{CD}{AD}$ и $\dfrac{F_2}{F} = \dfrac{CD}{BD}$. Отсюда следует, что при сложении параллельных сил выполняется соотношение

$$\frac{AD}{BD} = \frac{F_2}{F_1}.$$

Контрольные вопросы (лёгкие задачи)

1. Определите углы между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, изображёнными на рисунках 50а и 50б.

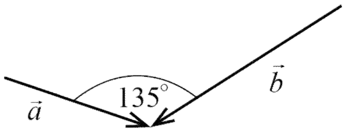


Рис. 50а

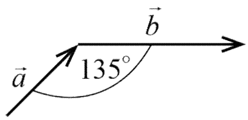


Рис. 50б

2. Даны два вектора $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ и $\vec{b} = -\vec{i} + 5\vec{j}$. Найти:

а) $\vec{b}_y$ (составляющую вектора $\vec{b}$ вдоль оси y);

б) величину $\vec{b} \cdot \vec{j}$;

в) b_y (y – координату вектора $\vec{b}$);

г) $\vec{a} \cdot \vec{b}$;

д) $(\vec{a} + 2\vec{b})(3\vec{a} - \vec{b})$.

3. Известно, что $|17\vec{a} - \vec{b}| = |17\vec{b} - \vec{a}|$. Докажите, что $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

4. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – не нулевые. Известно, $|\vec{a} - 17\vec{b}| = |\vec{a} + 17\vec{b}|$. Докажите, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны друг другу.

5. На рис. 51 а – б показано сложение трёх векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ по правилу многоугольника для двух разных последовательностей сложения: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ и $\vec{b} + \vec{c} + \vec{a}$. Как выглядело бы сложение этих векторов в случае последовательности сложения векторов $\vec{c} + \vec{b} + \vec{a}$?

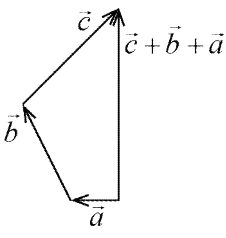


Рис. 51а

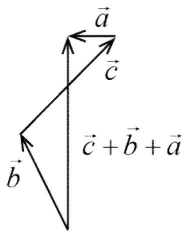


Рис. 51б

6. Важнейший пример скалярного произведения в физике – работа силы. Если на частицу, движущуюся по прямой, действует постоянная сила $\vec{F}$, то механической работой A этой силы при перемещении частицы $\Delta\vec{r}$ называют скалярное произведение $A_F = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$. Пусть материальная точка переместилась из точки 1 в точку 2. Все числовые данные указаны на рис. 52. В процессе движения на тело действовали (кроме других) две постоянные силы – «вертикальная» (вниз) $F_1 = 10\,\text{Н}$ и «горизонтальная» (вправо) $F_2 = 5\,\text{Н}$. Вычислите работы обеих сил $A_{F_1,12}$, $A_{F_2,12}$, а также сумму этих работ и работу равнодействующей этих двух сил $A_{R,12}$ ($\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$). Нельзя ли было сразу догадаться, что работа $A_{R,12}$ будет иметь именно это значение?

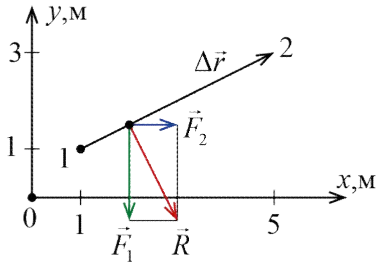


Рис. 52

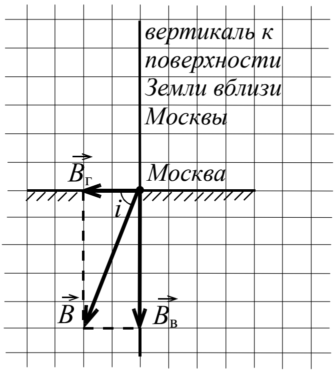


Рис. 53

7. Магнитное поле Земли, характеризуемое вектором магнитной индукции $\vec{B}$, может быть разложено в любом месте Земли на две компоненты – горизонтальную $\vec{B}_\text{г}$ и вертикальную $\vec{B}_\text{в}$, так что $\vec{B} = \vec{B}_\text{г} + \vec{B}_\text{в}$. Вблизи Москвы вертикальная компонента составляет примерно 93% от полной индукции: $|\vec{B}_\text{в}| \approx 0{,}93|\vec{B}|$ (рис. 53). Какой процент от полной индукции составляет горизонтальная компонента? Под каким углом i к горизонту направлен вектор магнитной индукции вблизи Москвы? (Этот угол называется магнитным наклонением.).

8. Найти равнодействующую **22** равных по модулю сил, приложенных к одной точке и расположенных в одной плоскости, если углы между всеми соседними силами равны между собой.

Задачи

1. Вектор $\vec{a}+3\vec{b}$ перпендикулярен вектору $7\vec{a}-5\vec{b}$, а вектор $\vec{a}-4\vec{b}$ перпендикулярен вектору $7\vec{a}-2\vec{b}$. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=(1;2)$ и $\vec{b}=(2;-1)$.

3. Докажите, что площадь параллелограмма, построенного на диагоналях любого параллелограмма, в 2 раза больше площади этого параллелограмма.

4. Частица перемещается из точки 1 в точку 3 один раз по ломаной 123, а другой раз – по отрезку прямой 13 (см. рис. 54а–б). Один раз на неё действует (кроме других сил) постоянная «вертикальная» сила $\vec{F}$ тяжести (см. рис. 54а); модуль этой силы $|\vec{F}|=5\,\text{Н}$. Другой раз кроме всех прочих сил на каждом прямолинейном участке на частицу действует «сила трения». Её модуль всегда один и тот же $f_1=f_2=f=3\,\text{Н}$, а направление на всех трёх участках противоположно перемещению (см. рис. 54б). Вычислите работы сил на всех участках: $A_{F,12}$, $A_{F,23}$, $A_{F,13}$, $A_{f_1,12}$, $A_{f_2,23}$, $A_{f,13}$. Проверьте, что $A_{F,12}+A_{F,23}=A_{F,13}$, но $A_{f_1,12}+A_{f_2,23}\neq A_{f,13}$. Все числовые данные указаны на рисунках.

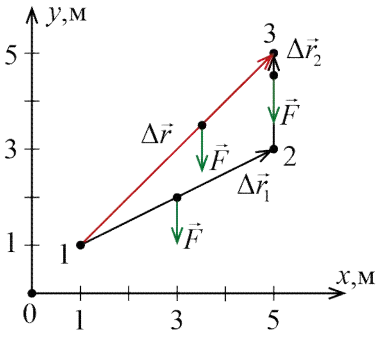


Рис. 54а

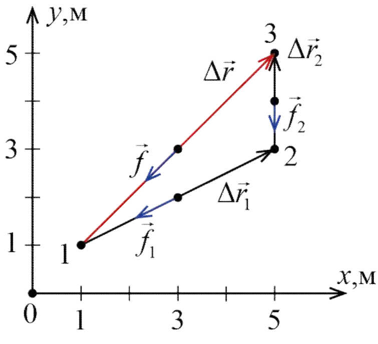


Рис. 54б

5. Найти равнодействующую **21** равных по модулю сил, приложенных к одной точке и расположенных в одной плоскости, если углы между всеми соседними силами равны между собой.

6. Однородная верёвка подвешена за два конца на разных высотах (рис. 27 к Примеру 14). Углы, которые составляет верёвка с вертикалью в точках закрепления, равны $\alpha = 30°$ и $\beta = 45°$. Найти отношение длины части верёвки, расположенной левее самой низшей точки верёвки, к длине части верёвки правее этой точки.

7. К телу приложены две горизонтальные силы 3 Н и $\sqrt{5}$ Н, тангенс угла между которыми равен $\mathrm{tg}\alpha = 2$ (рис. 55). Определить модуль равнодействующей этих сил. Под каким углом β к силе $\vec{F}_1$ будет направлена равнодействующая?

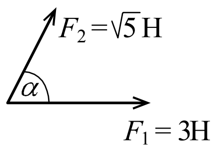


Рис. 55

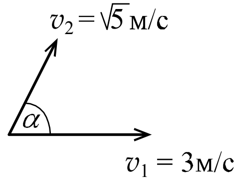


Рис. 56

8. Баржу перемещают с помощью двух буксиров, движущихся со скоростями 3 м/с и $\sqrt{5}$ м/с, образующими угол α (рис. 56), тангенс которого равен $\mathrm{tg}\alpha = 2.$ Тросы, с помощью которых буксируют баржу, нерастяжимы и прикреплены к одной точке баржи. Под каким углом β к скорости $\vec{v}_1$ будет направлена скорость точки крепления тросов и чему равна скорость этой точки? Воспользоваться формулой для косинуса разности двух углов $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.

9. Жёсткая пластинка в форме прямоугольного треугольника с острым углом φ (рис. 57) движется в плоскости. В некоторый момент времени скорость вершины прямого угла C равна v и направлена в сторону вершины A, а скорость вершины A направлена вдоль гипотенузы BA. Чему равны в это момент скорости вершин A и B?

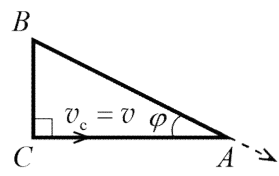


Рис. 57