数学公式2.2

浩于长空

2021 年 8 月 18 日

摘要

这是我小学和初中写在小本本上的没用的公式的电子版。

随便写写

*这份笔记的内容暂仅供同行学习交流使用。

*这份笔记作为一份知识总结，没有在问题的引入和背景介绍方面下多少功夫，因此并不适合于初学者用于学习新知识。

*QQ群555658600可以算是我的“读者群”，我整理的很多资料都会在那里发布。欢迎学生老师同行进群，进群可查看本书最新进度和勘误，也可以上报错误，讨论数学，获取资料等。这份笔记目前没有成书之日，也没有什么计划之类，受限于自己的数学能力和学习闲暇，不定期的更新而已，欢迎大佬们提意见（或者我没有写到的范围）

*2.2版本是我的一个阶段整理，因为2.0.0至2.1版中由于校对机制并不完善，出现大量内容、排版错误，我们在2.1版本及时修复。同时，以后我也会先再三校对，尽可能的减少错误，再去公开，避免初学者产生误解。

*身为一个高中生更不可能做到完美的统筹兼顾，本人虽力求完美，但由于本人水平有限（虽然已经高一了但还是小学二年级水平），由于时间仓促（大部分时间被关在小黑屋，且周末贪玩），虽经努力，但选材和释文可能也有疏漏和不当之处（另一方面读者应该学会如何自动纠正笔误），还望批评指正。

受时间限制我可能不会再频繁更新了，下一次更新不知道是啥时候，后续还有手写版的没码的也可以看扫描版，我写出这个的初衷首先是取悦自己，顺便给偌大的数学文件宝库奉上自己一点微薄的贡献，以后这里面的内容会越来越杂……

目录

1 代数

1.1 常数值

1.1.1 倒数，二次根式，二根倒数表

n	$\frac{1}{n}$	$\sqrt{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	n	$\frac{1}{n}$	$\sqrt{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$
1	1	1	1	7	0.143	2.646	0.378
2	0.5	1.414	0.707	8	0.125	2.828	0.354
3	0.333	1.732	0.577	9	0.111	3	0.333
4	0.25	2	0.5	10	0.1	3.162	0.316
5	0.2	2.236	0.447	π	0.318	1.772	0.564
6	0.167	2.449	0.408	e	0.368	1.649	0.607

1.1.2 π和e

$\frac{\pi}{2} = 1.57079633$	$\pi^2 = 9.8696044$	$log\pi = 0.49714987$
$\frac{\pi}{3} = 1.04719755$	$\frac{\pi^2}{4} = 2.4674011$	$e = 2.71828183$
$\frac{\pi}{4} = 0.78539816$	$\sqrt[3]{\pi} = 1.46459189$	$e^2 = 7.3890561$
$\frac{4\pi}{3} = 4.1887902$	$\ln\pi = 1.14472989$	$\frac{1}{e} = 0.3678794$

1.1.3 π的值与e的值

π =3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679

e=2.71828 18284 59045 23536 02874 71352 66249 77572 47093 69995 95749 66967 62772 40766 30353 54759 45713 82178 52516 64274

1.2 数的分类

1.3 计算法则

1.3.1 加减

$a + b = b + a$

$(a + b) + c = a + (b + c)$

$a - b - c = a - c - b = a - (b + c)$

1.3.2 乘除

$a \times b = b \times a$

$a \times b \times c = a \times (b \times c) = (a \times c) \times b$

$(a + b) \times c = a \times c + b \times c$

$(a - b) \times c = a \times c - b \times c$

$a \div b = (a \times c) \div (b \times c)$

$a \div b = (a \div c) \div (b \div c)$

1.3.3 等式的性质

$a + c = b + c$

$a - c = b - c$

$a \times c = b \times c$

$a \div c = b \div c \, (c \neq 0)$

若$a = b$,则$a^c = b^c$,$\sqrt[c]{a} = \sqrt[c]{b}$

1.3.4 幂

$a^m a^n = a^{m+n}$ $\quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}(a \neq 0)$ $\quad (a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}$ $\quad (ab)^n = a^n b^n$

$(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}(b \neq 0)$ $\quad a^0 = 1(a \neq 0)$ $\quad 0^n = 0(n > 0)$ $\quad a^{-p} = \frac{1}{a^p}(a \neq 0)$ $\quad a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$

$$(-a)^n = \begin{cases} a^n, & \text{if } \ a > 0, n = 2k \text{ (}k \in \mathbb{Z}\text{)} \\ -a^n, & \text{if } \ a > 0, n = 2k + 1 \text{ (}k \in \mathbb{Z}\text{)} \end{cases}$$

1.3.5 根号

在$\sqrt{a}$中,$a \geq 0, \sqrt{a} \geq 0$

$\sqrt{0} = \sqrt[3]{0} = 0$ $\quad \sqrt{a^2} = |a|$ $\quad (\sqrt{a})^2 = a(a \geq 0)$ $\quad \sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}(a \geq 0, b \geq 0)$

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}(a \geq 0, b > 0)$ $\quad \sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$ $\quad \sqrt[3]{a^3} = (\sqrt[3]{a})^3 = a$ $\quad \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}$

注意：$\sqrt{9a^6} = |3a^3|$,只要未知数的指数为偶数，都要考虑它的正负性

1.3.6 非负三宝

$a^2 \geq 0, |a| \geq 0, \sqrt{a} \geq 0$

1.3.7 比例的基础性质

若$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \cdots = \frac{m}{n}$,则$\frac{a+c+\cdots+m}{b+d+\cdots+n} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \cdots = \frac{m}{n}$

1.3.8 单位分数

分子为1的分数相加，公式如下

若没有达到要求，继续重复

若$b \div a = w \cdots\cdots r$,则$\frac{a}{b} = \frac{1}{w+1} + \frac{a-r}{(w+1)b}$

1.4 对数

1.若$a^n = b(a > 0且a \neq 1, b > 0)$，则n叫做以a为底b的对数，记为$\log_a b = n$，

例如：$\because 3^4 = 81 \therefore \log_3 81 = 4$

2.基础公式

$\log_a 1 = 0 \quad \log_a a = 1 \quad \ln 1 = 0 \quad \ln e = 1 \quad \ln e^n = n \quad e^{\ln a} = a$

$e = \lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{2n+1}{2n-1})^n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$

3.化简公式

$\log_a xy = \log_a x + \log_a y \qquad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \qquad \log_a x^b = b\log_a x \qquad a^{\log_a x} = x$

$\lg x^a = a\lg|x|$ （$a = 2k$ ，$k \in \mathbb{Z}$）

换底公式：$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

特殊公式：$\frac{\lg(\frac{m+1}{m})^m}{\lg(\frac{m+1}{m})^{m+1}} = \frac{(\frac{m+1}{m})^m}{(\frac{m+1}{m})^{m+1}}$

4.本福德定律

数字n作为首位数出现的概率为$\log_{10}(1 + \frac{1}{n})$

在b进制下数码n作为首位出现的概率为$\log_b(1 + \frac{1}{n})$

1.5 不知道什么标题

1.5.1 等式

$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$

$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$

$30^4 + 120^4 + 272^4 + 315^4 = 353^4$

$27^5+84^5+110^5+133^5=144^5=61917364224$
$95800^4+217519^4+414560^4=422481^4$
$1729=12^3+1^3=9^3+10^3$（拉马努金）
$635318657=158^4+59^4=134^4+133^4$

1.5.2 《百鸟归朝图》

$1\times2+3\times4+5\times6+7\times8=100$

1.5.3 质数

前n个质数和为最小的完全平方数（共9个数）
$2+3+5+7+11+13+17+19+23=100=10^2$

1.5.4 生日问题

n个人中至少有两人同日过生日的概率
$P_{(23)}=1-\frac{365\times364\times363\times\ldots\times343}{365^{23}}\approx0.507$
$P_{(10)}=1-\frac{365\times364\times363\times\ldots\times356}{365^{10}}\approx0.117$

1.5.5 钟表

时针和分针的夹角为
$180^\circ-\left|180^\circ-|5.5m-30h|^\circ\right|$

1.5.6 大写数字

零壹贰叁肆伍陆柒捌玖零拾佰仟万亿兆

1.5.7 奇偶

一、$(2n+1)^2=4n(n+1)+1(n\in\mathbb{Z})$说明：偶数的平方能被4整除，奇数的平方被4除余1，被8除余1。

二、设m是整数，则$m,|m|,m^n(n\in\mathbb{Z})$的奇偶性相同。

1.5.8 纸张大小

制	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
长(mm)	1189	841	594	420	297	210	148	105	74
宽(mm)	841	594	420	297	210	148	105	74	52
面积(cm^2)	9999.49	4995.54	2494.8	1247.4	623.7	310.8	155.4	77.7	38.48

1.5.9

注意n^2是多项式，而10^n是指数

1.6 数列

1.6.1 等差数列

$a_1, a_1+d, a_1+2d, \cdots, a_1+nd$
A_n通项$= (n-1)d + a_1$
d公差$= A_{n+1} - A_n$
P_n项数$= \frac{a_n - a_1}{d} + 1$
S_n前n项的和$= \frac{(a_1+a_n)P_n}{2}$

1.6.2 等比数列

$a_1, a_1q^2, a_1q^3, \cdots, a_1q^n (q \neq 1)$
q公比$= \frac{a_{n+1}}{a_n}$
$a_n = a_1 q^{n-1}$
S_n前n项的和$= \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

1.6.3 三角形数列

$1, 4, 10, 20, \cdots$
$A_n - A_{n-1} = n$
$A_n = \sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$
$S_n = 1 + 3 + 6 + 10 + \cdots + A_n = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) = \frac{1}{6}(n^3 + 3n^2 + 2n)$

1.6.4 幂和形数列

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = (\sum_{i=1}^{n} i)^2 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$
$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$
$$\sum_{i=1}^{n} i^5 = \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$$
$$\sum_{i=1}^{n} i^6 = \frac{1}{42}n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)$$
$$\sum_{i=1}^{n} i^7 = \frac{1}{24}n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)$$

1.6.5 特殊幂和形数列

$$\sum_{i=1}^{n} 2i-1 = n^2$$
$$\sum_{i=1}^{n} 2i = n(n+1)$$
$$\sum_{i=1}^{n} (2i-1)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2-1)$$
$$\sum_{i=1}^{n} (2i-1)^3 = n^2(2n^2-1)$$
$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}i^2 = \frac{1}{2}(-1)^{n-1}n(n+1)$$
$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}i^3 = \begin{cases} \text{当}n=2k\text{时}, -\frac{1}{4}n^2(2n+3) \\ \text{当}n=2k+1\text{时}, \frac{1}{4}(2n-1)(n+1)^2 \end{cases}$$
$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}i^4 = \frac{1}{2}(-1)^{n-1}n(n+1)(n^2+n+1)$$

1.6.6 一阶线性递推数列

已知数列$a_n, a_1 = \xi, a_n = xa_{n-1} + y$,求$A_n$

解. $a_n = xa_{n-1} + y$

引入k使 $a_n + k = x(a_{n-1} + k) \Rightarrow a_n = xa_{n-1} + (x-1)k$

$\because (x-1)k = y \therefore k = \frac{y}{x-1}$

$\therefore a_n + \frac{y}{x-1} = x(a_{n-1} + \frac{y}{x-1})$

令$b_n = a_n + \frac{y}{x-1}$

则$b_n = xb_{n-1}$

$\therefore b_n$为等比数列,$b_1 = a_1 + \frac{y}{x-1} = \xi + \frac{y}{x-1}$

$\therefore b_n = (\xi + \frac{y}{x-1})x^{n-1}$

$\therefore a_n = (\xi + \frac{y}{x-1})x^{n-1} - \frac{y}{x-1}$

1.7 因式分解

1.7.1 完全平方公式及平方差公式

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a-b)^2 + 4ab$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = (a+b)^2 - 4ab$

$a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab = (a+b)^2 - 2ab = \frac{1}{2}[(a+b)^2 + (a-b)^2]$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$a^4 - b^4 = (a^2)^2 - (b^2)^2 = (a^2+b^2)(a+b)(a-b)$

$a^8 - b^8 = (a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)$

$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$

$x^2 - (a+b)x + ab = (x-a)(x-b)$

$ab + a + b + 1 = (a+1)(b+1)$

$abc + ab + bc + ca + 1 = (a+1)(b+1)(c+1)$

1.7.2 幂项展开式

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2c + 3ab^2 + 3ac^2 + 3bc^2 + 6abc$

$(a+b+c)^4 = a^4 + b^4 + c^4 + 6a^2b^2 + 6a^2c^2 + 6b^2c^2 + 4a^3b + 4a^3c + 4b^3c + 4ab^3 + 4ac^3 + 4bc^3 + 12a^2bc + 12b^2ac + 12c^2ab$

$(a+b+c+d)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 + 2ad + 2bd + 2cd + d^2$

$(a+b+c+d)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3a^2d + 3b^2a + 3b^2c + 3b^2d + 3c^2a + 3c^2b + 3c^2d + 3d^2a + 3d^2b + 3d^2c + 6abc + 6abd + 6acd + 6bcd$

1.7.3 纯降幂降次

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
$a^4+b^4=[(a+b)^2-2ab]^2-2a^2b^2=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2$
$a^6+b^6=(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)=(a^3+b^3)^2-2a^3b^3$
$a^6-b^6=(a^3+b^3)(a^3-b^3)=(a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)$
$=(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$
$a^2=(a+1)(a-1)+1$
$a^2+\frac{1}{a^2}=(a+\frac{1}{a})^2-2=(a-\frac{1}{a})+2$
$a^3+\frac{1}{a^3}=(a+\frac{1}{a})[(a+\frac{1}{a})^2-2]-(a+\frac{1}{a})$
$a^4+\frac{1}{a^4}=(a^2+\frac{1}{a^2})^2-2=(a^3+\frac{1}{a^3})(a+\frac{1}{a})-(a^2+\frac{1}{a^2})$

1.7.4 非纯幂项式

$a^4+4=a^4+4a^2+4-4a^4=(a^2+2)^2-(2a)^2=(a^2+2a+2)(a^2-2a+2)$
$a^4+\frac{1}{4}=(a^2+\frac{1}{2})^2-a^2=(a^2+a+\frac{1}{2})(a^2-a+\frac{1}{2})=[a(a+1)+\frac{1}{2}][a(a-1)+\frac{1}{2}]$

1.7.5 根式

$\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n}}{n}(n>0)$
$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}(a,b\geq 0,a\neq b)$
$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=(a+b)+2\sqrt{ab}$
$\sqrt{(a+b)\pm 2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}(a>b)$

例.已知三角形三边满足$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2=3(\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc})$，求此三角形的形状。
解. $(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2=3(\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc})$
$\Rightarrow a+b+c-\sqrt{ab}-\sqrt{ac}-\sqrt{bc}=0$
$\Rightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2+(\sqrt{c}-\sqrt{a})^2=0$
$\Rightarrow a=b=c$
故这是个等边三角形

1.7.6 末分类

$a^{15}+a^{14}+a^{13}+\cdots+a^2+a+1=(a^8+1)(a^4+1)(a^2+1)(a+1)$
$a^4+a^2+1=(a^2-a+1)(a^2+a+1)$
$a^3b-ab^3+a^2+b^2+1=(a^2-ab+1)(b^2+ab+1)$

$$(a^2+ab+b^2)^2-4ab(a^2+b^2)=(a^2-ab+b^2)^2$$

1.7.7 特殊公式

$$\sqrt{n+\frac{1}{n+2}}=(n+1)\sqrt{\frac{1}{n+2}}$$
$$\sqrt[n]{a+\frac{a}{a^n-1}}=a\sqrt[n]{\frac{a}{a^n-1}}(n>1)$$
$$a^2+(1-a)=a+(1-a)^2(0<a<1)$$
$$\frac{a^3+b^3}{a^3+(a-b)^3}=\frac{a+b}{a+(a-b)}$$
$$\frac{1}{1+x^{c-b}+x^{c-a}}+\frac{1}{1+x^{b-a}+x^{b-c}}+\frac{1}{1+x^{a-b}+x^{a-c}}=1$$

1.7.8 整数裂项

$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

$1\times2\times3+2\times3\times4+3\times4\times5+\cdots+n(n+1)(n+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$

$1\times2\times3\times4+2\times3\times4\times5+3\times4\times5\times6+\cdots+n(n+1)(n+2)(n+3)=\frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$

1.7.9 分数裂项

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$
$$\frac{1}{n(n+k)}=\frac{1}{k}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k})$$
$$\frac{k}{n(n+k)}=\frac{n+k-n}{n(n+k)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}$$
$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}]$$
$$\frac{1}{(2n+1)(2n-1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})=\frac{1}{4n^2-1}$$
$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$
$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$
$$\frac{1}{1\times2\times3\times4}+\frac{1}{2\times3\times4\times5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{1}{18}-\frac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)}$$

1.7.10 基本代数式

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$$

1.7.11 二次项含参分解式

$$ax^2+bx+c=mnx^2+(ms+nr)x+rs=(mx+r)(nx+s)$$

1.7.12 轮换式

1.$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ac)$

$=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]+ab+bc+ac$

2.$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$

特殊：当$a+b+c=0$时，$a^3+b^3+c^3=3abc$

$a^4+b^4+c^4=(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)$

$=(a^2+b^2+c^2)^2-2[(ab+bc+ac)^2-2(abc^2+bca^2+cab^2)]$

$=(a^2+b^2+c^2)^2-2[(ab+bc+ca)^2-2abc+(a+b+c)]$

$(a+b)^3+(b+c)^3+(a+c)^3+a^3+b^3+c^3=3(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$

$a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

$\frac{1}{b+c}(\frac{c}{b}-\frac{b}{c})+\frac{1}{a+c}(\frac{a}{c}-\frac{c}{a})+\frac{1}{a+b}(\frac{b}{a}-\frac{a}{b})=0$

$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(a+b)(a+c)(b+c)$

$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)-a^3-b^3-c^3-2abc=(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$

$(ab+bc+ca)(a+b+c)-abc=(a+b)(b+c)(c+a)$

$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)=-(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$

$a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)=-(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$

$(a+b+c)^4-(b+c)^4-(c+a)^4-(a+b)^4+a^4+b^4+c^4=12abc(a+b+c)$

$(a+b+c)^5-(b+c-a)^5-(c+a-b)^5-(a+b-c)^5=80abc(a^2+b^2+c^2)$

$(b-c)^6+(c-a)^6+(a-b)^6-3(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2=2(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)^3$

$(a+b)^7-a^7-b^7=7ab(a+b)(a^2+ab+b^2)^2$

$(a+b+c)^3+(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=4a^2(b+c)+4b^2(c+a)+4c^2(a+b)+4abc$

$a^3(b+c-a)^2+b^3(c+a-b)^2+c^3(a+b-c)^2+abc(a^2+b^2+c^2)+(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=2abc(ab+bc+ca)$

$(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3=3(a-b)(b-c)(c-a)$

$(a+b)^4+a^4+b^4=2(a^2+ab+b^2)$

$(a^2+ab+b^2)^2-4ab(a^2+b^2)=(a^2-ab+b^2)^2$

$(a+b)(b+a)(c+a)+abc=(a+b+c)(ab+bc+ca)$

$(ab+1)(a+1)(b+1)+ab=(ab+a+1)(ab+b+1)$

$2a^2b^2c^2+(a^3+b^3+c^3)abc+a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3=(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)$

$abc(a^3+b^3+c^3)-b^3c^3-c^3a^3-a^3b^3=(a^2-bc)(b^2-ca)(c^2-ab)$

$2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4=(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)$

$(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3-(a+b-c)^3=24abc$

$a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2=(a+b+c)(a-b-c)(b-c-a)(c-a-b)$

$(b-c)^5+(c-a)^5+(a-b)^5=5(a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$a^2b^2+2a^2b+2ab^2+a^2+b^2+3ab+a+b=(a+1)(b+1)(ab+a+b)$

$a^4+b^4+c^4+1+8abc-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+a^2+b^2+c^2)=(a+b+c+1)(a-b-c+1)(a+b-c-1)(a-b+c-1)$

$(ab-c^2)(ac-b^2)+(bc-a^2)(ba-c)^2+(ca-b^2)(cb-a^2)=(bc+ca+ab)(bc+ca+ab-a^2-b^2-c^2)$

$a^2(b+c-2a)+b^2(c+a-2b)+c^2(a+b-2c)+2(c^2-a^2)(c-b)+2(a^2-b^2)(a-c)+2(b^2-c^2)(b-a)=-3(a-b)(b-c)(c-a)$

$(b^2-c^2)(1+ab)(1+ac)+(c^2-a^2)(1+bc)(1+ba)+(a^2-b^2)(1+ca)(1+cb)=(b-c)(c-a)(a-b)(abc+a+b+c)$

已知a,b,c是互不相等的实数,则$\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ac}{(b-a)(b-c)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}=1$

例.证明：四个相邻正整数的乘积与1的和一定是完全平方数

证明：$n(n+1)(n+2)(n+3)+1$

$=[n(n+3)][(n+1)(n+2)]+1$

$=(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1$

$=(n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1$

$=(n^2+3n+1)^2$

1.8 不等式

1.8.1 基本性质

互递性：如果$a>b$,那么$b<a$

传递性：如果$a>b$,$b>c$,那么$a>c$

可加性：如果$a>b$,$c>d$,那么$a+c>b+d$

可乘性：如果$a>b>0$,$c>d>0$，那么$ac>bd>0$

倒数性：如果$a>b>0$，那么$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

1.8.2 若$a>b$，则有

$a\pm c>b\pm c$

$ac>bc(c>0);ac<bc(c<0)$

$\frac{a}{c}>\frac{b}{c}(c>0);\frac{a}{c}<\frac{b}{c}(c<0)$

$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}(n\in\mathbb{Z}且a,b>0)$

$a^n>b^n(b>0,n>0);a^n<b^n(b>0,n<0)$

$c^a<c^b(0<c<1);c^a=c^b(c=1);c^a>c^b(c>1)$

1.8.3 图像

若$a<b$，则:

$\begin{cases} x & > & a \\ x & > & b \end{cases} \Leftrightarrow x>b$ 同大取大 $\begin{cases} x & < & a \\ x & < & b \end{cases} \Leftrightarrow x<a$ 同小取小

$\begin{cases} x & > & a \\ x & < & b \end{cases} \Leftrightarrow a<x<b$ 大小中间找 $\begin{cases} x & < & a \\ x & > & b \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing$ 小大找不着

1.8.4 解不等式$ax>b$

$a>0$,则$x>\frac{b}{a}$

$a<0$,则$x<\frac{b}{a}$

$a=0$且$b<0$,则解集为$x\in\mathbb{R}$

$a=0$且$b\geq 0$,则无解:$x\in\varnothing$

1.8.5 一组不等式

$\begin{cases} x & \leq & a \\ x & \geq & a \end{cases} \Leftrightarrow x=a$

$\begin{cases} x & > & a \\ x & < & a \end{cases} \Leftrightarrow$ 无解：$x\in\varnothing$

1.8.6 基本不等式

一些数的算术平均数大于或等于这些数的几何平均数，即: $\frac{S_1+S_2+\cdots+S_n}{n} \geq \sqrt[n]{S_1\times S_2\times\cdots\times S_n}$

1.8.7 绝对值与不等式

1.简单绝对值 $|a| = \begin{cases} a(a>0) \\ a(a=0) \\ -a(a<0) \end{cases}$

$|a|^2=|a^2|=a^2$

$|ab|=|a|\times|b|$

$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}(b\neq 0)$

$-|a|\leq a\leq |a|$

2.解绝对值不等式

如果$a>0$,$|x|<a$,则$-a<x<a$

如果$a>0$,$|x|>a$,则$x<-a$或$x>a$

如果$|x|\geq x$,那么解集为$x\in\mathbb{R}$

3.绝对值中的最值

求下列式子的最小值:$|x-a_1|+|x-a_2|+|x-a_3|+\cdots+|x-a_n|$

解.

$$\begin{cases} n=2k+1(k\in\mathbb{Z}) & x\text{取}a_{\text{中}} \\ n=2k(k\in\mathbb{Z}) & x\text{为中间两个}a\text{之间的任意数} \end{cases}$$

1.8.8 三角不等式

1.三角不等式

$|a|-|b|\leq|a\pm b|\leq|a|+|b|$

$|a-b|+|b-c|\geq|a-c|$

$|a+b|+|b+c|\geq|a-c|$

向量三角不等式，对于任意a,b均有:$\left||\overrightarrow{a}|-\left|\overrightarrow{b}\right|\right|\leq\left|\overrightarrow{a}\pm\overrightarrow{b}\right|\leq|\overrightarrow{a}|+\left|\overrightarrow{b}\right|$

2.三角不等式的性质

若$|a|-|b|=|a+b|$,则$ab\leq 0$且 $|a|\geq|b|$

若$|a|-|b|=|a-b|$,则$ab\geq 0$且 $|a|\geq|b|$

若$|a+b|=|a|+|b|$,则$ab\geq 0$

若$|a-b|=|a|+|b|$,则$ab\leq 0$

若$|a|-|b|=|a\pm b|=|a|+|b|$,则$ab=0$

1.8.9 平方不等式

设x_i 是正数，则: $\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}+\frac{x_n^2}{x_1}\geq x_1+x_2+\cdots+x_n$

1.9 应用问题：行程、行船与溶液

1.10 幻方

1.11 星期运算

知道年、月、日即可算出星期几，这里提供一种方法。 [ ]：取整

步骤：

1.$f=[\frac{14-\text{月}}{2}]$ $\quad y=\text{年}-f$ $\quad m=\text{月}+12f-2$

2.$A=\text{日}+y+[\frac{31m}{12}]+[\frac{y}{4}]-[\frac{y}{100}]+[\frac{y}{400}]$

3.取$\frac{A}{7}$的余数P

4.

P	0	1	2	3	4	5	6
星期	日	一	二	三	四	五	六

1.12 排列组合

1.12.1 计数原理

一、阶乘

1.$n!$表示从n乘到1，即$n!=\prod_{i=1}^{n} i=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times2\times1$

2.规定$0!=1$(就是规定，无需推导)

4.$n\times n!=(n+1)!-n!$

二、考虑顺序的计数

从n组m个数$1,2,3,\cdots,m$中选一个n位数($\overline{ab}$,$\overline{ba}$各算一种)，可选m^n个

三、不考虑顺序计数

从n组m个数$1,2,3,\cdots,m$中选n个数($\overline{ab}$,$\overline{ba}$算一种)，可选$\frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!}$个

1.12.2 排列

即抽取后排列,从n个供选择元素中选取m个元素进行排列

$A_n^m(n>m)=\frac{n!}{(n-m)!}=n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-m+1)$

也可解释为：从n往下乘m个数

1.12.3 组合

即抽取，从n个供选择元素中选取m个元素，不进行排列

由$C_n^mA_m^m=A_n^m$得出： $C_n^m=\frac{A_n^m}{A_m^m}=\frac{A_n^m}{m!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$

1.12.4 排列组合公式

$A_n^0=1$

$A_n^n=n!$

$C_n^m=C_n^{n-m}$

$C_n^0=C_n^n=1$

$C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}$

$C_{n-1}^{r-1}+C_{n-1}^r=C_n^r(r=1,2,\cdots,n)$

$0=(1-1)^n=1-C_n^1+C_n^2-\cdots+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}+(-1)^n$
$-\frac{1}{x-1}C_n^1+\frac{2}{x-2}C_n^2+\cdots+(-1)^n\times\frac{n}{x-n}C_n^n=\frac{(-1)^n\times n!}{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}$
$1-x+\frac{x(x-1)}{2!}-\frac{x(x-1)(x-2)}{3!}+\cdots+(-1)^n\times\frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}=(-1)^n\times\frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}{n!}$

例一.从$0-9$这十个数字中任选3个奇数和2个偶数

（1）可以组成多少个没有重复数字的五位数？

（2）可以组成多少个没有重复数字的五位数的偶数？

解.（1）法一(间接求):$C_5^3C_5^2A_5^5-C_5^3C_4^1A_4^4=11040$

法二(直接求)$\left.\begin{array}{l}\text{有0}\quad C_5^3C_4^1A_4^1A_4^4\\ \text{无0}\quad C_5^3C_4^2A_5^5\end{array}\right\}=11040$

（2）$\left\{\begin{array}{l}\text{有0}\quad C_5^3C_4^1\left\{\begin{array}{l}\text{0在末}\quad A_4^4\\ \text{0不在末}\quad C_3^1A_3^3\end{array}\right.\\ \text{无0}\quad C_5^2C_4^2A_5^2A_4^4\end{array}\right.$

例二.在一个圆周上有10个不同的点，可连成多少条线，这些直线在圆内最多有几个交点？

解.（1）$C_{10}^2=45$

（2）因为4个点中只有一个交点在圆内，所以 $C_{10}^4=210$

例三.五个人会排版，四个人会印刷，三个人都会，要选四个排版，四个印刷，有多少种选法？

解.$\left\{\begin{array}{l}\text{都会的人都不选}C_5^4C_4^4\\ \text{都会的人选一个}C_3^1(C_5^3C_4^4+C_5^4C_4^3)\\ \text{都会的人选二个}C_3^2\left\{\begin{array}{l}\text{一排版一印刷}C_2^1C_5^3C_4^3\\ \text{二排版}C_5^2C_4^4\\ \text{二印刷}C_5^4C_4^2\end{array}\right.\\ \text{都会的人选三个}\left\{\begin{array}{l}\text{都排版}C_5^1C_4^4\\ \text{都印刷}C_5^4C_4^1\\ \text{一排版二印刷}C_3^1C_5^3C_4^2\\ \text{二排版一印刷}C_3^1C_5^2C_4^3\end{array}\right.\end{array}\right.$

例四.从$0-5$这六个数字中任取两个奇数和两个偶数，组成没有重复数字的四位数有多少种？

解.$C_3^1C_2^1C_3^1A_3^3+C_3^1C_2^2A_4^4=180$

例五.有六本不同的书，按1:1:2:2分成4堆，有多少种不同的分法？

解：解法一： $C_6^2\times\frac{C_4^2}{A_2^2}\times\frac{C_2^1}{A_2^2}=45$

解法二： $\frac{C_6^2C_4^2}{A_2^2}=45$

例六.将五位志愿者分成三组，其中两组各两人，另一组一人，分赴世博会的三个不同场馆服务，共有多少种分配方案？

解.$\frac{C_5^2C_3^2}{A_2^2}\times A_3^3=90$

例七.七名师生站成一排拍照留念，其中老师一人，男生四人，女生二人，在下列情况中，各有不同站法多少种？

(1)两名女生必须相邻

(2)四名男生互不相邻

(3)若四名男生身高都不等，按从高到低的顺序站

(4)老师不站中间，且女生不站两端

解：(1)$A_6^6A_2^2=1440$

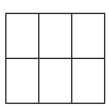
(2)$A_4^4A_3^3=144$

(3)$A_7^7\div A_4^4\times 2=420$

(4) 解法一.$\begin{cases}\text{女在中} & C_2^1C_4^1A_5^5\\ \text{女不在中} & A_4^2C_4^1A_4^4\end{cases}$ 解法二.$\begin{cases}\text{师不在两头} & C_4^1A_4^2A_4^4\\ \text{师在一头} & C_2^1C_4^1A_5^5\end{cases}$

两者结果都是2112种

例八.某城市的街道如图，某人要从左上角的A地前往右下角的B地，则路程最短的走法共有多少种？



解:有三种方法 $\frac{A_5^5}{A_2^2A_3^3}=C_5^2=C_5^3=10$

例九.男女学生共8人，从男生中选两人，从女生中选一人，共有三十种不同的选法，求女生人数

解:设男生x人，女生$(8-x)$人，则:$C_x^2\times C_{8-x}^1=30$

$\therefore\frac{A_x^2}{2}\times\frac{A_{8-x}^1}{1}=30, A_x^2\times A_{8-x}^1=60,$

$\therefore x(x-1)(8-x)=60,$

解得$x_1 = 6, x_2 = 5, x_3 = -2$
$\therefore$ 女生有2人或3人

1.13 降幂定理与杨辉三角

1.13.1 二项式定理

1.$(a+b)^n$的展开式共有$(n+1)$项
其中奇数项的二次项系数的和，等于偶数项的二次项系数的和等于2^{n-1},
即$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = 2^{n-1}$
所有项的二次项系数的和等于2^n，
即：$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$
$(a+b)^n = \sum\limits_{i=1}^{n} C_n^i a^i b^{n-i} = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + C_n^n b^n$
2.如果要求$(a-b)^n$,把b换做$-b$即可
3.$(a \pm b)^3 = (a \pm b)(a^2 \mp 2ab + b^2) = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^2$
$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$
$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5$

例一：$(1-x)^{10}$的展开式中x^3项的系数是多少？解：$-C_{10}^3 = -120$

例二：已知$(1+x)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$,若$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 16$,求$n$
解：
法一：令$x = 1$,得出$n = 4$
法二：由二项式定理，得$2^n = 16$,所以$n = 4$

1.13.2 幂的和差

$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2} b - a^{n-3} b^2 - a^{n-4} b^3 - \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1})$ $(n = 2k+1, k \in \mathbb{Z}$时成立)
$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} b + a^{n-3} b^2 + a^{n-4} b^3 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$
$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \mp a^2 b + ab^2 \pm a^2 b - ab^2 \pm b^3$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$
$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$
$a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$

1.14 多元一次方程组

1.15 复数

1.16 黄金分割

1.17 二次函数

1.18 三次方程

1.19 四次方程

1.20 多项式

1.21 导数

1.22 拉格朗日插值定理

1.23 差分

1.24 单位

1.25 物理

1.26 字母频率表

1.27 向量

1.28 均值不等式

1.29 柯西不等式

2 几何

2.1 几何初步

2.2 直线与坐标

2.3 正多边形与体

2.4 圆与球

2.5 高级公式

2.6 维维安尼定理

2.7 四面体体积

2.8 托勒密定理

2.9 四点共圆

2.10 圆幂定理

2.11 凸四边形不等式

3 基础三角

3.1 勾股定理

3.2 中线定理

3.3 角平分线定理

3.4 梅涅劳斯定理与塞瓦定理

3.5 射影定理

3.6 心

3.7 欧拉定理

3.8 三角形面积

4 三角

4.1 定义

4.2 函数图像

4.3 概述

4.4 三角与圆

4.5 诱导公式

4.6 基础知识

4.7 转化公式

4.8 特殊角

4.9 特殊三角形

4.10 解三角形

4.11 相关定理

4.12 三角恒等式

4.13 正弦不等式

4.14 三角射影不等式

4.15 中线公式与角平分线公式

4.16 中线等式与高线等式

4.17 解等腰三角形

4.18 解直角三角形

4.19 三角形中成立的公式

4.20 证明三角恒等式