系数阵笔记

浩于长空

2021 年 6 月 8 日

对于非负实数 a, b, c, 证明 $:(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right) \geq \frac{9}{4}$

(Crux Problem No.1940 & Iran TST,1996)

摘要

有关三元齐次不等式的小讲堂的笔记，不会对高考或竞赛很有用……大家看心情看这里很多内容会很抽象很玄学，而且这个技术更像心法，我未必能把自己的思考完全传达出来，能不能听懂全靠缘分，能保证的是Iran96这种简单的不等式以后遇到轻松解决

目录

1 预备知识

1.1 杨辉三角

我们先从杨辉三角说起，姑且默认大家都知道杨辉三角

2 二元系数组

2.1 引入

我们已经知道了杨辉三角，杨辉三角本身其实就暗示了“一排数字可以和一个二元齐次多项式相对应”。
比如[1]对应1，$[1,1]$对应$a+b$，$[1,2,1]$对应$a^2+2ab+b^2$……依此类推，那么自然地

$$[1,0,2]_{a,b}=a^2+2b^2$$

于是我们姑且作这样的记号，[1,0,2]姑且叫做二元系数组

2.2 二元系数组的运算性质

下面我们来观察感受一下系数组的运算性质：
其实大家学多项式乘法竖式的时候应该对这种运算方式有所了解，比如[1,1]×[1,0,0,1]=[1,1,0,1,1]，
这其实可以利用乘法分配律，也就是[1,1]×[1,0,0,1]=[1,1]×[1,0,0,0]+[1,1]×[0,0,0,1]=[1,1,0,0,0]+[0,0,0,1,1]=[1,1,0,1,
考虑到他和多项式同构所以系数组可以有分配律，
再例如：$[1,2,3]\times[1,0,1]=[[1,2,3],0,[1,2,3]]=[1,2,4,2,3]$，或者我们可以这么理解：

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & & \\ \hline 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \end{array}$$

$[1,2,3]\times[1,2,3]=[1\times[1,2,3],2\times[1,2,3],3\times[1,2,3]]=[1,4,10,12,9]$或者

$$\begin{array}{ccccc} & & 3 & 6 & 9 \\ & 2 & 4 & 6 & \\ 1 & 2 & 3 & & \\ \hline 1 & 4 & 10 & 12 & 9 \end{array}$$

可以发现，这其实就类似多项式的乘法，唯一的区别就是系数组的运算不进位。

3 系数阵

3.1 定义

把系数组变成三元的，就是系数阵，我们把下面这个东西叫做三元系数阵，设这个东西第一行有$n+1$个数，则称它是n阶的。和上面的二元情形类似，它和三元齐次式之间一一对应。左上角的数对应a^n系数，右上角对应b^n系数，下角对应c^n系数，三元齐次式写成这个样子的主要好处就是，使得我们不用写a^3b^2c之类的东西了，只需要书写系数，这会使得我们更加便于观察一个三元齐次式的结构。

$$\begin{bmatrix} x_{00} & & x_{01} & & x_{02} & & x_{03} \\ & x_{10} & & x_{11} & & x_{12} & \\ & & x_{20} & & x_{21} & & \\ & & & x_{30} & & & \end{bmatrix}$$

或者把它倒过来，左下角对应a^n系数，右下角对应b^n系数，上角的数对应c^n系数。

$$\begin{bmatrix} & & & x_{30} & & & \\ & & x_{20} & & x_{21} & & \\ & x_{10} & & x_{11} & & x_{12} & \\ x_{00} & & x_{01} & & x_{02} & & x_{03} \end{bmatrix}$$

例如：$a+b+c=$

$$\begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & & 1 \end{bmatrix}$$

$a+2b+3c=$

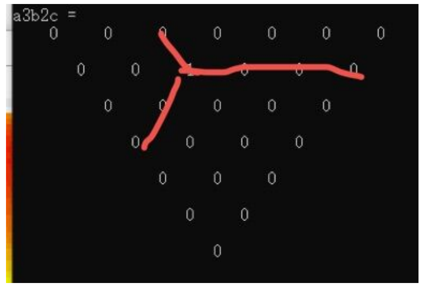
$$\begin{bmatrix} & 3 & \\ 1 & & 2 \end{bmatrix}$$

$a^3+2b^3+3a^2b+4c^3=$

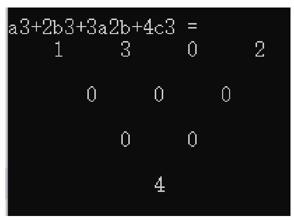
$$\begin{bmatrix} & & & 4 & & & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & 0 & & 0 & & 0 & \\ 1 & & 3 & & 0 & & 2 \end{bmatrix}$$

3.2 系数阵的运算

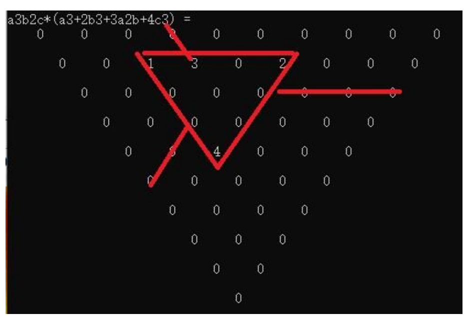
首先要知道的是一个系数阵乘一个单项系数阵的规律，比如系数阵3阶乘3阶结果是6阶。我们拿一个a^3b^2c看



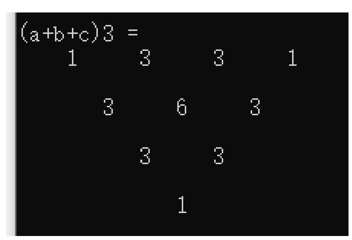
你会发现，这个“1”在a角的方向上距离边的距离是3， bc同理，每个数所处的坐标和指数向量是对应的，用的就是齐次坐标的规则。



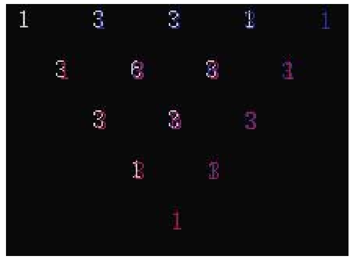
现在我们把这个东西和刚才那个单项式相乘，大家应该能看出发生了什么



于是我们来看看这个写法对于三元齐次多项式的乘法带来了怎样一些便利，比方说，三元的杨辉三角现在$(a+b+c)^3$已经有了，我们如何计算$(a+b+c)^4$



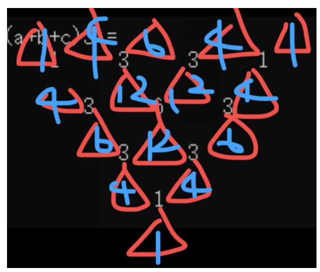
类似二元系数组，我们可以想象这样的一个感觉，把$(a+b+c)^3$分别乘上a,b,c然后加起来



或者

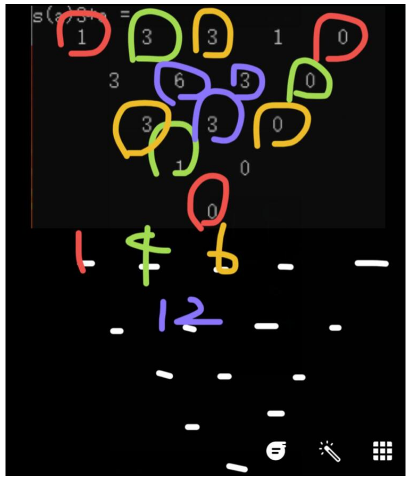
$$\begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & & 1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} &&&1&&& \\ &&3&&3&& \\ &3&&6&&3& \\ 1&&3&&3&&1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} & \begin{bmatrix} &&&1&&& \\ &&3&&3&& \\ &3&&6&&3& \\ 1&&3&&3&&1 \end{bmatrix} & \\ \begin{bmatrix} &&&1&&& \\ &&3&&3&& \\ &3&&6&&3& \\ 1&&3&&3&&1 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} &&&1&&& \\ &&3&&3&& \\ &3&&6&&3& \\ 1&&3&&3&&1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} &&&&1&&&& \\ &&&4&&4&&& \\ &&6&&12&&6&& \\ &4&&12&&12&&4& \\ 1&&4&&6&&4&&1 \end{bmatrix}$$

如果我们直接去思考“最后的这些数由何而来”，就可以这样算出来



这也正是杨辉三角的思路在三元情形下的推广，由此我们可以看出，系数阵在“乘以$(a+b+c)$”这个操作上是带来便利的，此外系数阵还有一个便利，在作轮换和的时候也带来方便。比如说我们把$(a+b+c)^3(a+b+c)$视作$\sum((a+b+c)^3a)$，$(a+b+c)^3a$就是

a角方向加一排0，对这个式子作轮换和的话，我们只需要盯着旋转对称的位置相加就行大体像这个样子，剩下的地方可以直接根据对称性写出来，这里体现的是系数阵在轮换和操作上带来的便利



留几个思考题

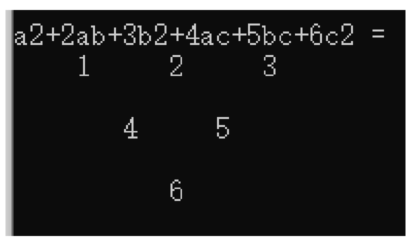
(1)用系数阵计算$(a+b)^2(a+c)^2$，观察结果形式的特点

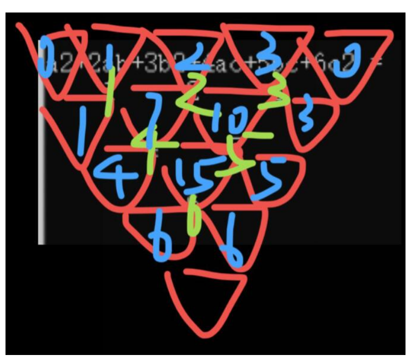
(2)如何用系数阵计算$P(a,b,c)\times(ab+ac+bc)$，当然$P(a,b,c)$齐次

(3)如何用系数阵计算轮换对称和

(4)用系数阵方法将Iran96不等式通分

思考题2的话，乘$(ab+ac+bc)$和乘$(a+b+c)$差不多，比如要计算这个东西乘$(ab+ac+bc)$的话，可以在心里画这样一些倒三角求和，蓝色的就是积了。





4 均值不等式的系数阵表达

这里我们只探讨【对于若干系数为1的单项式使用AM-GM不等式】的特点

我们可以先观察几个例子，首先对于$a^2+b^2\geq 2ab$，即$a^2+b^2-2ab\geq 0$

我们知道，$a^2+b^2-2ab=$

$$\begin{bmatrix} 1 & & -2 & & 1 \\ & 0 & & 0 & \\ & & 0 & & \end{bmatrix}$$

a^2+c^2-2ac的话就是转一下

$$\begin{bmatrix} 1 & & 0 & & 0 \\ & -2 & & 0 & \\ & & 1 & & \end{bmatrix}$$

那在找个次数高点的例子，$a^4+b^2c^2-2a^2bc=$

$$\begin{bmatrix} 1 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ & 0 & & -2 & & 0 & & 0 & \\ & & 0 & & 0 & & 1 & & \\ & & & 0 & & 0 & & & \\ & & & & 0 & & & & \end{bmatrix}$$

到这里其形状的规律已经很明显了，就是“两个1以及其中点处的-2”，实际上根据系数阵的定义很容易验证这一点，那么再看看三元的情形

$a^3+b^3+c^3-3abc=$

$$\begin{bmatrix} 1 & & 0 & & 0 & & 1 \\ & 0 & & -3 & & 0 & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & & & 1 & & & \end{bmatrix}$$

$a^2b+b^2c+c^2a-3abc=$

$$\begin{bmatrix} 0 & & 1 & & 0 & & 0 \\ & 0 & & -3 & & 1 & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & 0 & & & \end{bmatrix}$$

$a^2b+ab^2+c^3-3abc=$

$$\begin{bmatrix} 0 & & 1 & & 1 & & 0 \\ & 0 & & -3 & & 0 & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & & & 1 & & & \end{bmatrix}$$

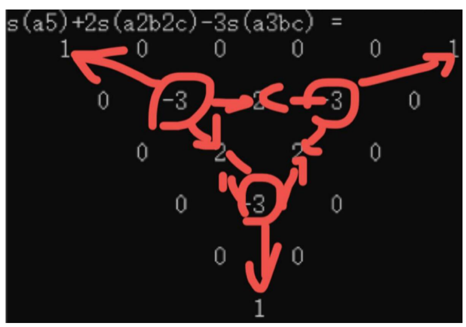
我们可以惊讶地发现，其形态就是“三个1以及其重心处的-3”，同理n元的情况也是如此，应当是“n个1以及其重心处的$-n$” 那么这里作一个小补——这些1可以有部分重合的，比如 $a^3+a^3+b^3 \geq 3a^2b=$

$$\begin{bmatrix} 2 & & -3 & & 0 & & 1 \\ & 0 & & 0 & & 0 & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & & & 0 & & & \end{bmatrix}$$

对应的就是重合的两个1和另一个1与这三点重心上的-3

这个大家应该不难接受，那么我们来看一个简单的例子吧

$$a,b,c \geq 0, \quad \text{求证: } \sum a^5+2\sum a^2b^2c \geq 3\sum a^3bc$$



我们只需看看负项，找找让哪些正项来对付就行，里应外合。下一个例子

$$a,b,c \geq 0, \quad \text{求证: } \sum a^3b \geq \sum a^2bc$$

咕咕咕