\documentclass[UTF8]{ctexart}

%宏包：

\usepackage{abstract}

\usepackage{lettrine}

\usepackage{multicol}

\usepackage{cite}

\usepackage{mathtools}

\usepackage{graphicx}

\usepackage{subfigure}

\usepackage{caption}

\usepackage{booktabs}

\usepackage{multirow}

\usepackage{diagbox}

\usepackage{makecell}

\usepackage{placeins}

\usepackage{float}

\usepackage{geometry}

\usepackage{amssymb}

\usepackage{xcolor}

\begin{document}

\noindent 绝密启用前\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 试卷类型：B\\

\centerline{\LARGE 2021 年普通高等学校招生全国统一考试}

本试卷共 4 页, 22 小题，满分 150 分。考试用时 120 分钟。 注意事项:\\

1 .答卷前, 考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上. 用 $2 \mathrm{~B}$ 铅羌将试卷类型（B）填涂在答题卡相应位置上。将条形码横贴在 答题卡右上角 “条形码粘贴处".\\

2. 作答选择题时，选出每小颗答案后，用 $2 \mathrm{~B}$ 铅笔在答题卡上对应题目选项 的答案信息点涂黑: 如需改动, 用橡皮寮干净后，再选涂其他答案。答案不 能答在试卷上。\\

3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答, 答案必须写在答题卡各题目 指定区域内相应位置上; 如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新 答案; 不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。\\

4. 考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。\\

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只

有一项是符合题目要求的。\\

1. 设集合 $A=\{x \mid-2<x<4\}, \quad B=\{2,3,4,5\}$, 则 $A \cap B=$(\qquad)\\

A. $\{2\}$\qquad

B. $\{2,3\}$\qquad

C. $\{3,4\}$\qquad

D. $\{2,3,4\}$\\

2. 已知 $z=2-\mathrm{i}$, 则 $z(\bar{z}+\mathrm{i})=$(\qquad)\\

A. $6-2 \mathrm{i}$\qquad

B. $4-2 \mathrm{i}$\qquad

C. $6+2 \mathrm{i}$\qquad

D. $4+2 \mathrm{i}$\\

3. 已知圆雉的底面半径为 $\sqrt{2}$, 其侧面展开图为一个半圆，则该圆雉的母线长为(\qquad)\\

A. 2\qquad

B. $2 \sqrt{2}$\qquad

C. 4\qquad

D. $4 \sqrt{2}$\\

4. 下列区间中，函数 $f(x)=7 \sin \left(x-\displaystyle{\frac{\pi}{6}}\right)$ 单调递增的区间是(\qquad)\\

A. $\left(0, \displaystyle{\frac{\pi}{2}}\right)$\qquad

B. $\left(\displaystyle{\frac{\pi}{2}}, \pi\right)$\qquad

C. $\left(\pi, \displaystyle{\frac{3 \pi}{2}}\right)$\qquad

D. $\left(\displaystyle{\frac{3 \pi}{2}}, 2 \pi\right)$\\

\newpage

5. 已知 $F\_{1}, F\_{2}$ 是椭圆 $C: \displaystyle{\frac{x^{2}}{9}}+\displaystyle{\frac{y^{2}}{4}}=1$ 的两个焦点，点 $M$ 在 $C$ 上, 则 $\left|M F\_{1}\right| \cdot\left|M F\_{2}\right|$ 的最大值为(\qquad)\\

A. 13\qquad

B. 12\qquad

C. 9\qquad

D. 6\\

6. 若 $\tan \theta=-2$, 则 $ \displaystyle{\frac{\sin \theta(1+\sin 2 \theta)}{\sin \theta+\cos \theta}}=$(\qquad)\\

A. $-\displaystyle{\frac{6}{5}}$\qquad

B. $-\displaystyle{\frac{2}{5}}$\qquad

C. $\displaystyle{\frac{2}{5}}$\qquad

D. $\displaystyle{\frac{6}{5}}$

\\

7. 若过点 $(a, b)$ 可以作曲线 $y=\mathrm{e}^{x}$ 的两条切线, 则(\qquad)\\

A. $\mathrm{e}^{b}<a$\qquad

B. $e^{a}<b$\qquad

C. $0<a<\mathrm{e}^{b}$\qquad

D. $0<b<e^{a}$\\

8. 有6个相同的球，分别标有数字1，2，3，4，5，6, 从中有放回的随机取两次,

每次取1个球。甲表示事件 “第一次取出的球的数字是 1 ", 乙表示事件“第二次取

出的球的数字是 2 ", 丙表示事件 “两次取出的球的数字之和是 8 ", 丁表示虽件“两

次取出的球的数字之和是 7 "，则(\qquad)\\

\noindent A. 甲与丙相互独立\qquad

B. 甲与丁相互独立\qquad

C. 乙与丙相互独立\qquad

D. 丙与丁相互独立\\

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项

符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。\\

9. 有一组样本数据 $x\_{1}, x\_{2}, \cdots, x\_{n}$, 由这组数据得到新样本数据 $y\_{1}, y\_{2}, \cdots, y\_{n}$, 其中

$y\_{i}=x\_{i}+c(i=1,2, \cdots, n), c$ 为非零常数, 则(\qquad)\\

A. 两组样本数据的样本平均数相同\\

B. 两组样本数据的样本中位数相同\\

C. 两组样本数据的样本标准差相同\\

D. 两组样本数据的样本极差相同\\

10. 已知 $O$ 为坐标原点, 点 $P\_{1}(\cos \alpha, \sin \alpha), P\_{2}(\cos \beta,-\sin \beta), P\_{3}(\cos (\alpha+\beta), \sin (\alpha+\beta))$,

$A(1,0)$, 则(\qquad)\\

A. $\left|\overrightarrow{O P\_{1}}\right|=\left|\overrightarrow{O P\_{2}}\right|$\\

B. $\left|\overrightarrow{A P}\_{1}\right|=\left|\overrightarrow{A P\_{2}}\right|$\\

C. $\overrightarrow{O A} \cdot \overrightarrow{O P\_{3}}=\overrightarrow{O P\_{1}} \cdot \overrightarrow{O P\_{2}}$\\

D. $\overrightarrow{O A} \cdot \overrightarrow{O P}\_{1}=\overrightarrow{O P\_{2}} \cdot \overrightarrow{O P\_{3}}$\\

11. 已知点 $P$ 在圆 $(x-5)^{2}+(y-5)^{2}=16$ 上, 点 $A(4,0), B(0,2)$, 则(\qquad)\\

A. 点 $P$ 到直线 $A B$ 的距离小于 10\\

B. 点 $P$ 到直线 $A B$ 的距离大于2\\

C. 当 $\angle P B A$ 最小时, $|P B|=3 \sqrt{2}$\\

D. 当 $\angle P B A$ 最大时, $|P B|=3 \sqrt{2}$\\

12. 在正三棱柱 $A B C-A\_{1} B\_{1} C\_{1}$ 中， $A B=A A\_{1}=1$, 点 $P$ 满足 $\overrightarrow{B P}=\lambda \overrightarrow{B C}+\mu \overline{B B\_{1}}$, 其中

$\lambda \in[0,1], \quad \mu \in[0,1]$, 则(\qquad)\\

A. 当 $\lambda=1$ 时, $\triangle A B\_{1} P$ 的周长为定值\\

B. 当 $\mu=1$ 时，三棱雉 $P-A\_{1} B C$ 的体积为定值\\

C. 当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，有且仅有一个点 $P$, 使得 $A\_{1} P \perp B P$\\

D. 当 $\mu=\frac{1}{2}$ 时，有且仅有一个点 $P$, 使得 $A\_{1} B \perp$ 平面 $A B\_{1} P$\\

\newpage

三、填空题: 本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。\\

13. 已知函数 $f(x)=x^{3}\left(a \cdot 2^{x}-2^{-x}\right)$ 是偶函数，则 $a=\underline{\qquad\qquad}$ .\\

14. 已知 $O$ 为坐标原点，抛物线 $C: y^{2}=2 p x(p>0)$ 的焦点为 $F, P$ 为 $C$ 上一点, $P F$ 与\\

$x$ 轴垂直, $Q$ 为 $x$ 轴上一点，且 $P Q \perp O P .$ 若 $|F Q|=6$, 则 $C$ 的淮线方程为$ \underline{\qquad\qquad} $.\\

15. 函数 $f(x)=|2 x-1|-2 \ln x$ 的最小值为$ \underline{\qquad\qquad} $.\\

16. 某校学生在研究民间前纸艺术时，发现敖纸时经常会沿纸的某条对称轴把纸对折。规

格为 $20 \mathrm{dm} \times 12 \mathrm{dm}$ 的长方形纸，对折 1 次共可以得到 $10 \mathrm{dm} \times 12 \mathrm{dm}, 20 \mathrm{dm} \times 6 \mathrm{dm}$ 两

种规格的图形，它们的面积之和 $S\_{1}=240 \mathrm{dm}^{2}$, 对折 2 次共可以得到 $5 \mathrm{dm} \times 12 \mathrm{dm}$,

$10 \mathrm{dm} \times 6 \mathrm{dm}, 20 \mathrm{dm} \times 3 \mathrm{dm}$ 三种规格的图形，它们的面积之和 $S\_{2}=180 \mathrm{dm}^{2}$, 以此类

推. 则对折 4 次共可以得到不同规格图形的种数为

么 $\displaystyle{\sum\_{k=1}^{n} S\_{k}}=$$ \underline{\qquad\qquad} \mathrm{dm}^{2}$\\

四、解答题: 本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤\\

17. (10 分)

已知数列 $\left\{a\_{n}\right\}$ 满足 $a\_{1}=1, \quad a\_{n+1}=\left\{\begin{array}{l}a\_{n}+1, \quad n \text { 为奇数 } \\ a\_{n}+2, \quad n \text { 为偶数 }\end{array}\right.$\\

(1) 记 $b\_{n}=a\_{2 n}$, 写出 $b\_{1}, b\_{2}$, 并求数列 $\left\{b\_{n}\right\}$ 的通项公式:\\

(2)求 $\left\{a\_{n}\right\}$ 的前 20 项和.\\

18. ( 12 分)

某学校组织 “一带一路” 知识竞赛，有 $\mathrm{A}, \mathrm{B}$ 两类问题. 每位参加比赛的同学先在

两类问题中选择一类并从中随机抽取一个问题回答，若回答错误则该同学比赛结束; 若

回答正确则从另一类问题中再随机抽取一个问题回答, 无论回答正确与否，该同学比赛

结束. $\mathrm{A}$ 类问题中的每个问题回答正确得 20 分，否则得 0 分： $\mathrm{B}$ 类问题中的每个问题

回答正确得 80 分，否则得 0 分.\\

已知小月能正确回答 $\mathrm{A}$ 类问题的概率为 $0.8$, 能正确回答 $\mathrm{B}$ 类问题的概率为 $0.6$,

且能正确回答问题的概率与回答次序无关.\\

（1）若小明先回答 $\mathrm{A}$ 类问题，记 $X$ 为小明的累计得分，求 $X$ 的分布列:\\

（2）为使累计得分的期望最大，小明应选择先回答哪类问题? 并说月理由.\\

19. (12 分)

记 $\triangle A B C$ 内角 $A, B, C$ 的对边分别为 $a, b, c .$ 已知 $b^{2}=a c$, 点 $D$ 在边 $A C$

上, $B D \sin \angle A B C=a \sin C$.\\

(1) 证明: $B D=b$ :\\

(2) 若 $A D=2 D C$, 求 $\cos \angle A B C$.\\

20. (12 分)

如图，在三棱雉 $A-B C D$ 中, 平面 $A B D \perp$ 平面

$B C D, A B=A D, O$ 为 $B D$ 的中点.\\

(1) 证明: $O A \perp C D$ :\\

(2) 若 $\triangle O C D$ 是边长为 1 的等边三角形, 点 $E$ 在

棱 $A D$ 上， $D E=2 E A$, 且二面角 $E-B C-D$ 的大小为

$45^{\circ}$, 求三棱雉 $A-B C D$ 的体积.\\

\begin{center}

\includegraphics[width=0.35\linewidth]{a/T20}

\end{center}

\newpage

21. (12 分)

在平面直角坐标系 $x O y$ 中，已知 点 $F\_{1}(-\sqrt{17}, 0), \quad F\_{2}(\sqrt{17}, 0)$, 点 $M$ 满足

$\left|M F\_{1}\right|-\left|M F\_{2}\right|=2$. 记 $M$ 的轨迹为 $C$.\\

(1) 求 $C$ 的方程:\\

(2) 设点 $T$ 在直线 $x=\displaystyle{\frac{1}{2}}$ 上，过 $T$ 的两条直线分别交 $C$ 于 $A, B$ 两点和 $P, Q$ 两点,

且 $|T A| \cdot|T B|=|T P| \cdot|T Q|$, 求直线 $A B$ 的斜率与直线 $P Q$ 的斜率之和.\\

22.（12 分）

已知函数 $f(x)=x(1-\ln x)$.\\

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性;\\

(2)设 $a, b$ 为两个不相等的正数，且 $b \ln a-a \ln b=a-b$, 证明: $2<\displaystyle{\frac{1}{a}}+\displaystyle{\frac{1}{b}}<\mathrm{e} .$\\

\end{document}