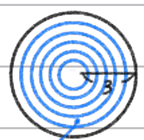
Essence of Calclues (3b1b)

1. 미적분학의 본질

– 원의 넓이가 왜 πr^2일까?

미적분학의 3가지 핵심 아이디어

1. 미분과 적분은 opposite한 개념이다.

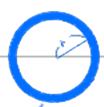


이걸 잘라보자.

수많은 방법중 하나는, 원을 여러개의 동심원으로 자르는 것.

↳ 원의 대칭성을 유지할 수 있다.

여기서 하나를 뽑아보자. 이 동심원의 r은 $0<r<3$



이 각각의 동심원의 넓이를 알수 있다면, 그리고 이걸 다 더 할수 있다면 원의 넓이를 알아낼 수 있다.

↳ 일단 이걸 펼쳐봅시다.

$2\pi r$ → 자는 180°, 180°일때 r이 2개 있다($2\pi r$) 각이180일때, r로 파서 반을 돌았다(πr)

dr

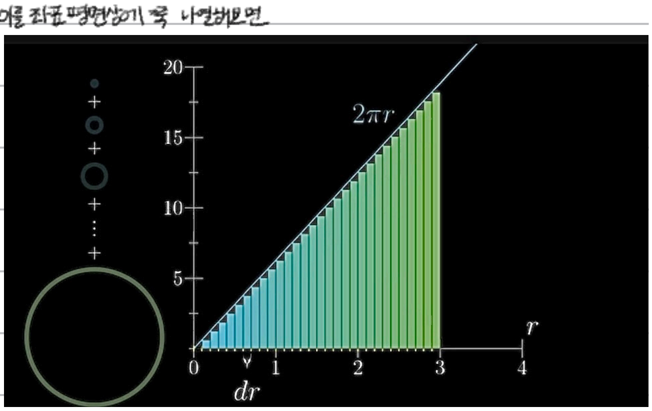
↳ 직사각형에 가까운 도형이라고 치자.

↳ 임의의 수. 얼마나 잘게 잘랐냐에 따라 달렸다. 0.1 정도라 생각하자.

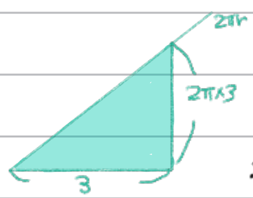
그렇다면 이 동심원의 넓이는? 대략 $2\pi r dr$

dr이 점점 작아질수록, 동심원 넓이와의 오차는 점점 줄어들게 될 것이다!

이를 좌표평면상에 쭉 나열해보면



이렇게 되고, 각 막대의 길이는 $2\pi r$이므로, 이를 직선으로 위와같이 표현할 수 있다. 그리고 dr을 더 잘게 자르면..



삼각형이 됨!

$\therefore Area = \frac{1}{2}bh$

$= \frac{1}{2} 3 \times 2\pi \times 3$

$= \pi \times \underbrace{3 \times 3}_{r} = \pi r^2$

원의 넓이를 구할 때 어떤 방식으로 값을 근사시켰는지에 대해 집중해보세요.

↳ 미적분학 접근의 시작

$\boxed{\text{Hard Problem}}$

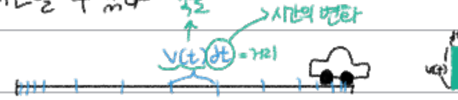
⇓

$\boxed{\text{Sum of many Small Values}}$

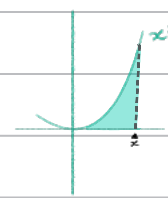
⇓

$\boxed{\text{Area under a graph}}$

ex) 차가 얼마나 이동했는지를 각 시점에 따른 속도에 근거하여 계산할 수 있다.



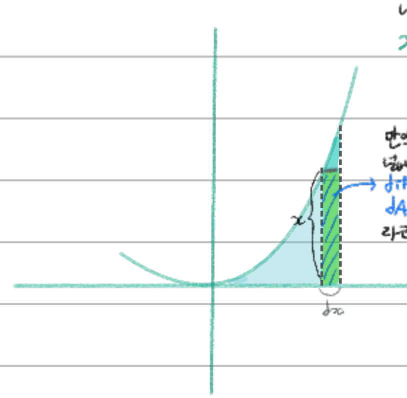
원의 넓이를 구할 때는 삼각형 그래프가 나왔다고는 하지만,



이럴때는 어떻게 해야 하죠?

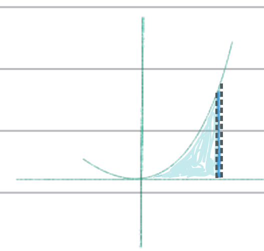
→ 왼쪽 끝 지점이 0에 고정되어 있고 오른쪽 끝 지점이 움직인다고 생각해보자.

0부터 x까지의 포물선 아래 넓이를 나타내는 함수 A(x)를 찾는것을, x^2의 적분이라 한다.



만약 dx만큼 x를 약간 밀어본다면 넓이에 변화가 생기는데, 변화된 넓이를 difference of Area dA 라고 부른다.

dA는 dx가 작아질수록, 아래와 같이 직사각형의 형태를 띄게 된다.



즉, $dA \approx x^2 dx$라고 할 수 있고,

$\frac{dA}{dx} \approx x^2$, 즉 아주 작은 x의 변화인 dx에 대한 A(x)의 변화를 나타내는 비율은, x값에 상관 없이 이를 값은 같다.

그리고 dx가 작아질수록 x^2에 더 근사한다.

어떤 그래프든 상관 없이 해당 그래프 아래의 넓이를 구하는 함수는 위와 같은 특성을 가지고 있다.

즉, $\frac{dA}{dx}$는 그 지점의 그래프의 높이와 거의 같다는 것이다.

이는 dx가 0으로 근사할 때 더 비슷한 값을 갖는다.
$(x \to 0)$

$\frac{dA}{dx}$를 도함수 (Derivative of A) 라 한다.

다르게 말하면 dx가 0으로 접근할수록 이 비율이 접근해 가는 무언가 (그래프에서의 해당 지점의 높이) 이다.

⇒ 함수가 입력값의 작은 변화에 얼마나 민감한지를 측정한 것 (x 값에 따라 영향을 받는다)

정리하자면, $A(x)$는 모르더라도 도함수는 알 수 있고, 도함수로부터 원래 함수가 어떤 값이 되어야만 하는지는 알 수 있다

적분은 그래프 밑의 함수의 넓이를 알아내는 함수를 찾는 것이고, 도함수는 원래의 그래프 함수를 되돌려주기 때문에, 적분과 도함수는 서로 반대 개념이라고 할 수 있다.

2. 미분의 역설 - 미적분학의 본질

미분의 모순에 대해 알고, 이를 어떻게 피할수 있는지 알아보자.

(Instantaneous rate of change)
일반적으로, 우리가 생각하는 도함수란 = "순간변화율"

근데, 사실 "순간변화율"이란 말은 좀 이상하거든요.

왜냐하면, 변화는 시간의 간격에서 일어나는 건데,

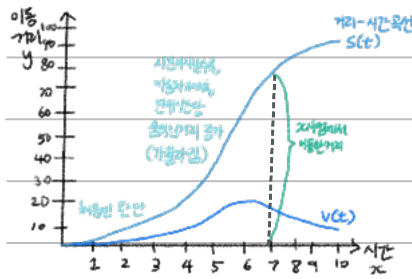
거기에 순간이 붙으면 사실 시간의 간격은 발생하지 않기 때문!

(미분)
그렇다면 어째서 도함수를 순간 변화율이라고 부르는 것일까?

예를 들어, 어떤 점 A에서 출발하는 자동차가 있다고 하자.

이 자동차는 출발후 가속하다 다시감속해서, 100m 떨어진 지점 B까지 10초동안 이동한 후 멈춘다.

이 운동을 그래프로 표현하면 다음과 같다.



$v(t)$와 $S(t)$는 밀접하게 연관되어있다

→ $S(t)$가 달라지면, $v(t)$도 달라짐.

이 둘의 상관관계는 무엇일까?

잠깐 일단 속력이 뭔지 알아보자

직관적으로 속력이란? 어떤 시점에서 자동차 속도계가 표시하는 숫자

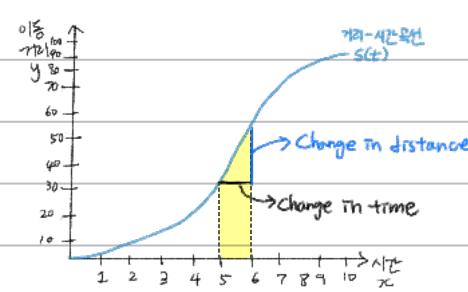
곡선이 ($S(t)$) 가파를수록 속력이 빠릅니다. (단위시간에 더 많은 거리를 움직임)

근데, 생각해보면 '특정 시점에서의 속력'이 말이 되는 말일까?

↳ 속력을 재기 위해서는 두 특정 시점이 필요함. 그 시간동안 움직인 거리를 측정해야 속력을 알 수 있는것!

$$\text{Velocity} = \frac{\text{Change in distance}}{\text{Change in time}} = \text{주어진 시간 동안 움직인 거리}$$

그렇다면, 특정 시점 t에서의 속력은?



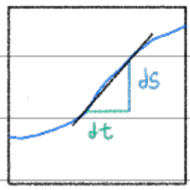
자 속도계에서 3초 시점의 속도는 뭐냐,

3초와, 아주 짧은 term의 시점, 예로 3.01초 사이의 움직인 짧은 거리를 매우짧은 시간인 0.01초로 나눈 것.

즉, 특정시점의 속력을 재는게 아니라, 매우 짧은 시간 구간 사이의 속력을 재는 것! 식을 다시 정리하면,

ds → 짧은 시간동안 움직인 거리

dt → 매우 짧은 시간



$x=3$인 구간 확대

$\frac{ds}{dt}$ = dt와 ds를 통과하는 접선의 기울기 $= \frac{rise}{run}$

t에 상관없이 $\frac{ds}{dt}$가 적용되며, $\frac{ds}{dt}$를 t에대한 함수로 생각하자.

→ 특정시점 t가 주어질때, 그 지점에서의 ds/dt를 알려주는 함수. 즉, $\frac{ds}{dt}(t)$ = 해당시점에서의 속력

$$\frac{ds}{dt}(t) = \frac{s(t+dt)-s(t)}{dt} = v(t)$$

⇒ 짧은 구간에서의 속력을 계산하여 그 시점의 속력을 정의

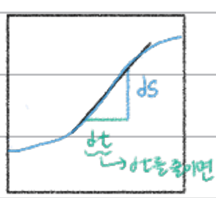
자, 그럼 미분이란 무엇인가?

$\frac{ds}{dt}(t)$에서, dt가 0으로 접근하는 값!

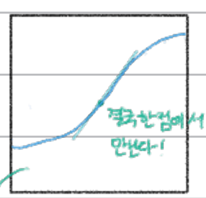
$$\frac{ds}{dt} = \frac{s(t+0.000\cdots1)-s(t)}{\underbrace{0.000\cdots1}}$$

dt is not "infinitely small"
dt is not 0

→ dt가 0에 "근사" 한다! (0 아님, 무한소 아님. 그냥 엄청작은 수)



$x=3$인 구간 확대



$x=3$인 구간 확대

→ 두 점사이의 기울기가 아닌, 어떤 특정한 접선의 기울기와 동일!

⇒ 순간의 변화라는 말도 안되는 용어를 설명할수(?) 있다

마치 그래프의 한 점의 접선의 기울기처럼 보인다!

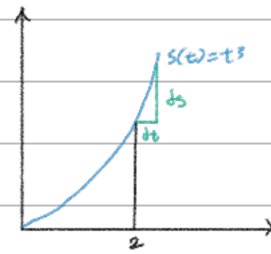
"순간변화율"이라 생각하지 말고, 한 점 근처의 변화율을 나타내는 최상의 상수 근사값이라고 생각하라!

미적분에서는,

Using "d" announces that $dt \to 0$

예로, $s(t)$의 도함수는

$\frac{ds}{dt}(t)$ 이고, 이는 t가 점점 0으로 다가간다는 뜻이다.



$$\frac{ds}{dt}(2) = \frac{s(2+dt)-s(2)}{dt}$$

$$= \frac{(2+dt)^3-(2)^3}{dt}$$

$$= \frac{\cancel{2^3} + 3(2)^2 dt + 3(2)dt^2 + dt^3 - \cancel{2^3}}{dt}$$

$$= 3(2)^2 + 3(2)dt + dt^2$$

$$= 3(2)^2$$

그렇다면, 거리가 t^3을 이동하는 자동차가 있다고 생각해보자.

$t=0$일때의 속도는? → 이때 자동차가 움직였다고 말할수 있을까?

$$\frac{ds}{dt}(t) = 3t^2 = 3(0)^2 = 0\,\frac{m}{s}$$

자동차의 순간속도가 0이라면, 차는 대체 언제 움직이는걸까?

→ 모순발생

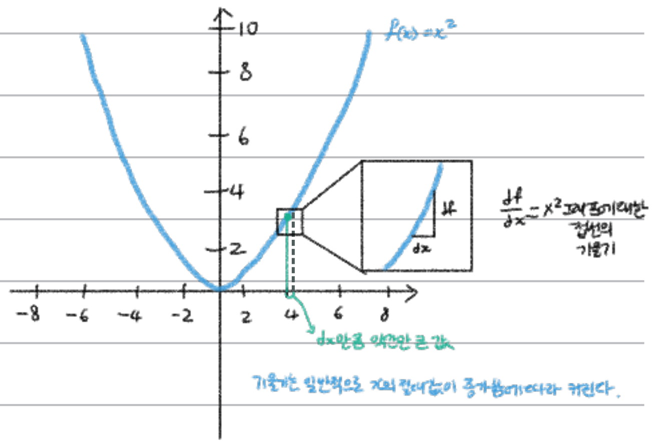
⇒ 도함수가 0이라는 의미는, 그 지점 근처의 차량 속도 근사값이 0이라는의미! 하지만 실제로는 절대 이 값이 0이 아님!

3. 기하학을 통한 파생 공식

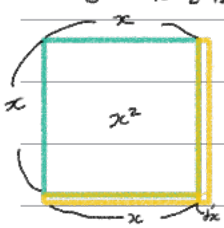
도함수를 실제로 계산하는 방법을 배워보자

몇몇의 도함수를 기하학적으로 설명하자면 다음과 같다.

- x^2



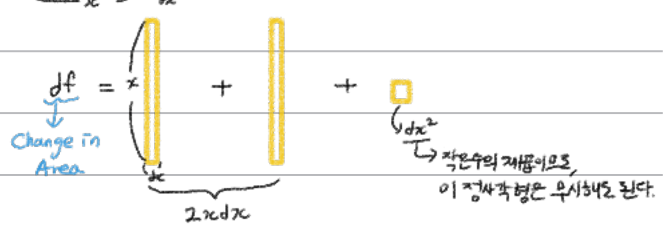
더 문자 그대로 살펴보자.



한 변의 길이가 x인 정사각형 x^2에,

x를 아주 조금 dx만큼 넓혔다고 생각해보자.

더해진 면적을 나타내면 다음과 같다.

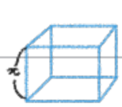


$df = 2xdx$ → 여기서 양변을 dx로 나누면,

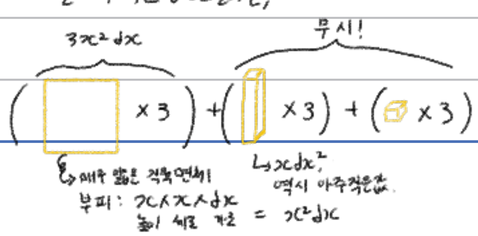
$\frac{df}{dx} = 2x = \frac{\text{Change in Area}}{\text{Change in } x} = \frac{d(x^2)}{dx}$

- $f(x) = x^3$

x^3은 다음과 같은 정육면체로 표현할 수 있다.



x를 아주 작은 dx로 늘리면,



$\therefore\ df = 3x^2dx$

$\Rightarrow \frac{df}{dx} = 3x^2$

= means x의 단위 변화당 x^3의 변화율인

x^3의 도함수가 x^2의 3배라는 뜻

= means 모든 단일점 x에서 x^3의 기울기가

정확히 $3x^2$ 이다

왼쪽에서 높다가
원점에서는 0이고
오른쪽에서 다시 높아진다!

다차원 도함수가 $\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$ 이되는 이유

x^n을 dx만큼 살짝늘리면$(x+dx)^n$, $x+dx$를 n번

곱해야 한다.

원래크기

전개한 첫번째 항은 (x^n)승이고, 나머지 항들 중

x^3을 dx만큼 늘렸을 때 $3x^2dx$와 같은 항이

존재한다. $(nx^{n-1}dx)$

그 이외 항들은 dx가 다 포함되기 때문에 무시해도 된다.

(어차피 0으로 근사될 놈들이다)

$(x+dx)^n = x^n + \underbrace{nx^{n-1}dx}_{df} + (\text{Multiple of } dx^2)$

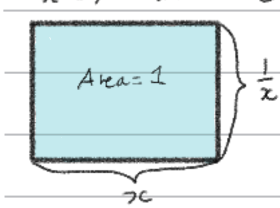
$\therefore \frac{df}{dn} = nx^{n-1}dx$

ex)

$f(x) = \frac{1}{x}$, $\frac{df}{dx} = -1x^{-2}$

기하학적으로 추론해보자

$\frac{1}{x}$란, x값에 어떤 숫자를 곱하면 1이 되는지 묻는 것

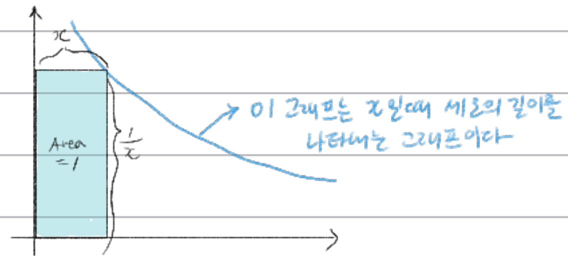


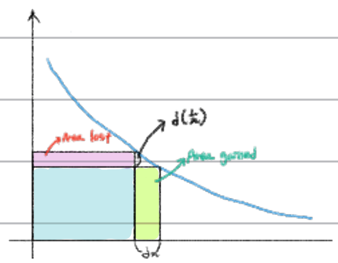
넓이가 1이므로 $\frac{1}{x} \times x = 1$이 되어야

한다.

x가 늘어나면 높이도 이에 비례해

줄어든다.



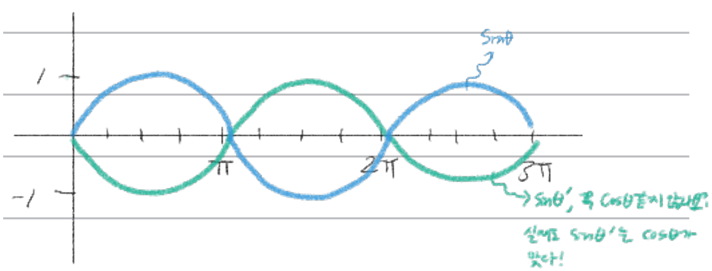


너비를 dx만큼 늘리면 높이가 너비가 증가한 만큼 감소해서, 손실된 영역이 얻은 영역을 상쇄해야 넓이가 유지됨.

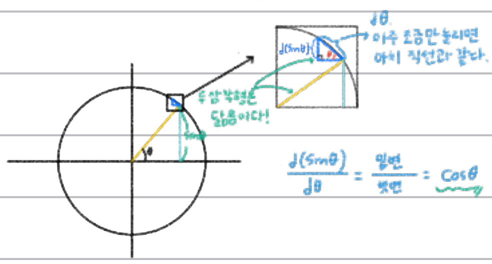
따라서, 높이를 감소시키기 때문에 $d(\frac{1}{x})$는 음수이다.

• $\sin(\theta)$

단위원을 계속 돌면서, -1과 1 사이를 왔다갔다 할 것이다.



진짜 도함수가 $\cos\theta$ 맞아요? 네.



$$\frac{d(\sin\theta)}{d\theta} = \frac{\text{밑변}}{\text{빗변}} = \cos\theta$$

4. 연쇄 법칙과 곱미분 법칙의 시각화

두 함수의 도함수를 알때,

- 두 함수의 합 미분
- 두 함수의 곱 미분
- 두 함수의 합성의 미분

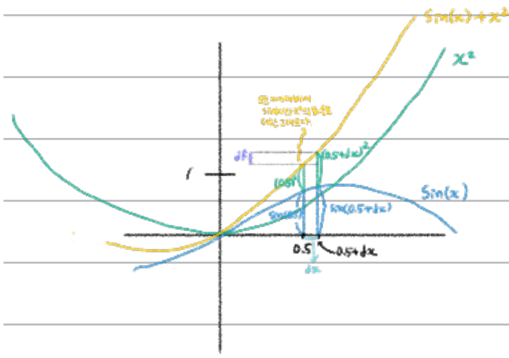
은 어떻게할까?

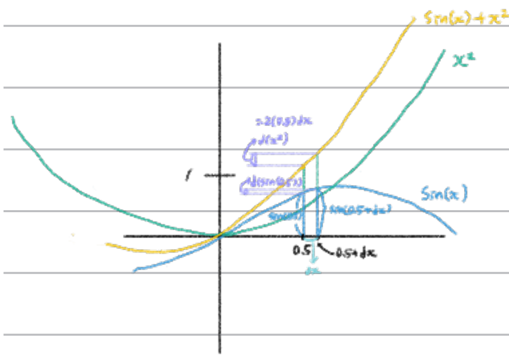
1. 합미분법칙

각 함수의 도함수의 합과 같다

$$\frac{d}{dx}(g(x)+h(x)) = \frac{dg}{dx} + \frac{dh}{dx}$$

ex) $f(x) = \sin(x) + x^2$



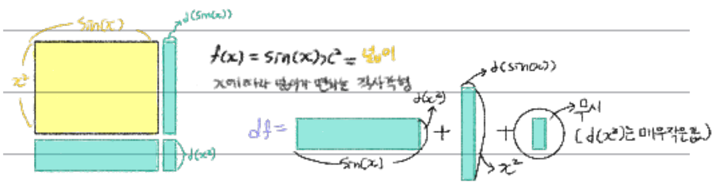


$$df = d(\sin(x)) + d(x^2)$$

$$df = \underbrace{\cos(x)dx}_{dx\text{의 }\cos(x)\text{배율}} + \underbrace{2x\,dx}_{dx\text{의 }2x\text{배율}}$$

$$\frac{df}{dx} = \cos(x) + 2x$$

2. 곱미분 법칙

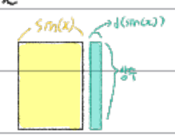


$df = \sin(x)\,d(x^2) + x^2\,d(\sin(x))$

$\frac{df}{dx} = \sin(x)\,2x + x^2\cos(x)$

$\therefore \frac{df}{dx} = g(x)\frac{dh}{dx} + h(x)\frac{dg}{dx}$

$\frac{d}{dx}(2\sin(x)) = 2\cos(x)$

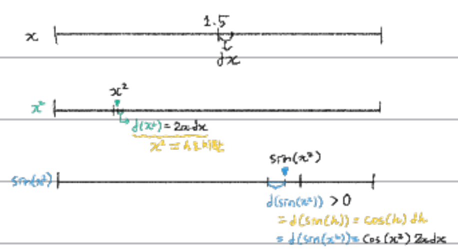


$df =$ 상수 $d(\sin(x))$

$\frac{df}{dx} =$ 상수 $\cos(x)$

3. 합성함수의 미분

$\frac{d}{dx}(\sin(x^2)) = ?$



$\therefore \frac{d}{dx}\underbrace{\sin(x^2)}_{\text{겉함수}} = \underbrace{\cos(x^2)}_{\text{겉미분}}(2x)$

속함수

속미분

$\frac{d}{dx}g(h(x)) = \frac{dg}{dh}(h(x))\frac{dh}{dx}(x)$

$= \frac{dg}{\cancel{dh}}\frac{\cancel{dh}}{dx} = \frac{dg}{dx}$

↳ 연쇄법칙

+) 미분법

$\frac{d}{dx} = c$

$\frac{d}{dx}\{f(x) + g(x)\} = f'(x) + g'(x)$ (합의 법칙)

$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$ (연쇄법칙)

$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$ (곱의 법칙)

$\frac{d}{dx}\{cf(x)\} = cf'(x)$ (상수배의 미분법)

$\frac{d}{dx}\{f(x) - g(x)\} = f'(x) - g'(x)$ (차의 미분법)

$\frac{d}{dx}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\} = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ 멱의 미분법

- 지수, 로그함수

$\frac{d}{dx}e^x = e^x$

$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}$

자연로그 (e를 밑으로 하는 로그)

$\frac{d}{dx}a^x = a^x\ln a$

$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x\ln a}$

- 삼각함수

$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

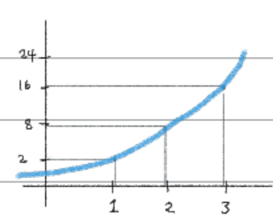
$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

5. 지수함수의 미분과 오일러 상수 e

- 지수함수

인구 규모는 개체 각각이 이산적으로 증가하는 값이기 때문에, 인구 총질량으로 놓음 (함수의 연속성을 잘 반영하기위해)

$M(t) = 2^t$, t는 날 수, M(t)는 인구 총질량이라고 해보자



하루동안의 평균 변화율을 생각해보면,

ex) 3일차와 4일차 사이에는 8에서 16으로 늘어나고, 변화율 8은 3일차 인구 총 질량과 같다.

이를 식으로 표현하면, 하루동안의 변화율은

$$\frac{2^{t+1}-2^t}{1}=2^t$$

로 표현할 수 있다.

하지만 우리는 1일보다 더 짧은 시간동안의 총질량의 변화율인,

$\frac{2^{t+dt}-2^t}{dt}$ 를 알고싶기 때문에, 이 식을 보도록 하자.

$2^t 2^{dt}$로 표현될수있다

$$\frac{dM}{dt}(t)=\frac{\boxed{2^{t+dt}}-2^t}{dt}=\boxed{2^t}\boxed{\left(\frac{2^{dt}-1}{dt}\right)}$$

dt가 0에 가까워져도 영향을 받지 않는다.

t,즉 시간의 영향을 받지 않는다!

이 $\frac{2^{dt}-1}{dt}$ 에 아주 작은 값들 (0.01, 0.00001...)

을 대입해보면, dt에 점점더 작은 값을 대입 할 수록

특정 상수 0.6932에 가까워진다는 것을 알 수 있다.

상관계에 주목!

즉, 2^t의 도함수는 자기자신과 어떤 상수의 곱과 같다.

다시말해, 2^t의 도함수는 자기자신에 비례한다 (비례상수 0.6932)

고 할 수 있다.

이는 다른 지수함수에도 적용된다. 예로 8^t의 도함수는

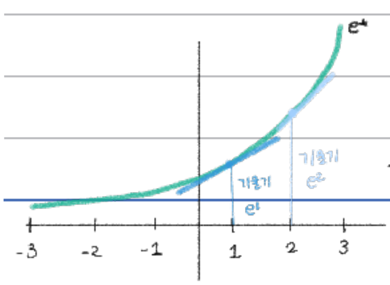
$8^t(2.0794...)$이다. 여기서 2.0794는 2^t 도함수의 비례상수인 0.6932...의 정확히 3배이다. 즉, 두 상수 사이에 규칙이 있다는 것을 알 수 있다.

이 비례 상수가 1인 밑이 존재할까?

• 오일러 상수 e

네 그렇습니다. 바로 **e=2.71828...!**

즉, e^t의 도함수는 자기 자신이 된다!



이 그래프 위에 위치한 어떠한 점에서의 접선이든, 그 기울기가 그 점에서의 높이와 같다!

이제 그 비례상수들에 대한 의문점을 해결할 수 있다.

숫자 2는 e를 사용해 $e^{ln(2)}$로 적을 수 있다. 따라서 2^t는, $2^t=e^{ln(2)t}$라고 적을수 있고, 연쇄법칙을 적용해 도함수를 구하면 아래와 같다

$$\boxed{ln(2)2^t=ln(2)e^{ln(2)t}}$$

즉, 2^t의 비례상수 0.6932은 ln(2)와 같다!

이러한 과정은 다른 밑들에 대해서도 똑같이 적용된다.

e를 사용한 표기 말고도, 다양하게 2^t를 표현할 수 있다.

$$\boxed{2^t=e^{log_e(2)t}=\pi^{log_\pi(2)t}=42^{log_{42}(2)t}}$$

그렇다면, e를 썼을때의 이점은 무엇일까?

→ 지수의 상수에 멋지고 읽기 쉬운 의미가 부여된다!

→수학적으로 일관성 있고, 자연현상을 직관적으로 설명가능

모든 종류의 자연현상은 어느정도의 변화율을 수반하며,

그것은 변화하는 것에 비례한다.

예로, 컵에 뜨거운 물을 따른 뒤 차가운 곳에 놓으면, 물이 식을때 온도의 변화율은 방과 물의 온도 차에 비례한다. 즉, 변화의 차이 간 비율이 자기 자신에 비례 한다. →변화의 속도가 현재 상태와 직접적으로 관련된다

모든 경우에서, 변수의 변화율은 그 자신에 비례하며, 이런 변수의 시간 당 상태를 묘사한다면 지수함수의 형태처럼 보일 것이다.

이 함수들은 여러 지수 함수들이 있지만, $e^{(\text{상수})t}$로 나타내는 것이 자연스러울 것이다!

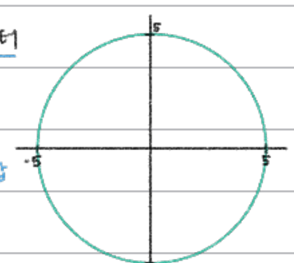
→변하는 양의 크기가 변화율과 자연스럽게 비례한다!

6. 음함수의 미분, 그 기묘한 과정

• 음함수의 미분이란?

$x^2+y^2=5^2$를 보자.(즉, 좌표평면상에 원점을 중심으로 하고, 반지름이 5인 원이 있다 = 원점으로부터 거리가 5인 모든 점의 집합)

→ 피타고라스 정리 응용.
빗변^2 = 나머지 두 변 제곱의 합



여기서 (3,4)에서의 기울기를 구한다고 할 때, 함수가 아니기 때문에

$\frac{df}{dx}$를 구하는 게 불가능하다.

→ 산출값의 변화량

입력값의 변화량

[y가 f(x)가 아님. 한 방정식에 의해 서로 종속되어 있다]

"음함수": 두 변수 x,y에 대한 조건을 만족시키는 모든 점 (x,y)의 집합.

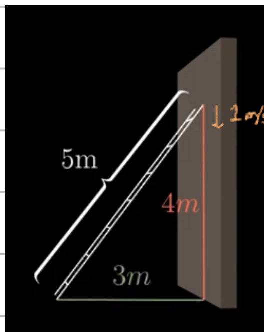
이를 미분하면, (음함수의 미분)

$2x\,dx + 2y\,dy = 0$, $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$

이 되는데, 왜 dx, dy를 저렇게 놓는 것일까?

• 연관변화율

dx, dy가 왜 저렇게 놓였는지 알기 위해, 일단 벽에 세워진 5m의 사다리를 상상해 보자.



사다리 꼭대기가 지면으로부터 4m 떨어져 있다면, 사다리의 바닥은 벽으로 부터 3m 떨어져 있게 된다. (피타고라스 정리)

만약, 사다리 꼭대기가 초당 1m의 속도로 내려간다고 하면, 사다리의 바닥은 벽으로 부터 내려간 만큼 더 멀리 있게 된다.

그렇다면, 사다리 바닥이 벽으로부터 멀어지는 속도는 $\frac{dx}{dt}$ 얼마일까?

각 값의 변화율 (사다리 꼭대기, 사다리 바닥)이 서로에 어떻게 종속되어 있는지 알기위해, 사다리의 꼭대기에서 지면까지 거리를 $y(t)$ (시간에 대한 함수로 본다), 사다리의 바닥에서 벽까지의 거리를 $x(t)$ 라고 해 보자. 이를 피타고라스 공식에 대입해보면,

$x(t)^2 + y(t)^2 = 5^2$

가 된다. 이 식은 모든 시점에서 참이 된다.

$x(t)$, $y(t)$ 모두 시간에 대한 함수고, 그 합은 상수가 되어야 한다. 즉, 시간이 지나도 값은 바뀌지 않지만, $x(t)$, $y(t)$는 여전히 시간에 대한 식이므로 t를 입력값으로 갖는 두 함수를 동시에 조정할 수 있다.

$$\frac{d(x(t)^2 + y(t)^2)}{dt}$$

→ $x(t)$가 살짝 증가하고 $y(t)$가 살짝 감소한다면, 이 식의 변화는 얼마일까?

dt → 만약 시간이 dt만큼 흘렀을 때

$$\frac{d(\boxed{x(t)^2 + y(t)^2})}{dt} = 0$$

이 값이 변하지 말아야 한다!

0 → 상수는 시간의 변화에 아무 관련이 없으며, 변치 않은채 남아있다

(연쇄법칙)

$$2x(t)\frac{dx}{dt} + 2y(t)\boxed{\frac{dy}{dt}} = 0$$

$$2(3)\frac{dx}{dt} + 2(4)(-1) = 0$$

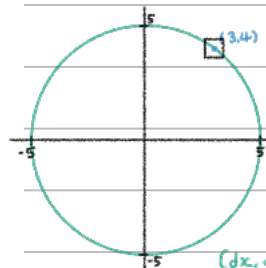
→ t에대한 y의 변화율 이므로 -1

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-2(4)(-1)}{2(3)} = \frac{4}{3}\,m/s$$

이제, 이 사다리 문제를 원의 접선의 기울기를 찾아내는 문제와 비교해 보자.

두 문제에서 모두 $x^2 + y^2 = 5^2$ 라는 식을 얻었고, 도함수로 $2x\,dx + 2y\,dy = 0$ 이라는 식을 이끌어 냈다. 사다리문제에서는 미분하는 것이 시간에 대한 속도를 구하는 것이기 때문에 명확한 이미지가 있었지만, 원의 접선의 기울기를 구하는 문제는 시간의 변화 dt가 x와 y에 변화를 일으킨 사다리 문제와는 달리, dx와 dy가 시간 t같은 다른 변수에 묶이지 않는, 완전히 별개의 값이라는 것!

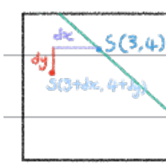
x^2+y^2를 S로 치환해보자. S는 x, y에 대한 함수다. 즉, 평면에 적힌 모든 (x, y)가 한 숫자와 연관된 것이다. 아래의 원 위의 점들에 대해 S는



25다. 이 점들보다 살짝만 멀어져도 S는 커지고, 점이 원점에 가까워지면 S는 작아진다.

→ $dS = 2x\,dx + 2y\,dy$

$x^2+y^2=5^2$를 미분한다는 것은, 두 변수 (dx, dy)의 변화를 각각 고려한다는 뜻이다.

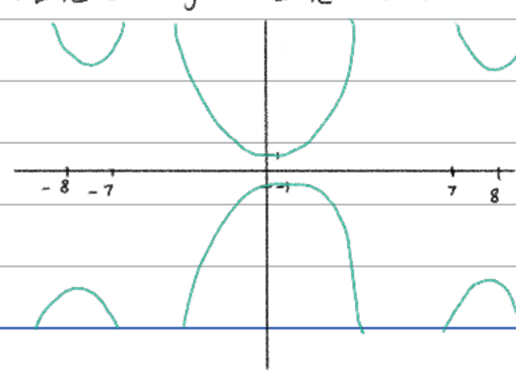


꼭 원 위로 이동 시킬 필요없이 아무 방향으로 움직인 다음, S값의 변화를 보자면, (dS) $dS = 2x\,dx + 2y\,dy$는 x, y와 dx, dy에따라 x^2+y^2값이 얼마나 변화했는지를 알려준다.

이는 근사치 이지만, dx와 dy의 값이 작아질 때 점점더 정확해진다.

핵심은, 원 위로만 이동하도록 제한한다면, 근본적으로 S값에 변화가 없음 (dS가 0!)을 뜻한다는 것이다. 따라서 방정식 $2x\,dx + 2y\,dy = 0$의 의미는, 작은 변화 후에도 원 위에 머무른다는 뜻이된다.

이번에는 $\sin(x)y^2 = x$ 라는 식을 봐 보자.



위치 상관 없이 dy, dx만큼 움직인다고 해보자. 각 변을 미분하는 것은 움직였을 때 각 변이 얼마나 변화하는지를 뜻한다. 곱미분 법칙에 따라서, 미분한 식은 아래와 같다.

$$\sin(x)(2y\,dy)+y^2(\cos(x)\,dx)=dx$$

양 변이 같다는 것은, 얼마나 이동하든 이 곡선을 유지하려면 왼쪽과 오른쪽의 값이 같은 양 만큼 변해야 한다는 의미이다. 이렇게 구해진 도함수로부터 $\frac{dy}{dx}$를 구할 수 있다.

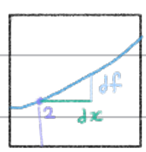
마지막으로, 음함수의 미분을 이용해 $\ln(x)$의 도함수를 구해보자.

$y=\ln(x)$는 $e^y=x$로 나타낼 수 있고, 양 변을 미분하면 $e^y dy=dx$가 된다. 곡선을 따라 이동해야 하므로, $e^y dy$는 dx와 같아야 한다.

정리하면 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{e^y}$이고, e^y는 x이므로 $\frac{dy}{dx}$는 $\frac{1}{x}$가 된다.

7장. 극한, 엡실론-델타 논법, 로피탈 정리

1. 도함수의 공식 정의



어떤 함수의 특정 점에서(예로 $x=2$) dx만큼을 늘린다면 산출값의 변화량 df가 나오게 된다. 이 비인 $\frac{df}{dx}$는 시작점과 옮긴 점을 지나는 직선의 기울기로 볼 수 있다. 이 때, 도함수란 dx가 0에 가까워짐에 따라 이 비율이 가까워져 가는 값을 뜻한다. 이를 풀어쓰면,

도함수의 공식 정의

$$\lim_{dx\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

"극한"

→ df, dx에 대한 함숫값의 변화량

→ dx 대신 Δx, h를 쓴다. df/dx, 즉 d에는 극한의 발상이 기저에 깔려있음!

→ dx가 0에 다가감에 따른 비율을 찾겠다

즉 $\frac{df}{dx}$는, 위의 식을 요약한 형태라고 볼 수 있다.

이 도함수의 정의는 "무한히 작음"을 나타내지 않으며, h는 아주 작은 유한한 수일 뿐 무한히 작아진다는 것에 영향을 주지 않는다는 걸 짚고 넘어가자. 단지 임의의 변화량이 0에 다가갈때 비율의 값을 구하고자 하는 것이다.

$\sin(\pi x)$, x^2-1를 각각 봐보자.

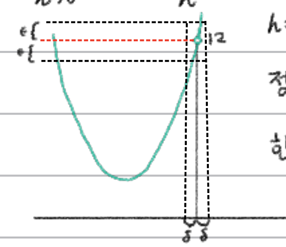
2. 극한의 (ϵ, δ) 정의 → 극한 그 자체를 엄밀히 정의할때 사용.

(ϵ → 엡실론, δ → 델타)

극한 - 어딘가로 다가가는 것. 이 정의는 '다가간다는 것'을 정확히 이해한다는 의미이다.

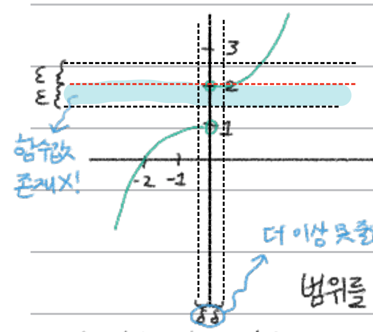
x^3의 $x=2$에서의 도함수,

$$\lim_{h\to0}\frac{(2+h)^3-(2)^3}{h}$$ 에 대해 생각해 보자.



$h=0$일경우, 해당식은 $\frac{0}{0}$이기 때문에 정의할 수 없으므로, 옆과 같이 표현해야 한다. 이때, 극한값이 12라고 하자.

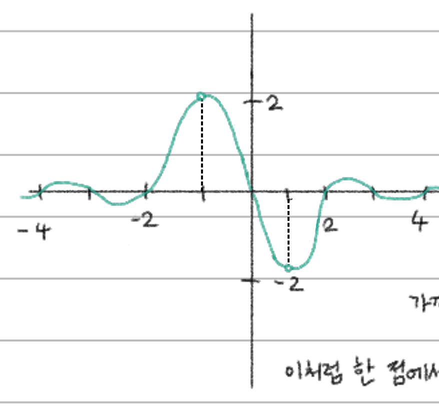
입력값 범위 x를 주위로 δ만큼 떨어진 구간을 잡았을 때, δ 범위에 대응하는 함숫값의 범위는 항상 12 주위 ϵ 범위 내부에 존재한다. 즉, 함숫값의 범위의 크기를 줄이는데 한계가 없고, 해당 지점에 도함수가 존재한다.



다음함수를 알아보자. 여기서 $\lim_{h\to0} f(h)$은 정의될 수 없는데, ϵ로 꽤 큰 더 이상 못줄임 값인 0.4를 지정하고 δ의 범위를 아무리 줄여도 δ 내에 대응하는 함숫값은 항상 ϵ 안에 존재하지 못한다.

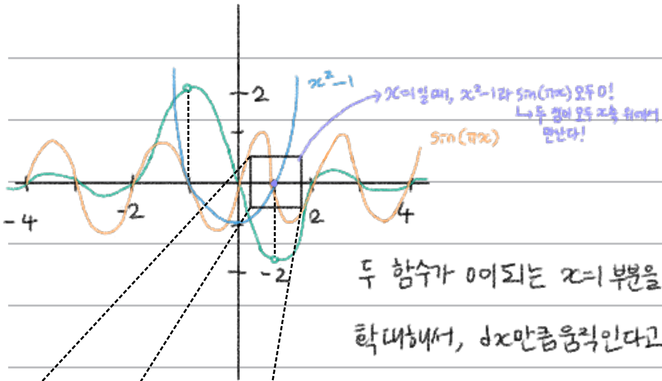
3. 로피탈 정리

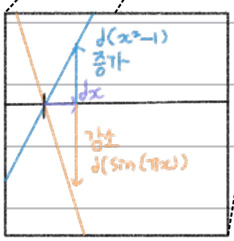
$$\frac{\sin(\pi x)}{x^2-1}$$ 을 보자.



$x=1$, $x=-1$에서 모두 $\frac{0}{0}$이 된다. 일단 $x=1$에 집중해보자. $x\to1$에서의 값은 어떤값으로 가까워질까?

이처럼 한 점에서 $\frac{0}{0}$이 나올 때, 극한값을 구할 수 있는 방법이 따로 있을까?





두 함수가 0이되는 $x=1$ 부분을 확대해서, dx만큼 움직인다고 하자.

x^2-1은 증가, $\sin(\pi x)$는 감소하고 있다.

$d(\sin(\pi x))$는 $\cos(\pi x)\pi\, dx$고,

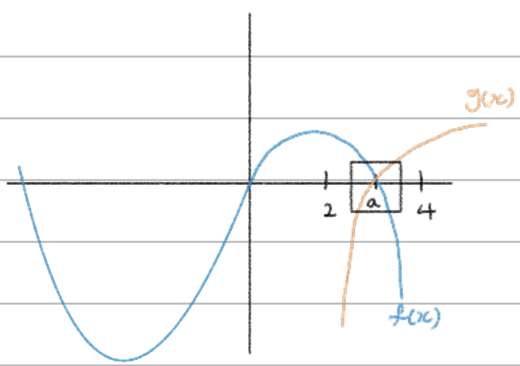
$x=1$이므로 $\underbrace{\cos(\pi\cdot 1)\pi}_{\text{비례상수}}\, dx$가된다.

즉, $\sin(\pi x)$의 변화량의 크기는 dx에 비례한다.

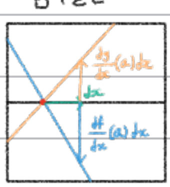
$\cos(\pi)=-1$이므로, $-\pi dx$로 바꿔 쓸 수 있다.

$d(x^2-1)$은 $2x dx$ 이고, $x=1$을 대입하면 $2\cdot 1\, dx = 2dx$ 이다. 때문에 1로부터 dx만큼 떨어진 x에 대해 $\frac{\sin(\pi x)}{x^2-1}$의 비율은 대략 $\frac{-\pi \cancel{dx}}{2\cancel{dx}} = -\frac{\pi}{2}$로 근사할 수 있다.

이를 일반화 하기 위해, 임의의 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 있다고 해 보자. 두 함수는 $x=a$에서 0이다.



이 함수들은 $x=a$일 때 미분가능한 함수들이어야 한다.



a에서 f와 g가 각각 0이므로 $\frac{f}{g}$는 계산이 불가능하지만, x가 a에 다가갈 때의 극한은 구할 수 있다. $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$는, 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{df}{dx}(a)\cancel{dx}}{\frac{dg}{dx}(a)\cancel{dx}} = \frac{\frac{df}{dx}(a)}{\frac{dg}{dx}(a)}$$ f,g의 도함수들의 비

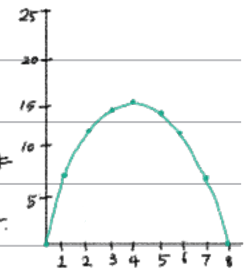
정리하자면, 어떤 값을 넣었을 때 $\frac{0}{0}$이 나올 것 같다면, 위 아래 식을 각각 미분한다음 분모,분자에 넣으면 된다. 이를 "로피탈 정리"라고 부른다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \frac{\cos(0)}{1} = 1$$

8장. 적분 등장, 미적분학의 기본정리

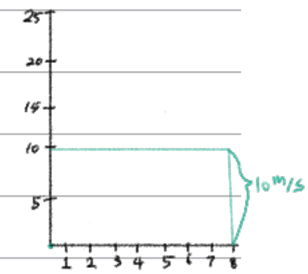
적분은 미분의 역연산이다.

창문이 가려진 상태에서 속도계만 볼 수 있는 상황이라고 할 때, 차가 속도를 높였다가 다시 낮춰 멈출 때 까지 8초가 걸렸다고 하자. 이 때 속도계의 속도 값만 가지고 이동거리를 구할 수 있을까?
(t초동안 이동한 거리를 알려주는 거리함수 S(t)를 찾을 수 있을까?)
우선 시간에 따른 속도를 그래프로 나타내보자.

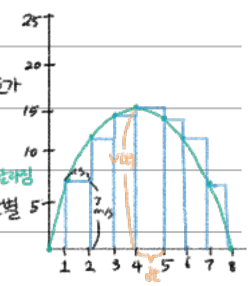


속도(m/s)를 모델링하기에 적합한 시간에 대한 함수는, $v(t)=t(8-t)$이다. 즉, 우리가 찾아야하는 함수는 미분했을 때 $t(8-t)$가 나오는 함수이다.

이를 함수의 역도함수를 찾는다고 설명한다.



만약 차의 속도가 일정하다면 속도(m/s) x 시간으로 거리를 구할 수 있다. 즉, 거리(m)은 면적으로 표현된다. 그렇다면, 위와 같은 곡선 아래와 축 사이의 면적을 구하는 방법은 무엇일까?



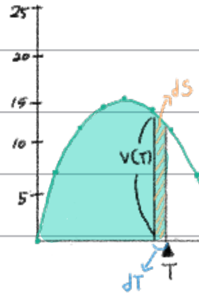
쉬운 접근을 위해, 몇몇 지점에서 갑자기 속도가 오른다고 생각해보자. 넓이를 구하기 위해 각 구간에서의 일정 속도와 그 간격의 크기를 곱해서 구간별 이동거리를 구한 뒤, 다 더해주면 된다!
$v(t)\times dt$ → t에 따라 직사각형의 높이가 달라짐

이 간격을 더 좁게 할 수록, 값은 더 실제 넓이에 가까워질 것이다.

이 이동거리들의 합을, Sum의 S를 늘린 $\int$를 이용해 나타낼 수 있다.

정적분 ← $\int_0^8 v(t)\,dt$
- V(t)의 적분
- dt → 더할 값의 인자이면서, 구간 사이의 간격을 결정함
- → 더할 것
- → 0에서 8까지의 구간
- $\sum$처럼 dt가 특정 값을 의미하는게 아니라, dt가 0에 가까워질 때 그 합이 다가가는 값을 뜻함 (→ 면적의 넓이)

이렇게 그래프 아래의 넓이를 구하는 것은 포괄적인 도구로 쓰일 수 있다.



T를 끝점으로 잡았을때, 거리함수 S(T)는

$S(T) = \int_0^T v(t)dt$ 일 것이다. 그렇다면 S(T)

$\frac{ds}{dT} = v(t)$

의 도함수는 무엇일까? 시간의 변화에 따른

거리의 변화는 속도이므로 도함수는 v(t)가 된다.

그래프 상에서 이를 확인해보자.

입력값의 아주 작은 증분 dT에 대해, 넓이의 증분이 dS만큼 생겨난다.

높이는 v(T)와 같고, 너비는 dT 인조각이 생기는데, dT가 충분히

작다면 그 조각을 직사각형으로 간주할 수 있다. 따라서 ds는,

근사적으로 v(T)dT와 같다. dT가 0에 가까워지면, 시점 T에서의

도함수 $\frac{ds}{dT}$는 v(T)와 같음을 알 수 있다. 즉, 어떤 그래프 아래

넓이에 대응되는 함수를 미분하면, 그 그래프의 함수 자체가

나오게 된다.

속도가 $t(8-t)$라면, 거리함수 S는 뭘까?

해당식을 $8t-t^2$로 정리 후, 각 항의 역도함수를 구하면

$4t^2 - \frac{1}{3}t^3 + C$ 가 나온다. C, 상수는 미분하면 0이므로, 어떤값

이든 올 수 있다. 즉, 그래프를 위 아래로 움직여도 한 점에서의

기울기에는 영향이 없음을 해석할 수 있다. 다시말해 현실에는

가능한 역도함수가 무한대로 존재하며, 모든 함수는 $4t^2 - \frac{1}{3}t^3 + C$의

형태를 띈다.

C를 시작점을 이용해 지정해줄 수 있다.

$$\int_0^T t(8-t)dt = \underbrace{\left(4T^2 - \frac{1}{3}T^3\right)}_{\text{역도함수}} - \underbrace{\left(4(0)^2 - \frac{1}{3}(0)^3\right)}_{\text{상수 C, 상수이므로 아래끝에서 아래끝까지의 적분이 0임을 보장}}$$

0부터 8까지의 거리는, T에 8을 대입해 나온 값인 85.33이 된다.

만약 1부터 7까지의 거리를 구한다면 아래와 같이 구한다.

$$\underbrace{\left(4(7)^2 - \frac{1}{3}(7)^3\right)}_{\text{역도함수}} - \underbrace{\left(4(1)^2 - \frac{1}{3}(1)^3\right)}_{\text{역도함수}}$$

역도함수의 상수값으로 뭘 고르든

뺄셈 과정에서 상쇄된다.

즉, 적분이란 어떤 범위 내에서 $f(x)dx$값들을 더하여

근사한 뒤, dx가 0에 다가갈 때 합이 다가가는 극한값이다.

적분에서 가장먼저 할 일은 역도함수를 찾는 일이다. 이를 F로

표기하면, $\frac{dF}{dx}(x) = f(x)$ 이고, a에서 b까지의 넓이는

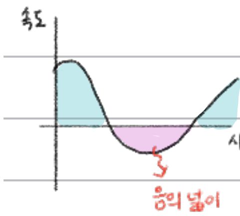
$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ 로 구할수 있다. 이것이 바로 미적분

학의 기본정리이다. 주목할 점은, 얇은 직사각형들의 총 합으로

구해져야하는 적분값이, 역도함수를 가지고 계산해보니

위끝과 아래끝을 대입해서 빼주기만 하면 된다는 것이다!

• 음의 넓이



자동차 문제에서 자동차가 뒤로 갔을때의

면적의 넓이는 음의 넓이 이다. $ds = v(t)dt$

에서 ds와 v(t) 값이 음수값, 즉 직사각형

이 수평축 아래에 놓여져있다면 반대방향

으로 이동한 거리를 나타낸다. 정리하자면, 음의 넓이는 빼줘

야 하는 넓이 인 것!

9장. 넓이와 기울기 사이 숨겨진 연결고리

이번 장에서는, 적분을 사용하는 일반적인 유형의 문제 중 한가지인

연속적인 변수의 평균을 찾는 문제를 다룰 것이다. 이 문제는

적분이 왜 미분의 역연산인지에 대해 새로운 관점을 제공할 것이다.

현실 속 모든 주기현상은 사인파를 통해 모델링 할 수 있다

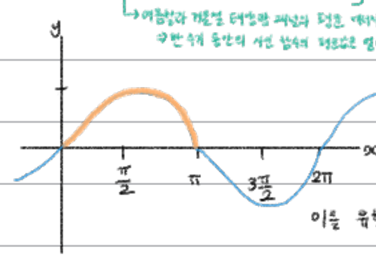
Sin(x) 함수가 있다고 해 보자. 이때, 0부터 π까지의 구간

하루에 해 떠있는 시간을 알려주는 함수는 사인파를 따른다

에서의 함수 그래프의 평균 높이는 얼마일까?

여름철과 겨울철 태양광 패널의 평균 에너지 효율을 비교

→ 반 주기 동안의 사인 함수의 평균값은 얼마인가?



연속된 값의 평균을 구한다

는 건 불가능하다. 따라서,

이를 유한한 합으로 근사해 평균을

구해 볼 것이다.

위의 그래프에서, 범위 내 유한한 숫자만큼 같은 간격으로 추출한다고 하자.

유한한 표본의 평균 높이는 Sin(x)위 각 점의 높이값들을 모두 더한다음,

추출한 점의 개수로 나눠주면 된다. 물론 간격의 크기를 더 작게 할 수록,

우리가 구하고자하는 표본의 평균 높이에 근사하게 될 것이다.

접사이의 간격을 dx라고 치고, 이를 0.1로 놓았을때 0에서부터 π까지의

의 점의 개수는 약 $\frac{\text{구간의 길이}}{\text{점 사이 간격}} = \frac{\pi}{dx}$ 개라고 할 수 있다. 이를 평균값 구하는 공식에 대입하면 다음과 같다.

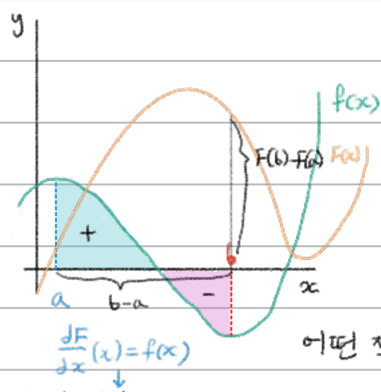
$$\frac{\text{각 점의 높이값들의 합}}{\frac{\pi}{dx}} = \frac{\boxed{(\text{각 점의 높이값들의 합})\,dx}^{\text{적분과 같다!!}}}{\pi} = \frac{\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx}{\pi}$$

즉, 0에서 π까지의 $\sin(x)$ 적분을 구간의 길이인 π로 나눈 값이 된다. 정리하면, 평균높이는 넓이를 그 폭으로 나눈 것이라고 말할 수 있다.

이제 실제로 계산을 해보자. $\cos(x)$의 도함수가 $-\sin(x)$이므로, $\sin(x)$의 역도함수는 $-\cos(x)$이다. $\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx = (-\cos(\pi)) - (-\cos(0))$은 $-\cos(x)$ 함수에서의 $x=\pi$일 때와 $x=0$일 때의 높이차이고, 이는 도함수 $\sin(x)$의 0에서 π까지의 넓이이다. 이를 π로 나눈 평균높이는 $\frac{2}{\pi}$, 약 0.64이다.

평균 높이를 구하는 식 $\frac{(-\cos(\pi)) - (-\cos(0))}{\pi - 0}$은, 다른 관점에서 본다면 역도함수인 $-\cos(x)$에서 0인 점과 π인 점 사이를 이은 직선의 기울기이다. 이를 보며, 이 기울기가 영역 내 $\sin(x)$의 평균값을 나타낸다는 것이 왜 합리적인지 생각해보자.

$\sin(x)$는 역도함수 곡선의 미분값이므로, $\sin(x)$의 평균값은 0과 π 사이 $-\cos(x)$의 모든 접선의 평균 기울기로 생각할 수 있다. 그리고, 특정 범위에서 그래프 위 모든 점들의 평균 기울기는 범위의 시작점과 끝점 사이의 기울기와 같다. 이제부터 그 이유에 대해 알아보자.



임의의 함수 $f(x)$에 대해 구간 a에서 b까지의 평균값을 구하는 방법은 $\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$이다.

어떤 적분이든, 계산을 위해 $f(x)$의 역도함수 $F(x)$가 필요하다. 우리가 원하는 것은 a와 b사이 역도함수의 변화량, $F(b)-F(a)$이고, 이는 구간의 두 끝점 사이의 그래프 높이 변화량으로 볼 수 있다. 지금은 $F(a)$가 0이지만, 역도함수는 얼마든지 위, 아래로 움직일 수 있다.

따라서, 평균을 구하는 식은 $\frac{\text{역도함수 그래프의 높이 변화량}}{\text{a와 b사이 x 변화량}}$이다.

즉, 역도함수에서 a와 b 사이의 기울기를 뜻한다. 이는 합리적인데, 왜냐하면 $f(x)$는 결국 각 점에서의 역도함수의 접선의 기울기이기 때문이다.

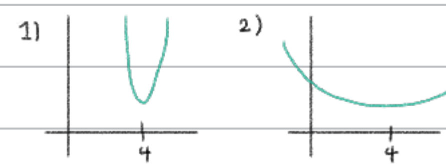
역도함수가 적분문제의 열쇠인 이유는, 중간 지점을 제외하고 각 끝점만 비교해도 답을 얻을 수 있다는 것이다.

10강. 고계도함수

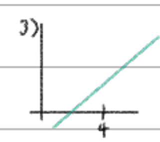
테일러 급수를 배우기 전에, 고계도 함수가 무엇인지 간단히 짚고 가자.

어떤 함수 $f(x)$에 대해, 그 도함수는 그래프의 한 점에서의 기울기이다. 기울기가 아래를 향하면 도함숫값은 음수, 위를 향하면 양수

이계도함수란, 도함수의 도함수로 기울기의 변화량을 나타낸다.



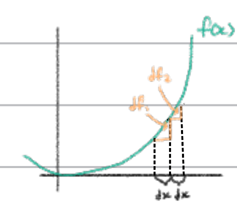
첫번째 그래프에서 $x=4$일 때, 이계도함수는 큰 양수값을 가진다. 해당점 주위에서 기울기가 매우 급격히 증가하고 있기 때문이다. 반면, 두 번째 그래프에서의 이계도함수는 여전히 양수이지만 기울기가 천천히 증가하므로 첫번째 그래프에 비해 값이 작다.



만약 3번째 그래프처럼 직선인 경우, 이계도함수는 0이다

• 이계도함수의 표기

$\frac{d\left(\frac{df}{dx}\right)}{dx}$를 축약하여, $\frac{d^2f}{dx^2}$로 쓴다.



오른쪽으로 $\underbrace{dx}_{\text{매우 작은 값}}$만큼 두 번을 이동했다고 생각해 보자.

첫번째 변화량을 df_1, 두번째 변화량을 df_2라고 하고, $\underbrace{df_1\text{과 } df_2\text{의 차이}}_{\text{변화량의 변화량}}$를 $d(df)$라고 하자.

이는 $(dx)^2$에 비례하기 때문에, 매우 작은 값이다.

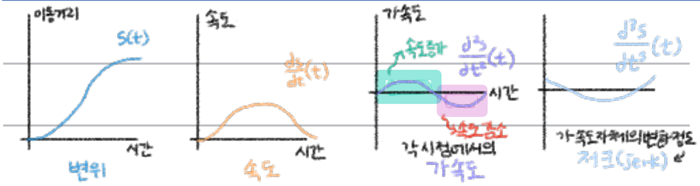
예로 dx가 0.01이라면, $(dx)^2$는 0.0001이 된다. 이계도함수는 변화량의 변화량 $d(df)$와 $(dx)^2$의 비이다. 식으로 나타내면 아래와 같다.

(dx가 0에 다가갈 때)

$$d(df) \approx (\text{어떤상수})(dx)^2 \Rightarrow \frac{d(df)}{(dx)^2} \approx (\text{어떤상수}) \Rightarrow \frac{d^2f}{dx^2}$$

두번 미분했다 / 괄호생략

이계도함수는 1차원운동에서 가속도를 나타낸다.

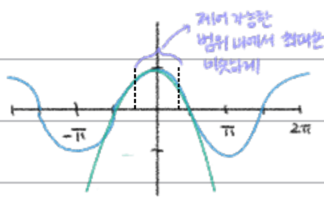


고계도함수의 유용한 점은, 함수를 근사하는데 도움을 준다는 것이다. 이를 바로 다음장, 테일러 급수에서 다룰 것이다.

11장. 테일러 급수

테일러급수는 수학과 물리학, 공학 여기저기서 등장한다. 이것은 함수를 근사하는 수학의 가장 강력한 도구이다. 테일러 급수 공부는 주로 다항함수가 아닌 함수를 대상으로, 그 함수에 가깝게 근사되는 다항함수를 찾는 것이 목표인데, 이유는 다항함수가 다른 함수들과 함께 다루기 훨씬 쉬운 편이기 때문이다. (계산, 미분, 적분 ...)

실제 $\cos(x)$에서 이차함수 근사가 어떻게 만들어지는지 알아보자.



즉, $P(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2$ 처럼 생긴 모든 다항식에 대해, 직접 C_0, C_1, C_2를 찾아보는 것이다.

x가 0일 때,

$\cos(x) = 1 \xrightarrow[]{\text{(함숫값) } P(0)\text{도 1이어야 함}} P(x) = C_0 + C_1 0 + C_2 0^2 = C_0 + 0$

함숫값을 일치 / 미분값을 일치 / 이계도함숫값을 일치

$\therefore C_0 = 1$ → $x=0$에서 1임을 보장

같은 접선의 기울기를 갖도록!

$\frac{d(\cos)}{dx}(0) = -\sin(0) = 0$ → $\frac{dP}{dx}(0) = C_1 + 2C_2 0 = C_1 + 0$ → C_1에 근사식이 의존

$\therefore C_1 = 0$ → $x=0$에서 평평한 접선을 갖는 것이 보장된다.

같은 접선기울기의 변화율!

$\frac{d^2(\cos)}{dx^2}(0) = -\cos(0) = -1$ → $\frac{d^2P}{dx^2}(x) = 2C_2$ → C_2에 근사식이 의존

→ 접선의 기울기가 음수임을 이용.

$\therefore C_2 = -\frac{1}{2}$

$$\therefore P(x) = 1 + 0x + \left(-\frac{1}{2}\right)x^2$$

여기서 항을 더 늘리면 제어 가능한 범위를 더 늘릴 수 있다.

$\frac{d^3(\cos)}{dx^3} = \sin(x) = 0$ → $P(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \boxed{C_3x^3}$ → 항 추가

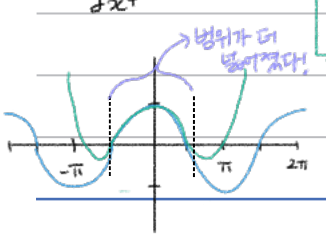
$\frac{d^3P}{dx^3}(x) = 0 + 1\cdot2\cdot3\cdot C_3$

$\therefore C_3 = 0$

$\frac{d^4(\cos)}{dx^4} = \cos(x) = 1$ → $P(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \boxed{C_4x^4}$ → 항 추가

$\frac{d^4P}{dx^4}(x) = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot C_4$ → $4!$

$\therefore C_4 = \boxed{\frac{1}{24}} \rightarrow \frac{1}{4!}$



이제 몇가지 사항들에 대해서 살펴보자.

첫번째, 팩토리얼이 등장했다. 계수를 넘어갈 때, n계도함수일 경우 $\frac{n\text{계도함수값}}{n!}$으로 넘어가야 한다.

두번째, $P(x)$에 새로운 항을 더하는게 이전 항에 영향을 끼치지 않는다. 예를들어, $P(x) = 1 + (-\frac{1}{2})x^2 + C_4x^4$일 때 C_4x^4를 더했다고 해도 $x=0$에서의 이계도함수값 $\frac{d^2P}{dx^2}$는 여전히 $2(-\frac{1}{2}) + \underbrace{3\cdot4\cdot C_4(0)^2}_{x\text{가 있는 항은 다 0이 된다.}} = -1$이다. 다른 항도 마찬가지로, $x=0$에서 다항식의 각 도함수는 계수 중 하나에 의해서만 제어 된다.

제어항: $P(0)$ / 제어항: $\frac{dP}{dx}(0)$ / 제어항: $\frac{d^2P}{dx^2}(0)$ / 제어항: $\frac{d^3P}{dx^3}(0)$

$$P(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \cdots$$

만약 0에서의 근사식이 아닌 π에서의 근사식을 구하고 싶으면, $(x-\pi)$에 대한 다항식을 작성하면 된다.

→ π가 0처럼 보이고, 행동

$$P_\pi(x) = C_0 + C_1(x-\pi) + C_2(x-\pi)^2 + C_3(x-\pi)^3 + \cdots$$

세번째, 의미적차원에서 봤을 때, 우리가 하고 있는 것은 함수의 단일 점에서의 고계도함수에 관한 정보를 그 점 근처의 함숫값에 대한 정보로 변환하는 것이다. $\cos(0)$의 고계도 함수는

$\cos(0) = 1 \rightarrow -\sin(0) = 0 \rightarrow -\cos(0) = -1 \rightarrow \sin(0) = 0$

의 패턴을 가지고 있으므로, 이 패턴을 따르는 다항함수를 만들어 근사함수를 만들어 냈다. 이 과정을 어느 시점에서 멈췄을 때 얻어지는 다항식을 테일러 다항식이라고 한다.

$$P(x) = 1 \underbrace{+ 0\frac{x^1}{1!} - 1\frac{x^2}{2!} + 0\frac{x^3}{3!} + 1\frac{x^4}{4!}}_{\text{테일러 다항식}} + \cdots$$

일반화

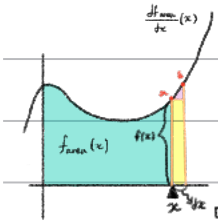
$$P(x) = f(a) + \frac{df}{dx}(a)\frac{(x-a)^1}{1!} + \frac{d^2f}{dx^2}(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \frac{d^3f}{dx^3}(a)\frac{(x-a)^3}{3!} + \cdots$$

다항식의 값이 f의 값과 일치하도록 보장 / 다항함수의 기울기가 $x=a$에서 f의 기울기와 일치하도록 보장 / 다항 함수의 기울기가 변화하는 정도가 그 점에서 일치하도록 보장

• e^x의 테일러 다항식

e^x의 고계도함수는 모두 e^x이고, $x=0$일 때 값은 1이므로, 근사 다항함수는 $P(x) = 1 + 1\frac{x^1}{1!} + 1\frac{x^2}{2!} + 1\frac{x^3}{3!} + 1\frac{x^4}{4!} + \cdots$ 이다.

• 테일러 다항식의 2차항의 기하학적 의미



8장에서처럼 그래프 아래 영역의 왼쪽을 고정시키고, 오른쪽 끝이 변수인 함수를 생각해 보자. 미적분학의 기본 정리는 결국 그래프 자체가 넓이 함수의 미분이라는 것이었다. 영역의 오른쪽 끝을 dx만큼 움직이면 생기는 영역의 넓이는 (그래프의 높이)dx와 근사적으로 같았고, dx가 0에 다가갈수록 더 정확히 근사했다. 이번에는 dx가 0에 다가가지 않는다고 해보자. 그러면 이 삼각형의 넓이 또한 고려해야 한다. 현재 x의 위치를 a, a에서 dx만큼 이동한 위치의 점을 x라고 할 때, 삼각형의 밑변은 $(x-a)$이고, 삼각형의 높이는 (기울기)×$(x-a)$로 구할 수 있다. 여기서 그래프의 기울기가 나타내는 것은 입력값 a에서 넓이 함수의 이계도함수와 같으므로, 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\underbrace{\frac{d^2 f_{area}}{dx^2}(a)(x-a)}_{높이}\underbrace{(x-a)}_{밑변} = \frac{1}{2}\frac{d^2 f_{area}}{dx^2}(a)(x-a)^2$$

가 된다. 이제부터는 테일러 다항식의 형태와 정확히 같은 형태의 식을 이끌어낼 수 있다.

, , 의 값을 알고있을 때, x에서의 넓이 값을 근사하는 방법은 3개의 넓이를 더하는 것이고, 이를 수식으로 나타내면

$$f(x) \approx f(a) + \frac{df}{dx}(a)(x-a) + \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dx^2}(a)(x-a)^2$$

로, 테일러 방정식 형태가 된다.

• 테일러 급수

만약 항을 무한대로 만들어서 계속 더한다면 어떨까? 이렇게 무한정 더하는 것을 "급수"라고 하며, 무한하게 많은 항들에 대한 합을 테일러 급수라고 한다.

물론, 무한정 더한다는 것은 불가능하지만, 급수의 항을 하나씩 더해나가다 보면 특정 값에 가까워 지는데, 이 때를 급수가 그 값에 수렴한다고 한다. 또는 같음에 대한 정의를 수렴 개념을 포함하도록 확장해서, 무한 합이 수렴값과 같다고 말할 수 있다.

예로, e^x의 테일러 다항식을 살펴보자.

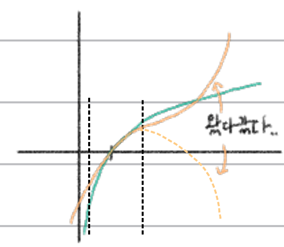
$$P(x) = \left[1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right]$$

2.5　　2.666667　　2.716667

→ x에 1을 넣었을 때 더해갈수록 총합이 e에 가까워진다
즉, 급수의 합이 e라고 할수 있다.

이는 x에 무슨 값을 넣어도 e^x에 가까워지며, 이 경우 e^x는 모든 x 범위에 대해 그 자신의 테일러 급수와 같다고 말한다.

이렇게 모든 범위에서 수렴하는 함수도 있는 반면, 도함수 정보들을 취한 그 입력 값 주변에서만 수렴하는 함수도 있다.



예로, 자연로그 $\ln(x)$의 테일러 급수를 구한다고 하면, $x=1$일 때 특정 범위 내에서는 급수의 합이 $\ln(x)$에 점점 가까워지지만, 그 범위를 조금만 벗어난다면, 급수는 수렴하지 못하고
($x=1$일 때 도함수 정보가 멀리까지 영향을 미치지 못함)
위아래로 흔들리게 되는데, 이를 발산한다고 한다.

그리고, 기준점에서 입력까지의 근사 가능한 거리의 최대값이자 이 다항식 값들이 실제로 수렴하는 지점을 수렴 반지름(수렴 반경)이라고 부른다.

지금까지 배운 것 이외에도 테일러 급수에 대해 배울게 많이 남아있다. 미적분 전반에도 마찬가지로, 공부할 내용이 더 남아있지만, 이 강의의 목표는 기초적인 직관을 심어주어 스스로 학습할 수 있는 자신감과 효율성을 주고자 함이기 때문에, 11강은 여기서 마치도록 하겠다.