

EXAMEN MATEMÁTICA AVANZADA

Raymundo Silvestre Gonzalez Contreras

29 de octubre de 2022

1. Utilice las condiciones iniciales dadas para determinar la solución particular del siguiente sistema:

$$\ddot{x} + 6\dot{x} + 9x = 3e^{-3t}$$

Las condiciones iniciales son $x(0) = 0$ y $\dot{x}(0) = 1$.

Respuesta

Introducción

Para este problema necesitamos calcular la solución del sistema dadas las condiciones iniciales, para ello dado que se trata de una ecuación diferencial ordinaria (ODE) no homogénea, su solución se compone de la suma de una solución complementaria y una solución particular, calculáremos primero la parte complementaria que es la solución de la ecuación homogénea asociada, posteriormente calcularemos la solución particular y finalmente utilizaremos las condiciones iniciales para hallar los valores de las constantes que acompañan la solución.

Paso 1: Solución de la ecuación homogénea asociada

La ecuación homogénea asociada a nuestra ecuación es:

$$\ddot{x} + 6\dot{x} + 9x = 0 \quad (1)$$

Para este tipo de ecuaciones sus soluciones tienen la siguiente forma: $x = e^{\lambda t}$, donde debemos encontrar el valor de λ sustituyendo x en (1). Obtenemos así utilizando $\frac{d(e^{\lambda t})}{dt} = \lambda e^{\lambda t}$:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 6\dot{x} + 9x &= \lambda^2 e^{\lambda t} + 6\lambda e^{\lambda t} + 9e^{\lambda t} \\ &= e^{\lambda t} (\lambda^2 + 6\lambda + 9) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dado que $e^{\lambda t}$ nunca es cero para valores finitos de t , bastara con resolver:

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$$

para encontrar los valores de λ , podemos entonces agrupar de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \lambda^2 + 6\lambda + 9 &= (\lambda + 3)(\lambda + 3) \\ &= (\lambda + 3)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

las soluciones de esta ecuación nos devuelven los valores de $\lambda_1 = -3$ y $\lambda_2 = -3$, dado que los valores son múltiplos enteros (particularmente el mismo valor), la solución de la ecuación homogénea sera $c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ donde c_1 y c_2 son valores enteros que calcularemos mas adelante. Sustituyendo los valores obtenemos así la solución complementaria

$$x_c = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-3t} t \quad (2)$$

Paso 2: Solución particular por el método de coeficientes indeterminados

Dado que la ecuación homogénea asociada nos devolvió una solución de la forma te^{-3t} la solución particular debe ser de la forma $x_p = ae^{-3t}t^2$.

Calculemos primero $\frac{d^2(x_p)}{dt^2}$ y $\frac{d(x_p)}{dt}$

$$\begin{aligned}\frac{d(x_p)}{dx} &= \frac{d(ae^{-3t}t^2)}{dt} \\ &= a \frac{d(e^{-3t}t^2)}{dt} \\ &= a \left[\frac{d(e^{-3t})}{dt} t^2 + e^{-3t} \frac{d(t^2)}{dt} \right] \\ &= a(-3e^{-3t}t^2 + 2e^{-3t}t)\end{aligned}\tag{3}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2(x_p)}{dt^2} &= \frac{d\left(\frac{d(x_p)}{dt}\right)}{dt} \\ &= \frac{d(a[-3e^{-3t}t^2 + 2e^{-3t}t])}{dt} \\ &= a \left[-3 \frac{d(e^{-3t}t^2)}{dt} + 2 \frac{d(e^{-3t}t)}{dt} \right] \\ &= a \left[-3 \left(\frac{d(e^{-3t})}{dt} t^2 + e^{-3t} \frac{d(t^2)}{dt} \right) + 2 \left(\frac{d(e^{-3t})}{dt} t + e^{-3t} \frac{d(t)}{dt} \right) \right] \\ &= a \left[-3(-3e^{-3t}t^2 + 2e^{-3t}t) + 2(-3e^{-3t}t + e^{-3t}) \right] \\ &= a(9e^{-3t}t^2 - 12e^{-3t}t + 2e^{-3t})\end{aligned}\tag{4}$$

sustituyendo (3) y (4) en nuestra ecuación inicial obtenemos el valor de a

$$\begin{aligned}\ddot{x} + 6\dot{x} + 9x &= 3e^{-3t} \\ a(9e^{-3t}t^2 - 12e^{-3t}t + 2e^{-3t}) + 6a(-3e^{-3t}t^2 + 2e^{-3t}t) + 9e^{-3t}t^2 &= 3e^{-3t} \\ a(9t^2 - 12t + 2 - 18t^2 + 12t + 9t^2)e^{-3t} &= 3e^{-3t} \\ 2a &= 3 \\ a &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

De modo que nuestra solución particular es

$$x_p = \frac{3}{2}e^{-3t}t^2\tag{5}$$

la suma de nuestra solución complementaria (2) y nuestra solución particular(5) es nuestra solución completa.

$$\begin{aligned}x &= x_c + x_p \\ &= c_1e^{-3t} + c_2e^{-3t}t + \frac{3}{2}e^{-3t}t^2 \\ &= (c_1 + c_2t + \frac{3}{2}t^2)e^{-3t}\end{aligned}\tag{6}$$

Paso 3: Calcular los valores de los coeficientes

Para calcular los valores de los coeficientes c_1 y c_2 utilizaremos las condiciones iniciales, para ello utilizando (6) y recordando que $e^0 = 1$ calculemos

$$\begin{aligned}x(0) &= 0 \\(c_1 + c_2 * (0) + \frac{3}{2}(0)^2)e^{-3*0} &= 0 \\c_1 &= 0\end{aligned}\tag{7}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}(0) &= 0 \\ \frac{d([c_1 + c_2t + \frac{3}{2}t^2]e^{-3t})}{dt} \Big|_{t=0} &= 1 \\ \frac{d(c_1 + c_2t + \frac{3}{2}t^2)}{dt} e^{-3t} \Big|_{t=0} + [c_1 + c_2t + \frac{3}{2}] \frac{d(e^{-3t})}{dt} \Big|_{t=0} &= 1 \\ (c_2 + 3t)e^{-3t} \Big|_{t=0} + [c_1 + c_2t + \frac{3}{2}t^2](-3e^{-3t}) \Big|_{t=0} &= 1 \\ (c_2 + 3 * (0))e^{-3*(0)} + [c_1 + c_2 * (0) + \frac{3}{2}(0)^2](-3e^{-3*(0)}) &= 1 \\ c_2 - 3c_1 &= 1 \\ c_2 - 3 * (0) &= 1 \\ c_2 &= 1\end{aligned}\tag{8}$$

Conclusión

Sustituyendo los valores de c_1 y c_2 obtenidos en (7) y (8) respectivamente en (6) obtenemos la solución final.

$$x = \left(1 + \frac{3}{2}t^2\right)e^{-3t}$$

2. La siguiente función representa una curva en un plano bidimensional

$$f(x, y) = x \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$$

Determine el valor de $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1)$ donde " \vec{u} " apunta a la dirección de máximo crecimiento para la función en el punto dado.

Respuesta

Introducción

Para este problema necesitamos calcular la derivada direccional en la dirección de \vec{u} para ello utilizaremos el cálculo del gradiente de la función en el punto dado para obtener la dirección de máximo crecimiento y al mismo tiempo la derivada direccional. Utilizaremos así la siguiente fórmula:

$$\frac{df}{d\vec{u}} = \vec{\nabla} f \cdot \vec{u} \quad (9)$$

Paso 1: Calcular la dirección de máximo crecimiento

Para una función $f(x, y)$ definimos el vector gradiente como:

$$\vec{\nabla} f(x, y) = f_x(x, y)\hat{i} + f_y(x, y)\hat{j}$$

Donde $f_x = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$, $f_y = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones, recordemos las siguientes propiedades de las derivadas:

$$a) \frac{d[f(x)g(x)]}{dx} = \frac{df(x)}{dx}g(x) + f(x)\frac{dg(x)}{dx}$$

$$b) \frac{d(f(g(x)))}{dx} = \frac{df(x)}{d(g(x))} \frac{dg(x)}{dx}$$

$$c) \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$$

$$d) \frac{d[\arctan(x)]}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

Al calcular la derivada parcial de una función tratamos a las otras variables como constantes.

Utilizando las propiedades mencionadas anteriormente calculemos para nuestra función:

Para x

$$\begin{aligned}
 f_x &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \\
 &= \frac{\partial [x \arctan(\frac{x}{y})]}{\partial x} \\
 &= \frac{dx}{dx} \arctan(\frac{x}{y}) + x \frac{\partial \arctan(\frac{x}{y})}{\partial x} \\
 &= x \arctan(\frac{x}{y}) + x \left(\frac{\partial(\arctan(\frac{x}{y}))}{d\frac{x}{y}} \frac{d(\frac{x}{y})}{dx} \right) \\
 &= x \arctan(\frac{x}{y}) + x \left(\frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \right) \frac{1}{y} \\
 &= x \arctan(\frac{x}{y}) + \left(\frac{x}{y + \frac{x^2}{y}} \right)
 \end{aligned} \tag{10}$$

Para y

$$\begin{aligned}
 f_y &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \\
 &= \frac{\partial [x \arctan(\frac{x}{y})]}{\partial y} \\
 &= x \frac{\partial \arctan(\frac{x}{y})}{\partial y} \\
 &= x \left(\frac{\partial(\arctan(\frac{x}{y}))}{d\frac{x}{y}} \frac{d(\frac{x}{y})}{dy} \right) \\
 &= x \left(\frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \right) (-1) \frac{x}{y^2} \\
 &= -\frac{x^2}{y^2 + x^2}
 \end{aligned} \tag{11}$$

De modo que nuestro gradiente es:

$$\vec{\nabla} f(x, y) = \left(x \arctan(\frac{x}{y}) + \frac{x}{y + \frac{x^2}{y}} \right) \hat{i} - \frac{x^2}{y^2 + x^2} \hat{j} \tag{12}$$

Ahora como la dirección de máximo crecimiento $\vec{u}(1, 1) = \frac{\vec{\nabla} f(x, y)|_{(1,1)}}{|\vec{\nabla} f(x, y)|_{(1,1)}}$ donde $|\vec{\nabla} f(x, y)| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$ es conocido como la magnitud de $\vec{\nabla} f$

Sustituyendo los valores de (10) y (11) y evaluando en el punto (1, 1) obtenemos:

$$\begin{aligned}
\vec{u}(1, 1) &= \frac{\vec{\nabla} f(x, y)|_{(1,1)}}{|\vec{\nabla} f(x, y)|_{(1,1)}} \\
&= \frac{f_x(x, y)\hat{i} + f_y(x, y)\hat{j}}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}}|_{(1,1)} \\
&= \frac{\left(x \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y + \frac{x^2}{y}}\right)\hat{i} - \frac{x^2}{y^2 + x^2}\hat{j}}{\sqrt{\left(x \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y + \frac{x^2}{y}}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{y^2 + x^2}\right)^2}}|_{(1,1)} \\
&= \frac{\left(1 * \arctan\left(\frac{1}{1}\right) + \frac{1}{1 + \frac{1^2}{1}}\right)\hat{i} - \frac{1^2}{1^2 + 1^2}\hat{j}}{\sqrt{\left(1 * \arctan\left(\frac{1}{1}\right) + \frac{1}{1 + \frac{1^2}{1}}\right)^2 + \left(\frac{1^2}{1^2 + 1^2}\right)^2}} \\
&= \frac{\left(a + \frac{1}{2}\right)\hat{i} - \frac{1}{2}\hat{j}}{\sqrt{\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}}
\end{aligned} \tag{13}$$

Hemos definido $\arctan(1) = a$ solamente para evitar usar su valor numérico, lo utilizaremos así en el siguiente paso.

Paso 2: Calculemos la derivada direccional

Para dos vectores $\vec{p} = m\hat{i} + l\hat{j}$ y $\vec{q} = r\hat{i} + s\hat{j}$ se define $\vec{p} \cdot \vec{q} = m * r + l * s$ como el producto escalar.

Utilizando lo anterior y los valores calculados en (13) en la fórmula (9) obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{df}{d\vec{u}} &= \vec{\nabla} f \cdot \vec{u} \\
&= \left[\left(a + \frac{1}{2}\right)\hat{i} - \frac{1}{2}\hat{j}\right] \cdot \frac{\left(a + \frac{1}{2}\right)\hat{i} - \frac{1}{2}\hat{j}}{\sqrt{\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}} \\
&= \frac{\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}^2}{\sqrt{\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}} \\
&= \sqrt{\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}
\end{aligned} \tag{14}$$

Conclusión

Regresamos el valor de $\arctan(1)$ y obtenemos la solución.

$$\frac{df}{d\vec{u}}(1, 1) = \sqrt{\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}$$

3. Si la region $1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$ es denominada A, determine el valor de

$$\iint_A \frac{1}{x^2 + 2xy + y^2 + 1} dx dy$$

Respuesta

Introducción

Para este problema necesitamos calcular la doble integral de la función dada, para ello calcularemos primero la integral dependiente de una variable considerando la otra variable como constante, posteriormente evaluaremos en el espacio determinado como A. Después calcularemos y evaluaremos la segunda integral.

Paso 1: Solución de la integral respecto de x

Para resolver la primer integral para x en el espacio dado podemos reescribir la integral de la siguiente forma, esto recordando la expansión de un binomio al cuadrado $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$\iint_A \frac{1}{x^2 + 2xy + y^2 + 1} = \int \left[\int_1^2 \frac{1}{(x + y)^2 + 1} dx \right] dy$$

Esta integral la podemos simplificar realizando el siguiente cambio de variable:

$$\begin{aligned} u &= x + y \\ du &= dx \end{aligned}$$

si x esta definido en $1 \leq x \leq 2$ entonces tenemos $1 + y \leq x + y \leq 2 + y$ así que $1 + y \leq u \leq 2 + y$.

$$\int \left[\int_{1+y}^{2+y} \frac{1}{(u)^2 + 1} du \right] dy$$

Para la integral respecto de u utilizamos $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan(x)$

$$\int \left[\int_{1+y}^{2+y} \frac{1}{(u)^2 + 1} du \right] dy = \int \left[\arctan(u) \Big|_{1+y}^{2+y} \right] dy \quad (15)$$

$$= \int [\arctan(2 + y) - \arctan(1 + y)] dy \quad (16)$$

$$= \int \arctan(2 + y) dy - \int \arctan(1 + y) dy \quad (17)$$

Para estas dos integrales resultantes veamos que son similares, para resolverlas ambas al mismo tiempo en una sola notemos que el argumento de las dos es de la forma $(a + y)$, entonces resolvamos

$$\int \arctan(a + y) dy$$

Resolvamos esta integral integrando por partes, es decir utilizando la siguiente fórmula de integración:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Para nuestro caso sea

$$\begin{aligned} u &= \arctan(a + y) & dv &= dy \\ \frac{du}{dy} &= \frac{1}{(a + y)^2 + 1} & \int dv &= \int dy \\ du &= \frac{1}{(a + y)^2 + 1} dy & v &= y \end{aligned}$$

sustituyendo esto en nuestra fórmula de integración obtenemos

$$\int \arctan(a + y) = y \arctan(a + y) - \int \frac{y}{(a + y)^2 + 1} dy$$

Ahora para resolver esta ultima integral haremos el siguiente cambio de variable $x = (a + y)$, obteniendo así

$$\begin{aligned} \int \frac{y}{(a + y)^2 + 1} &= \int \frac{x - a}{x^2 + 1} \\ &= \int \frac{x}{x^2 + 1} - a \int \frac{1}{x^2 + 1} \\ &= \int \frac{x}{x^2 + 1} - a \arctan(x) \end{aligned}$$

Para la primer integral que falta realizamos el siguiente cambio de variable $s = x^2 + 1$ así que $ds = 2x dx$, utilizaremos también $\int \frac{1}{v} dv = \ln(v)$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^2 + 1} dx &= \int \frac{x}{s} \frac{2}{2x} ds \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{s} ds \\ &= \frac{1}{2} \ln(s) \\ &= \frac{\ln(x^2 + 1)}{2} \end{aligned}$$

Sustituyendo este resultado y el anterior y regresando a la variable y , obtenemos

$$\begin{aligned} \int \arctan(a + y) &= y \arctan(a + y) - \left[-\arctan(a + y) + \frac{\ln((a + y)^2 + 1)}{2} \right] \\ &= y \arctan(a + y) + a \arctan(a + y) - \frac{\ln((a + y)^2 + 1)}{2} \end{aligned}$$

Utilizamos este ultimo resultado en (17) con los valores respectivos de a para obtener el resultado final

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left[\int_{1+y}^{2+y} \frac{1}{(u)^2 + 1} du \right] dy &= \int_0^1 \arctan(2+y) dy - \int_0^1 \arctan(1+y) dy \\
&= \left[y \arctan(2+y) + 2 \arctan(2+y) - \frac{\ln((2+y)^2 + 1)}{2} \right] \Big|_0^1 \\
&\quad - \left[y \arctan(1+y) + \arctan(1+y) - \frac{\ln((1+y)^2 + 1)}{2} \right] \Big|_0^1 \\
&= \left[(y+2)(\arctan(2+y)) - \frac{\ln((2+y)^2 + 1)}{2} \right] \Big|_0^1 \\
&\quad - \left[(y+1)(\arctan(1+y)) - \frac{\ln((1+y)^2 + 1)}{2} \right] \Big|_0^1 \\
&= (3)(\arctan(3)) - \frac{\ln(10)}{2} - (2)(\arctan(2)) - \frac{\ln(5)}{2} \\
&\quad - \left[(2)(\arctan(2)) - \frac{\ln(5)}{2} - \arctan(1) - \frac{\ln(2)}{2} \right]
\end{aligned}$$

Conclusión

Calculando los valores numéricos obtenemos

$$\boxed{\int_0^1 \left[\int_{1+y}^{2+y} \frac{1}{(u)^2 + 1} du \right] dy = 0.215512}$$