EXAMEN MATEMÁTICA AVANZADA

Raymundo Silvestre Gonzalez Contreras

30 de octubre de 2022

1. Utilice las condiciones iniciales dadas para determinar la solución particular del siguiente sistema:

$$\ddot{x} + 6\dot{x} + 9x = 3e^{-3t}$$

Las condiciones iniciales son $x(0) = 0$ y $\dot{x}(0) = 1$.

Respuesta

Introducción

Para este problema necesitamos calcular la solución del sistema dadas las condiciones iniciales, para ello dado que se trata de una ecuación diferencial ordinaria (ODE) no homogénea, su solución se compone de la suma de una solución complementaria y una solución particular, calculáremos primero la parte complementaria que es la solución de la ecuación homogénea asociada, posteriormente calcularemos la solución particular y finalmente utilizaremos las condiciones iniciales para hallar los valores de las constantes que acompañan la solución.

Paso 1: Solución de la ecuación homogénea asociada

La ecuación homogénea asociada a nuestra ecuación es:

$$\ddot{x} + 6\dot{x} + 9x = 0 \tag{1}$$

Para este tipo de ecuaciones sus soluciones tienen la siguiente forma: $x = e^{\lambda t}$, donde debemos encontrar el valor de λ sustituyendo x en (1). Obtenemos asi utilizando $\dfrac{d(e^{\lambda t})}{dt} = \lambda e^{\lambda t}$:

$$\begin{aligned}
\ddot{x} + 6\dot{x} + 9x &= \lambda^2 e^{\lambda t} + 6\lambda e^{\lambda t} 9e^{\lambda t} \\
&= e^{\lambda t}(\lambda^2 + 6\lambda + 9) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Dado que $e^{\lambda t}$ nunca es cero para valores finitos de t, bastara con resolver:

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$$

para encontrar los valores de λ, podemos entonces agrupar de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\lambda^2 + 6\lambda + 9 &= (\lambda + 3)(\lambda + 3) \\
&= (\lambda + 3)^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

las soluciones de esta ecuación nos devuelven los valores de $\lambda_1 = -3$ y $\lambda_2 = -3$, dado que los valores son múltiplos enteros (particularmente el mismo valor), la solución de la ecuación homogénea sera $c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_1 t} t$ donde c_1 y c_2 son valores enteros que calcularemos mas adelante. Sustituyendo los valores obtenemos asi la solución complementaria

$$x_c = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-3t} t \tag{2}$$

Paso 2: Solución particular por el método de coeficientes indeterminados

Dado que la ecuación homogénea asociada nos devolvió una solución de la forma te^{-3t} la solución particular debe ser de la forma $x_p = ae^{-3t}t^2$.

Calculemos primero $\dfrac{d^2(x_p)}{dt^2}$ y $\dfrac{d(x_p)}{dt}$

$$\begin{aligned}\frac{d(x_p)}{dx} &= \frac{d(ae^{-3t}t^2)}{dt}\\ &= a\frac{d(e^{-3t}t^2)}{dt}\\ &= a\left[\frac{d(e^{-3t})}{dt}t^2 + e^{-3t}\frac{d(t^2)}{dt}\right]\\ &= a(-3e^{-3t}t^2 + 2e^{-3t}t)\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2(x_p)}{dt^2} &= \frac{d(\frac{d(x_p)}{dt})}{dt}\\ &= \frac{d(a[-3e^{-3t}t^2 + 2e^{-3t}t])}{dt}\\ &= a\left[-3\frac{d(e^{-3t}t^2)}{dt} + 2\frac{d(e^{-3t}t)}{dt}\right]\\ &= a\left[-3(\frac{d(e^{-3t})}{dt}t^2 + e^{-3t}\frac{d(t^2)}{dt}) + 2(\frac{d(e^{-3t})}{dt}t + e^{-3t}\frac{d(t)}{dt})\right]\\ &= a\left[-3(-3e^{-3t}t^2 + 2e^{-3t}t) + 2(-3e^{-3t} + e^{-3t})\right]\\ &= a(9e^{-3t}t^2 - 12e^{-3t}t + 2e^{-3t})\end{aligned} \tag{4}$$

sustituyendo (3) y (4) en nuestra ecuación inicial obtenemos el valor de a

$$\begin{aligned}\ddot{x} + 6\dot{x} + 9x &= 3e^{-3t}\\ a(9e^{-3t}t^2 - 12e^{-3t}t + 2e^{-3t}) + 6a(-3e^{-3t}t^2 + 2e^{-3t}t) + 9e^{-3t}t^2 &= 3e^{-3t}\\ a(9t^2 - 12t + 2 - 18t^2 + 12t + 9t^2)e^{-3t} &= 3e^{-3t}\\ 2a &= 3\\ a &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

De modo que nuestra solución particular es

$$x_p = \frac{3}{2}e^{-3t}t^2 \tag{5}$$

la suma de nuestra solución complementaria (2) y nuestra solución particular(5) es nuestra solución completa.

$$\begin{aligned}x &= x_c + x_p\\ &= c_1e^{-3t} + c_2e^{-3t}t + \frac{3}{2}e^{-3t}t^2\\ &= (c_1 + c_2t + \frac{3}{2}t^2)e^{-3t}\end{aligned} \tag{6}$$

Paso 3: Calcular los valores de los coeficientes

Para calcular los valores de los coeficientes c_1 y c_2 utilizaremos las condiciones iniciales, para ello utilizando (6) y recordando que $e^0 = 1$ calculemos

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \\ (c_1 + c_2 * (0) + \frac{3}{2}(0)^2)e^{-3*0} &= 0 \\ c_1 &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(0) &= 0 \\ \frac{d([c_1 + c_2 t + \frac{3}{2}t^2]e^{-3t})}{dt}|_{t=0} &= 1 \\ \frac{d(c_1 + c_2 t + \frac{3}{2}t^2)}{dt}e^{-3t}|_{t=0} + [c_1 + c_2 t + \frac{3}{2}]\frac{d(e^{-3t})}{dt}|_{t=0} &= 1 \\ (c_2 + 3t)e^{-3t}|_{t=0} + [c_1 + c_2 t + \frac{3}{2}t^2](-3e^{-3t})|_{t=0} &= 1 \\ (c_2 + 3 * (0))e^{-3*(0)} + [c_1 + c_2 * (0) + \frac{3}{2}(0)^2](-3e^{-3*(0)}) &= 1 \\ c_2 - 3c_1 + &= 1 \\ c_2 - 3 * (0) &= 1 \\ c_2 &= 1 \end{aligned} \tag{8}$$

Conclusión

Sustituyendo los valores de c_1 y c_2 obtenidos en (7) y (8) respectivamente en (6) obtenemos la solución final.

$$\boxed{x = \left(1 + \frac{3}{2}t^2\right) e^{-3t}}$$

2. La siguiente función representa una curva en un plano bidimensional

$$f(x,y) = x\arctan(\frac{x}{y})$$

Determine el valor de $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1)$ donde ''u.ªpunta a la dirección de máximo crecimiento para la función en el punto dado.

Respuesta

Introducción

Para este problema necesitamos calcular la derivada direccional en la dirección de u para ello utilizaremos el cálculo del gradiente de la función en el punto dado para obtener la dirección de máximo crecimiento y al mismo tiempo la derivada direccional. Utilizaremos asi la siguiente formula:

$$\frac{df}{d\vec{u}} = \vec{\nabla} f \cdot \vec{u} \tag{9}$$

Paso 1: Calcular la dirección de máximo crecimiento

Para una función $f(x,y)$ definimos el vector gradiente como:

$$\vec{\nabla} f(x,y) = f_x(x,y)\hat{\imath} + f_y(x,y)\hat{\jmath}$$

Donde $f_x = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $f_y = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones, recordemos las siguientes propiedades de las derivadas:

a) $\dfrac{d[f(x)g(x)]}{dx} = \dfrac{df(x)}{dx}g(x) + f(x)\dfrac{dg(x)}{dx}$

b) $\dfrac{d(f(g(x)))}{dx} = \dfrac{df(x)}{d(g(x))}\dfrac{dg(x)}{dx}$

c) $\dfrac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$

d) $\dfrac{d[\arctan(x)]}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$

Al calcular la derivada parcial de una función tratamos a las otras variables como constantes.

Utilizando las propiedades mencionadas anteriormente calculemos para nuestra función:

Para x

$$
\begin{aligned}
f_x &= \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \\
&= \frac{\partial [x \arctan(\frac{x}{y})]}{\partial x} \\
&= \frac{dx}{dx} \arctan(\frac{x}{y}) + x \frac{\partial \arctan(\frac{x}{y})}{\partial x} \\
&= x \arctan(\frac{x}{y}) + x \left(\frac{\partial (\arctan(\frac{x}{y}))}{d\frac{x}{y}} \frac{d(\frac{x}{y})}{dx} \right) \\
&= x \arctan(\frac{x}{y}) + x \left(\frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \right) \frac{1}{y} \\
&= x \arctan(\frac{x}{y}) + \left(\frac{x}{y + \frac{x^2}{y}} \right)
\end{aligned} \tag{10}
$$

Para y

$$
\begin{aligned}
f_y &= \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\
&= \frac{\partial [x \arctan(\frac{x}{y})]}{\partial y} \\
&= x \frac{\partial \arctan(\frac{x}{y})}{\partial y} \\
&= x \left(\frac{\partial (\arctan(\frac{x}{y}))}{d\frac{x}{y}} \frac{d(\frac{x}{y})}{dy} \right) \\
&= x \left(\frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \right) (-1) \frac{x}{y^2} \\
&= - \frac{x^2}{y^2 + x^2}
\end{aligned} \tag{11}
$$

De modo que nuestro gradiente es:

$$
\vec{\nabla} f(x,y) = \left(x \arctan(\frac{x}{y}) + \frac{x}{y + \frac{x^2}{y}} \right) \hat{\imath} - \frac{x^2}{y^2 + x^2} \hat{\jmath} \tag{12}
$$

Ahora como la dirección de máximo crecimiento $\vec{u}(1,1) = \frac{\vec{\nabla} f(x,y)|_{(1,1)}}{|\vec{\nabla} f(x,y)|_{(1,1)}}$ donde $|\vec{\nabla} f(x,y)| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$ es conocido como la magnitud de $\vec{\nabla} f$

Sustituyendo los valores de (10) y (11) y evaluando en el punto $(1,1)$ obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\vec{u}(1,1) &= \frac{\vec{\nabla} f(x,y)|_{(1,1)}}{|\vec{\nabla} f(x,y)|_{(1,1)}} \\
&= \frac{f_x(x,y)\hat{\imath} + f_y(x,y)\hat{\jmath}}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}}|_{(1,1)} \\
&= \frac{\left(x \arctan(\frac{x}{y}) + \frac{x}{y+\frac{x^2}{y}}\right)\hat{\imath} - \frac{x^2}{y^2+x^2}\hat{\jmath}}{\sqrt{\left(x \arctan(\frac{x}{y}) + \frac{x}{y+\frac{x^2}{y}}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{y^2+x^2}\right)^2}|_{(1,1)}} \\
&= \frac{\left(1 * \arctan(\frac{1}{1}) + \frac{1}{1+\frac{1^2}{1}}\right)\hat{\imath} - \frac{1^2}{1^2+1^2}\hat{\jmath}}{\sqrt{\left(1 * \arctan(\frac{1}{1}) + \frac{1}{1+\frac{1^2}{1}}\right)^2 + \left(\frac{1^2}{1^2+1^2}\right)^2}} \\
&= \frac{\left(a + \frac{1}{2}\right)\hat{\imath} - \frac{1}{2}\hat{\jmath}}{\sqrt{\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}}
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Hemos definido $\arctan(1) = a$ solamente para evitar usar su valor numérico, lo utilizaremos asi en el siguiente paso.

Paso 2: Calculemos la derivada direccional

Para dos vectores $\vec{p} = m\hat{\imath} + l\hat{\jmath}$ y $\vec{q} = r\hat{\imath} + s\hat{\jmath}$ se define $\vec{p} \cdot \vec{q} = m * r + l * s$ como el producto escalar.

Utilizando lo anterior y los valores calculados en (13) en la fórmula (9) obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\frac{df}{d\vec{u}} &= \vec{\nabla} f \cdot \vec{u} \\
&= \left[\left(a + \frac{1}{2}\right)\hat{\imath} - \frac{1}{2}\hat{\jmath}\right] \cdot \frac{\left(a + \frac{1}{2}\right)\hat{\imath} - \frac{1}{2}\hat{\jmath}}{\sqrt{\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}} \\
&= \frac{\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}^2}{\sqrt{\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}} \\
&= \sqrt{\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Conclusión

Regresamos el valor de $\arctan(1)$ y obtenemos la solución.

$$\boxed{\frac{df}{d\vec{u}}(1,1) = \sqrt{\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}}$$

3. Si la region $1 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$ es denominada A, determine el valor de

$$\iint_A \frac{1}{x^2 + 2xy + y^2 + 1} dxdy$$

Respuesta

Introducción

Para este problema necesitamos calcular la doble integral de la función dada, para ello calcularemos primero la integral dependiente de una variable considerando la otra variable como constante, posteriormente evaluaremos en el espacio determinado como A. Después calcularemos y evaluaremos la segunda integral.

Paso 1: Solución de la integral respecto de x

Para resolver la primer integral para x en el espacio dado podemos reescribir la integral de la siguiente forma, esto recordando la expansión de un binomio al cuadrado $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$\iint_A \frac{1}{x^2 + 2xy + y^2 + 1} = \int \left[\int_1^2 \frac{1}{(x + y)^2 + 1} dx \right] dy$$

Esta integral la podemos simplificar realizando el siguiente cambio de variable:

$$u = x + y$$
$$du = dx$$

si x esta definido en $1 \leq x \leq 2$ entonces tenemos $1 + y \leq x + y \leq 2 + y$ así que $1 + y \leq u \leq 2 + y$.

$$\int \left[\int_{1+y}^{2+y} \frac{1}{(u)^2 + 1} du \right] dy$$

Para la integral respecto de u utilizamos $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan(x)$

$$\int \left[\int_{1+y}^{2+y} \frac{1}{(u)^2 + 1} du \right] dy = \int \left[\arctan(u)|_{1+y}^{2+y} \right] dy \tag{15}$$

$$= \int \left[\arctan(2 + y) - \arctan(1 + y) \right] dy \tag{16}$$

$$= \int \arctan(2 + y) dy - \int \arctan(1 + y) dy \tag{17}$$

Para estas dos integrales resultantes veamos que son similares, para resolverlas ambas al mismo tiempo en una sola notemos que el argumento de las dos es de la forma $(a + y)$, entonces resolvamos

$$\int \arctan(a + y) dy$$

Resolvamos esta integral integrando por partes, es decir utilizando la siguiente fórmula de integración:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Para nuestro caso sea

$$\begin{aligned} u &= \arctan(a+y) & dv &= dy \\ \frac{du}{dy} &= \frac{1}{(a+y)^2+1} & \int dv &= \int dy \\ du &= \frac{1}{(a+y)^2+1}dy & v &= y \end{aligned}$$

sustituyendo esto en nuestra fórmula de integración obtenemos

$$\int arctan(a+y) = y\arctan(a+y) - \int \frac{y}{(a+y)^2+1}dy$$

Ahora para resolver esta ultima integral haremos el siguiente cambio de variable $x = (a+y)$, obteniendo asi

$$\begin{aligned} \int \frac{y}{(a+y)^2+1} &= \int \frac{x-a}{x^2+1} \\ &= \int \frac{x}{x^2+1} - a\int \frac{1}{x^2+1} \\ &= \int \frac{x}{x^2+1} - a\arctan(x) \end{aligned}$$

Para la primer integral que falta realizamos el siguiente cambio de variable $s = x^2+1$ asi que $ds = 2xdx$, utilizaremos también $\int \frac{1}{v}dv = \ln(v)$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^2+1}dx &= \int \frac{x}{s}\frac{2}{2x}ds \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{s}ds \\ &= \frac{1}{2}\ln(s) \\ &= \frac{\ln(x^2+1)}{2} \end{aligned}$$

Sustituyendo este resultado y el anterior y regresando a la variable y, obtenemos

$$\begin{aligned} \int arctan(a+y) &= y\arctan(a+y) - \left[-\arctan(a+y) + \frac{\ln((a+y)^2+1)}{2}\right] \\ &= y\arctan(a+y) + a\arctan(a+y) - \frac{\ln((a+y)^2+1)}{2} \end{aligned}$$

Utilizamos este ultimo resultado en (17) con los valores respectivos de a para obtener el resultado final

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left[\int_{1+y}^{2+y} \frac{1}{(u)^2+1} du\right] dy &= \int_0^1 \arctan(2+y)dy - \int_0^1 \arctan(1+y)dy \\
&= \left[y\arctan(2+y) + 2\arctan(2+y) - \frac{\ln((2+y)^2+1)}{2}\right]|_0^1 \\
&\quad - \left[y\arctan(1+y) + \arctan(1+y) - \frac{\ln((1+y)^2+1)}{2}\right]|_0^1 \\
&= \left[(y+2)(\arctan(2+y)) - \frac{\ln((2+y)^2+1)}{2})\right]|_0^1 \\
&\quad - \left[(y+1)(\arctan(1+y)) - \frac{\ln((1+y)^2+1)}{2})\right]|_0^1 \\
&= (3)(\arctan(3)) - \frac{\ln(10)}{2}) - (2)(\arctan(2)) - \frac{\ln(5)}{2}) \\
&\quad - \left[(2)(\arctan(2)) - \frac{\ln((5)}{2}) - \arctan(1) - \frac{\ln(2)}{2})\right]
\end{aligned}$$

Conclusión

Calculando los valores numéricos obtenemos

$$\boxed{\int_0^1 \left[\int_{1+y}^{2+y} \frac{1}{(u)^2+1} du\right] dy = 0.215512}$$

4. Un triángulo con vertices en $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,2)$ en sentido antihorario, delimita una región. Determine la integral sobre esta región de la siguiente expresión.

$$\int_{\Omega}(x-y)dx + e^{x+y}dy$$

Respuesta

Introducción

Para resolver esta integral primero la reescribiremos utilizando el teorema de Green, una vez transformada en una integral doble la resolveremos utilizando los métodos de integración comunes y evaluaremos en los limites dados.

Paso 1: Uso del teorema de Green y simplificación de la integral

Para una region D delimitada por una curva cerrada c simple y suave a trozos orientada en sentido contrario a las agujas del reloj.

Supongamos que F=⟨P,Q⟩ es un campo vectorial con funciones componentes que tienen derivadas parciales continuas en D. Entonces,

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} = \oint_{\mathbf{C}} \mathbf{Pdx} + \mathbf{Qdy} = \iint_{\mathbf{D}} (\mathbf{Q_x} - \mathbf{P_y})\mathbf{dA}$$

En nuestro caso la curva es la superficie de un triángulo por lo que se cumplen las condiciones, además que $P = x - y$ y $Q = e^{x+y}$ podemos así calcular

$$\begin{aligned} P_y &= \frac{\partial P}{\partial y} \\ &= \frac{\partial(x-y)}{\partial y} \\ &= -1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} Q_x &= \frac{\partial Q}{\partial x} \\ &= \frac{\partial e^{x+y}}{\partial x} \\ &= e^{x+y} \end{aligned}$$

Para los limites de integración x solo va de 0 a 1, por lo que estos seran sus limites, mientras que y se mueve de 0 a 2 y después a 1 este comportamiento lo podemos describir respecto a x de la siguiente forma $2x$ y $x+1$ el primero devuelve el primer y segundo valor de y para los valores de x y el segundo devuelve el segundo y tercer valor de y para los valores de x asi que estos serán los limites de integración de y inferior y superior respectivamente.

Utilizando el teorema de Green, asi como los valores de Q_x y P_y asi como los limites de integración, obtenemos

$$\int_{\Omega}(x-y)dx + e^{x+y}dy = \int_0^1 \int_{2x}^{x+1} (e^{x+y} - 1)dydx \tag{18}$$

$$= \int_0^1 \int_{2x}^{x+1} e^{x+y}dydx - \int_0^1 \int_{2x}^{x+1} dydx \tag{19}$$

Paso 2: Resolución de las integrales dobles

Para la primer integral recordemos que si a es una constante $\int e^{x+a}dx = e^{x+a}$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_{2x}^{x+1} e^{x+y}dydx &= \int_0^1 \left(e^{x+y}\right)_{2x}^{x+1} dx \\ &= \int_0^1 e^{x+x+1}dx - \int_0^1 e^{x+2x}dx \\ &= \int_0^1 e^{2x+1}dx - \int_0^1 e^{3x}dx\end{aligned}$$

Para resolver ahora respecto a x utilizaremos que $\int e^{ax+b} = \frac{e^{ax+b}}{a}$ para a y b constantes

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{2x+1}dx &= 2e^{2x+1}|_0^1 \\ &= \frac{1}{2}(e^3 - e)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{3x}dx &= 3e^{3x}|_0^1 \\ &= \frac{1}{3}(e^3 - 1)\end{aligned}$$

Así que

$$\int_0^1 \int_{2x}^{x+1} e^{x+y}dydx = \frac{1}{2}(e^3 - e) - \frac{1}{3}(e^3 - 1) = \frac{1}{6}(e^3 - 3e + 2) \tag{20}$$

Calculemos ahora

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_{2x}^{x+1} dydx &= \int_0^1 (1 - x)dx \\ &= \left(x - \frac{x^2}{2}\right)|_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Sustituyendo (20) y (21) en (19) obtenemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega (x - y)dx + e^{x+y}dy &= \frac{1}{6}(e^3 - 3e + 2) - \frac{1}{2} \qquad (21) \\ &= \frac{1}{6}(e^3 - 3e - 1) \qquad (22)\end{aligned}$$

Conclusión

Calculando el valor numérico

$$\boxed{\int_\Omega (x - y)dx + e^{x+y}dy \approx 1.8218}$$

5. Usando una expansión en serie, determine el valor de la siguiente integral con un error menor a 10⁻8.

$$\int_0^{0.1} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$$

Respuesta

Introducción

Para este problema necesitamos primero expandir la función a integrar como una serie de potencias, para despues calcular la integral de esa serie, cortando la serie hasta obtener un valor de error menor al requerido. Para ello utilizaremos la expansion en serie de Maclaurin.

Paso 1: Expansión en serie de la función

Si f tiene n derivadas en $x = 0$ el n-ésimo polinomio de Maclaurin de la función f se define como:

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Donde $f^{(n)}$ es la derivada de orden n de la función f, $n! = n(n-1)(n-2)...(2)(1)$ es el factorial de n. Como solo nos interesa la integral con un error menor a 10^8 y como nuestro límite superior es 0.1 y $10^8 = (0.1)^{10}$, bastará con que nuestro polinomio sea de un grado menor a 10.

Calculemos entonces las derivadas

$$\begin{aligned}
f'(0) &= \frac{d}{dx}(\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}) \quad \text{haciendo el cambio de variable } u = x^3+1 \\
&= \frac{d}{du}\frac{1}{\sqrt{u}}\frac{d}{dx}(x^3+1) \\
&= 3x^2(\frac{-1}{2u^{3/2}}) \\
&= 3x^2(\frac{-1}{2(x^3+1)^{3/2}}) \\
&= -\frac{3x^2}{2(x^3+1)^{3/2}} \quad \text{evaluando en } x = 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Para las derivadas posteriores utilizaremos el mismo cambio de variable en pasos intermedios, además de la regla del producto de una derivada $\frac{d}{dx}(f(x)\cdot g(x)) = f(x)\frac{dg(x)}{dx} + g(x)\frac{df(x)}{dx}$

$$\begin{aligned}
f''(0) &= \frac{d}{dx}(-\frac{3x^2}{2(x^3+1)^{3/2}}) \\
&= -\frac{3}{2}\frac{d}{dx}((x^2)((x^3+1)^{-3/2})) \\
&= -\frac{3}{2}\left[2x((x^3+1)^{-3/2})) + x^2(3x^2(\frac{-3}{2}(x^3+1)^{-5/2}))\right] \\
&= \frac{3}{4}\left[x(5x^4-4)(x^3+1)^{-5/2}\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Podemos continuar con los cálculos de las derivadas, pero para hacerlo mas practico podemos desarrollar un script de Python que nos ayude a calcularlo

```
#calculamos la serie de Maclaurin para la función
# 1/sqrt(x^3 + 1)
# la serie de Maclaurin es la serie de Taylor con a = 0
#importamos la librería
from sympy.abc import x
from sympy import sqrt, diff, factorial, expand, pprint
#Definimos la función que calcula la serie
def PolTaylor(a,n):
    f = 1/sqrt(x**3 + 1) #función a utilizar
    F = f
    T = f.subs(x,a)
    for k in range(1,n+1):
        dfk=diff(f,x)
        T = T + dfk.subs(x,a)*(x**k/factorial(k))
        f = dfk
    #Para mostrar el resultado de forma más estética
    pprint(expand(T))

n = 10 #orden máximo de la serie
a = 0 # punto donde se busca la aproximación
PolTaylor(a,n)
```

Con la ayuda de este script encontramos que la serie con la aproximación buscada es:

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+1}} = 1 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^6 - \frac{5}{16}x^9 \tag{23}$$

Sustituyendo esto en nuestra integral inicial obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^{0.1}\frac{dx}{\sqrt{x^3+1}} &= \int_0^{0.1}\left(1 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^6 - \frac{5}{16}x^9\right)dx \\
&= \int_0^{0.1} 1dx - \frac{1}{2}\int_0^{0.1} x^3dx + \frac{3}{8}\int_0^{0.1} x^6dx - \frac{5}{16}\int_0^{0.1} x^9dx
\end{aligned}$$

Para resolver estas integrales utilizamos $\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$$\int_0^{0.1} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}} = \int_0^{0.1} 1dx - \frac{1}{2}\int_0^{0.1} x^3 dx + \frac{3}{8}\int_0^{0.1} x^6 dx - \frac{5}{16}\int_0^{0.1} x^9 dx \tag{24}$$

$$= \left[x - \frac{1}{2}\frac{x^4}{4} + \frac{3}{8}\frac{x^7}{7} - \frac{5}{16}\frac{x^{10}}{10}\right]_0^{0.1} \tag{25}$$

$$= (0.1) - \frac{1}{2}\frac{(0.1)^4}{4} + \frac{3}{8}\frac{(0.1)^7}{7} - \frac{5}{16}\frac{(0.1)^{10}}{10} \tag{26}$$

Conclusión

La solución de esta integral es:

$$\boxed{\int_0^{0.1} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}} = 0.099987562496875}$$

6. Dada la siguiente función

$$f(x) = x^3, \qquad -\pi \leq x \leq \pi$$

Calcular la serie de Fourier que la representa

Respuesta

Introducción

Para este problema necesitamos calcular la serie de Fourier, para ello primero calcularemos los coeficientes de Fourier en el intervalo dado.

Paso 1: Cálculo de los coeficientes de Fourier

Para una función f su serie de Fourier se define como:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)]$$

Donde llamamos coeficientes de Fourier a

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)dx \\
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx)dx
\end{aligned}$$

Calculemos:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^3 dx \text{ Utilizando que } \int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} \\
&= \frac{1}{4\pi} [x^4]|_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{4\pi} [(\pi)^4 - (\pi)^4] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Para a_n

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^3 \cos(nx)dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

Lo anterior dado que $x^3\cos(nx)$ es una función impar y el intervalo $[-\pi,\pi]$ es simétrico alrededor de 0. Para b_n recordemos la fórmula de integración por partes

$$\int u dv = uv - \int v du$$

También utilizaremos $\int \text{sen}(nx) = -\frac{\cos(nx)}{n}$ y $\int \cos(nx) = \frac{\text{sen}(nx)}{n}$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}(nx)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^3\,\text{sen}(nx)dx && u = x^3 \qquad dv = \text{sen}(nx) \\
&= \frac{1}{n\pi}\left[-x^3\cos(nx)\right]|_{-\pi}^{\pi} + \frac{3}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(nx)dx && du = 3x^2dx \qquad v = \frac{\cos(nx)}{n} \\
&= \frac{1}{n\pi}\left[-(\pi)^3\cos(n\pi) - (-(-\pi)^3\cos(-n\pi))\right] + \frac{3}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(nx)dx \\
&= -\frac{2(\pi)^2}{n}\cos(n\pi) + \frac{3}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(nx)dx
\end{aligned}$$

Para la segunda integral del lado derecho volvemos a utilizar integración por partes

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(nx)dx &= \frac{1}{n}[x^2\,\text{sen}(nx)]|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi} x\,\text{sen}(nx)dx \\
&= \frac{2(\pi)^2}{n}\,\text{sen}(n\pi) - \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi} x\,\text{sen}(nx)dx
\end{aligned}$$

Para la segunda integral del lado derecho volvemos a utilizar integración por partes

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} x\,\text{sen}(nx)dx &= -\frac{1}{n}[x\cos(nx)]|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)dx \\
&= -\frac{2\pi}{n}\cos(n\pi) + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)dx \\
&= -\frac{2\pi}{n}\cos(n\pi) + \frac{1}{n^2}[\text{sen}(nx)]|_{-\pi}^{\pi} \\
&= -\frac{2\pi}{n}\cos(n\pi) + \frac{2}{n^2}\,\text{sen}(n\pi)
\end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación para b_n obtenemos:

$$b_n = -\frac{2(\pi)^2}{n}\cos(n\pi) + \frac{3}{n\pi}\left[\frac{2(\pi)^2}{n}\,\text{sen}(n\pi) - \frac{2}{n}\left(-\frac{2\pi}{n}\cos(n\pi) + \frac{2}{n^2}\,\text{sen}(n\pi)\right)\right]$$

Dado que $\text{sen}(n\pi) = 0$ y $\cos(n\pi) = (-1)^n$

$$\begin{aligned}
b_n &= -\frac{2(\pi)^2}{n}(-1)^n + \frac{3}{n\pi}\left[-\frac{2}{n}\left(-\frac{2\pi}{n}(-1)^n\right)\right] \\
&= -\frac{2\pi^2}{n}(-1)^n + \frac{12}{n^3}(-1)^n
\end{aligned}$$

Conclusión

La serie de Fourier de la función dada es:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{12}{n^3}(-1)^n - \frac{2\pi^2}{n}(-1)^n \right) \operatorname{sen}(nx) \right]}$$