



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



UPGOW – Uniwersytet Partnerem Gospodarki Opartej na Wiedzy
Uniwersytet Śląski w Katowicach, ul. Bankowa 12, 40-007 Katowice, <http://www.us.edu.pl>

UNIwersytet ŚLĄSKI
WYDZIAŁ NAUK O ZIEMI
KATEDRA GEOLOGII STOSOWANEJ
ZAKŁAD FIZYKI ZIEMI

Wybrane ćwiczenia rachunkowe i laboratoryjne z zakresu fizyki Ziemi

Maciej Jan Mendecki
Arlena Kowalska

Recenzent:
Prof. dr hab. inż. Wacław M. Zuberek



KATOWICE 2010

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



Spis treści

| | |
|---|----|
| 1. Układ Słoneczny..... | 3 |
| 1.1. Prawo Titiusa-Bodego..... | 3 |
| 2. Sejsmologia | 6 |
| 2.1. Obcięty rozkład Gutenberga-Richtera | 6 |
| 2.2. Reguły opisujące sekwencję wstrząsów wtórnych | 10 |
| 2.3. Wyznaczanie parametrów stacjonarnego hazardu sejsmicznego | 13 |
| 2.4. Równanie propagacyjne GMPE | 16 |
| 2.5. Moduły sprężystości | 19 |
| 3. Pole cieplne Ziemi i promieniotwórczość naturalna | 23 |
| 3.1. Gęstość powierzchniowego strumienia ciepłego dla otworu wiertniczego | 23 |
| 3.2. Parametry cieplne skał..... | 27 |
| 3.3. Geochronologia | 31 |
| 4. Paleomagnetyzm..... | 35 |
| 4.1. Wyznaczanie miejsca powstania skały w oparciu o pomiary kąta deklinacji i inklinacji pola paleomagnetycznego | 35 |
| 5. Pole grawitacyjne Ziemi..... | 38 |
| 5.1. Normalna siła ciężkości i wybrane modele elipsoidy Ziemi | 38 |



1. Układ Słoneczny

1.1. Prawo Titiusa-Bodego

Cel ćwiczenia

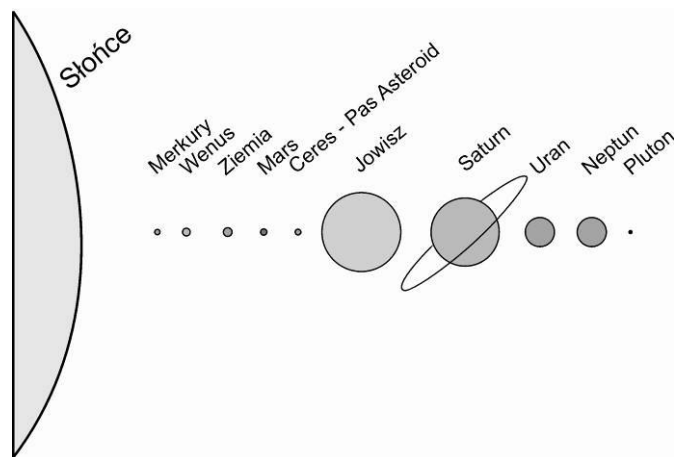
Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z prawem Titiusa-Bodego oraz wyznaczenie współczynników liczbowych dla dwóch typów równań: wykładniczego i eksponencjalnego. Podrzędnym celem jest opanowanie techniki najmniejszych kwadratów w celu dopasowania zależności liniowej do punktów pomiarowych. Umiejętność ta, będzie przydatna do obliczeń w dalszej części ćwiczeń.

Wprowadzenie do ćwiczenia

Ponad dwieście trzydzieści lat temu Johann Daniel Titius i Johann Bode opublikowali metodę wyznaczenia średniego położenia planet od słońca. Zaproponowana formuła miała pierwotną postać:

$$r_n = 0,4 + 0,3 \cdot 2^n \quad (1)$$

gdzie r_n jest średnią odległością planety od Słońca w jednostkach astronomicznych, $n = -\infty$ dla Merkurego, 0 dla Wenus, 1 dla Ziemi itd. Prawo zastosowano do ówczesnie znanych 6 planet (Merkury, Wenus, Ziemia, Mars, Jowisz i Saturn). Wiliam Herschel,



wykorzystując zaproponowaną przez Titiusa regułę, odkrył siódmą planetę Układu Słonecznego – Uran. Dokładność prawa Titiusa-Bodego potwierdziło odnalezienie Pasa Asteroid pomiędzy Marsem, a Jowiszem, gdzie prawdopodobnie powstałaby planeta, jednak siły oddziaływania grawitacyjnego Jowisza uniemożliwił koncentrację materii. Prawo to nie spełniło jednak oczekiwań w przypadku Neptuna i Plutona.

Rys.1.1. Układ słoneczny

Współcześnie proponuje się zapis równania Titiusa-Bodego pod dwiema postaciami, jako równie wykładnicze oraz eksponencjalne.

Prawo wykładnicze

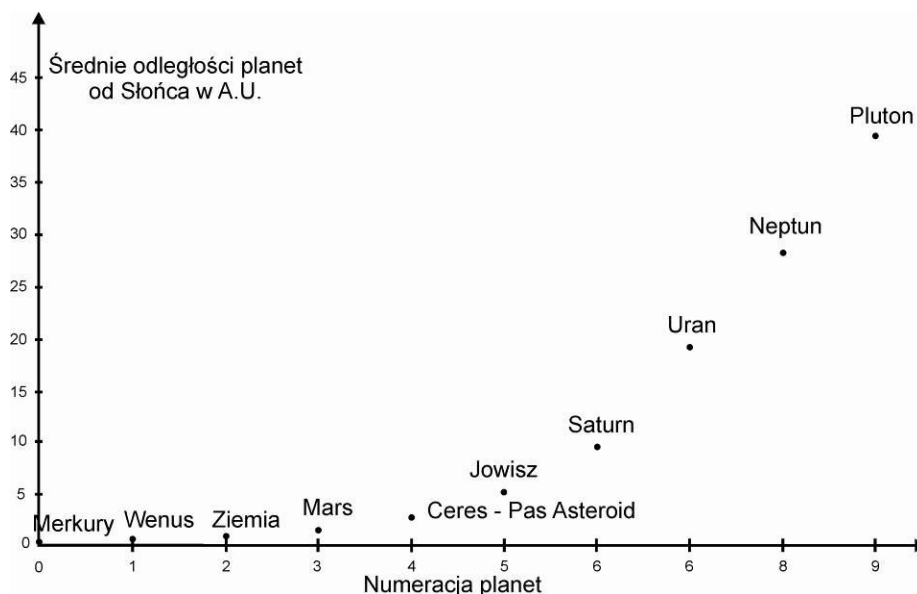
$$r_k = r_0 p^k, \quad (2)$$

gdzie r_k jest średnią odległością planety od Słońca w jednostkach astronomicznych, r_0 i p to współczynniki liczbowe, $k = 0, 1, 2, \dots$

Prawo eksponencjalne

$$r_k = ce^{d \cdot k}, \quad (3)$$

gdzie r_k jest średnią odległością planety od Słońca w jednostkach astronomicznych, c i d to współczynniki liczbowe, $k = 0, 1, 2, \dots$, e jest podstawą logarytmu naturalnego (Basano & Hughes 1979, Louise 1981, Patton 1988, Lynch 2003, Kotliarov 2008, Poveda & Lara 2008).



Rys.1.2. Wykres prezentujący średnią odległość planet od Słońca w zależności od numeru planety k .

Wykonanie obliczeń i opracowanie wyników

1. Na podstawie udostępnionych danych wykonać wykres zależności $r_k = f(k)$, gdzie k to kolejne numeracje planet $k = 0, 1, 2, \dots$. Na wykres nanieść niepewności położenia planet.
2. Zapisać oba równania (2) i (3) w postaci zlogarytmowanej w celu uzyskania liniowej zależności funkcyjnej $y = ax + b$.
3. Wykonać wykresy półlogarytmiczne $\log(r_k) = f(k)$ i $\ln(r_k) = f(k)$. W tym celu obliczyć odpowiednio logarytm dziesiętny i logarytm naturalny z wartości r_k oraz wyznaczyć ich niepewność metodą różniczek zupełnej. Wyniki obliczeń zestawzić w tabeli.
4. Obliczyć metodą regresji liniowej ważonej (metoda najmniejszych kwadratów) wartości parametrów a i b w równaniu prostej $y = ax + b$ oraz ich niepewności:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{N=k+1} \frac{1}{\sigma_i^2} \cdot \sum_{i=1}^{N=k+1} \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} - \sum_{i=1}^{N=k+1} \frac{x_i}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^{N=k+1} \frac{y_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{N=k+1} \frac{1}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^{N=k+1} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - \left(\sum_{i=1}^{N=k+1} \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2}$$



$$b = \frac{\sum_{i=1}^{N=k+1} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \cdot \sum_{i=1}^{N=k+1} \frac{y_i}{\sigma_i^2} - \sum_{i=1}^{N=k+1} \frac{x_i}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^{N=k+1} \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{N=k+1} \frac{1}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^{N=k+1} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - \left(\sum_{i=1}^{N=k+1} \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2}$$

$$\Delta a = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{N=k+1} (y_i - b - ax_i)^2} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N=k+1} \frac{1}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{N=k+1} \frac{1}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^{N=k+1} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - \left(\sum_{i=1}^{N=k+1} \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2}}$$

$$\Delta b = \Delta a \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N=k+1} x_i^2}{\sum_{i=1}^{N=k+1} \frac{1}{\sigma_i^2}}}$$

5. Na podstawie wyznaczonych wartości parametrów zlogarytmowanych równań należy przejść do postaci wykładniczej i zapisać prawa Titiusa-Bodego w postaci wykładniczej/ekspotencjalnej oraz oszacować niepewności parametrów odpowiednio dla obu typów równań $\Delta r_0, \Delta p, \Delta c, \Delta b$
6. Wykonać wykresy zawierające punkty pomiarowe i krzywe wyznaczonych funkcji prawa Titiusa-Bodego oraz wyliczyć na podstawie opracowanych wzorów wartości teoretyczne. Wyniki zestawień w tabeli, porównać z danymi literaturowymi.
7. Wyjaśnić, na czym polega różnica między obojgiem wzorów, jeżeli wzory dają te same wyniki, znaleźć przekształcenie między nimi.
8. Wyznaczyć osobne zależności prawa Titiusa-Bodego dla planet wewnętrznych (Merkury–Ceres) i planet zewnętrznych (Jowisz–Pluton) tymi samymi metodami.

Literatura

- Basano L., Hughes D.W. (1979) *A Modified Titius-Bode Law for Planetary Orbits*, Il Nuovo Cimento, 2C, 5, 505-510.
- Kotliarov I. (2008) *The Titius-Bode Law Revisited but Not Revived*, opublikowane na stronie internetowej: <http://arxiv.org/abs/0806.3532v1>
- Louise R. (1982) *A Postulate Leading to the Titius-Bode Law*, The Moon and the Planets 26, 93-96.
- Lynch P. (2003) *On the Significance of the Titius-Bode Law for the Distribution of the Planets*, Mon. Not. R. Astron. Soc., 341, 1174-1178
- Patton J. (1988) *On the Dynamical Derivation of the Titius-Bode Law*, Celestial Mechanics, 44, 365-391.
- Poveda A., Lara P. (2008) *The Exo-Planetary System of 55 Cancari and the Titius-Bode Law*, Revista Mexicana de Astronomia y Astrofisica, 44, 243-246.



2. Sejsmologia

2.1. Obcięty rozkład Gutenberga-Richtera

Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z dwiema prostymi metodami wyznaczania parametrów obciętego rozkładu Gutenberga-Richtera w oparciu o katalogi wstrząsów sejsmicznych rejestrowanych na światowych stacjach seismologicznych. W ćwiczeniu zaproponowano za S. Wiemerem i M. Wysssem (2002) metodę szacowania prawdopodobieństwa wystąpienia trzęsienia ziemi o wybranej magnitudzie docelowej.

Wprowadzenie do ćwiczenia

Wielkością opisującą rozmiar trzęsienia ziemi jest magnituda. Z definicji, jaką zaproponował Richter magnituda to logarytm maksymalnej amplitudy, liczonej w mikrometrach, na zapisach standardowego sejsmografu Wooda-Anedersona, który znajduje się 100 km od epicentrum. Ograniczeniem tej definicji jest to, że sprawdza się tylko dla Kalifornii (wstrząsów bliskich) i dla tego jednego modelu sejsmografu. Następnie wspólnie Richter i Gutenberg opracowywali magnitudy na innych przyrządach oraz w innych warunkach. Magnitudę, będącą wielkością bezwymiarową, definiuje się jako:

$$M = \log A(R) - \log A_0(R) = \log \left[\frac{A(R)}{A_0(R)} \right], \quad (1)$$

gdzie A to amplituda maksymalna zarejestrowana przez sejsmograf, A_0 jest magnitudą referencyjną, R – odległość epicentralna. Obecnie wyznacza się magnitudę uwzględniając dodatkowo okres drgania fali, poprawki na odległość epicentralną i głębokość ogniska oraz poprawkę stacji, odpowiadającą lokalnym warunkom gruntu i poprawkę regionalną, różna dla różnych rejonów trzęsień ziemi (Shearer 2009).

Trzęsienia ziemi wykazują znaczną złożoność w czasie i przestrzeni, ale również obecne są silne regularności. K. Wadati w 1932 roku zaadoptował prawo potęgowe dla energii trzęsień ziemi:

$$n(E)dE \propto E^{-m} dE, \quad (2)$$

gdzie n jest liczbą wstrząsów w przedziale energii $E+dE$, m jest parametrem rozkładu, przyjmującym wartości z przedziału 1,7-3,0 lub mniejsze. Wprowadzając do równania (2) zaproponowaną przez Gutenberga i Richtera w 1956 roku zależność energii E (wyrażonej w erg) od magnitudy M wyniesie:

$$\log E = c + dM, \quad (3)$$

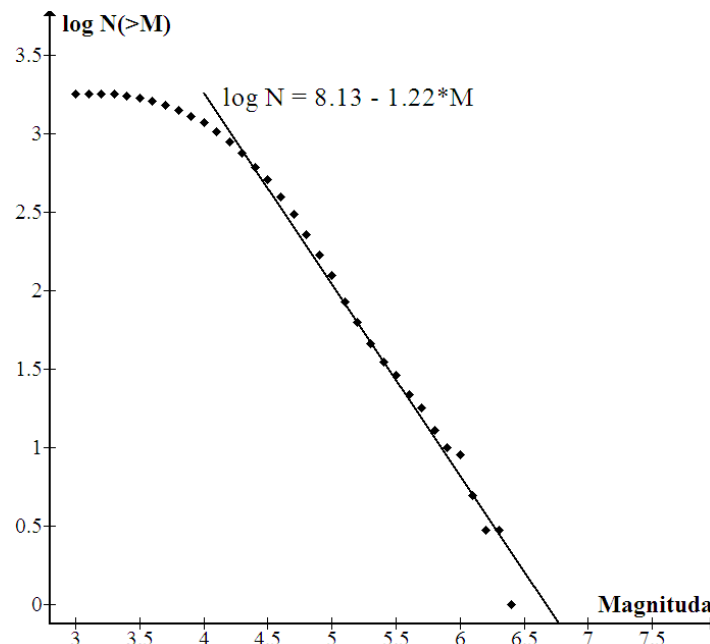
gdzie c , d – współczynniki liczbowe. Po przekształceniach równań (2) i (3) otrzymuje popularną zależność opisującą relację między rozmiarem trzęsień ziemi a ich częstotliwością – prawo Gutenberga-Richtera (Pisarenko & Sornette 2004). Relację tą w postaci wykładniczej można zapisać jako:

$$N = 10^{a-bM} \quad (4)$$

lub w postaci zlogarytmowanej:

$$\log_{10} N = a - bM, \quad (5)$$

gdzie N to liczba wstrząsów lub skumulowana liczba wstrząsów o magnitudzie $\geq M$, a – parametr związany z sejsmicznością, b – parametr nachylenia rozkładu, który opisuje względny rozmiar rozkładu zdarzeń (Rys.2.1). Wartość stałej a zależy od okresu obserwacji, wielkości rejonu i poziomu aktywności sejsmicznej. Wartość współczynnika b (zwanego współczynnikiem Gutenberga) zależy od stosunku liczby trzęsień w grupach o niskiej oraz wysokiej magnitudzie i charakteryzuje względny rozmiar rozkładu trzęsień. Przeważnie wartość parametru b zmienia się w zakresie od 0,7 do 1,2 (Zuberek 1983, Rabinovitch *et al.* 2001, Utsu 2002, Wiemer & Wyss 2002).



Rys.2.1. Skumulowana liczba trzęsień ziemi opracowana dla katalogu wstrząsów z Chin w roku 2008. Linia prosta prezentuje wynik dopasowania relacji Gutenberga-Richtera metodą najmniejszych kwadratów.

Wartość parametru b zależy również od kompletności katalogu. Dla różnych sieci sejsmologicznych istnieje pewien próg, poniżej którego stacje sejsmologiczne nie są zdolne do rejestracji wszystkich wstrząsów. Skutkiem tego część danych o magnitudzie mniejszej, niż magnituda kompletności (zwana też magnitudą minimalną) jest tracona. Magnituda minimalna ogranicza, więc rozkład Gutenberga-Richtera od dołu (Wiemer & Wyss 2002). Na Rys.2.1 magnituda minimalna (kompletności) wynosi 4,1. Jednym z sposobów jej wyznaczenia, to odnalezienie na histogramie $\log N = f(M)$ magnitudy (lub przedziału magnitud) o największej liczbie zdarzeń.

Chociaż w większości przypadków rozkład Gutenberga-Richtera dopasowuje się dość dobrze do danych, to znane są przypadki, że dla silnych wstrząsów relacja przestaje być liniowa, ponieważ rozkład zwykle zakrzywia się gwałtownie w dół. Zaproponowano wiele

modyfikacji rozkładu częstość zdarzeń–magnituda uwzględniający ten efekt. Stosowano wyrazy zakrzywiające rozkład Gutenberga-Richtera lub ograniczono go od góry wprowadzając magnitudę maksymalną M_{max} .

$$\log_{10} N = \begin{cases} a - bM & M \leq M_{max} \\ 0 & M > M_{max} \end{cases} \quad (6)$$

Taki rozkład nazywany jest rozkładem obcięty (od góry) (Utsu 2002). Magnitudę maksymalną definiuje się jako górną granicę magnitud dla danej strefy sejsmogenicznej lub jako największą możliwą magnitudę trzęsienia ziemi. Obecnie stosowaną metodą wyznaczenia magnitudy maksymalnej jest jej estymacja za pomocą równania zaproponowanego przez Kijko (2004):

$$\hat{M}_{max} = m_{max}^{obs} + \int_{M_{min}}^{\hat{M}_{max}} [F_M(m)]^n dm, \quad (7)$$

gdzie m_{max}^{obs} – to maksymalna magnituda obserwowana, $F_M(m)$ – dystrybucja magnitudy, n – liczba zdarzeń. Z racji tego, że wzór (7) jest całką uwikłaną, rozwiązuje się go numerycznie. Przybliżoną wartość magnitudy maksymalnej można otrzymać z zależności:

$$M_{max} = 2m_{max}^{obs} - m_{max-1}^{obs}, \quad (8)$$

gdzie m_{max-1}^{obs} – to przedostatnia z obserwowanych magnitud.

Wykonanie ćwiczenia i opracowanie wyników:

1. Wykonać na podstawie katalogu wstrząsów histogram $\log N = f(M)$ dla N będącego liczbą wstrząsów o danej magnitudzie (wykres 1) oraz dla N będącego skumulowaną liczbą wstrząsów (wykres 2).
2. Obliczyć wartość magnitudy maksymalnej M_{max} zgodnie z równaniem (8).
3. Obliczyć wartość parametru b rozkładu Gutenberga-Richtera metoda największej wiarygodności (*maximum likelihood method* - więcej o samej metodzie patrz ćw. 2.3).
 - a. Oszacować wartość magnitudy minimalnej M_{min} w oparciu o wykres 1.
 - b. Obliczyć średnią magnitudę i jej odchylenie standardowe dla magnitud z przedziału $\langle M_{min}, M_{max} \rangle$:

$$M_{sr} = \frac{\sum M_i}{n}, \quad (9)$$

$$\Delta M_{sr} = \sqrt{\frac{\sum (M_i - M_{sr})^2}{n(n-1)}}. \quad (10)$$

- c. Obliczyć wartość parametru b i jego niepewność ze wzorów:

$$b = \frac{\log e}{M_{sr} - M_{mi}}, \quad (11)$$



$$\Delta b = 2,3b^2 \Delta M_{sr}. \quad (12)$$

d. Oszacować wartość parametru a i jego niepewność Δa .

4. Metodą najmniejszych kwadratów MNK (regresja liniowa) wyznaczyć wartości parametrów równania prostej a i b wraz z ich niepewnością (skorzystać z wykresu 2, zakres danych to przedział między magnitudą minimalną a największą obserwowaną magnitudą).
5. Wykreślić obcięte rozkłady Gutenberga-Richtera z wyznaczonymi równaniami prostych uzyskanych obiema metodami. Porównać i skomentować wyniki uzyskane obiema metodami. Rozważyć, dlaczego nie stosuje się w tym wypadku metody MNK.
6. Na podstawie obu wyznaczonych relacji obliczyć lokalny czas powrotu T_L dla zakresu magnitud docelowych od 0 do M_{max} (krok co 0,2). Czas powrotu zdarzenia o zadanej magnitudzie docelowej zapisuje się jako:

$$T_L = \frac{\Delta T}{10^{a-bM_{tang}}}, \quad (13)$$

gdzie ΔT to okres obserwacji. Wyniki obliczeń zestawić na wykresie $T_L = f(M)$ (Wiemer & Wyss 2002).

7. Wyznaczyć prawdopodobieństwo wystąpienia trzęsienia ziemi dla zakresu magnitud od 0 do M_{max} ze wzoru:

$$P_L = \frac{1}{T_L A}, \quad (14)$$

gdzie A to powierzchnia badanego obszaru (Wiemer & Wyss 2002). Wyniki obliczeń zestawić na wykresie $P_L = f(M)$.

Literatura

- Kijko A. (2004) *Estimation of the Maximum Earthquake Magnitude, m_{max}* , Pure and Applied Geophysics, 161, 1655–1681.
- Pisarenko V.F., Sornette D. (2004) *Statistical Detection and Characterization of a Deviation from the Gutenberg-Richter Distribution above Magnitude 8*, Pure and Applied Geophysics, 161, 839-864.
- Shearer P.M. (2009) *Introduction to seismology*, Wydanie drugie, Cambridge University Press.
- Utsu T. (2002) *Statistical Features of Seismicity*, in: International Handbook of Earthquake and Engineering Seismology edited by W.Lee, H.Kanamori, P.Jennings, C.Kisslinger, International Association of Seismology and Physics of the Earth's Interior, A, 43, 719-732.
- Wiemer S., Wyss M. (2002) *Mapping Spatial Variability of the Frequency-Magnitude Distribution of Earthquakes*, in: Advances in Geophysics, 45, 259-302.
- Zuberek W.M. (1983) *Probabilistic interpretation of the frequency-energy distribution of seismic activity and of the amplitude distribution of seismoacoustic activity*, Acta Geophysica Polonica, 31, 4, 343-354.

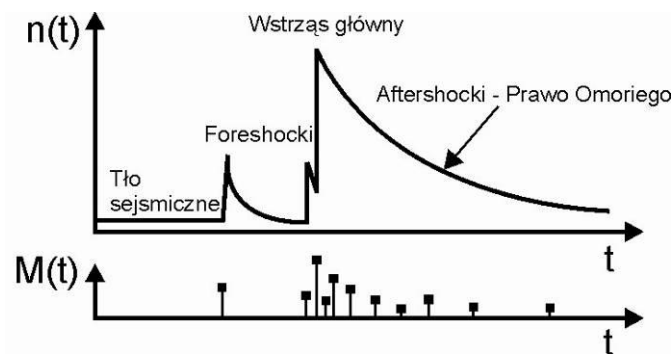
2.2. Reguły opisujące sekwencję wstrząsów wtórnych

Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie parametrów prawa Omoriego, opisującego czasową dystrybucję wstrząsów wtórnych, oraz sprawdzenie, czy występuje wśród aftershocków zależność Båthego. Istotne w tym ćwiczeniu jest również zapoznanie się z techniką regresji nieliniowej powszechnie stosowanej do rozwiązywania wielu problemów występujących w naturze.

Wprowadzenie do ćwiczenia

W roku 1894 Fusakichi Omori opublikował swoje badania, w których podał relacje opisującą regularny spadek wstrząsów wtórnych (aftershocki) w czasie od momentu wystąpienia wstrząsu głównego. Swoje wnioski oparł o badania trzęsienia Ziemi, jakie wystąpiło w 1891 roku w Nobi ($M = 8,0$) i liczbę odczuwanych wstrząsów wtórnych przypadających na każdy dzień.



Rys.2.2. Zależność liczby wstrząsów od czasu oraz magnitudy od czasu.

Współcześnie stosuje zmodyfikowane prawo Omoriego, które zazwyczaj zapisuje się jako:

$$n(t) = \frac{K}{(t + c)^p}, \quad (1)$$

gdzie $n(t)$ to liczba wstrząsów, K , c , p to stałe parametry, t – czas mierzony od momentu wystąpienia wstrząsu głównego. Parametr K w zmodyfikowanym prawie Omoriego silnie zależy od wielkości magnitudy progowej, zwanej też magnitudą kompletności (patrz ćw. 2.1). Natomiast parametr p jest niezależny od magnitudy progowej i wynika z stabilności wartości średniej magnitudy (lub wartości współczynnika b w relacji Gutenberga-Richtera) występującej w sekwencji aftershocków. Z kolei parametr c często przejawia silną zależność względem wartości magnitudy kompletności, ponieważ słabe wstrząsy wtórne nakładają się na zapisach sejsmografów i informacja o nich jest tracona (Utsu 2002, Wiemer & Wyss 2002, Kagan & Houston 2005, Shearer 2009).

Innym prawem odnoszącym się do wstrząsów wtórnych jest prawo Båtha, które mówi, że wartość magnitudy między wstrząsem głównym a najsilniejszym wstrząsem wtórnym jest w przybliżeniu stała, co zapisać można jako:



$$M^{main} - M^{after} = \Delta M \approx const. \quad (2)$$

Według obserwacji Båtha różnica ta wynosi w przybliżeniu 1,2. Obecne badania pokazują, że wartość ta zmienia się w szerokim zakresie od 0 do 3 (Utsu 2002).

Podstawy regresji nieliniowej – wprowadzenie do wyznaczenia parametrów prawa Omoriego.

Równanie (1) przedstawia zależności funkcyjną:

$$n_i = f(t_i; K, c, p) + e_i \quad i = 1, \dots, n, \quad (3)$$

gdzie n_i jest to zaobserwowana wartość zmiennej objaśnianej, czyli liczba wstrząsów w i -tym przedziale czasu, $f(t_i, K, c, p)$ jest funkcją zmiennej objaśniającej t_i i niezależnych stałych parametrów prawa Omoriego K, c, p oraz e_i – to błąd. Rozwiązanie problemu polega na minimalizacji sumy kwadratów residuów $R(K, c, p)$:

$$R(K, c, p) = \sum_{i=1}^n (n_i - f(t_i; K, c, p))^2. \quad (4)$$

W oparciu o metodę najmniejszych kwadratów dla regresji liniowej założyć można, że K_j, c_j, p_j są przybliżeniami rzeczywistych wartości K, c oraz p na początku j -tego kroku. W celu linearyzacji funkcji f rozwijamy ją w szereg Taylora w otoczeniu punktu (K_j, c_j, p_j) i zakładamy, że wyższe człony są pomijalnie małe.

$$\begin{aligned} f_{j+1}(t_i; K, c, p) &= f_j(t_i; K, c, p) + \frac{\partial f_j(t_i; K, c, p)}{\partial K} \Delta K + \\ &+ \frac{\partial f_j(t_i; K, c, p)}{\partial c} \Delta c + \frac{\partial f_j(t_i; K, c, p)}{\partial p} \Delta p \end{aligned} \quad (5)$$

gdzie należy pamiętać, że

$$\Delta K = K_{j+1} - K_j, \Delta c = c_{j+1} - c_j, \Delta p = p_{j+1} - p_j. \quad (6)$$

Zastosowanie linearyzacji daje w konsekwencji model liniowy:

$$n_i - f_j(t_i; K, c, p) = \frac{\partial f_j(t_i; K, c, p)}{\partial K} \Delta K + \frac{\partial f_j(t_i; K, c, p)}{\partial c} \Delta c + \frac{\partial f_j(t_i; K, c, p)}{\partial p} \Delta p + e_i. \quad (7)$$

Stosując zapis macierzowy, równanie (7) przyjmie postać:

$$R = J \Delta P + E, \quad (8)$$

gdzie R to wektor residuów, J – macierz pochodnych, ΔP – wektor przyrostów parametrów, E – wektor błędów. Zastosowanie do równania (8) metody Gaussa – Newtona pozwoli otrzymać układ równań normalnych, który rozwiązuje się ze względu na ΔP :

$$\Delta P = (J^T J)^{-1} J^T R, \quad (9)$$



Obliczenia powtarza się, aż dokładność dopasowania spadnie poniżej zadanej dokładności (przyjąć 10%). Kryterium zatrzymania procesu regresji nieliniowej zapisać można jako:

$$|\varepsilon_{Kcp}| = \min \left\{ \left| \frac{K_{j+1} - K_j}{K_{j+1}} \right|, \left| \frac{c_{j+1} - c_j}{c_{j+1}} \right|, \left| \frac{p_{j+1} - p_j}{p_{j+1}} \right| \right\}, \quad (10)$$

Wykonanie ćwiczenia i opracowanie wyników

1. Na podstawie otrzymanych katalogów wstrząsów wykreślić histogram liczby trzęsień ziemi w funkcji czasu $n = f(t)$ oraz wykres zależności magnitudy w funkcji czasu $M = f(t)$.
2. Porównać oba wykresy z pkt 1. ze sobą i wybrać przedział czasu z obserwowanym wstrząsem głównym i serią wstrząsów wtórnych.
3. Dla wybranego przedziału czasu zawierającego wstrząs główny i serię wstrząsów wtórnych oszacować techniką Gaussa – Newtona parametry prawa Omoriego:
 - a. Stworzyć model startowy i zaproponować teoretyczne wartości parametrów prawa Omoriego.
 - b. Obliczyć wartości teoretyczne $n(t)$ i wyznaczyć wektor rezyduów R ,
 - c. Obliczyć macierz pochodnych (Jakobian),
 - d. Rozwiązać układy równań normalnych techniką Gaussa-Newtona (9)
 - e. Poprawić parametry modelu startowego,
 - f. Obliczenia prowadzić aż spełnione zostanie kryterium zatrzymania obliczeń (10)
4. Na wspólnym wykresie zamieścić teoretyczną krzywą reprezentującą prawo Omoriego wraz z punktami eksperymentalnymi wyznaczonymi z katalogu wstrząsów.
5. Sprawdzić prawo Båtha (2) dla otrzymanych danych i skomentować uzyskane wyniki.

Literatura

- Kagan Y.Y., Houston H. (2005) *Relation Between Mainshock Rapture Process and Omori's Law for Aftershock Moment Release Rate*, Geophys J. Int., 163, 1039-1048.
- Shearer P.M. (2009) *Introduction to seismology*, Wydanie drugie, Cambridge, Cambridge University Press.
- Utsu T. (2002) *Statistical Features of Seismicity*, in: International Handbook of Earthquake and Engineering Seismology edited by W.Lee, H.Kanamori, P.Jennings, C.Kisslinger, International Association of Seismology and Physics of the Earth's Interior, A, 43, 719-732.
- Wiemer S., Wyss M. (2002) *Mapping Spatial Variability of the Frequency-Magnitude Distribution of Earthquakes*, in: Advances in Geophysics, 45, 259-302.



2.3. Wyznaczanie parametrów stacjonarnego hazardu sejsmicznego

Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie z podstawowymi metodami wyznaczania parametrów hazardu sejsmicznego: prawdopodobieństwa przewyższenia, średniego czasu pomiędzy zdarzeniami, maksymalnej magnitudy spodziewanej w określonym przedziale czasu.

Wprowadzenie do ćwiczenia

Stacjonarny hazard sejsmiczny określany jest przy założeniu, że proces sejsmiczny jest stacjonarny (niezależny od czasu) i wewnątrznie nieskorelowany, czyli nie zależy od historii sejsmicznej. W ogólności przez proces sejsmiczny należy rozumieć proces wystąpienia trzęsienia ziemi, który opisywany jest przez szereg parametrów.

Prawdopodobieństwo empiryczne wstąpienia wstrząsów o pewnej magnitudzie określić można jako:

$$R_m(m) = \frac{N(m)}{n_{tot}}, \quad (1)$$

gdzie $N(m)$ to skumulowana liczba wstrząsów o danej magnitudzie m , n_{tot} – to całkowita liczba wstrząsów zawarta w przedziale od magnitudy kompletności do maksymalnej magnitudy obserwowanej. Zastępując wartości częstości zdarzeń rozkładem Gutenberga-Richtera otrzyma się następującą zależność:

$$R_m(m) = \frac{N(m)}{n_{tot}} = \frac{10^{a-bm}}{10^{a-bm_{\min}}} = 10^{-b(m-m_{\min})} = e^{-\beta(m-m_{\min})}. \quad (2)$$

W równaniu (2) parametr β zdefiniowany jest jako:

$$\beta = \frac{b}{\log e} = b \ln 10. \quad (3)$$

Funkcje przewyższenia zapisać można jako dopełnienie $R_m(m)$:

$$F_m(m; \beta) = 1 - R_m(m; \beta) = 1 - e^{-\beta(m-m_{\min})}. \quad (4)$$

Z kolei funkcja gęstości prawdopodobieństwa wynosi:

$$f_m(m; \beta) = \frac{dF_m(m; \beta)}{d\beta} = \beta e^{-\beta(m-m_{\min})}. \quad (5)$$

Dla zbioru magnitud $\{m_1, \dots, m_n\}$ zapisać można zgodnie z metodą największej wiarygodności funkcję $L(\beta)$:



$$\begin{aligned} L(\beta) &= \sum_{i=1}^n \ln f_m(m_i; \beta) = \sum_{i=1}^n \ln[\beta e^{-\beta(m_i - m_{\min})}] = \\ &= \sum_{i=1}^n \ln \beta + \sum_{i=1}^n [-\beta(m_i - m_{\min})] = n \ln \beta - \beta \sum_{i=1}^n [(m_i - m_{\min})] \end{aligned} \quad (6)$$

Poszukuje się minimum funkcji $L(\beta)$:

$$\begin{aligned} \frac{dL(\beta)}{d\beta} &= n \frac{1}{\beta} - \sum_{i=1}^n m_i + \sum_{i=1}^n m_{\min} = 0 \\ n \frac{1}{\beta} - \sum_{i=1}^n m_i + n m_{\min} &= 0 \\ \frac{1}{\beta} - \frac{\sum_{i=1}^n m_i}{n} + m_{\min} &= 0 \\ \frac{1}{\beta} - m_{sr} + m_{\min} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Parametr β może być estymowany jako:

$$\hat{\beta} = \frac{1}{m_{sr} - m_{\min}} \quad (8)$$

Wyprowadzone zależności (4) i (8) posłużą szacowaniu parametrów hazardu sejsmicznego. Prawdopodobieństwo przewyższenia magnitudy $R(m_p; \Delta t)$ to prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzenia sejsmicznego o magnitudzie m_p lub większym w przeciągu okresu Δt :

$$R(m_p; \Delta t) = \Pr(m \geq m_p \cap N \neq 0; \Delta t) = 1 - \exp[-\lambda \Delta t (1 - F_m(m_p))], \quad (9)$$

gdzie λ to średnia częstość zdarzeń w okresie Δt , $F_m(m_p)$ to funkcja przewyższenia zdefiniowana we wzorze (4).

Średni czas pomiędzy zdarzeniami o magnitudzie m_p lub większymi definiuje się jako:

$$T(m_p) = \frac{1}{\lambda(1 - F_m(m_p))}. \quad (10)$$

Maksymalna magnituda m_x spodziewana w okresie Δt spełnia zależność:

$$m_x : \frac{1}{\lambda(1 - F_m(m_x))} = \Delta t, \quad (11)$$

gdzie λ to średnia częstość zdarzeń w okresie Δt , $F_m(m_x)$ jest funkcją przewyższenia zdefiniowana we wzorze (4) dla magnitudy m_x (McGuire 1993, Kijko & Funk 1994, Kijko & Graham 1998, Kijko *et al.* 2001a, Kijko *et al.* 2001b, Lasocki 2001, Lasocki & Orlecka-Sikora 2002).



Wykonanie ćwiczenia i opracowanie wyników

1. Na podstawie danych z katalogu sejsmicznego wykonać histogram częstości zdarzeń od magnitudy (przedziału magnitud) i wyznaczyć wartość magnitudy średniej oraz magnitudę kompletności (patrz ćw. 2.1).
2. Obliczyć estymator parametru $\hat{\beta}$ ze wzoru (8).
3. Wyznaczyć średnią częstość zdarzeń λ w wybranym okresie Δt .
4. W oparciu o wzór (4) obliczyć wartości funkcji przewyższenia dla przedziału magnitud $m_p \in \langle m_p; 9,5 \rangle$, z krokiem co 0,25. Wyniki obliczeń zamieścić na wykresie.
5. Korzystając ze wzoru (9) wyznaczyć prawdopodobieństwo przewyższenia dowolnej magnitudy (większej niż próg kompletności) dla różnych okresów Δt . Wyniki przedstawić graficznie.
6. Wyznaczyć średni czas powrotu dla zdarzeń (10) z przedziału magnitud $m_p \in \langle m_p; 9,5 \rangle$, wyniki obliczeń zobrazować na wykresie.
7. Wykreślić wykres zależności m_x od Δt korzystając z zależności (11).
8. Skomentować uzyskane wyniki pod kątem oceny hazardu sejsmicznego dla badanego obszaru

Literatura

- Kijko A., Funk C.W. (1994) *The assessment of seismic hazard in mines*, J. South Afr. Inst. Min. Metall., 179-185.
- Kijko A., Graham G. (1998) *Parametric-historic procedure for probabilistic seismic hazard analysis. Part I: Estimation of maximum regional magnitude m_{max}* , Pure Appl. Geophys., 152, 413-442.
- Kijko A., Lasocki S., Graham G. (2001a) *Nonparametric seismic hazard analysis in mines*, Pure Appl. Geophys., 158, 1655-1676.
- Kijko A., Lasocki S., Graham G., Retief S.J.P. (2001b) *Non-parametric seismic hazard analysis in mines*, In 5th Int. Symp. Rockbursts and Seismicity in Mines "Dynamic rock mass response to mining", Magalisberg, 17-20 September 2001 (eds. G. van Aswegen, R.J. Durrheim, W.D. Ortlepp) SAIMM S27, Johannesburg, South Africa, 493-500.
- Lasocki S. (2001) *Quantitative evidences of complexity of magnitude distribution in mining-induced seismicity: Implications for hazard evaluation*, The Fifth International Symposium on Rockbursts and Seismicity in Mines "Dynamic rock mass response to mining" (G. van Aswegen, R.J. Durrheim, W.D. Ortlepp, eds.) SAIMM S27, Johannesburg, 543-550.
- Lasocki S., Orlecka-Sikora B. (2002) *Prognoza drgań gruntu na terenie miasta Polkowice dla okresu 2001-2013*, Mat. XXV Zimowej Szkoły Mech. Gór. „Geotechnika i Budownictwo Specjalne 2002”, (D. Flisiak, red.), Wyd. Katedry Geomechaniki, Budownictwa i Geotechniki AGH, Kraków, 369-384.
- McGuire, R.K. (1993) *Computations of seismic hazard*, Annali di Geofisica, 36, 181-200.



2.4. Równanie propagacyjne GMPE

Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie parametrów równania predykcji drgań podłoża (Ground Motion Prediction Equation, GMPE) określanego również relacją tłumienia. Parametry równania obliczane są metodą regresji wielorakiej.

Wprowadzenie do ćwiczenia

Amplituda drgań A (szczytowa wartość przyspieszenia PGA, wartość szczytowa przyspieszenia poziomego PHA, szczytowa wartość prędkości PGV, szczytowa wartość przemieszczenia PGD) jest potęgowo zależna od energii źródła E podniesionej do potęgi β , co zapisać można jako:

$$A \propto E^{\beta}. \quad (1)$$

W sytuacji, gdy wykładnik β wynosi 0,5, to drgania propagują jako fala płaska. Amplituda na swojej drodze doznaje również rozpraszania geometrycznego i maleje wraz z odległością r , zgodnie z proporcją:

$$A \propto A_0 r^{-\gamma}, \quad (2)$$

gdzie A_0 jest amplitudą początkową, γ – współczynnikiem. Jeżeli współczynnik γ wynosi 1, to drgania są falą wgłębną, natomiast dla $\gamma = 0,5$ fala jest powierzchniowa. W ośrodku geologicznym zachodzi również tłumienie nieelastyczne:

$$A \propto A_0 e^{\mu r}, \quad (3)$$

gdzie parametr μ jest liniowym współczynnikiem tłumienia zależnym od częstotliwości. Równanie propagacyjne uwzględniające relacje (1), (2) i (3) przedstawić można jako:

$$A \propto E^{\beta} r^{-\gamma} e^{\mu r}. \quad (4)$$

W uzasadnionych wypadkach do równania (4) wprowadza się dodatkowy wyraz $s(x_0, y_0)$, uwzględniający wpływ warstwy przypowierzchniowej na propagację fali w otoczeniu sejsmometru (x_0, y_0) . Czynnikiem ten określa się amplifikacją lokalną lub osłabieniem lokalnym w zależności od jego wartości. Pełną postać równania propagacyjnego GMPE w postaci zlogarytmowanej przedstawia relacja:

$$\log A(x_0, y_0) = \alpha + \beta \log E - \gamma \log r + \mu r + \log s(x_0, y_0). \quad (5)$$

Dla małych odległości epicentralnych dominujący jest wyraz opisujący zaniku amplitudy z odległością (2), a wyraz związany z tłumieniem (3) jest pomijalnie mały. W przypadku dużych odległości r relacja ta się odwraca i dominujące staje się tłumienie (3) (Campbell 2002, Lasocki 2002, Boore & Atkinson 2008, Sokolov *et al.* 2008).

W równaniu propagacyjnym uwzględnia się czasami parametr h , który jest wolnym parametrem poprawiający dopasowanie GMPE do danych (Lasocki 2002):



$$A \propto A_0(r^2 + h^2)^{-\gamma/2}. \quad (6)$$

Regresja wieloraka

Dla potrzeb ćwiczenia przyjęty prosty model relacji tłumienia. Zakłada on, że w równaniu nie występuje parametr h . Do obliczeń udostępnione zostaną dane z obszaru górniczego, charakteryzującego się bliskimi odległościami epicentralnymi, a więc pomija się czynnik odpowiedzialny za tłumienie. Jednakże uwzględniono amplifikację $\delta = \log s(x_0, y_0)$. Uproszczoną relacją (5) zapisać można jako:

$$\log A(x_0, y_0) = \alpha + \beta \log E - \gamma \log r + \delta. \quad (7)$$

Operując na wektorach danych relację (7) zapisać można w postaci:

$$\vec{Y} = b_0 + b_1 \vec{X}_1 - b_2 \vec{X}_2 + b_3, \quad (8)$$

gdzie \vec{Y} , \vec{X}_1 , \vec{X}_2 pochodzą z n pomiarów, natomiast współczynniki b_i , gdzie $i = 0, 1, 2, 3$ to parametry GMPE. Równanie (8) w zapisie macierzowym prezentuje się następująco:

$$Y = Xb, \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} \log A_1 \\ \log A_2 \\ \dots \\ \log A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \log E_1 & \log r_1 & C_{ik} & C_{ik} \dots \\ 1 & \log E_1 & \log r_1 & C_{ik} & C_{ik} \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \log E_1 & \log r_1 & C_{ik} & C_{ik} \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta_k \dots \end{bmatrix}, \quad (10)$$

gdzie C_{ik} przyjmuje wartości 0 lub 1 w zależności dla jakiej k -tej stacji zarejestrowany został i -ty wstrząs.

W notacji macierzowej estymator modelu równania propagacyjnego sprowadza się do postaci:

$$\hat{Y} = X\hat{b} + \varepsilon, \quad (11)$$

gdzie \hat{Y} to estymator zmiennej zależnej, \hat{b} – estymator parametrów modelu, X – macierz zmiennych niezależnych, ε – reszta.

Celem regresji wielorakiej jest estymacja parametrów modelu \hat{b} :

$$\hat{b} = (X^T X)^{-1} X^T Y, \quad (12)$$

Jakość uzyskanego modelu regresyjnego ocenia się wykonując analizę reszt. W tym celu należy obliczyć wartości teoretyczne \hat{Y} na podstawie otrzymanej relacji tłumienia, a następnie wyznaczyć wartości rezyduów:

$$\varepsilon = Y - \hat{Y} = Y - X\hat{b}, \quad (13)$$



które zestawia się na histogramie. Jeżeli histogram reszt posiada rozkład normalny, to model równania propagacyjnego jest dobry. W przeciwnym wypadku należy zmienić model. Siłę związku pomiędzy zmiennymi zależnymi i nie zależnymi ocenia się obliczając współczynnik determinacji i błąd standardowy odchylenia.

Współczynnik determinacji R^2 definiuje się jako:

$$R^2 = \frac{\sum_i (\hat{Y}_i - Y_{sr})^2}{\sum_i (Y_i - Y_{sr})^2}, \quad (14)$$

gdzie Y_{sr} to wartość średnia zmiennej zależnej. Współczynnik ten określa procent wyjaśnienia przez regresję dla danej liczby obserwacji, im większa jego wartość tym silniejszy związek między zmiennymi.

Błąd standardowy odchylenia SEE dla n obserwacji wyznacza się z relacji:

$$SEE = \sqrt{\frac{\sum_i (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n - 2}}. \quad (15)$$

Wybiera się ten model regresyjny, dla którego SEE jest najmniejszy.

Wykonanie ćwiczenia i opracowanie wyników

1. Z otrzymanych katalogów wstrząsów wybrać wartości maksymalnych amplitud drgań, energii źródła i odległości epicentralnych.
2. Wybrane wielkości zlogarytmować
3. Metodą regresji wielorakiej (12) obliczyć parametry równania propagacyjnego wraz z uwzględnieniem amplifikacji lokalnej.
4. Wyznaczyć amplifikację względną $10^{\delta - \delta_{ref}}$.
5. Wykonać analizę reszt i ocenić model regresyjny.
6. Skomentować uzyskane wyniki

Literatura

- Campbell K.W. (2002) *Strong-Motion Attenuation Relations*, in: International Handbook of Earthquake and Engineering Seismology edited by W.Lee, H.Kanamori, P.Jennings, C.Kisslinger, International Association of Seismology and Physics of the Earth's Interior, B, 69, 1003-1013.
- Lasocki S. (2002) *Relacja tłumienia wartości szczytowej składowej poziomej przyspieszenia drgań gruntu w paśmie częstotliwości od 10 Hz dla rejonu miasta Polkowice*, Publs. Inst. Geophys., Pol. Acad. Sc., M-27, 352, 79-90.
- Sokolov V., Bonjer K.P., Wenzel F., Grecu B., Radulian M. (2008) *Ground-motion prediction equations for the intermediate depth Vrancea (Romania) earthquakes*, Bull Earthquake Eng., 6, 367-388.
- Boore D., Atkinson G.M. (2008) *Ground-Motion Prediction Equations for the Average Horizontal Component of PGA, PGV, and 5%-Damped PSA at Spectral Periods between 0,01 s and 10,0 s*, Earthquake Spectra, 24, 1, 99-138.



2.5. Moduły sprężystości

Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z sposobem wyznaczania prędkości fal P i S oraz parametrów petrofizycznych prób skalnych jakimi są moduły sprężystości.

Wprowadzenie do ćwiczenia

Zmienna w czasie siła zewnętrzna, która może być wywołana przez przemieszczenie mas skalnych w źródle trzęsienia ziemi lub sztuczne wzbudzona przez aparaturę, będzie powodowała powstanie w ośrodku sprężystym odkształceń. Zgodnie z prawem Hooke'a odkształcenia te są także zmienne w czasie oraz związane są z przemieszczeniem cząstek ośrodka. Prawo Hooke'a stosować można jedynie w pewnym oddaleniu od źródła wibracji. Uogólnione prawo Hooke'a przy założeniu, że ośrodek jest izotropowy, zapisuje się jako:

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_{kk} + 2\mu e_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1)$$

gdzie τ_{ij} jest tensorem naprężeń, λ, μ są odpowiednio stałą Lamego i modułem ścinania, e_{ij} jest tensorem odkształceń, δ_{ij} to delta Kroneckera:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}. \quad (2)$$

Należy zauważyć, że odkształcenie zapisane jako e_{kk} jest śladem macierzy $e_{kk} = \text{tr}[e_{ij}]$. Równanie (1) w postaci tensorowej przyjmie postać:

$$\tau = \begin{bmatrix} \lambda \text{tr}[e] + 2\mu e_{11} & 2\mu e_{12} & 2\mu e_{13} \\ 2\mu e_{21} & \lambda \text{tr}[e] + 2\mu e_{22} & 2\mu e_{23} \\ 2\mu e_{31} & 2\mu e_{32} & \lambda \text{tr}[e] + 2\mu e_{33} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Zapis tensorowy stosuje się, ponieważ zmiany naprężeń zachodzą w różnych kierunkach. Na przekątnej znajdują się wartości naprężeń normalnych, poza nią – stycznych. Jak wynika z relacji (3) zmianom naprężeń odpowiadają odkształcenia we właściwych kierunkach. Cząstki ośrodka, znajdujące się w różnych odległościach od punktu wzbudzenia, kolejno zaczynają drgać. Wibracje przenoszone są w coraz to większej objętości – przez ośrodek przebiega fala sprężysta (Gurwicz 1958, Udias 1999, Marcak & Zuberek 1994, Shearer 2009).

W ośrodku jednorodnym i izotropowym prędkość propagacji fal sprężystych (sejsmicznych) zależy od modułów sprężystości ośrodka i jego gęstości. Fale sejsmiczne rozchodzą się w głębi Ziemi w postaci dwóch typów fal: fali podłużnej P (odkształcenie objętości) i fali poprzecznej S (odkształcenie postaci). Fale P propagują z większą prędkością niż fale S. Prędkości tych fal można zapisać odpowiednio:



$$V_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad (4)$$

$$V_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad (5)$$

gdzie λ to stała Lamego, μ - moduł ścinania, ρ - gęstość. W skałach obserwuje się zbliżone wartości obu parametrów $\lambda \approx \mu$, więc stosunek prędkości fal P i S wynosi w przybliżeniu (Gurwicz 1958, Crawford 1972, Masters & Shearer 1995, Shearer 2009):

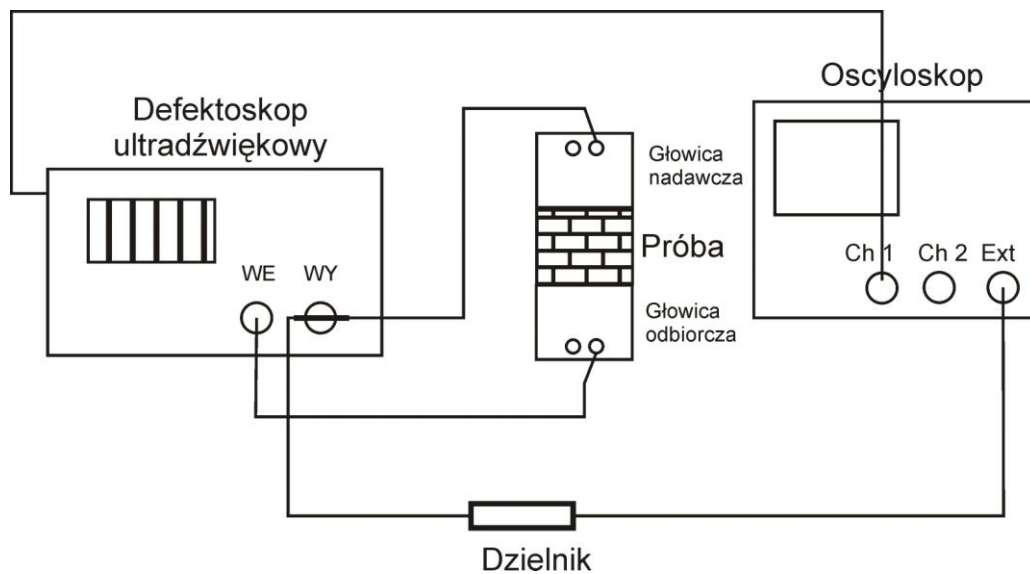
$$\frac{V_P}{V_S} = \frac{\sqrt{\lambda + 2\mu}}{\sqrt{\mu}} = \sqrt{\frac{3\mu}{\mu}} = \sqrt{3}. \quad (6)$$

Tabela 2.1. Zestawienie zależności między modułami sprężystości dla ośrodka izotropowego (Masters & Shearer 1995, Shearer 2009).

| układ / stała | E, ν | E, μ | λ, μ | ν, μ | K, μ | K, ν | inne |
|-------------------|------------------------------------|----------------------------------|--|-------------------------------------|---------------------------------|-----------------------------------|----------------------------|
| E [Pa] | - | - | $\frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$ | $2\mu(1 + \nu)$ | $\frac{9K\mu}{3K + \mu}$ | $K(3 - 6\nu)$ | - |
| ν | - | $\frac{E}{2\mu} - 1$ | $\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$ | - | $\frac{3K - 2\mu}{2(3K + \mu)}$ | - | $\frac{3K - E}{6K}$ |
| μ [Pa] | $\frac{E}{2(1 + \nu)}$ | - | - | - | - | $\frac{3K(1 - 2\nu)}{2(1 + \nu)}$ | $\frac{3(K - \lambda)}{2}$ |
| K [Pa] | $\frac{E}{3(1 - 2\nu)}$ | $\frac{E\mu}{3(3\mu - E)}$ | $\lambda + \frac{2}{3}\mu$ | $\frac{2\mu(1 + \nu)}{3(1 - 2\nu)}$ | - | - | - |
| λ [Pa] | $\frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$ | $\frac{\mu(E - 2\mu)}{3\mu - E}$ | - | $\frac{2\mu\nu}{1 - 2\nu}$ | $K - \frac{2}{3}\mu$ | - | - |

Aparatura

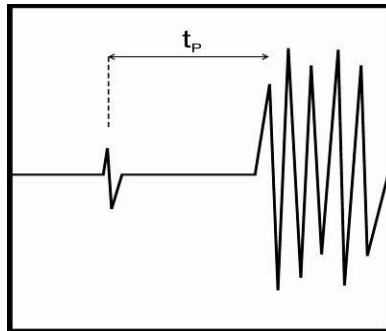
Schemat układu pomiarowego przedstawia Rys.2.3. Źródłem drgań jest ultradźwiękowy defektoskop, który przekazuje vibracje o zadanych częstotliwościach na głowicę nadawczą. Fale sejsmoakustyczne propagują przez próbkę skalną, a następnie są odbierane przez głowicę odbiorczą. Z kolei ona przesyła sygnał spowrotem do defektoskopu, który przekazuje go na wyświetlacz oscyloskopu. Głowice zawierają dwa wejścia/wyjścia. Jedno z nich odbiera fale podłużne, a drugie poprzeczne, co należy uwzględnić w czasie pomiaru.



Rys.2.3. Układ pomiarowy.

Wykonanie ćwiczenia i opracowanie wyników

1. Na podstawie dziesięciu pomiarów suwmiarką wyznaczyć średnie wartości wymiarów próbek skalnych i ich odchylenie standardowe. Grubość płytki h będzie jednocześnie drogą po jakiej propagują fale P i S (w sprawozdaniu zamieścić szkic próby skalnej).
2. Oszacować gęstość prób wraz z ich błędem w oparciu o zmierzoną masę i wyliczoną objętość.
3. Przygotować układ laboratoryjny wg Rys.2.3.
4. Ustawić odpowiednią podstawę czasu i wysokość amplitudy na oscyloskopie.
5. Wyznaczyć czas przejścia fali przez głowice bez próby dla fal P t_{0P} i dla fal S t_{0S} .
6. Zainstalować badaną próbkę skalną między głowicami wraz z substancją poprawiającą kontakt.
7. Zaobserwować na oscyloskopie czasy pierwszych wejść fal P t_P oraz fal S t_S dla odpowiednio dobranej częstotliwości drgań [dB]. Odczytaną najmniejszą podziałkę na skali oscyloskopu przyjąć jako błąd pomiaru. Czas wejścia odczytuje się z oscyloskopu tak jak to zostało przedstawione na Rys.2.4



Rys.2.4. Obraz wyznaczenia czasu pierwszych wejść dla fali P.
Impulsy analogicznie prezentują się dla fali S.

8. Pomiary powtórzyć dla kolejnych prób skalnych.
9. Wyznaczyć prędkość fali podłużnej i poprzecznej [w ms⁻¹] ze wzorów:

$$V_P = \frac{h}{t_P - t_{P0}}, \quad (7)$$

$$V_S = \frac{h}{t_S - t_{S0}}, \quad (8)$$

10. Oszacować niepewności prędkości.
11. Sprawdzić wartość stosunku prędkości fal wg wzoru (6)
12. Wyznaczyć stałą Lamego [w GPa] i moduł ścinania ze wzorów [w GPa] (4) i (5) oraz obliczyć wartości dla współczynnika Poissona, modułu ściśliwości [w GPa] i stałej Lamego [w GPa] korzystając z tabeli 2.1.
13. Oszacować metodą różniczki zupełnej wartości błędów modułów.
14. Na podstawie wyznaczonej gęstości i prędkości fal P i S określić, jaki rodzaj skał poddany został badaniom oraz skomentować uzyskane wyniki.

Literatura

- Gurwicz I.I. (1958) *Badania sejsmiczne*, Warszawa, Wydawnictwa geologiczne.
- Marcak H., Zuberek W.M. (1994) *Geofizyka górnicza*, Katowice, Śląskie Wydawnictwa Techniczne.
- Masters T.G., Shearer P.M. (1995) *Seismic Models of the Earth: Elastic and Anelastic*, W: Ahrens T.J (red.), „*Global Earth Physics. A Handbook of Physical Constants*” AGU Reference Shelf 1
- Shearer P.M. (2009) *Introduction to seismology*, Wydanie drugie, Cambridge, Cambridge University Press.
- Udias A. (1999) *Principles of seismology*, Cambridge, Cambridge University Press.
- Crawford F.S. (1972) *Fale*, Warszawa, PWN.



3. Pole cieplne Ziemi i promieniotwórczość naturalna

3.1. Gęstość powierzchniowego strumienia cieplnego dla otworu wiertniczego

Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie gęstości powierzchniowego strumienia cieplnego w oparciu o pomiary temperatury w otworach wiertniczych.

Wprowadzenie do ćwiczenia

Rozkład pola cieplnego Ziemi w zewnętrznej strefie Ziemi zależy od temperatury powierzchni Ziemi, gradientu i stopnia geotermicznego oraz gęstości strumienia cieplnego Ziemi.

Temperatura powierzchni ziemi kształtuje się pod wpływem promieniowania słonecznego, zatem zależy od ilości energii słonecznej padającej i pochłanianej przez Ziemię. Temperatura powierzchni Ziemi i powietrza znajdującego się nad nią charakteryzuje się cyklami dobowymi i rocznymi. W umiarkowanych szerokościach geograficznych można przyjąć, że dobowe zmiany temperatury zanikają na głębokości około 1m, natomiast roczne na głębokości około 20m i strefę tych zmian nazywamy strefą niestacjonarnego pola cieplnego Ziemi. Strefa stacjonarnego pola cieplnego występuje poniżej.

W celu wyznaczenia gęstości powierzchniowego strumienia cieplnego Ziemi dla danego otworu wiertniczego musimy zapoznać się z pojęciami:
Gradient geotermiczny G jest to wzrost temperatury T wraz z głębokością z . Matematycznie można zapisać jako:

$$G = \text{grad}T = \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right) \vec{n} [K/m], \quad (1)$$

gdzie $\partial/\partial n$ - gradient wzdłuż normalnej zewnętrznej \vec{n} . Ponieważ zmiana następuje wzdłuż promienia Ziemi do obliczeń stosuje się przybliżenie zawierające skończone przyrosty temperatury ΔT i głębokości Δh :

$$G = \frac{T(h_{\max}) - T(h_{\min})}{h_{\max} - h_{\min}} = \frac{\Delta T}{\Delta h} \quad (2)$$

Stopień geotermiczny to przyrost głębokości h , dla którego temperatura zmienia się o 1K.

$$H = \frac{1}{G} = \frac{\Delta h}{\Delta T} \left[\frac{m}{K} \right] \quad (3)$$

K – Kelwin, jednostka temperatury w układzie SI

$$T_{[K]} = t_{[^{\circ}C]} + 273,15 \quad (4)$$



Gradient geotermiczny i jego odwrotność – stopień geotermiczny zmieniają się w zależności od warunków lokalnych (rodzaju skał).

Strumień ciepły Ziemi mierzony przy przepływie przez powierzchnię nazywamy strumieniem powierzchniowym. Pole cieplne Ziemi przy jej powierzchni stanowi sumaryczny efekt różnych źródeł ciepła oraz różnych, skomplikowanych warunków jego transportu (Plewa, 1994). Każdemu stanowi równowagi cieplnej, scharakteryzowanemu pewnym polem temperatury, odpowiada określony rozkład gęstości strumienia ciepłego. Gęstość strumienia ciepłego to strumień ciepła płynący z głębi Ziemi ku jej powierzchni odniesiony do jednostki powierzchni i czasu. W ośrodku jednorodnym i izotropowym kierunek wektora gęstości strumienia ciepłego pokrywa się z kierunkiem normalnej do powierzchni izotermicznej, przechodzącej przez dany punkt. Wielkość strumienia ciepłego \vec{q} w takim ośrodku (przepływ stacjonarny, brak wewnętrznych źródeł ciepła) określa prawo Fouriera:

$$\vec{q} = -\lambda \text{grad}T = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right) \vec{n} \quad [W/m^2], \quad (5)$$

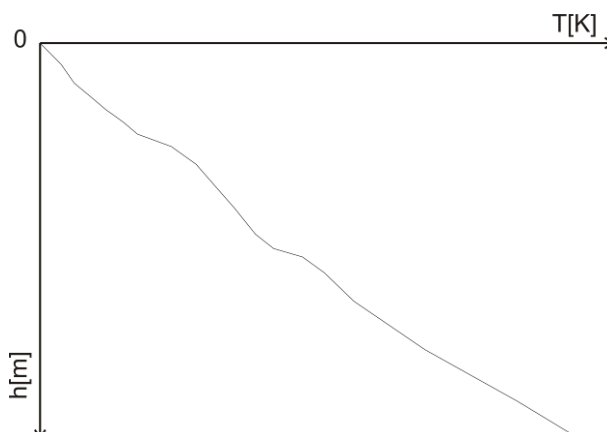
gdzie: $\lambda [Wm^{-1}K^{-1}]$ - współczynnik przewodności cieplnej (określa zdolność skały do przewodzenia ciepła), $\partial/\partial n$ - gradient wzdłuż normalnej zewnętrznej \vec{n} , T - temperatura (Plewa & Plewa 1992, Karwasiecka 2001, Plewa 2001, Karwasiecka 2002, Kędzior & Drobczyk 2006). Na potrzeby ćwiczenia uproszczono formę równania (5):

$$|\vec{q}| = Q = \lambda G [W/m^2]. \quad (6)$$

Średnia wartość strumienia ciepłego Ziemi wynosi $87 \pm 2,0 [mW/m^2]$, dla kontynentów $65 \pm 1,6 [mW/m^2]$ natomiast dla oceanów $101 \pm 2,2 [mW/m^2]$ (Stein 1995).

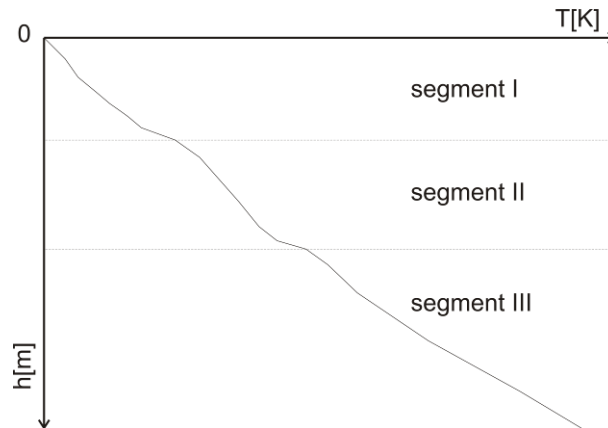
Wykonanie ćwiczenia i opracowanie wyników:

1. Z otrzymanych danych z otworu wiertniczego: głębokość $h [m]$, temperaturę $T [^{\circ}C]$ oraz współczynnik przewodności cieplnej $\lambda [Wm^{-1}K^{-1}]$ wybrać informacje o temperaturze T , która jest podana w $[^{\circ}C]$ i przeliczyć ją na jednostkę temperatury układu SI – Kelvin według wzoru (4).
2. Wykreślić zależność głębokości h od temperatury T (Rys.3.1).



Rys.3.1. Wykres zależności głębokości h od temperatury T .

3. Na wykresie oznaczyć segmenty o różnym współczynniku przewodności temperaturowej w oparciu o charakterystyczne zmiany trendu na wykresie (Rys.3.2).

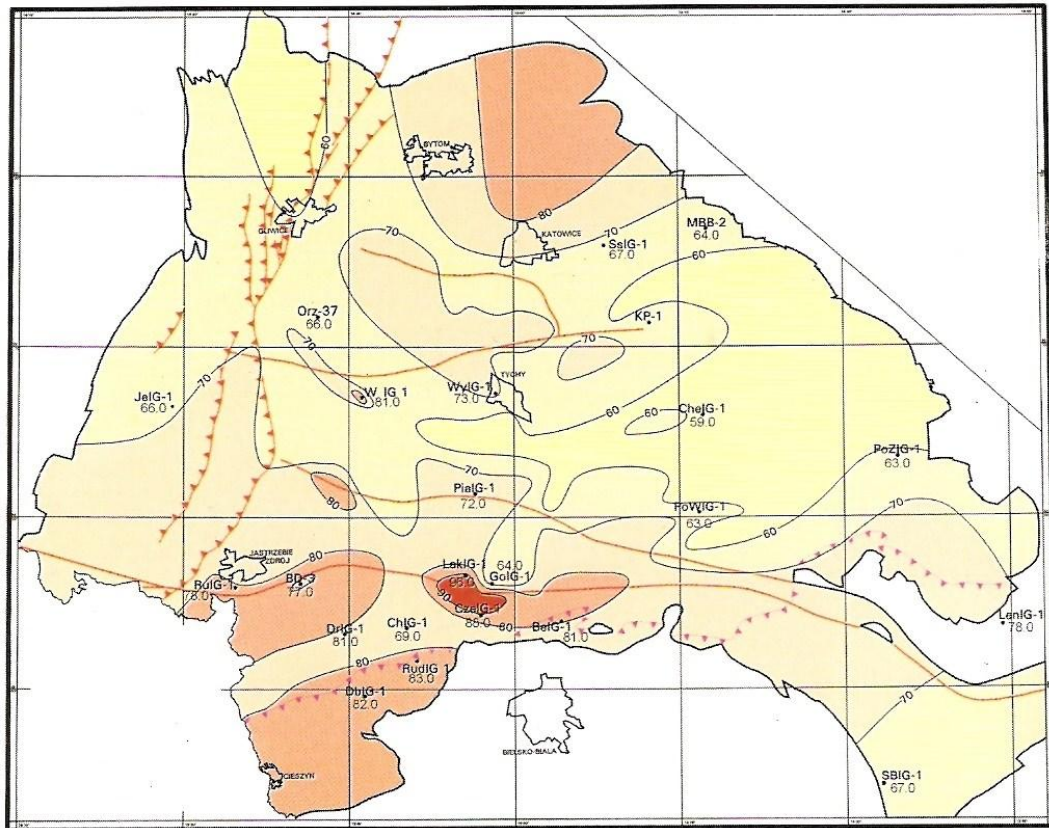


Rys.3.2. Wykres zależności temperatury T od głębokości h wraz z wybranymi obszarami o różnej wartości współczynnika λ

4. Obliczyć gradient i stopień geotermiczny dla każdego z segmentów według wzorów (2) i (3).
5. Mając podane wartości współczynników przewodności cieplnej dla każdego segmentu obliczyć wartość gęstości strumienia ciepłego w każdym z nich wg wzoru (6). Wynik wyrazić w mW/m^2 i w HFU *Heat Flow Unit* ($1 \text{ HFU} = 42 \text{ mW/m}^2$)
6. Obliczyć strumień ciepła dla całego otworu na podstawie wzoru (7). Wartość średniej gęstości strumienia ciepłego wyznacza się z średniej ważonej, gdzie jako wagi w_i przyjmuje się procentowy udział danego segmentu w całym otworze (stosunek miąższości segmentu do głębokości całkowitej otworu przemnożona przez 100%). Średnią ważoną liczoną dla n segmentów:

$$q_{sr} = \frac{\sum_{i=1}^n q_i w_i}{\sum_{i=1}^n w_i} \quad [\text{W} / \text{m}^{\circ}\text{C}]. \quad (7)$$

7. Określić obszar, w jakim dokonano wiercenia i pomiaru temperatury na podstawie Rys.3.3. Skomentować uzyskane wyniki.



Rys.3.3. Mapa gęstości powierzchniowego strumienia ciepłego na obszarze Górnos Śląskiego Zagłębia Węglowego. Izolinie strumienia w mW/m^2 (Karwasiecka, 2002).

Literatura

- Karwasiecka M. (2001) *Nowe wyniki badań gęstości powierzchniowego strumienia ciepłego Ziemi na obszarze Górnos Śląskiego Zagłębia Węglowego*, W: Plewa S. (red.), „Rozpoznanie pola ciepłego Ziemi w obszarze Górnos Śląskiego Zagłębia Węglowego dla potrzeb górnictwa i ciepłownictwa, Studia Rozprawy Monografie nr 90, Wyd. IGSMiE PAN, Kraków.
- Karwasiecka M. (2002) *Pole ciepłe Górnos Śląskiego Zagłębia Węglowego*, Prace Wydziału Nauk o Ziemi Uniwersytetu Śląskiego nr 17, Sosnowiec.
- Kędzior S. i Drobczyk W. (2006) *Characterization of Rock Temperature Changeability in the Halemba Coal Mine Deposit*, Publs. Inst. Geophys. Pol. Acad. Sc., M-29 (395).
- Plewa M. i Plewa S. (1992) *Petrofizyka*, Wydawnictwa geologiczne.
- Plewa S. (red.) (2001) *Rozpoznanie pola ciepłego Ziemi w obszarze Górnos Śląskiego Zagłębia Węglowego dla potrzeb górnictwa i ciepłownictwa*, Studia Rozprawy Monografie nr 90, Wydawnictwo Instytutu Gospodarki Surowcami Mineralnymi i Energią PAN, Kraków.
- Stein C.A. (1995) *Heat Flow of the Earth*, W: Ahrens T.J (red.), „Global Earth Physics. A Handbook of Physical Constants” AGU Reference Shelf 1



3.2. Parametry cieplne skał

Cel ćwiczenia

W ćwiczeniu stosuje się metodę krótkotrwałego, liniowego impulsu cieplnego w celu zbadanie własności cieplnych prób skalnych: przewodności temperaturowej, współczynnika przewodności temperaturowej, pojemności cieplnej właściwej i współczynnika przewodności cieplnej.

Wprowadzenie do ćwiczenia

Metoda krótkotrwałego impulsu liniowego źródła ciepła oparta jest na teorii rozchodzenia się ciepła w ciałach stałych drogą przewodnictwa cieplnego i służy do wyznaczania termicznych własności skał.

Do głównych parametrów termicznych skał zaliczamy:

- współczynnik przewodności cieplnej λ , lub jego odwrotność – cieplną oporność właściwą,
- cieplną pojemność właściwą C_{wl}
- współczynnik przewodności temperaturowej α .

Skały przewodzą ciepło w zależności od ich cech naturalnych, a mianowicie: struktury, tekstury, składu mineralnego, porowatości, stopnia wypełnienia porów mediami, ciśnienia, anizotropii cieplnej. Zmienność tych cech wywołuje różnice w przepływie energii cieplnej. Zdolność skały do przewodzenia ciepła określona jest współczynnikiem przewodności cieplnej i opisana prawem Fouriera (patrz ćw. 3.1). Współczynnik przewodności cieplnej charakteryzuje intensywność przemiany ciepła drogą przewodnictwa cieplnego i określany jest ilością ciepła [J], przechodzącego w czasie 1 sekundy przez powierzchnię 1m^2 w kierunku prostopadłym do tej powierzchni, przy gradiencie temperatury 1K/m . Wartość współczynnika przewodności cieplnej jest wielkością charakterystyczną dla danej skały, w danym stanie jej nasycenia wodą i danym stanie termicznym:

$$\lambda = C_{wl} \cdot \alpha \cdot \rho \left[\frac{\text{W}}{\text{m}} \cdot \text{K} \right], \quad (1)$$

gdzie λ - współczynnik przewodności cieplnej; C_{wl} - właściwa pojemność cieplna; α - współczynnik przewodności temperaturowej; ρ - gęstość objętościowa. Współczynnik przewodności temperaturowej α określa zdolność jednostki objętości ośrodka do zmian temperatury w jednostce czasu, w trakcie wymiany ciepła:

$$\alpha = \frac{\lambda}{C_{wl}} \cdot \rho \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right]. \quad (2)$$

Pojemność cieplną c ośrodka w ogólnym przypadku określa się stosunkiem ilości ciepła ΔQ , dostarczanego w jakimś procesie, do wywołanej tym procesem zmiany temperatury ΔT :

$$c = \Delta Q / \Delta T. \quad (3)$$

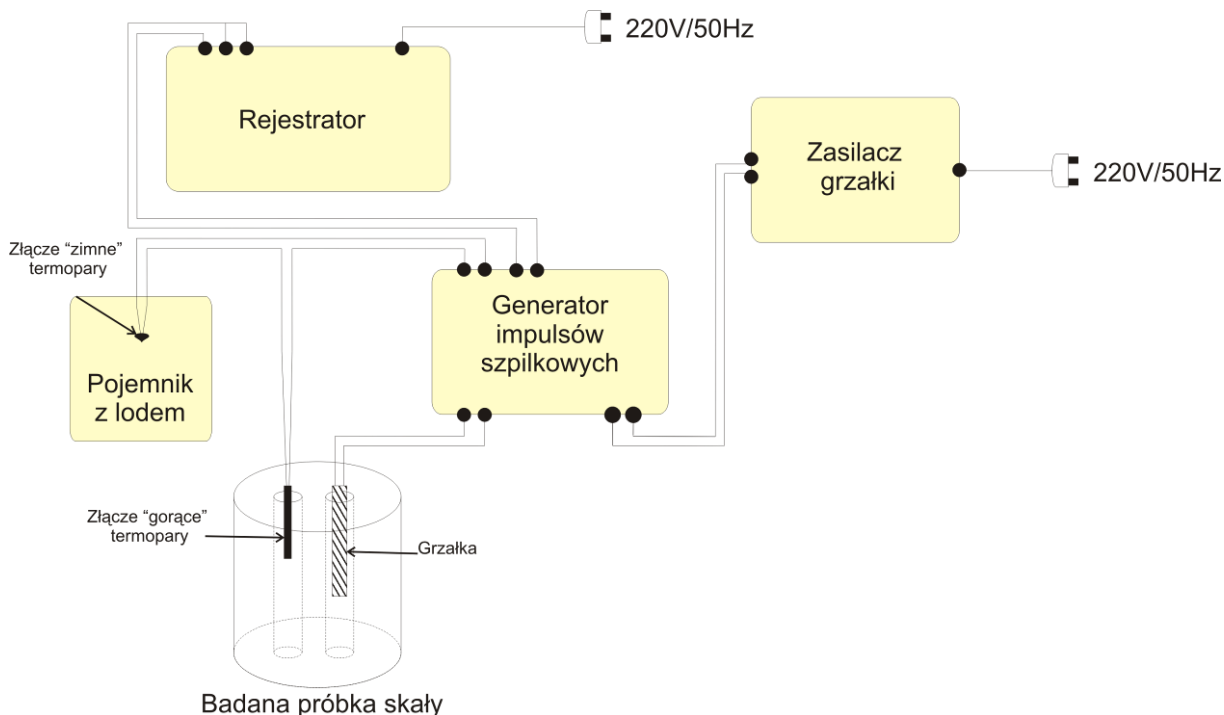
Pojemność cieplna odniesiona do jednostki masy ośrodka nosi nazwę właściwej pojemności cieplnej C_{wl} . Pojemność cieplna odniesiona do jednostki objętości ośrodka jest nazywana objętościową właściwą pojemnością cieplną c_v . Pojemność cieplna zależy w dużym stopniu od temperatury, dlatego każdą wartość C_{wl} należy odnosić do określonej temperatury lub przedziału temperaturowego:

$$C_{wl} = \frac{\Delta Q}{m \Delta T} \left[\frac{J}{kg \cdot K} \right] \quad (4)$$

Na parametry termiczne skał terygenicznych ma wpływ nasycenie i stopień przeobrażenia tych skał. W piaskowcach zmienia się współczynnik przewodności cieplnej wraz ze zmianą stopnia lityfikacji, stąd przedział zmian jest bardzo duży. Wyższą przewodnością cieplną charakteryzują się piaskowce o spoiwie krzemionkowym (Halliday *et al.* 2008, Plewa & Plewa 1992, Plewa 1994, Stein 1995).

Aparatura

Badanie przeprowadza się na aparaturze pomiarowej, której schemat blokowy przedstawiono poniżej.



Rys.3.4. Schemat aparatury pomiarowej.



Wykonanie ćwiczenia i opracowanie wyników

1. Zmontować układ pomiarowy według schematu (Rys.3.4).
2. Zbadać próbkę skały makroskopowo, określić rodzaj skały i odczytać wartość jej gęstości ρ z tablic w $[\text{kg/m}^3]$.
3. Zmierzyć grubość badanej próbki za pomocą suwmiarki w 10 miejscach wyznaczając przy tym średnią grubość próbki i jej odchylenie standardowe.
4. Odczytać istotne informacje:
 L - długość grzałki $[\text{m}]$, t_g - czas grzania $[\text{s}]$, r - odległość $[\text{m}]$ między grzałką, a termoparą (odległość między otworami w próbce), I - natężenie prądu $[\text{A}]$, U - napięcie $[\text{V}]$
5. Znając natężenie i napięcie wyznaczyć opór R , wiedząc, że $R = \frac{U}{I} \quad [\Omega]$
6. Zaznaczyć na wykresie otrzymanym w wyniku pomiaru:
 t_{pg} - początek grzania, t_{kg} - koniec grzania, t_o - połowa odcinka $t_{kg} - t_{pg}$.
7. W oparciu o analizę wykresu wyznaczyć:
 T_{\max} - maksymalna temperatura $[\text{°C}]$, t_{\max} - czas $[\text{s}]$ osiągnięcia maksymalnej temperatury.
8. Obliczyć przewodność temperaturową (cieplną) Q w oparciu o dane pomiarowe stosując wzór:

$$Q = I^2 \cdot R \cdot \frac{t_g}{L} \left[\frac{\text{J}}{\text{m}} \right], \quad (5)$$

gdzie: I – natężenie prądu $[\text{A}]$, R - opór grzałki $[\Omega]$, t_g - czas trwania impulsu źródła ciepła $[\text{s}]$, L - długość grzałki $[\text{m}]$.

9. Obliczyć współczynnik przewodności temperaturowej, patrz wzór (2) i (6).

$$\alpha = \frac{r^2}{4t_{\max}} \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right], \quad (6)$$

gdzie: t_{\max} - czas $[\text{s}]$ do osiągnięcia temperatury maksymalnej $[\text{K}]$, r - odległość między termoparą i grzałką $[\text{m}]$.

10. Obliczyć cieplną pojemność właściwą. Patrz wzór (4) i (7).

$$C_{wl} = Q \cdot \frac{e^{-1}}{\Pi \cdot \rho \cdot r^2 \cdot T_{\max}} \left[\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{°C}} \right], \quad (7)$$

gdzie: Q - przewodność temperaturowa $[\text{J/m}]$, ρ - gęstość ośrodka $[\text{kg/m}^3]$, r - odległość między otworami $[\text{m}]$, T_{\max} - maksymalna temperatura $[\text{°C}]$.

11. Obliczyć współczynnik przewodności cieplnej według wzoru (1).
12. Zestawić dane w tabeli (Tabela 3.1):



Tabela 3.1. Prezentacja wyników

| Nr próby | L | t_g | r | ρ | I | U | R | ΔT | T_{\max} | t_{\max} | Q | α | C_{wl} | λ |
|----------|-----|-------|-----|-------------------------------|-----|-----|------------|------------|------------|------------|----------------------------|------------------------------|--|------------------------------------|
| | [m] | [s] | [m] | $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$ | [A] | [V] | $[\Omega]$ | [°C] | [°C] | [s] | $\left[\frac{J}{m}\right]$ | $\left[\frac{m^2}{s}\right]$ | $\left[\frac{J}{kg \cdot ^\circ C}\right]$ | $\left[\frac{W}{m \cdot K}\right]$ |
| 1. | | | | | | | | | | | | | | |
| 2. | | | | | | | | | | | | | | |

Literatura

Halliday D., Resnick R., Walker J. (2008) Podstawy fizyki: Mechanika, drgania i fale, termodynamika, tom 2, PWN, Warszawa.

Plewa M. i Plewa S. (1992) *Petrofizyka*, Wydawnictwa geologiczne.

Plewa S. (1994) *Rozkład parametrów geotermalnych na obszarze Polski*, Wydawnictwo Centrum Podstawowych Problemów Gospodarki Surowcami Mineralnymi i Energią PAN, Kraków.

Stein C.A. (1995) *Heat Flow of the Earth*, W: Ahrens T.J (red.), „*Global Earth Physics. A Handbook of Physical Constants*” AGU Reference Shelf 1



3.3. Geochronologia

Cel ćwiczenia

Cel ćwiczenia polega na zapoznaniu się z metodą datowania prób skalnych. W oparciu o mierzone stosunki izotopowe wyznacza się równanie izochrony, z którego możliwe jest obliczenie czasu powstania skały (zamknięcia systemu).

Wprowadzenie do ćwiczenia

Jeżeli założymy, że prawdopodobieństwo rozpadu na jednostkę czasu dla jednego jądra atomowego jest stałe, niezależne od czynników zewnętrznych oraz od historii rozpadającego się jądra, to ich ubytek n w czasie dt wynosi:

$$\frac{dn}{dt} = -\lambda n, \quad (1)$$

gdzie λ jest stałą rozpadu. Rozwiązując równanie różniczkowe (1):

$$\int_{N_0}^N \frac{dn}{n} = - \int_0^t \lambda dt,$$

$$\ln(N) - \ln(N_0) = -\lambda(t - 0),$$

$$\ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = -\lambda t,$$

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t},$$

otrzyma się znaną postać prawa rozpadu:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}. \quad (2)$$

Prawo (2) opisuje zależność spontanicznych przemian jądrowych w czasie t przy założeniu początkowej liczby N_0 . Ze zjawiskiem rozpadu promieniotwórczego wiąże się pojęcie czasu połowicznego zaniku (półokres rozpadu). Jest to okres, po jakim liczba jąder danego izotopu zmniejszy się o połowę. Wartość półokresu rozpadu $T_{1/2}$ można wyznaczyć z prawa rozpadu (2) zakładając, że $N = N_0/2$:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda t}. \quad (3)$$

Po prostych przekształceniach czas połowicznego zaniku definiuje się jako:

$$T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}. \quad (4)$$



Znając liczbę jąder potomnych D , wyznaczyć można równanie izochrony. Liczba jąder D zapisać można jako różnicę między początkową liczbą radionuklidów N_0 i ich aktualną liczbą w próbie N po upływie czasu t .

$$D = N_0 - N(t) = N_0(1 - e^{-\lambda t}). \quad (5)$$

Dzieląc liczbę jąder $D(t)$ przez $N(t)$:

$$\frac{D(t)}{N(t)} = \frac{N_0(1 - e^{-\lambda t})}{N_0 e^{-\lambda t}} = e^{\lambda t} - 1, \quad (6)$$

otrzyma się ogólne równanie izochrony:

$$D(t) = N(t)[e^{\lambda t} - 1]. \quad (7)$$

W równaniu (7), które jest równaniem kierunkowym prostej, $D(t)$ odgrywa rolę zmiennej zależnej, $N(t)$ – zmiennej niezależnej. Wyraz $[\exp(\lambda t) - 1]$ jest współczynnikiem nachylenia prostej. Rozwiązując relację (6) względem t :

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln \left(1 + \frac{D}{N} \right), \quad (8)$$

otrzyma równanie wyznaczające czas t w przeciągu którego powstało D atomów potomnych (Burchart 1971).

Podstawą geochronologii izotopowej jest przekonanie o niezmienniczości tempa rozpadu promieniotwórczego, co oznacza, że ekstremalne warunki fizykochemiczne nie zmieniają przebiegu procesu. Należy pamiętać, że wyznaczony czas, w którym rozpadła się liczba jąder D , zależy od tzw. zamknięcia systemu (np. powstania skały, przeobrażenia skały). Jeżeli pobrana próba pochodzi od skały krystalicznej, która nie uległa np. procesowi wietrzenia, to czas t będzie oznaczał ile jednostek lat temu doszło do krystalizacji. Jednak, gdy w historii skały została ona poddana procesom, które usunęły z niej pewną liczbę jąder D (ale także i N), to obliczony wiek próby będzie fałszywy (Burchart 1971, Christensen *et al.* 1996, Sutkowska & Ptak 2007).

Metoda rubidowo-strontowa datowania minerałów i skał oparta jest na zjawisku naturalnego rozpadu β^- promieniotwórczego. Radioaktywny izotop ^{87}Rb rozpada się do stabilnego izotopu ^{87}Sr (Rys.3.5). Reakcja przebiega zgodnie z równaniem:



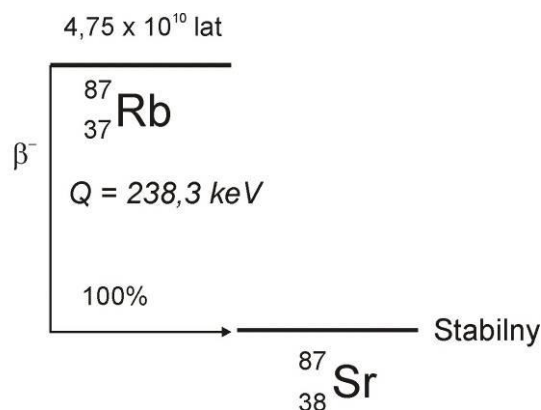
gdzie: e^- - elektron, $\tilde{\nu}$ - antyneutrino elektronowe, Q – energia rozpadu 283 keV (ciepło reakcji). Czas połowicznego rozpadu rubidu ^{87}Rb wynosi $4,75 \cdot 10^{10}$ lat.

Datowanie metodą Rb-Sr opiera się na wyznaczeniu odpowiednich stosunkach koncentracji izotopów w badanych próbach. Metodą spektrometrii masowej uzyskano wartości stężenia nuklidów znormalizowanego względem stabilnego izotopu: $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$,

$^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$. Z wyznaczonych stosunków spektrometrycznych konstruuje się ich graficzną reprezentację w postaci wykresu zależności $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ od $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$. Następnie wykreśla się zależność zwaną izochroną. Równanie opisujące izochronę Rb-Sr jest równaniem prostej o postaci kierunkowej:

$$\left(\frac{^{87}\text{Sr}}{^{86}\text{Sr}}\right)_t = \left(\frac{^{87}\text{Sr}}{^{86}\text{Sr}}\right)_{t_0} + \left(\frac{^{87}\text{Rb}}{^{86}\text{Sr}}\right)_t (e^{\lambda t_0} - 1), \quad (10)$$

gdzie poszczególne stosunki izotopowe strontu i rubidu odnoszą się do: t - czas obecny, t_0 – czas inicjalny (czas powstania złoża), λ - stała rozpadu (Burchart 1971, Christensen *et al.* 1996, Sutkowska & Ptak 2007).



Rys.3.5. Schemat rozpadu rubidu (Firestone *et al.* 1996).

Wykonania ćwiczenia i opracowanie wyników

1. Na podstawie udostępnionych wartości stosunków izotopowych $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ oraz $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$ skonstruować ich graficzną reprezentację w postaci wykresu zależności stosunku $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ od stosunku $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$. Dane pochodzą z prób sfalerytowych pobranych ze złóż w południowej Polsce.
2. Metodą regresji liniowej dopasować prostą dla wszystkich punktów pomiarowych oraz po inspekcji wizualnej wyinterpretować dodatkowe izochrony (np.: dla inkluzji - L, sfalerytu miodowego – H, sfalerytu ciemnobrązowego – DB lub odnaleźć inne relacje).
3. Wyznaczyć współczynnik nachylenia prostej i jego niepewność oraz parametr przecięcia się z osią rzędnych wraz z jego niepewnością dla każdej wyinterpretowanej izochrony. Omówić, czym są parametry kierunkowe prostej a i b .
4. Wyznaczyć wartość stałej rozpadu λ .
5. Wyznaczyć czas powstania złoża t_0 w oparciu o wzór (8) i/lub czasy powstania minerałów na podstawie wyinterpretowanych izochron.
6. Metodą różniczki zupełnej wyznaczyć błąd czasu powstania złoża i/lub minerałów.
7. Skomentować uzyskany wynik pod względem genezy sfalerytu i odnieść się do wiedzy z zakresu geologii historycznej.



Literatura

- Burchart J. (1971) *Geochronologia bezwzględna – stan i kierunki rozwoju*, Postępy Nauk Geologicznych, 3, 5 – 60.
- Christensen J.N., Halliday A.N., Kesler S.E. (1996) *Rb-Sr dating of sphalerite and ages of Mississippi-valley-type Pb-Zn deposits*, Society of Economic Geology, Special Publication, 4, 527-535.
- Firestone R. B., Shirley V. S., Baglin C. M., Chu S. Y. F., Zipkin J. (1996) *“Table of Isotopes”*, John Wiley & Sons, Inc.
- Sutkowska K., Ptak A. (2007) *Zastosowanie Rb-Sr metody izotopowej do datowania sfalerytów*, Geo-Symposium Młodych Badaczy Silesia 2007, Współczesne trendy w naukach o Ziemi, Prace WNoZ UŚ, 191-200.

4. Paleomagnetyzm

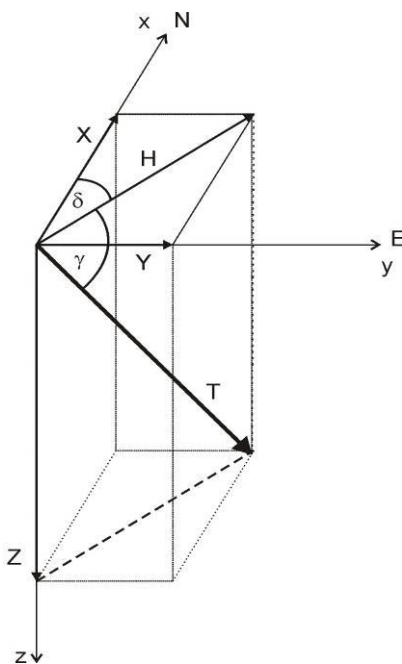
4.1. Wyznaczanie miejsca powstania skały w oparciu o pomiary kąta deklinacji i inklinacji pola paleomagnetycznego

Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie w prosty sposób współrzędnych miejsca powstania skały w oparciu o pomiary kąta deklinacji i inklinacji.

Wprowadzenie do ćwiczenia

Składowe wektora natężenia pola magnetycznego \underline{T} przedstawia Rys.4.1.



Rys.4.1. Składowe pola magnetycznego Ziemi

Wyróżnić można współrzędne układu kartezjańskiego opisujące wektor natężenia pola magnetycznego Ziemi \underline{T} :

- składowa północna X
- składowa wschodnia Y
- składowa pionowa Z
- składowa pozioma H , gdzie $H = \sqrt{X^2 + Y^2}$
- deklinacja $\delta = \text{kąt}(X, H)$
- inklinacja $I = \text{kąt}(H, T)$,

gdzie współrzędne sferyczne to: T, δ, I . Konwersję współrzędnych danego punktu z układu sferycznego do układu kartezjańskiego określają relacje:

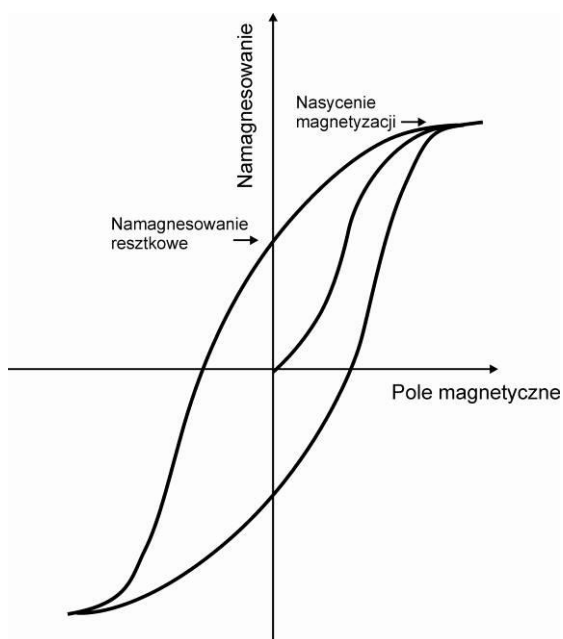
$$\begin{aligned} X &= T \cos \delta \cos I \\ Y &= T \sin \delta \cos I \\ Z &= T \sin I \end{aligned} \quad (1)$$

Wyniki pomiarów każdej ze składowych pola magnetycznego przedstawia się na mapie jako izolinie. Mapy izolinii inklinacji to izokliny. Mapy izolinii deklinacji to izogony, a mapy izolinii składowych x, y, z to izodynamy. Izogona zerowa, to agona. Izogony biegiem przypominają kształt południków, poza wschodnią Azją, gdzie mają kształt zamknięty. Izogony schodzą się w 4 punktach, np. w obszarach biegunów magnetycznych, gdzie deklinacja nie jest możliwa do wyznaczenia. Izoklina zerowa – zwana równikiem magnetycznym – obejmuje kulę ziemską przechodząc w pobliżu równika. Po obu stronach równika inklinacja wzrasta od 0 do 90 st. Punkty gdzie inklinacja wynosi 90 stopni to bieguny magnetyczne. Jednakże wyróżnia się dwa typy biegunów: geomagnetyczny (naturalny), który znajduje się w miejscu przecięcia się dipola magnetycznego z powierzchnią ziemi oraz magnetyczny (wyliczony), czyli obszar gdzie inklinacja wynosi 90 stopni. Bieguny te się nie pokrywają (Mortimer 2004).

Namagnesowanie to wielkość fizyczna określająca wytwarzane przez materiał pole magnetyczne, definiuje się ją przez określenie momentów magnetycznych wytworzonych w jednostce objętości. Namagnesowanie J jest wprost proporcjonalne do wektora natężenia pola magnetycznego zewnętrznego H , a współczynnikiem proporcjonalności jest podatność magnetyczna κ (Halliday & Resnick 1998, Mortimer 2004).

$$\vec{J} = \kappa \vec{H}. \quad (2)$$

Histereza magnetyczna to opóźnienie zmian wartości namagnesowania, a tym samym indukcji pola w stosunku do zmian natężenia zewnętrznego pola magnetycznego. Krzywa zależności namagnesowania od natężenia pola magnetycznego nosi nazwę pętli histerezy (Rys.4.2).



Gdy nie istnieje zewnętrzne pole magnetyczne to w skale wykazującej własności magnetyczne obecna jest pewna pozostałość magnetyczna nazywana namagnesowaniem szczątkowym lub reszkowym.

Namagnesowanie szczątkowe próbek skalnych nazywa się naturalną pozostałością magnetyczną NRM (ang. *Natural Remanent Magnetization*)

Namagnesowanie szczątkowe „zapamiętuje” kierunek pola magnetycznego w momencie, gdy skała krystalizowała. Fakt ten umożliwia wyznaczyć pierwotne położenie próbki skalnej (Mortimer 2004).

Rys.4.2. Pętla histerezy magnetycznej

Wykonanie ćwiczenia i opracowanie wyników:

1. Uwaga wstępna: wszystkie obliczenia wykonać w radianach i ostateczny wynik przeliczyć na stopnie!
2. W toku prac laboratoryjnych otrzymano wartości kąta deklinacji δ_i oraz inklinacji γ_i dla 10 próbek skalnych ($i = 1, 2, \dots, 10$).
3. Znane jest położenie paleobieguny (λ' – długość geograficzna, ϕ' – szerokość geograficzna). Przyjmuje się współrzędne $\lambda' = 11,8^\circ \text{ W}$, $\phi' = 46,6^\circ \text{ S}$
4. Należy przejść z układu sferycznego do układu kartezjańskiego. W oparciu o n pomiarów wyznaczyć średnie wartości składowych wektora natężenia pola X , Y i Z na podstawie wzorów:

$$X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos \delta_i \cos \gamma_i, \quad Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin \delta_i \cos \gamma_i, \quad Z = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin \gamma_i \quad (3)$$



UPGOW – Uniwersytet Partnerem Gospodarki Opartej na Wiedzy
Uniwersytet Śląski w Katowicach, ul. Bankowa 12, 40-007 Katowice, <http://www.us.edu.pl>

5. Obliczyć średnią deklinację D oraz inklinację I wszystkich próbek:

$$D = \arctg \left[\frac{Y}{X} \right] \quad (4)$$

$$I = \arctg \left[\frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \right] \quad (5)$$

6. Wyznaczyć odległość biegunową (dopełnienie szerokości) p :

$$p = 90^\circ - \arctg \left[\frac{\operatorname{tg} I}{2} \right] \quad (6)$$

7. Szerokość geograficzną miejsca powstania skały ϕ obliczyć wg wzoru:

$$\phi = \arctg \left[\frac{\operatorname{tg} I}{2} \right] \quad (7)$$

8. Długość geograficzną miejsca powstania skały λ obliczyć wg wzoru:

$$\lambda = \lambda' - \arcsin \left[\frac{\sin p \cdot \sin D}{\cos \phi'} \right] \quad (8)$$

Sprawdzenie poprawności obliczeń poprzez wyznaczenie oczekiwanego kierunku pola (deklinacji D_1 i inklinacji I_1) w danym punkcie na podstawie znajomości położenia paleobieguna:

9. Wyznaczyć wartość oczekiwaną inklinacji:

$$I_1 = \arctg(2\operatorname{tg}(90^\circ - p)) \quad (9)$$

10. Wyznaczyć wartość oczekiwaną deklinacji

$$D_1 = \arcsin \left(\frac{\sin(\lambda' - \lambda) \cdot \cos \phi'}{\sin p} \right) \quad (10)$$

11. Odnaleźć na mapie miejsce powstania skały i skomentować wyniki wyznaczonych wartości deklinacji i inklinacji obliczonych z wartościami oczekiwanymi.

Literatura

Halliday D., Resnick R. (1998) *Fizyka 2*, wyd. 10, tom 2, PWN, Warszawa.
Mortimer Z. (2004) *Zarys Fizyki Ziemi*, Wydanie drugie poprawione i uzupełnione, Kraków, Uczelniane Wydawnictwo Naukowo-Dydaktyczne.

5. Pole grawitacyjne Ziemi

5.1. Normalna siła ciężkości i wybrane modele elipsoidy Ziemi

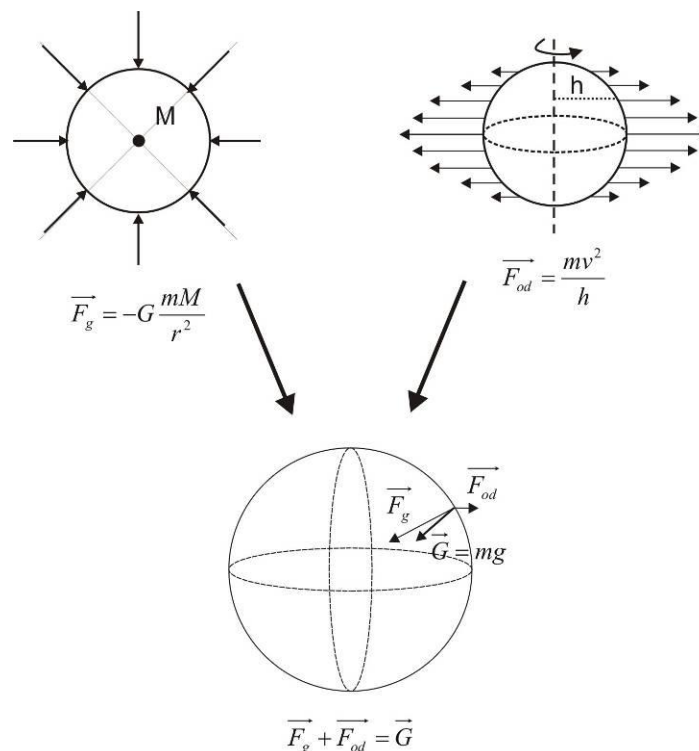
Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie normalnej siły ciężkości w oparciu o wzory opisujące różne modele elipsoidy Ziemi. Obliczenia wykonuje się dla wybranych miejscowości na globie.

Wprowadzenie do ćwiczenia

Siła ciężkości G to wypadkowa siła grawitacji i siły odśrodkowej wynikającej z obrotu Ziemi wokół własnej osi (Rys.5.1):

$$\vec{G} = \vec{F}_g + \vec{F}_{od} . \quad (1)$$



Rys.5.1. Siła ciężkości

Na równiku siła ciężkości jest najmniejsza (duża siła odśrodkowa), na biegunach siła ciężkości jest równa sile przyciągania newtonowskiego. Siła grawitacji F_g opisana jest wzorem:



$$\vec{F}_g = -G \frac{mM}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}, \quad (2)$$

gdzie G to stała grawitacji $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$, m – masa ciała przyciąganego, M – masa Ziemi, r – odległość między masami. Siłę odśrodkową F_{od} wynikającą z ruchu obrotowego Ziemi zapisać można jako:

$$\vec{F}_{od} = \frac{mv^2}{h} \cdot \frac{\vec{h}}{h} = m\omega^2 \cdot \vec{h} \quad (3)$$

gdzie m to masa na powierzchni Ziemi, v – prędkość liniowa, ω – prędkość kątowna, h – wektor promienia od osi obrotu Ziemi do punktu, w którym znajduje się masa m (Cazenave 1995, Telford *et al.* 1990).

Natężeniem siły ciężkości dla punktu w bezpośrednim sąsiedztwie powierzchni Ziemi nazywamy wypadkową natężenia siły newtonowskiego przyciągania i natężenia siły odśrodkowej. Średnia wartość to $9,81 \text{ [N/kg = m/s}^2 = 10^{-5} \text{ mGal}]$. Natężenie siły ciężkości jest siłą działającą na masę jednostkową, liczbowo równe jest ono przyspieszeniu ziemskiemu w tym punkcie i ma ten sam wymiar. Natężenie siły ciężkości można zdefiniować również jako:

$$\vec{g} = -G \iiint_z \frac{dm}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} + \omega^2 \cdot \vec{h}. \quad (4)$$

Każda siła jest charakteryzowana przez jej potencjał. Potencjał siły ciężkości jest sumą potencjału newtonowskiego V całej masy Ziemi i potencjału siły odśrodkowej U :

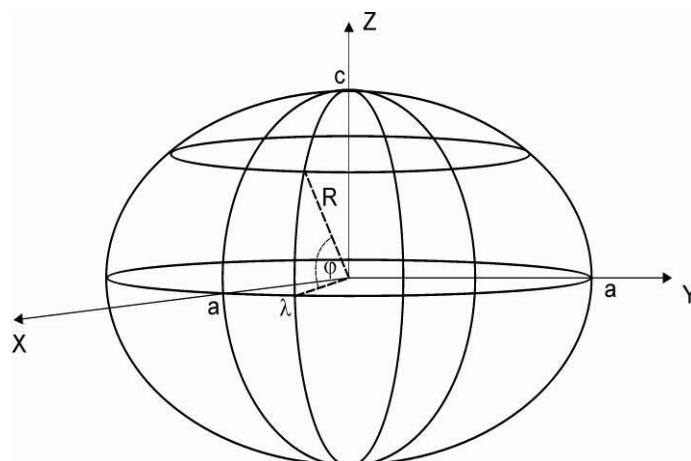
$$W = V + U = (-)G \iiint_v \frac{dm}{r} + \frac{1}{2} \omega^2 \cdot \vec{h}. \quad (5)$$

Geoida to powierzchnia ekwipotencjalna potencjału siły ciężkości (powierzchnia odniesienia) $W(x, y, z) = \text{const}$, która pokrywa się ze średnim poziomem mórz i oceanów (ich powierzchnią swobodną). Geoida odzwierciedla własności fizycznej budowy Ziemi, nieciągłości jej krzywizny odpowiadają nieciągłościom w rozkładzie mas we wnętrzu Ziemi. Kształtem zbliżona jest do elipsoidy obrotowej (Rys.5.2) o różnych parametrach a i c , na podstawie, której stworzone modele powierzchni odniesienia (Cazenave 1995, Kamela *et al.* 1993, Telford *et al.* 1990).

Teoretyczna wartość siły ciężkości wynikająca z potencjału normalnego na powierzchni odniesienia nosi nazwę wartości normalnej siły ciężkości γ_0 [Gal]. Ogólny wzór opisujący rozkład wartości normalnych siły ciężkości na powierzchni sferoidy uwzględniający wartość normalną siły ciężkości na równiku γ_a oraz szerokość geograficzną φ [rad] wynosi

$$\gamma_0 = \gamma_a (1 + \beta \sin^2 \varphi - \beta_1 \sin^2 2\varphi), \quad (6)$$

gdzie β - spłaszczenie grawitacyjne, β_1 - współczynnik spłaszczenia grawitacyjnego obliczony drogą teoretyczną. Wartości γ_0 i β wyznacza się na podstawie pomiarów grawimetrycznych.



Rys.5.2. Elipsoida obrotowa

Pierwszy wzór jaki zastosowano do obliczenia wartości normalnych siły ciężkości to wzór Helmerta (1884) dla elipsoidy lokalnej Bessela. Dokładniejszy wzór opracowano w 1930 roku – wzór Cassinisa dla elipsoidy Hayforda. Obowiązywał on do roku 1975. Obecnie stosuje się GRS''80, który został przyjęty zgodnie z uchwałą Międzynarodowej Unii Geodezyjno – Geofizycznej.

Helmert

$$\gamma_0 = 978,030 \cdot (1 + 0,005302 \sin^2 \varphi - 0,000007 \sin^2 2\varphi) \quad (7)$$

Cassinis

$$\gamma_0 = 978,043 \cdot (1 + 0,0052884 \sin^2 \varphi - 0,0000059 \sin^2 2\varphi) \quad (8)$$

GRS''80

$$\gamma_0 = 978,0327 \cdot (1 + 0,0053024 \sin^2 \varphi - 0,0000058 \sin^2 2\varphi) \quad (9)$$

Wartość normalnej siły ciężkości jest największa na biegunie i wynosi $9,83 \text{ m/s}^2$, a najmniejsza na równiku $9,78 \text{ m/s}^2$ (Kamela *et al.* 1993).

Wykonanie ćwiczenia i opracowanie wyników

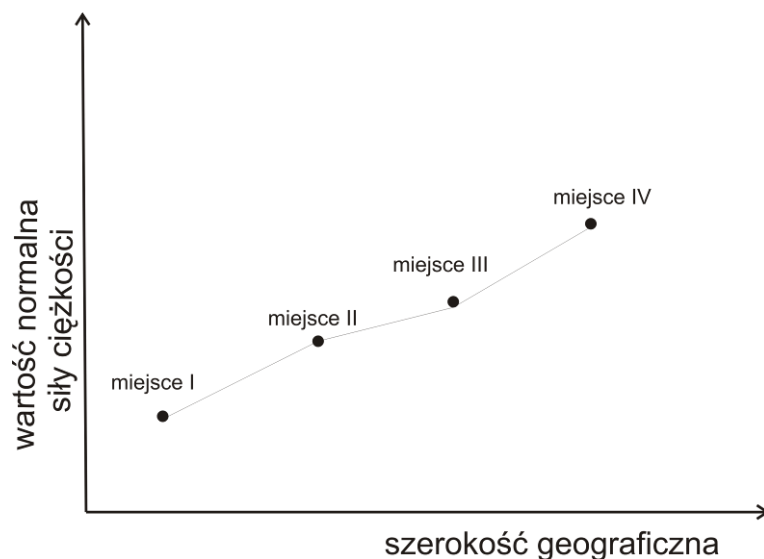
1. Dla wybranych zestawów zawierających współrzędne geograficzne czterech miejsc na świecie przeliczyć współrzędne podane w stopniach, minutach i sekundach na stopnie i ułamek dziesiętny stopnia ($1^\circ = 60' = 3600''$). Następnie przeliczyć szerokość geograficzną na radiany.
2. Korzystając ze wzorów Helmert'a (7), Cassinis'a (8) i GRS''80 (9) obliczyć wartości normalne siły ciężkości [w Gal i ms^{-2}].



3. Wyniki obliczeń zestawień w tabeli. Wartości wyrazić w mGalach.

| | Miejsce I | Miejsce II | Miejsce III | Miejsce IV |
|----------|-----------|------------|-------------|------------|
| Helmert | | | | |
| Cassinis | | | | |
| GRS''80 | | | | |

4. Sporządzić wykresy (Rys.5.3) przedstawiające zależność szerokości geograficznej od siły ciężkości. Na wykres nanieść nazwy miejscowości.



Rys.5.3. Zmiana wartości normalnej siły ciężkości wraz z szerokością geograficzną.

5. Skomentować uzyskane wyniki.

Literatura

- Cazenave A. (1995) *Geoid, Topograph and Distribution of Landform*, W: Ahrens T.J (red.), „*Global Earth Physics. A Handbook of Physical Constants*” AGU Reference Shelf 1
- Kamela C., Warchałowski E., Włoczewski F., Wyrzykowski T., (1993), *Teoria geometrycznej niwelacji precyzyjnej*, w: *Niwelacja precyzyjna*, pod red. I. Laudyn, wyd. drugie zmienione i uzupełnione, PPWK, Warszawa.
- Telford W.M., Geldart L.P., Sheriff R.E., (1990), *Applied Geophysics*, wyd. drugie, Cambridge University Press.