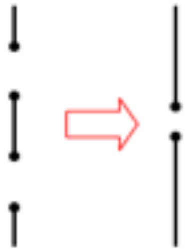
GuT Schaltalgebra I

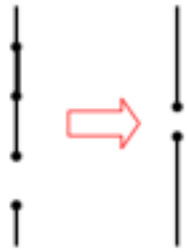
Logische Verknüpfungen

Postulate der „UND-Verknüpfung“

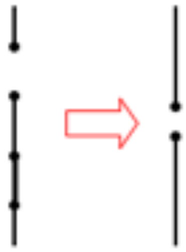
$0 \wedge 0 = 0$



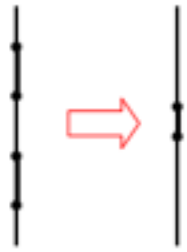
$1 \wedge 0 = 0$



$0 \wedge 1 = 0$



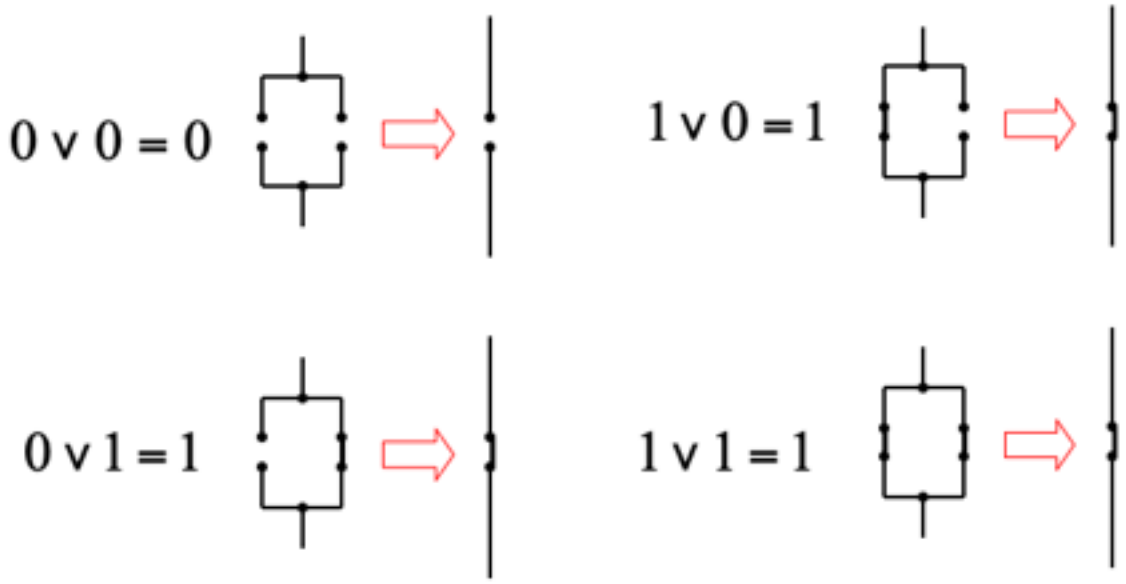
$1 \wedge 1 = 1$



Die Grundgesetze der Schaltalgebra, auch Postulate genannt, sind Regeln für die Verknüpfung von Konstanten.

Schaltungsmäßig führt die „Und“-Verknüpfung auf eine Reihenschaltung.

Postulate der „ODER-Verknüpfung“

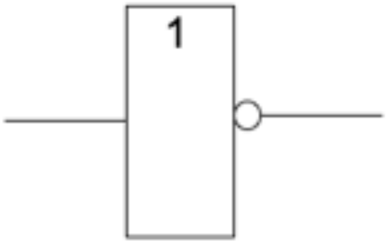


Schaltungsmäßig führt die „Oder“-Verknüpfung auf eine Parallelschaltung.

Postulate der „Nicht Verknüpfung“

$$\bar{1} = 0$$

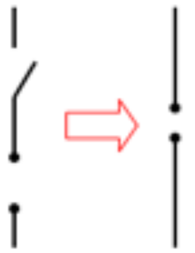
$$\bar{0} = 1$$



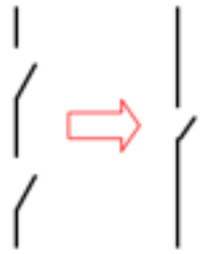
Bei einem Nichtglied führt eine 0 am Eingang zu einer 1 und eine 1 am Eingang zu einer 0.

Theoreme der „UND-Verknüpfung“

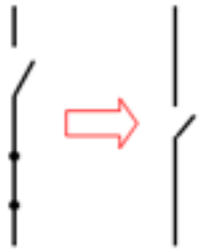
$A \wedge 0 = 0$



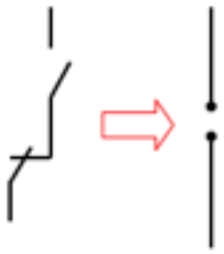
$A \wedge A = A$



$A \wedge 1 = A$



$A \wedge \overline{A} = 0$

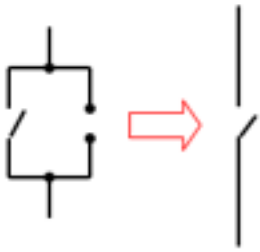


Die Rechenregeln für die Verknüpfung einer Variablen mit einer Konstanten oder einer Variablen heißen Theoreme.

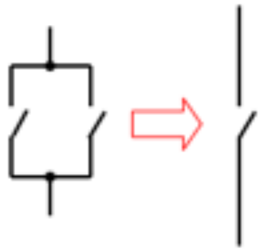
Im unserem Beispiel heißt die Variable A; die Theoreme gelten genauso für alle anderen Variablen.

Theoreme der „ODER-Verknüpfung“

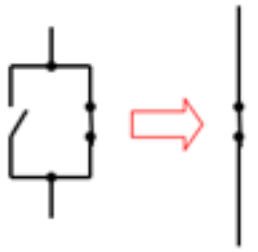
$A \vee 0 = A$



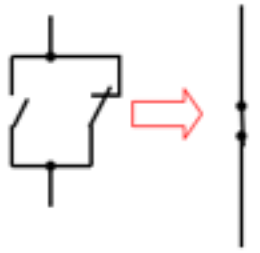
$A \vee A = A$



$A \vee 1 = 1$

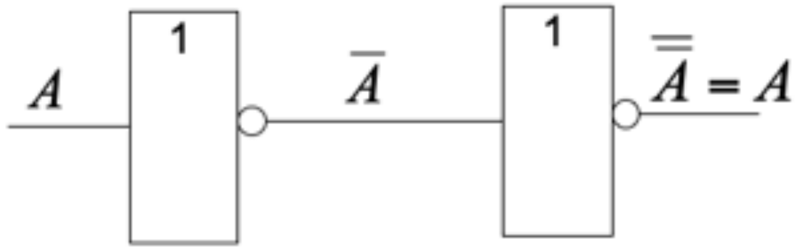


$A \vee \overline{A} = 1$



Aufgabe: Überprüfung der Theoreme mit Wahrheitstabellen!

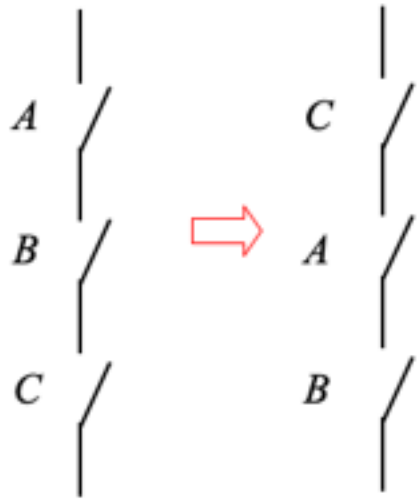
Theoreme der „Nicht Verknüpfung“



$$\overline{\overline{A}} = A$$

Kommutativgesetz der „UND-Verknüpfung“

$$Z = A \wedge B \wedge C = C \wedge A \wedge B$$

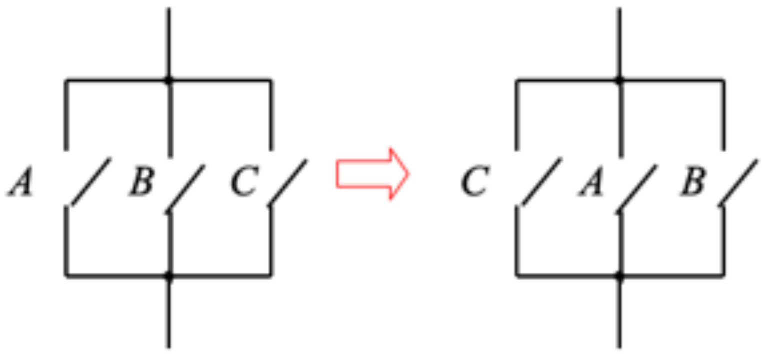


Das Kommutativgesetz heißt auf deutsch Vertauschungsgesetz.

Die Reihenfolge, in der Variable der „Und“-Verknüpfung unterzogen werden ist beliebig. Sie hat keinen Einfluss auf das Ergebnis.

Kommutativgesetz der „Oder-Verknüpfung“

$$Z = A \vee B \vee C = C \vee A \vee B$$



Die Reihenfolge, in der Variable der „Oder“-Verknüpfung unterzogen werden ist beliebig. Sie hat keinen Einfluss auf das Ergebnis.

Assoziativgesetz der „Und-Verknüpfung“

$$Z = A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$$

Assoziativgesetz der „Oder-Verknüpfung“

$$Z = A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$$

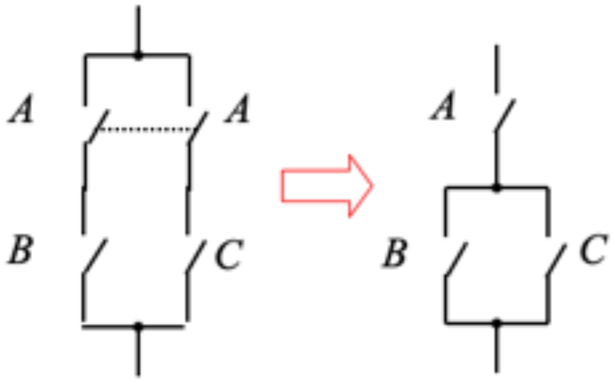
Das Assoziativgesetz heißt auch Verbindungs- oder Zuordnungsgesetz.

Die Reihenfolge der Zuordnung der Variablen der „Und“- und der „Oder“-Verknüpfung ist beliebig. Sie hat keinen Einfluss auf das Ergebnis.

Distributivgesetz

1. Konjunktive Distributivgesetz

$$Z = (A \wedge B) \vee (A \wedge C) = A \wedge (B \vee C)$$



Das Distributivgesetz heißt auf deutsch Verteilungsgesetz.

Es hat große praktische Bedeutung bei der Umstellung und Vereinfachung von schaltalgebraischen Gleichungen.

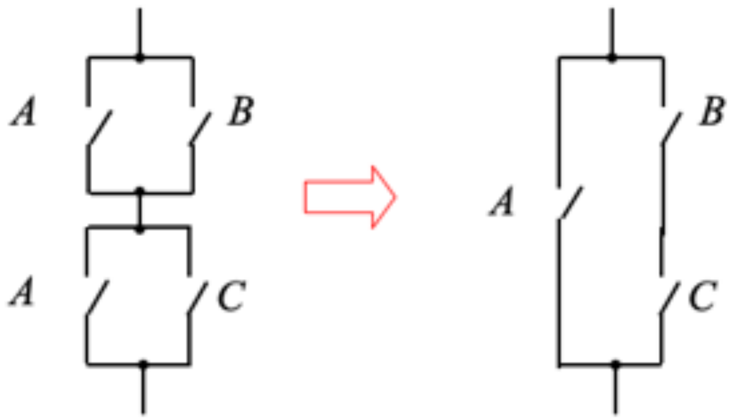
Es wird zischen dem konjunktiven und dem disjunktiven Distributivgesetz unterschieden (s.o.).

Aufgabe: Überprüfung des konjunktiven Disributivgesetzes mit Wahrheitstabellen!

Distributivgesetz

2. Disjunktive Distributivgesetz

$$Z = (A \vee B) \wedge (A \vee C) = A \vee (B \wedge C)$$



De Morgansche Gesetze

1. De Morgansche Gesetz

$$Z = \overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$$

2. De Morgansche Gesetz

$$Z = \overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$$

Die Morganschen Gesetze gelten auch für die Verknüpfung von mehr als zwei Variablen!

$$Z = \overline{A \wedge B \wedge C \wedge \ldots} = \overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C} \vee \ldots \qquad \boldsymbol{Z = \overline{A \vee B \vee C \vee \ldots} = \overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{C} \wedge \ldots}$$

Der engl. Mathematiker De Morgan (1809 – 1871) hat die boolsche Algebra erweitert und die nach ihm benannten Gesetze gefunden.

Sie haben insbesondere eine Bedeutung bei der Auflösung von Ausdrücken, die insgesamt negiert sind, die also einen langen Negationsstrich haben. Sie werden viel benötigt, zur Umrechnung auf NAND- auf NOR-Funktionen

Aufgabe: Überprüfung der Morganschen Regeln mit Wahrheitstabellen!

Logische Verknüpfungen von Gliedern mit zwei Eingängen

B	A	Z_0	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6	Z_7	Z_8	Z_9	Z_{10}	Z_{11}	Z_{12}	Z_{13}	Z_{14}	Z_{15}
0	**0**	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	**0**	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
		Kon - stan -te 0	**NO R**	Inhi biti on B	Ne gat ion B	Inh ibiti on A	N e g at io n A	**ANT I- VA- LEN Z XO R**	**NAN D**	**AN D**	**Ä Q UI V A L E N Z**	Ide ntit ät A	Im plik ati on B	Ide ntit ät B	Im plik ati on A	**O R**	Ko - ns- tan te 1

Schaltungen sollten möglichst wirtschaftlich sein!

Oftmals sind die gefundenen (durch Probieren!) zu komplex und könnten vereinfacht werden.

Die von Boole (engl. Mathematiker 1815 bis 1864) entwickelte Algebra hilft dabei. Sie ist eine Mengenalgebra, aus der sich z.B. die heutige in den Schulen unterrichtete Mengenlehre ableitet.

Eine weiter Sonderform ist die Schaltalgebra – mit ihrer Hilfe lassen sich Digitalschaltungen berechnen und weitgehend vereinfachen.

In der Schaltalgebra gibt es Konstanten und Variablen wie in der Algebra.

Es gibt jedoch nur zwei Konstanten. Die Variablen können nur die Werte 1 und 0 annehmen.

Eine Variable der Schaltalgebra ist also eine binäre Größe. Sie kann durch einen Schalter veranschaulicht werden. Es soll folgende Darstellung gewählt werden:

Schalter offen: Variable 0 Schalter geschlossen: Variable 1

Konstante 0  Konstante 1