Naturwissenschaftliches Runden

Name: Datum:

Quelle: Rechenbuch Elektrotechnik, Verlag Europa-Lehrmittel, 18.Auflage 2011, S.27

Bestimmung der wesentliche Ziffern

Beim Runden wird der Zahlenwert auf eine bestimmte Anzahl wesentlicher Stellen n gerundet.
Dabei wird das Ergebnis zwngsläufig verfälscht.
Ziel ist es, den entstehenden Fehler in festen Grenzen zu halten.

1.) Der zu rundende Wert ist das Ergebnis einer Rechnung

Das Ergebnis von Rechnungen darf nicht mehr wesentliche Stellen haben, als die Eingangswerte.

2.) Der zu rundende Wert ist die Angabe eines Messgerätes

Die Angabe eines Messwertes hängt von der Messgenauigkeit ab. Wenn der mögliche Messfehler bekannt ist, wählt man für die Messwertangabe die Anzahl der wesentlichen Ziffern so, dass der Messfehler innerhalb der Rundungsgrenzen der Messwertangabe liegt.

Bei unbekanntem Messfehler ist es in der Technik üblich, 3 wesentliche Ziffern anzugeben.

Absoluter Fehler F

Die Differenz zwischen einem Näherungswert M (oder Messwert) und dem tatsächlichen Wert W einer Größe nennt man absoluter Fehler.

Beispiel:

Anstelle der exakten Lösung x = 1/3 der Gleichung 3x = 1 gibt ein Schüler x = 0,33 an.

Er macht dabei einen absoluten Fehler von

F = M – W = 0,33 – 1/3 = 99/300 – 100/300 = -1/300 = -0,00333…

Ein absoluter Fehler ist von der selben Dimension wie die betrachtete Größe, sprich er kann mit einer Einheit (wie etwa Euro, Kilogramm oder Meter) versehen sein.

Relativer Fehler

Den Quotienten aus absolutem Fehler und tatsächlichem Wert nennt man relativer Fehler.
Wir führen das Beispiel von oben fort. Es ergibt sich ein relativer Fehler von

-1/300 : 1/3 = -1/300 * 3/1 = -1/100 = -0,01

Der relative Fehler ist stets eine Zahl ohne Einheit und mit dem gleichen Vorzeichen wie der entsprechende absolute Fehler.

Prozentualer Fehler k

Der prozentuale Fehler ist genau der relative Fehler – nur als Prozentzahl angegeben. Der relative Fehler von -0,01 im Beispiel oben entspricht demnach einem prozentualen Fehler von -1 %.

Beispiel: Ein Digital-Multimeter hat eine Messgenauigkeit von k=2% vom Messwert. Der Ablesewert beträgt M = 11,94 V. Auf wie viele wesentliche Ziffern ist der Messwert zu runden, damit der wahre Wert innerhalb der Rundungsgrenzen liegt?

Geg.: k = 2%
M = 11,94 V

Ges.: n

Verwendete Formel: $k = \frac{F}{M} \cdot 100\%$ k: prozentualer Fehler

$F = \frac{k \cdot M}{100\%}$ F: absoluter Fehler

Rechenweg: $F = \frac{k \cdot M}{100\%} = \frac{2\% \cdot 11{,}94\ V}{100\%} = 0{,}239\ V$

Der absolute Fehler beträgt 0,239V. Das bedeutet, dass bei einem angezeigten Wert von 11,94 V der wahre Wert um 0,239 V größer oder kleiner als der angezeigte Wert sein kann.

M_u = 11,94 V - 0,239 V = 11,701 V
M_o = 11,94 V + 0,239 V = 12,179 V

Wenn der abgelesene Wert gerundet wird, muss er in diesen Grenzen bleiben. Durch ausprobieren findet man:

	11,701 V	≤	11,94 V	≤	12,179 V
n=4	11,70 V	≤	11,94 V	≤	12,18 V
n=3	11,7 V	≤	11,9 V	≤	12,2 V
n=2	12 V	≤	12 V	≤	12 V

Es ist auf n=2 wesentliche Stellen zu runden

Ist n (Anzahl der wesentlichen Stellen) bekannt, so ergeben sich folgende Regeln zur Bestimmung der wesentlichen Stellen:

a) Ein Komma spielt keine Rolle.

b) Führende Nullen werden nicht mitgezählt.

c) Die erste wesentliche Stelle ist die erste Ziffer von links, die ungleich Null ist.

d) Ist die Maßzahl größer, als durch die gewünschten wesentlichen Stellen dargestellt werden kann, werden Potenzen von 10 zur Darstellung verwendet.
Üblich sind 10er Potenzen, die durch einen Einheitenvorsatz darstellbar sind.

z.B.: 74821 V = 74,821 · 10^3 V ≈ 74,8 kV

Beispiele:
a) Markieren Sie die erste wesentliche Stelle:

a1) 0,23482 | a3) 3467 | a5) 840900 mA

a2) 0,0000453282 | a4) 0,12358 kV | a6) 0,01999 kW

b) Runden Sie auf =3 die wesentlichen Stellen

b1) 0,23482 = 0,235 | b3) 3467 = 3470 | b5) 840900 mA = 841000 mA = 841 A

b2) 0,0000453282 = 0,0000453 | b4) 0,12358 kV = 0,124 kV | b6) 0,01999 kW = 0,02 kW = 20 W

Rundungsregeln

Nr 1: Folgt der letzten wesentlichen Stelle eine 5,6,7,8 oder 9, wird sie um eins erhöht, folgt der letzten wesentliche Stelle eine 0,1,2,3 oder 4, wird sie beibehalten

Nr. 2: Das Runden muss auf einmal erfolgen.

Das Runden in Stufen (Stufenrunden) kann zu größeren absoluten Fehlern führen.

z.B. 0,0064346 , n=3:

Von re nach li: Würde die letzte 6 zum Aufrunden der 4 zur 5 verwendet. Dann würde die 3 durch die entstehende 5 auf 4 aufgerundet werden.das Ergebnis wäre:
0,00644 mit einem absoluter Fehler von **|0.0000054|**
Wird aber die Zahl nach der Stelle n+1 abgeschnitten und die nun letzte Ziffer zum Runden verwendet, lautet das Ergebnis:
0,00643 und der absolute Fehler beträgt nur noch: **|0,0000046|**

Beispiel: n=3
399,698 ≈ 400 absoluter Fehler: 0,302
399,498 ≈ 399 absoluter Fehler: 0,498
Beim Runden auf 400 würde ein absoluter Fehler von 0,502 entstehen

Übungsaufgaben (Quelle: Rechenbuch Elektrotechnik, Verlag Europa-Lehrmittel, 18.Auflage 2011, S.44)

Runden Sie die gegebenen Zahlen auf 5, 4, 3, 2, 1 wesentliche Ziffern.

a) 655,837	b) 2174,95
c) 18,7484	d) 5,68458
e) 0,963493	f) 0,748396
g) 98,3185	h) 8,97946
i) 0,479658	k) 0,0845853

Aufgaben zu 9.1 -1

a)	655,837	b)	2174,95	c)	18,7484	d)	5,68458	e)	0,963493
	655,84		2175,0		18,748		5,6846		0,96349
	655,8		2175		18,75		5,685		0,9635
	656		$2{,}17 \cdot 10^3$		18,7		5,68		0,963
	$0{,}66 \cdot 10^3$		$2{,}2 \cdot 10^3$		19		5,7		0,96
	$0{,}7 \cdot 10^3$		$2 \cdot 10^3$		$0{,}02 \cdot 10^3$		6		1

f)	0,748396	g)	98,3185	h)	8,97946	i)	0,479658	k)	0,0845853
	0,74840		98,319		8,9795		0,47966		0,084585
	0,7484		98,32		8,979		0,4797		0,08459
	0,748		98,3		8,98		0,480		0,0846
	0,75		98		9,0		0,48		0,085
	0,7		$0{,}1 \cdot 10^3$		9		0,5		0,08