Linear - Algebra

(作业PDF一页)

第一章：行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{1i}A_{1i} = \underbrace{\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}}_{\text{对所有n阶排列求和}} (-1)^{\underbrace{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}_{\text{逆序数}}} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

由此得有 $n!$ 项

$n(n-1)(n-2)\cdots\cdots 1$

逆序数为：$\frac{n(n-1)}{2}$

$$\begin{cases} 4k/4k+1 \text{ 倍数 — 偶} \\ 4k+2/4k+3 \text{ 倍数 — 奇} \end{cases}$$

Attention

1、按行/按列 展开原因：某一行/列已取完所有的情况。

2、行列式转置，i与j同时变，故不变号 / 行列互换，只改变i或j，故变号

the demonstration of Vandermonde 行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j) = \begin{matrix} (x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1) \cdot \\ (x_3-x_2)(x_4-x_2)\cdots(x_n-x_2) \\ (x_n-x_{n-1}) \end{matrix}$$

全体同类因子的乘积

类型一：① $n=1$ 成立．② 设 $n=k$ 成立，$n=k+1$ 成立

类型二：① $n=1$ $n=2$ 成立 ② 设 $n<k$ 成立，证 $n=k$ 成立

不要混

from the last line, the below minus above multiple x_1

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\ 0 & x_2(x_2-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按第1列展开}} D_n = 1 \cdot M_{11} = \begin{vmatrix} x_2-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\ x_2(x_2-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2}(x_2-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow (x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

（D_{n-1} $n-1$阶 Vandermonde 行列式）

定理 2：行列式 = 它的任意一行/列各元素与对应代数余子式之和

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots\cdots a_{in}A_{in}$$
$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots a_{nj}A_{nj}$$

定理 3：行列式某一行/列与另一行/列所对应代数余子式乘积之和 = 0

$$0 = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots\cdots a_{in}A_{jn} \quad i \neq j$$
$$= a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots a_{ni}A_{nj}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = \begin{cases} D & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} D & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

行列式

排列

定理1：对换改变排列的奇偶性

定理2：任意一个n阶排列与排列12⋯n都可经一系列对换互变，并且所作对换次数与该排列有相同奇偶性

n阶行列式

n阶上三角行列式的值＝主对角线上n个元素的乘积

行列式性质

1、行列互换，$\det A$ 不变
2、行列式一行的公因子可以提出
3、行列式中若有某一行为两组数之和，此行列式＝两个行列式之和
4、两行互换，行列式反号
5、两行相同，行列式值为0
6、两行成比例，$\det A=0$
7、将一行倍数加至另一行，det不变

行列式按行(列)展开

M_{ij} 余子式：n级矩阵中划去i行j列，剩下n-1级行列式为矩阵A的余子式

A_{ij} 代数余子式：$(-1)^{i+j}M_{ij}$

定理1：$\det A$＝第i行元素与自己的代数余子式乘积之和

$$|A|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$$

定理2：$|A|$的第i行与第k行$(i\neq k)$元素对应的代数余子式乘积之和＝0

异乘为零

Cramer法则

定理1：数域K上n个方程的n元线性方程组有唯一解 $\Longleftrightarrow$ 系数矩阵A的$\det A\neq 0$

定理2：n个方程的n元线性方程组(1)的系数$\det A\neq 0$，唯一解为$\left(\frac{|B_1|}{|A|},\frac{|B_2|}{|A|},\cdots,\frac{|B_n|}{|A|}\right)$

行列式按k行(列)展开

k阶子式定义：n级矩阵A中任取k行k列，位于交叉处的k^2元素组成的元素

Laplace定理：

Laplace定理去看