2.28. 高等代数-II 数学作业纸 科目 Linear A...

班级: 姓名: 编号: 第 1 页

第一章：一元和n元多项式环

7.1、一元多项式环

x — 符号/不定元

def 1：数域K上一元多项式：$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 　$a_i \in K$ — 系数　$a_i x^i$ — i次项

数域K上2个一元多项式相等 $\rightleftharpoons$ 同次项系数对应相等.

$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$ 　n为f(x)的次数，记作 $\deg f(x)$ or $\deg f$；$\boxed{K[x]}$-K上all一元多项式集合.

零多项式的次数定义为 $-\infty$.（零多项式 ≠ 零次多项式）

$a \in K^*$，K^*为K中all非零数

一元多项式环：$(P[x], +, \cdot)$

7.2、整除关系，带余除法.

一、整除关系

def 1：set $f(x), g(x) \in K[x]$，if $\exists\, h(x) \in K[x]$，s.t. $f(x) = h(x)g(x)$，称 $g(x)$ 整除 $f(x)$

记作 $g(x) \mid f(x)$ 　else $g(x) \nmid f(x)$ 　由整除易得：① $0 \mid f(x) \rightleftharpoons f(x) = 0$

proof：$f(x) = 0 \cdot h(x) = 0$

$0 = 1 \cdot 0$

def 2：$K[x]$中，if $g(x) \mid f(x)$ 且 $f(x) \mid g(x)$，称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相伴

记作 $f(x) \sim g(x)$

② $f(x) \mid 0$，$\forall f(x) \in K[x]$

③ $b \mid f(x)$，$\forall b \in K^*$，$\forall f(x) \in K[x]$

prop1：$K[x]$中，$f(x) \sim g(x) \rightleftharpoons \exists\, c \in K^*$ s.t. $f(x) = c\,g(x)$

proof：$f(x) = [b^{-1} f(x)]\, b$

prop2：$K[x]$中，if $g(x) \mid f_i(x)$，$i = 1 \cdots s$，$\forall u_1(x) \sim u_s(x) \in K[x]$，$\exists\ g(x) \mid [\sum_{i=1}^{s} u_i(x) f_i(x)]$

二、带余除法 　不随数域扩大而改变.

证明：存在性和唯一性 (proof).

def 1：set $f(x), g(x) \in K[x]$，且 $g(x) \neq 0$，在 $K[x]$ 中 $\exists!\ h(x), r(x)$ s.t. $f(x) = h(x)g(x) + r(x)$

$\deg r(x) < \deg g(x)$.

带余除法 proof.

prop3：$f(x), g(x) \in K[x]$，数域 $F \supseteq K$，则 $K[x]$中，$g(x) \mid f(x)$ $\rightleftharpoons$ $F[x]$中，$g(x) \mid F(x)$

2.28 数学作业纸 科目 Linea Al.

班级: 姓名: 编号: 第 2 页

proof: 互相辗转的公因式即可.

7.3 最大公因式

$f(x)=q(x)g(x)+r(x)$ 成立 $\Rightarrow$ 1. $f(x)$与$g(x)$, $g(x)$与$r(x)$ 有相同公因式

2. $(f(x),g(x)) = (g(x),r(x))$

一、最大公因式

def1: $k[x]$中 $f(x)$与 $g(x)$ 的一个公因式 $d(x)$ 满足下述条件:

$\forall$ $f(x)$与$g(x)$的公因式 $c(x)$, 有 $c(x)|d(x)$, 称 $d(x)$ 为 $f(x)$与$g(x)$一个最大公因式

记为 $d(x)=(f(x),g(x))$

同理, $m(x)$为 $f(x)$与 $g(x)$的公倍数, 对$f(x)$与$g(x)$的任一公倍数式$l(x)$有 $m(x)|l(x)$

记为 $m(x)=[f(x),g(x)]$

带余除法证明 { 1. $\exists$公因式 2. 公因式为 g.c.d

theorem: $f(x)$、$g(x)\in k[x]$, 则$f(x)$与$g(x)$的最大公因式 $d(x)$ 必$\exists$ 且有 $u(x)$、$v(x)\in k[x]$

$f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x)$ (proof).

$f(x)$与$g(x)$的2个最大公因式最多相差一个非零常数(相伴), 我们规定$f(x)$ $g(x)$最大公因式首项系数为1, 且最大公因式均指首一多项式.

lemma: $f_1(x), f_2(x), f_3(x)\cdots, f_m(x)\in k[x]$, 则 $((f_1(x),f_2(x)),f_3(x)\cdots f_m(x))=(f_1(x),f_2(x)\cdots f_m(x))$

(最大公因式定义与多项式排列顺序无关)

def 2: set $f(x),g(x)\in k[x]$, 若$(f(x),g(x))=1$, 称 $f(x)$与$g(x)$互素 proof

theorem: $f(x)$与$g(x)\in k[x]$, $f(x)$与$g(x)$互素 $\Leftrightarrow$ $f(x)u(x)+g(x)v(x)=1$

corollary: ① 计 $f_1(x)|g(x)$, $f_2(x)|g(x)$, 且 $(f_1(x),f_2(x))=1$, 则 $f_1(x)f_2(x)|g(x)$ proof.

corollary: ② 计 $(f(x),g(x))=1$, 且 $f(x)|g(x)h(x)$, 则 $f(x)|h(x)$ 欧几里德 lemma.

③ set $(f(x),g(x))=d(x)$, $f(x)=f_1(x)d(x)$, $g(x)=g_1(x)d(x)$, 则 $(f_1(x),g_1(x))=1$

④ $f(x),g(x)$为非零多项式, 则 $f(x)g(x)\sim(f(x),g(x))[f(x),g(x)]$

(proof: $f(x)=q_i(x)g_i(x)+r_i(x)$ $i\le n$

孙剩余定理: set $g_1(x),\cdots,g_n(x)$为两两互素多项式, $r_1(x)\sim r_n(x)$为n个多项式, $\exists$ $f(x)$, $q_1(x)\sim q(x)$ s.t.

7.4 因式分解

def: set $f(x)$ 为 $\boxed{\text{数域K}}$ 上的非常数多项式，if $f(x)$ 可分为2个次数小于 $f(x)$ 次数的K上多项式之积
则称 $f(x)$ 为K上的可约多项式，否则称为K上的不可约多项式
(无论哪个数域，一次多项式 always 不可约).

lemma：$f(x)$ 为K上的不可约多项式，则对K上任一多项式 $g(x)$，则 $f(x)|g(x)$ or $(f(x),g(x))=1$

theorem：$p(x)$ 为K上不可约多项式，$f(x),g(x)$ 为K上多项式且 $p(x)|f(x)g(x)$，则 $p(x)|f(x)$ or $p(x)|g(x)$
- - - - - - - - 且 $p(x)|f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x)$，则 $p(x)$ 必可整除某 $f_i(x)$

数学归纳法.

theorem：set $f(x)$ 为K上多项式且 $\deg f(x)\geq 1$，则 (1) $f(x)$ 可分解为有限个K上的不可约多项式之积
(2) if $f(x)=\prod_{i=1}^{n}p_i(x)=\prod_{j=1}^{n}q_j(x)$ 为 $f(x)$ 2个不可约分解 $q_i(x)\sim p_i(x)$

任一多项式可化为一个"标准分解"式：$f(x)=cp_1(x)^{e_1}p_2(x)^{e_2}\cdots p_m(x)^{e_m}$ $c\neq 0$
$p_i(x)$ 为互异的首一不可约多项式，$e_i\geq 1$ $(i=1,2,\cdots,m)$

if $e_i>1$，we call 因式 $p_i(x)$ 为 $f(x)$ 的 e_i 重因式 ($e_i=1$ 时为单因式) $p_i(x)^{e_i}|f(x)$，

theorem：数域K上多项式 $f(x)$ 没有重因式 $\Longleftrightarrow$ $f(x)$ 与 $f'(x)$ 互素 (proof)

证明存在性 + 唯一性.
proof

数域P中每一个次数>0的多项式 $f(x)$ 均可唯一地分成数域P上一些不可约多项式的乘积

$f(x)=\prod_{i=1}^{s}p_i(x)=\prod_{j=1}^{t}p_j(x)$ 必有 $s=t$，并且经过适当排序后有 $p_i(x)=c_iq_i(x)$
$i=1\sim s$

$f(x)=c\,p_1^{r_1}(x)\,p_2^{r_2}(x)\cdots\cdots p_s^{r_s}(x)$
c为 $f(x)$ 首项系数，$p_1(x)\sim p_s(x)$ 为互异首1不可约多项式
$r_1\sim r_s\in N^*$ (标准分解式).

重因式

def：在 $P[x]$ 中，if $p^{k}(x) \mid f(x)$ 而 $p^{k+1}(x) \nmid f(x)$，不可约多项式 $p(x)$ is called $f(x)$ 的 k 重因式

theorem：if 不可约多项数 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的 k 重因式 $p(x) \mid f(x)$，则 $p(x)$ 为 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式 $p^{k-1}(x) \mid f'(x)$

（$f(x)$ 的单因式不是 $f'(x)$ 的因式）

theorem：数域 K 上多项式 $f(x)$ 没有重因式 $\Longleftrightarrow$ $f(x)$ 与 $f'(x)$ 互素

不可约 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的重因式 $\Longleftrightarrow$ $p(x)$ 为 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 公因式.

proof consider 因式的次数

不可约多项式 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的 k 重因式 $\overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow}$ $p(x)$ 为 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式

theorem：$f(x)$，$g(x)$ 次数不超过 n，有 $n+1$ 个不相同根，则 $f(\alpha_i)=g(\alpha_i)$ $i=1\sim n+1$.

$f(x)$ 与 $g(x)$ 作为代数形式上相等 $\Longleftrightarrow$ 函数相等

$f(x)$ 有无重因式与数域扩大没有关系（代余除法 / 整除 / gcd / 互素 / 重因式）

可约会随数域变化而变化.

多项式重要等式

1、$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$

2、$u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x)$

3、$f(x) = c\, p_1^{r_1}(x)\, p_2^{r_2}(x) \cdots p_s^{r_s}(x)$

多项式函数

def：set $f(x) \in K[x]$，$b \in K$，if $f(b)=0$，称 b 是 $f(x)$ 的一个根/零点

theorem：set $f(x) \in K[x]$，$b \in K$，$\exists\, g(x) \in K[x]$ s.t. $f(x) = (x-b)g(x) + f(b)$，b 为 $f(x)$ 的根 $\Longleftrightarrow$ $(x-b) \mid f(x)$.

余数定理

def：set $f(x) \in K[x]$，$b \in K$，if $\exists\, k \in N^*$ s.t. $(x-b)^k \mid f(x)$，但 $(x-b)^{k+1}$ 不能整除 $f(x)$，则称 b 为 $f(x)$ 一个 k 重根，if $k=1$，b 为单根

theorem：$f(x)$ 为数域 K 上 n 次多项式，$f(x)$ 在 K 中最多有 n 个根

corollary：$f(x)$ 与 $g(x)$ 为 K 上 $\partial(f), \partial(g) \le n$，if $\exists$ K 上 $n+1$ 个不同数 $b_1 \sim b_{n+1}$ s.t. $f(b_i) = g(b_i)$ $i=1\sim n+1$，则 $f(x) = g(x)$

$f(x)$ 与 $g(x)$ 作为代数形式上相等 $\Longleftrightarrow$ 作为函数相等.

复系数与实系数多项式

代数基本定理：次数大于0的复数域上一元多项式至少有一复数根（待证明）

复系数多项式因式分解定理：每个次数≥1的复系数多项式，在复数域上都可以唯一地分解成一次因式的乘积

（复系数多项式具有标准分解式：$f(x)=a_n(x-\alpha_1)^{l_1}(x-\alpha_2)^{l_2}\cdots\cdots(x-\alpha_s)^{l_s}$） a_n—首项系数 $\alpha_1\sim\alpha_s$为不同复数 $l_1\sim l_s$为N^*

Vieta定理：$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 在K中有n个根 $x_1,x_2\cdots x_n$ 则

lemma：set $a+bi$ 为实数域上 $f(x)$的复根，$a-bi$ 也为$f(x)$复根、 (proof)

（由共轭复数定义易得 $a\in R \Longleftrightarrow \bar{a}=a$）

proof：$f(x)=\sum_{i=1}^{n}a_ix^i$ $(i=0\sim n)$ 不妨presume c为f(x)复根，故 $\sum_{i=1}^{n}a_ic_i=0$ $\xrightarrow[\text{共轭}]{\text{两边同取}}$ f(x)为实系数多项式，故 $\sum_{i=1}^{n}a_i\bar{c_i}=0$ $f(\bar{c})=\overline{f(c)}=0$

故 $\bar{c}$ 也为f(x)一个复根

实系数多项式因式分解定理：每个次数≥1的实系数多项式 在实数域上都可以唯一分解成 一次因式 与二次不可约因式的乘积

$f(x)=a_n(x-c_1)^{l_1}(x-c_2)^{l_2}\cdots(x-c_s)^{l_s}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}\cdots\cdots(x^2+p_rx+q_r)^{k_r}$

a_n—首项系数 $s\geq0$ $r\geq0$ $\sum l_i+2\sum k_j=\partial f(x)$ c.p.q全为实数 l.k为正整数 x^2+px+q 为两两互异的不可约多项式

$f(x)=x^n-1$ 在$\mathbb{R}$上因式分解

$(x-\frac{q}{p})\mid f(x)$

$(px-q)\mid f(x)$

$f(x)=(px-q)(b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_0)$

$a_n=pb_{n-1}$

$a_0=qb_0$

有理系数多项式

本源多项式的概念：一个非零的整系数多项式 $g(x)=\sum_{i=0}^{n}b_ix^i$ 的系数 $b_0\sim b_n$ 没有异于±1的公因子（即$b_0\sim b_n$互素）

则称g(x)为一个本原多项式

theorem：与f(x)相伴的本源多项式在相差正负号situation下是唯一的 (proof)

反证法

theorem：(Gauss引理) 两个本原多项式乘积仍为本原多项式. (proof)

theorem：f(x)在有理数域上可约⟺f(x)在整数上可约 (proof)

有理系数方程均可化为同解的整系数方程.

theorem：一个整系数多项式 always 被表示为 一个整数和若干个本原不可约多项式的乘积 （不计因式次序和符号时分解唯一） proof

theorem：设f(x)、g(x)为整系数多项式且g(x)为本原多项式，if $f(x)=g(x)h(x)$，其中h(x)为有理系数多项式，那么h(x)一定为整系数的. proof

解决有理根

theorem：$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ 为整系数多项式，$\frac{r}{s}$为有理根，r s互素 必有 $s\mid a_n$，$r\mid a_0$ if $a_n=1$ 则f(x)有理根均为整根，而且为a_0的因子 proof

$\frac{q}{p}$为解 $\begin{cases} p\mid a_n \\ q\mid a_0 \end{cases}$

解决是否可约

Eisenstein判别法：$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ 为一整系数多项式，if ∃素数p s.t. $\begin{cases} 1.\ p\nmid a_n \\ 2.\ p\mid a_{n-1},a_{n-2},\cdots,a_0 \\ 3.\ p^2\nmid a_0 \end{cases}$ 则f(x)在有理数域不可约 proof