section 4：二重积分的计算

$F(x)=\int_c^d f(x,y)\,dy \qquad (x,y)\in[a,b]\times[c,d]$

1. if $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 连续，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 (proof)

$\lim_{x\to x_0} F(x)=\lim_{x\to x_0}\int_c^d f(x,y)\,dy=\int_c^d \lim_{x\to x_0} f(x,y)\,dy = \int_c^d f(x_0,y)\,dy$

2. $F(x)$ 可积 $\int_a^b F(x)\,dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy$ (proof)

3. $f(x,y)$ 连续 且 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续 $\frac{dF(x)}{dx}=\int_c^d \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,dy$ (proof).

theorem 1：$f(x,y)$ 在矩形区域 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上可积，且对每个 $x\in[a,b]$ 积分 $\int_c^d f(x,y)\,dy$ 存在，则 $\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy=\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$

且 $\iint_D f(x,y)\,d\sigma=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy$

proof: $m_{ik}\Delta y_k\le\int_{y_{k-1}}^{y_k} f(\xi_i,y)\,dy\le M_{ik}\Delta y_k \qquad \sum m_{ik}\Delta y_k\le F(\xi_i)=\int_c^d f(\xi_i,y)\,dy\le\sum M_{ik}\Delta y_k$

$\sum\sum m_{ik}\Delta y_k\Delta x_i\le\sum F(\xi_i)\Delta x_i\le\sum\sum M_{ik}\Delta y_k\Delta x_i \qquad \lim_{\|T\|\to 0}\sum F(\xi_i)\Delta x_i=\iint_D f(x,y)\,d\sigma$

$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{r} F(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b F(x)\,dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy.$

set $f(x,y)$ 为区域 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上的可积函数，$\forall(x,y)\in D$，$F(x,y)=\iint_{D_{x,y}} f(u,v)\,du\,dv$

其中 $D_{x,y}=[a,x]\times[c,y]$ proof: 1) $F(u,v)$ 在D上连续 2) $f(x,y)$ D连续 proof: $\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}=f(x,y)$

(use def to proof 、见下一页)

?

只要重积分存在，累次积分必存在且相等 —— 勤次积分

直径 $d\Omega=\sup_{P,Q\in\Omega} d(P,Q)$. proof $\left\{\iint_{D=[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,d\sigma \quad \sum\sum<\sum F<\sum\sum\right.$

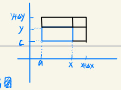
set $f(x,y)$ 为区域 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上的可积函数，$\forall (x,y)\in D$，$F(x,y)=\iint\limits_{D_{x,y}} f(u,v)\,du\,dv$

其中 $D_{x,y}=[a,x]\times[c,y]$ proof: 1) $F(u,v)$ 在D上连续 2) $f(x,y)$ D连续 proof: $\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}=f(x,y)$

1) proof: $F(u,v)$ 在D上连续，P_0 为D上一点(2维)，要证 $F(P)$ 在 P_0 点连续

积分中值定理

即证：$\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$ s.t. 当 $d(P_0,P)<\delta$ 时 有 $|F(P)-F(P_0)|<\varepsilon$



$|F(P)-F(P_0)| = \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} |F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x,y)| = \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \left|\iint\limits_{D_{x+\Delta x,\,y+\Delta y}} f(u,v)\,du\,dv-\iint\limits_{D_{x,y}} f(u,v)\,du\,dv\right|$

$=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \left|\int_a^{x+\Delta x}\int_c^{y+\Delta y} f(u,v)\,du\,dv-\int_a^x\int_c^y f(u,v)\,du\,dv\right| \neq \int_x^{x+\Delta x}\int_y^{y+\Delta y} f(u,v)\,du\,dv$ 注意画图

$=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \left|\cancel{\int_a^x\int_c^y f(u,v)\,du\,dv}+\int_x^{x+\Delta x}\int_c^y f(u,v)\,du\,dv+\int_x^{x+\Delta x}\int_y^{y+\Delta y} f(u,v)\,du\,dv+\int_a^x\int_y^{y+\Delta y} f(u,v)\,du\,dv-\cancel{\int_a^x\int_c^y f(u,v)\,du\,dv}\right|$

$=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \left|\int_x^{x+\Delta x}\int_c^y f(u,v)\,du\,dv+\int_x^{x+\Delta x}\int_y^{y+\Delta y} f(u,v)\,du\,dv+\int_a^x\int_y^{y+\Delta y} f(u,v)\,du\,dv\right| < \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} |\Delta x\cdot (d-c)\cdot M+\Delta x\cdot\Delta y\cdot M+(b-a)\cdot\Delta y\cdot M| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$

取 $\delta=\min\{\Delta x,\Delta y\}=\frac{1}{3\max\{d-c,\,b-a\}}$

$f(x,y)$ 可积，故 $f(x,y)$ 有界，不妨设 $f(x,y)<M$

$f(x,y)$ 为 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上的可积函数

$F(u,v)$ 连续 $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta$ s.t. $|x-x_0|<\delta$ $F($

即证：$F(u,v)$ 连续，$\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$ s.t. $|x-x_0|<\delta$ 时有 $|F(u+\Delta x,v)-F(u,v)|<\varepsilon$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}|F(u+\Delta x,v)-F(u,v)| = \left|\iint\limits_{D_{x+\Delta x,y}} f(u,v)\,du\,dv-\iint\limits_{D_{x,y}} f(u,v)\,du\,dv\right| = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left|\int_a^{x+\Delta x}dx\int_c^y f(u,v)\,dy-\int_a^x dx\int_c^y f(u,v)\,dy\right|$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\int_x^{x+\Delta x}dx\int_c^y f(u,v)\,dy < \lim\limits_{\Delta x\to 0}\int_x^{x+\Delta x}dx\int_c^y M\,dy < (d-c)\cdot M\cdot\Delta x < \frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$

因为 $f(x,y)$ 为可积函数，故 $f(x,y)$ 有界，不妨设 $f(x,y)<M$ 取 $\delta=x-x_0=\frac{\varepsilon}{2(d-c)M}$ 得

同理可得 $\lim\limits_{\Delta y\to 0}|F(u,v+\Delta y)-F(u,v)|<\varepsilon$，故 $F(u,v)$ 在D上连续 (该证法为错误证法)

2) $f(x,y)$ D连续 proof: $\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}=f(x,y)$

积分第一中值定理：$\xi\in(x,x+\Delta x)$

$\frac{\partial F}{\partial x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{|F(u+\Delta x,v)-F(u,v)|}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\left|\iint\limits_{D_{x+\Delta x,y}} f(u,v)\,du\,dv-\iint\limits_{D_{x,y}} f(u,v)\,du\,dv\right|}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\left|\int_x^{x+\Delta x}\int_c^y f(u,v)\,dv\,du\right|}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\int_c^y f(\xi,v)\,dv\cdot\Delta x}{\Delta x}=\int_c^y f(x,v)\,dv$

$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\frac{\partial(\frac{\partial F}{\partial x})}{\partial y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\int_c^{y+\Delta y} f(x,v)\,dv-\int_c^y f(x,v)\,dv}{\Delta y}=\frac{\int_y^{y+\Delta y} f(x,v)\,dv}{\Delta y}\overset{\text{积分第一中值定理}}{\underset{\eta\in(y,y+\Delta y)}{=}}\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,\eta)\int_y^{y+\Delta y}dv}{\Delta y}=f(x,y)$

同理可得 $\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}=f(x,y)$ 故 $\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}=f(x,y)$

设 $I=[a,b]\times[c,d]$ $f:I\to R$ 记号 $f(x,\cdot)$ 表示把 x 固定在 $[a,b]$ 中 是关于 y 变量的函数

不妨 set 函数 f 在闭矩形 I 上有界，令 $\varphi(x)=\underline{\int_c^d} f(x,y)\,dy$ $\psi(x)=\overline{\int_c^d} f(x,y)\,dy$

(只要 f 在 I 上有界，函数 φ 和 ψ 在 $[a,b]$ 上就都有定义)

若 $\forall x\in[a,b]$，函数 $f(x,\cdot)$ 在 $[c,d]$ 上都可积，通过积分得出定义在 $[a,b]$ 上的函数 $\varphi(x)=\int_c^d f(x,y)\,dy$ $(x\in[a,b])$

若 函数 φ 又在 $[a,b]$ 上可积，则又得函数 $\int_a^b \varphi(x)\,dx=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx$ —— 这个叫作累次积分，也可记作 $\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx$

theorem：if f 在 $I=[a,b]\times[c,d]$ 上可积，那么单变量函数 φ 与 ψ 在区间 $[a,b]$ 上可积 并且 $\int_I f\,d\sigma=\int_a^b\varphi(x)\,dx=\int_a^b\psi(x)\,dx$

proof: 分别对 $[a,b]$ 和 $[c,d]$ 分割 $\begin{cases}\pi_x: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\\ \pi_y: c=y_0<y_1<\cdots<y_m=d\end{cases}$ 令 $I_i=[x_{i-1},x_i]$ $i=1\sim n$，$J_j=[y_{j-1},y_j]$ $j=1\sim m$ 则子矩形 $I_i\times J_j$ 形成 $\pi=\pi_x\times\pi_y$ 令 $A=\int_I f\,d\sigma$

while π 满足 $\|\pi\|<\delta$ 时 $A-\varepsilon<\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m f(\xi_i,\eta_j)\Delta x_i\Delta y_j<A+\varepsilon$ 其中 $\xi_i\in I_i$ $\eta_j\in J_j$，现取分割 $\|\pi_x\|<\frac{\delta}{2}$ $\|\pi_y\|<\frac{\delta}{2}$ 有 $A-\varepsilon\le\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m \inf f(\xi_i,J_j)\Delta x_i\Delta y_j\le\sum\sum\sup f(\xi_i,J_j)\Delta x_i\Delta y_j\le A+\varepsilon$

$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m \inf f(\xi_i,J_j)\Delta x_i\Delta y_j$ 为 $f(\xi_i,\cdot)$ 在 $[c,d]$ 的下和 $\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m \inf f(\xi_i,J_j)\Delta x_i\Delta y_j\le\underline{\int_c^d} f(\xi_i,y)\,dy=\varphi(\xi_i)$ 同理可得 $\sum_{j=1}^m\sup f(\xi_i,J_j)\Delta y_j\ge\psi(\xi_i)$

故 $A-\varepsilon\le\sum\varphi(\xi_i)\Delta x_i\le\sum\psi(\xi_i)\Delta x_i\le A+\varepsilon\implies\lim_{\|\pi_x\|\to0}\sum_{i=1}^n\varphi(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{\|\pi_x\|\to0}\sum_{i=1}^n\psi(\xi_i)\Delta x_i=A$