Euclid空间

5.1 内积空间的概念

欧氏空间 (实内积空间) def:

V为实数域上线性空间，∃规则 对V中∀一组有序向量 (α,β)，∃!实数与之对应，记为 (α,β) 满足以下规则

(1) $(\beta,\alpha)=(\alpha,\beta)$

(2) $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$

(3) $(c\alpha,\beta)=c(\alpha,\beta)$ ，$c\in R$

(4) $(\alpha,\alpha)\geq 0$ （=成立 $\Leftrightarrow \alpha=0$）

称在V上定义了一个内积，实数 (α,β) 称为α与β的内积

线性空间V called 实内积空间，有限维实内积空间称为 Euclid 空间

酉空间 (复内积空间) def:

，∃! 复数 (α,β)

(1) $(\beta,\alpha)=\overline{(\alpha,\beta)}$

(2)

(3) ，$c\in ℂ$

(4)

复内积空间，有限 ··· 酉空间

注: $(\beta,k\alpha)=\bar{k}\,\overline{(\alpha,\beta)}$

长度为 = $\sqrt{内积}$

范数(向量长度) def: set V为内积空间 (ℂ or R)，$\alpha\in V$，def α的长度/范数 为

$\|\alpha\|=(\alpha,\alpha)^{\frac{1}{2}}$ ，即实数 (α,α) 的算术根

夹角余弦为: $\cos\theta=\dfrac{|(\alpha,\beta)|}{\|\alpha\|\cdot\|\beta\|}$ （实内积空间）/（复内积空间）

theorem: V为实or复内积空间，$\alpha,\beta\in V$，c为∀常数

(1) $\|c\alpha\|=\|c\|\cdot\|\alpha\|$

(2) $|(\alpha,\beta)|\leq\|\alpha\|\cdot\|\beta\|$ Cauchy-Schwarz 不等式 (proof)

(3) $\|\alpha+\beta\|\leq\|\alpha\|+\|\beta\|$ (proof)

例题: 1、$(\sum x_iy_i)^2\leq\sum(x_i)^2\cdot\sum(y_i)^2$

2、$[\int_a^b f(x)g(x)\,dx]^2\leq\int_a^b f^2(x)\,dx\cdot\int_a^b g^2(x)\,dx$ (proof)

1.2 内积的表示和正交基 (only consider limited space situation)

V 为欧氏空间(酉空间) $\{v_1 \sim v_n\}$ 为 V 一组基，记内积为 $(v_i, v_j) = g_{ij}$ $(i,j = 1 \sim n)$

对 V 中 $\forall$ 2 个向量 $\alpha = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$　$\beta = b_1v_1 + \cdots + b_nv_n$

$$(\alpha, \beta) = (\Sigma a_iv_i, \Sigma b_jv_j) = \sum_{i,j=1}^{n} a_ib_j\, g_{ij}$$

$$(\alpha, \beta) = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \underbrace{\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}}_{G} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

G is called $v_1 \sim v_n$ 的 Gram 矩阵 / 度量矩阵

内积在给定基下(欧氏空间)的表示：$(\alpha, \beta) = X'GY$　(X、Y 为 α、β 在给定基下的坐标向量)

G 为正定矩阵：1. $(v_i, v_j) = (v_j, v_i)$　G 为实对称阵

2. $\forall$ 非零向量 α，总有 $(\alpha, \alpha) > 0$，故 $X'GY > 0$

(酉空间) 的表示：$(\alpha, \beta) = X'HY$

H 为正定 Hermite 矩阵：$h_{ij} = \overline{h_{ji}}$　对角共轭的矩阵

def：set $\{e_1 \sim e_n\}$ 为 n 维内积空间 V 的一组基，if $e_i \perp e_j$ / $(e_i, e_j) = 0$，对 $\forall\, i \neq j$ 成立

该组基 is called V 的一组正交基 if V 的正交基长度均为 1，则正交基为标准正交基

线性无关 $\nLeftarrow$ 正交

lemma：内积空间 V 中 $\forall$ 一组两两正交的非零向量必线性无关 (proof)

theorem：V 为内积空间，$u_1 \sim u_m$ 为 V 中 m 个线性无关向量，则在 V 中 $\exists$ 两两正交向量 $v_1 \sim v_m$

$L(u_1 \sim u_m) = L(v_1 \sim v_m)$　　$v_{k+1} = u_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{(u_{k+1}, v_i)}{(v_i, v_i)} v_i$

✓ ☆ (Gram-Schmidt 方法) 得到一组标准正交基. (proof)

---

collary：任一有限维内积空间均有标准正交基

set $(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n)$ 和 $(\eta_1 \cdots \eta_n)$ 为 n 维实内积空间 V 的 2 组标准正交基

set $A = (a_{ij})$ 与 $B = (b_{ij})$ 分别为其度量矩阵，P 为它们之间过渡矩阵

有 $(\eta_1 \cdots \eta_n) = (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n) P$　　$(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n) \underline{\underline{PBP^T}} (\ )$

$PBP^T = A$

$$\underset{1 \times n}{(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n)} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

$PBP^T = A$　　$A = B = E$

故 $PP^T = E$

$$(\eta_1 \cdots \eta_n) \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}$$

det：设 $A\in M_n(\mathbb{R})$ 且 $A^TA=E$，称 A 为正交矩阵

theorem：set $\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n$ 和 $\eta_1\cdots\eta_n$ 为 n 维欧氏空间 V 的两组基，A 与 B 分别为度量矩阵，它们之间过渡矩阵为 P

1) A、B 为标准正交基，则 P 为正交矩阵

2) $A=I_n$，$P'P=I_n$，则 $B=I_n$

3) $B=I_n$，$P'P=I_n$，则 $A=I_n$

正交矩阵性质：1) $A'A=I_n \Leftrightarrow A^{-1}=A'$

2) A、B 为正交矩阵，AB 为正交矩阵 （按 det 去写即可）

3) $A'A=I_n$，A 的行/列向量为标准正交基

推论：上三角阵为正交阵 $\Leftrightarrow$ 主对角元素为 ±1 的对角阵

$\Leftarrow$：trivial　　$\Rightarrow$ 不妨 set A 为上三角矩阵　$AA^T=E$

9.3 伴随

线性算子

set V为n维内积空间，取V的一组标准正交基$\{e_1\cdots e_n\}$，假设φ为V上的线性变换，且在这组基下矩阵为 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

不妨设 $\alpha=\sum_{i=1}^{n} a_i e_i$　$\beta=\sum_{j=1}^{n} b_j e_j$，记 $x=(a_1\cdots a_n)^T$　$y=(b_1\cdots b_n)^T$ 分别为α,β的坐标向量

$(\varphi(\alpha),\beta)=(Ax)^T y = x^T(A^T y) = (\alpha,\psi(\beta))$ 对$\forall\alpha,\beta\in V$成立

def: 设V为n维内积空间，φ为V上的线性变换，$\exists$ 1 唯一的线性变换φ^* s.t. $\forall\alpha,\beta\in V$成立　(唯一性 proof).

$(\varphi(\alpha),\beta)=(\alpha,\varphi^*(\beta))$

theorem: V为n维内积空间，$\{e_1\sim e_n\}$为V的一组标准正交组．V上线性算子φ在该基下矩阵为A $\begin{cases} V\text{为酉空间，}\varphi^*\text{的表示矩阵为}(\bar{A})^T \\ V\text{为欧氏空间，}\varphi^*\text{的表示矩阵为 }A^T \end{cases}$

prop: V为n维内积空间，φ为V上线性算子

1) if U为φ的不变子空间，$U^\perp$为φ^*的不变子空间　(proof).

2) if φ的全体特征值为$\lambda_1\sim\lambda_n$，则φ^*全体特征值为$\bar{\lambda}_1\sim\bar{\lambda}_n$

5.3 欧氏空间的同构

set V为n维欧氏空间 $\{v_1 \cdots v_n\}$ 为V的一组标准正交基
R_n为n维实列向量空间，R_n内积为标准正交基
令$\varphi: V \longrightarrow R_n$ 的线性映射

$x \in V$，$x=\sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ $\quad \varphi(x)=(x_1, \cdots, x_n)^T$

def：V与U为域R上的欧氏空间，$\varphi: V \longrightarrow U$的线性映射，if $\forall x, y \in V$ 有 $(\varphi(x), \varphi(y))=(x, y)$

φ为$V \to U$保持内积的线性映射，if φ作为线性映射为同构，φ is $V \to U$的保积同构 $V \cong U$

线性空间$(V, +, \cdot)$

欧氏空间$(V, +, \cdot, (\ ))$

可用内积推出

注：1) if φ作为线性映射为同构，则φ为双射。if φ作为线性映射保持内积，则φ必为单射

2) 保持内积的同构关系为一个等价关系

3) if φ为保持范数的线性映射，则φ保持内积 $\quad (x, y)=\frac{1}{4}\|x+y\|^2-\frac{1}{4}\|x-y\|^2$

theorem：φ为欧氏空间上线性变换

φ为正交变换 $\Longleftrightarrow$ φ非异且$\varphi^{-1}=\varphi^{*}=\varphi^{T}$

theorem：A为n阶实(复)矩阵，A可分解为 $A=QR$

Q—正交(酉)矩阵 $\quad R$—主对角元素均>0的上三角阵

(A if 非异，分解唯一). $\quad$ (proof)

theorem：1、n维欧氏空间V同构于R^n(标准内积)

proof：取V的一组标准正交组 $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_n$，$\exists$ 线性映射 $\sigma: {}_{R}V \longrightarrow {}_{R}R^n$
$\alpha \longmapsto x$

$\forall \alpha \in V$，$\exists \alpha=(\varepsilon_1 \sim \varepsilon_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\quad x=(x_1 \cdots x_n)^T$ $\quad \sigma$为同构映射

$\forall \beta \in V$，$\sigma(\beta)=y \in R^n$ $\quad (\sigma(\alpha), \sigma(\beta))=(x, y)=\sum x_i y_i$

$(\alpha, \beta)=\sum x_i \delta_{ij} y_j=\sum x_i y_i$

2、2个欧氏空间V与U同构 $\Longleftrightarrow$ $\dim V=\dim=U$

5.4 正交变换

def：V为欧氏空间，$\mathscr{A}$为V上保持内积的线性变换，$\mathscr{A}$ is called 正交变换/正交算子

$\mathscr{A} \in Hom(V,V)$　$(\mathscr{A}\alpha, \mathscr{A}\beta) = (\alpha, \beta)$　$\forall \alpha, \beta \in V$

theorem：V为n维欧氏空间，$\mathscr{A} \in Hom(V,V)$，下列条件等价

1) $\mathscr{A}$为正交变换

2) $\|\mathscr{A}\alpha\| = \|\alpha\|$　(proof)

3) $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_n$为V的标准正交基，$\mathscr{A}\varepsilon_1 \sim \mathscr{A}\varepsilon_n$为V的标准正交基

4) $\mathscr{A}$在标准正交基下矩阵为正交矩阵

theorem：1、$\mathscr{A}$为正交变换，$\mathscr{A}$为V上同构映射

proof：1. 先证单射　2. 单→满　3. 秩零度定理

2、$\mathscr{A}$正交，$\mathscr{B}$正交，则$\mathscr{A}\mathscr{B}$正交

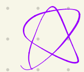
3、$\mathscr{A}$正交，$\varepsilon_1 \sim \varepsilon_n$为标准正交基，if $\mathscr{A}(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n) = (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n)A$，则 $A^TA = E$ 且 $|A| = \pm 1$

R^2 — orthogonal matrix　$\begin{cases} a: \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} & \text{逆时针旋转}\theta\text{角度} \\ b: \begin{bmatrix} c & s \\ s & -c \end{bmatrix} & \text{先反射，再旋转} \end{cases}$

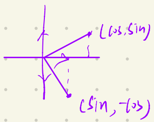
$c^2+s^2=1$　(自由度为1)

R^3 — orthogonal matrix　$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{bmatrix}$

$O(3) = \begin{cases} SO_3 \text{ proper rotation} & det=1 \\ \text{improper rotation} & det=-1 \end{cases}$



(课外知识拓展)



矩阵分解：

1) QR分解　$M = QR$　(Q正交/R上三角)

2) 奇异值分解　$M = U\Sigma V^T$　(U, V正交/Σ非负对角)

3) 谱分解　$S = Q\Lambda Q^T$　(Q正交，Λ对角)

4) 极分解　$M = QS$　(Q正交，S对称半正定)

5.5 欧氏空间的子空间

Bessel 不等式：$v_1 \sim v_m$ 为内积空间 V 中正交非零向量组，y 为 V 中任一向量，则 $\sum_{k=1}^{m} \frac{|(y,v_k)|^2}{\|v_k\|^2} \leq \|y\|^2$

（＝成立 while y 为 $v_1 \sim v_m$ 张成子空间）

def：set U 为 V 的子空间，令 $U^{\perp} = \{v \in V, (v,U) = 0\}$ means $\forall u \in U$ 均有 $(v,u)=0$

（$U^{\perp}$ 为 V 的子空间，称为 U 的正交补空间）

$y = y_1 + y_2$　$y_2 \in V_1^{\perp}$　下证 $y_1 = 0$

$(u,v) = 0$　$(v_1 + v_2, n)$

theorem：V 为 n 维内积空间，则有

1) $V = U \oplus U^{\perp}$

2) U 的 V 一组标准正交基均可扩张为 V 的一组标准正交基

theorem：V — n 维内积空间，$V_1 \sim V_k$ 为 V 的子空间，$\forall \alpha \in V_i$　$\forall \beta \in V_j$　均有 $(\alpha,\beta)=0$　称 V_i 和 V_j 正交

if $V = \sum_{i=1}^{k} V_i$ 且 V_i 两两正交，称 V 为 $V_1 \sim V_k$ 正交和，记为 $V = V_1 \perp V_2 \perp \cdots \perp V_k$

def：set $V = V_1 \perp V_2 \perp \cdots \perp V_k$，$V$ 上的线性变换 E_i $(i = 1 \sim k)$

if $V = \sum_{i=1}^{k} V_i$，令 $E_i(v) = v_i$，

则 E_i 为 V 上线性变换且 $E_i^2 = E_i$　$E_iE_j = 0$ $(i \neq j)$　$E_1 + \cdots + E_k = I_V$

线性变换 E_i is called V 到 V_i 上的正交投影

theorem：U 为内积空间 V 的子空间，$V = U \perp U^{\perp}$，E 为 V 到 U 正交投影

$\forall \alpha, \beta \in V$　有　$(E(\alpha), \beta) = (\alpha, E(\beta))$

---

def：set V_1 V_2 为欧氏空间 V 的 2 个子空间，if $\forall \alpha \in V_1$　$\beta \in V_2 \Rightarrow (\alpha,\beta) = 0$

称 V_1 与 V_2 正交，记 $V_1 \perp V_2$

theorem：设 $V_1 \sim V_s$ 为 V 的子空间，$\forall i,j$，$V_i \perp V_j$，$i \neq j$，有 $V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$ (proof)

0 的表示唯一去证　$0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$　$(0,\alpha_i)=0$　$(\sum \alpha_i, \alpha_i) = 0$　$(\alpha_i,\alpha_i) = 0$　$\alpha_i = 0$

故 0 表示唯一　$V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$ 为直和

def：设 V_1，V_2 为欧氏空间 V 的子空间，有 $V_1 \perp V_2$，$V = V_1 \oplus V_2$，

称 V_1 与 V_2 互为正交补空间。

theorem：V 中每个子空间 V_1 均有唯一的正交补空间（补空间不是唯一的）

proof

theorem：（正交补的求法）　$V_1^{\perp} = \{\beta \in V \mid \beta \perp V_1\}$

5.6 实对称矩阵的标准型

二次型 section：if $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ (or $\mathbb{C}^{n\times n}$) 为一个n阶对称阵，必∃ $\mathbb{R}^{n\times n}$ 上的可逆矩阵 P，s.t. $P^TAP=\Lambda$

实对称矩阵标准型 section：if $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ (or $\mathbb{C}^{n\times n}$) 为n阶对称阵，必∃ $\mathbb{R}^{n\times n}$ 的正交矩阵 P，s.t. $P^TAP=\Lambda$

def：if $\mathcal{A}\in Hom(V,V)$，V为欧氏空间，有 $(\mathcal{A}\alpha,\beta)=(\alpha,\mathcal{A}\beta)$ $\forall\alpha,\beta\in V$ 称$\mathcal{A}$为对称变换

finished

theorem：if $\mathcal{A}\in Hom(V,V)$，V为n阶欧氏空间，则 $\mathcal{A}$为对称变换 $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{A}$在标准正交基下矩阵为实对称阵

$\varepsilon_1\sim\varepsilon_n$ 为V的一组标准正交基，$(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=\delta_{ij}$，设 $\mathcal{A}(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)=(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)A$，$A=(a_{ij})$，

有 $\mathcal{A}\varepsilon_i=(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)\begin{pmatrix}a_{1i}\\a_{2i}\\\vdots\\a_{ni}\end{pmatrix}$ $(\mathcal{A}\varepsilon_i,\varepsilon_j)=(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{ni})\begin{pmatrix}0\\\vdots\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}=a_{ji}$，同理可得 $(\varepsilon_i,\mathcal{A}\varepsilon_j)=a_{ij}$

$\mathcal{A}$为对称变化，故 $a_{ij}=a_{ji}$

$X=(x_1,\cdots,x_n)^T$ $Y=(y_1,\cdots,y_n)^T$ $(\mathcal{A}\alpha,\beta)=(\alpha,\mathcal{A}\beta)\Leftrightarrow(\mathcal{A}(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)X,(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)Y)=((\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)X,\mathcal{A}(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)Y)$

$\alpha=(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)X$ $\beta=(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)Y$ $(\mathcal{A}(\varepsilon_i x_i),\varepsilon_j y_j)=a_{ji}x_iy_i$ $(\varepsilon_i x_i,\mathcal{A}(\varepsilon_j y_j))=a_{ij}x_iy_i$

① A、λ 实

② $A\alpha=\lambda\alpha$ $\alpha\in\mathbb{R}^n$

③ n个线无关

lemma：

1、if A为实对称矩阵，则A的特征值为实数 (proof)

2、$\mathcal{A}\in Hom(V,V)$，V为n维欧氏空间，$(\mathcal{A}\alpha,\beta)=(\alpha,\mathcal{A}\beta)$ $\forall\alpha,\beta\in V$ $\Rightarrow$ $\exists\gamma\in V$ s.t. $\mathcal{A}\gamma=\lambda\gamma$，$\lambda\in\mathbb{R}$

finished

3、对称变换的属于不同特征值的特征向量正交

4、$\mathcal{A}$为n维欧氏空间上对称变换，if V_1为$\mathcal{A}$的不变子空间，则$V_1^{\perp}$也是$\mathcal{A}$的不变子空间

theorem: $\mathcal{A}\in Hom(V,V)$，V为n维欧氏空间，if $(\mathcal{A}\alpha,\beta)=(\alpha,\mathcal{A}\beta)$ 则可找到一组标准正交基 $\alpha_1\sim\alpha_n$ s.t.

$$\mathcal{A}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$$

巧妙

proof.

推论：$\mathcal{A}\in Hom(V,V)$，V为n维欧氏空间，$\varepsilon_1\sim\varepsilon_n$为$V$的一组基，$\mathcal{A}(\varepsilon_1\sim\varepsilon_n)=(\varepsilon_1\sim\varepsilon_n)A$

1) A为实对角矩阵，$\mathcal{A}$有n个特征向量，构成V的标准正交基

2) if 该组基为标准正交基，且$\mathcal{A}$为对称变换，则A为实对称矩阵，$\exists$一组标准正交基$\alpha_1\sim\alpha_n$ s.t.

$$\mathcal{A}(\alpha_1\cdots\alpha_n)=(\alpha_1\cdots\alpha_n)\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}}_{B}\qquad P^TAP=B\qquad(\alpha_1\cdots\alpha_n)=(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)P$$

1) 过渡矩阵P为正交矩阵

2) A 正交相似于实对角阵

3) $\mathcal{A}$有n个特征向量构成V的标准正交基

4) A的所有特征值 代重$=n$重

$\mathcal{A}(\eta_1\cdots\eta_n)=(\eta_1\cdots\eta_n)A$　$\exists$正交矩阵P s.t. $P^{-1}AP=\Lambda$

构造 $(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)=(\eta_1\cdots\eta_n)P$

$\mathcal{A}(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)=(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)P^{-1}AP=(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)\Lambda$

$\mathcal{A}(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)=(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)\cdot\Lambda$
$=(\eta_1\cdots\eta_n)P\cdot\Lambda$

$\mathcal{A}(\eta_1\cdots\eta_n)P$
$=(\eta_1\cdots\eta_n)AP$

$P\cdot\Lambda=AP$
$=P^{-1}AP$.

例题计算：

$\dim V=4$　$\mathcal{A}\in Hom(V,V)$　$\varepsilon_1\sim\varepsilon_4$为$V$的一组标准正交基

$$\mathcal{A}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&1&-1\\1&0&-1&1\\1&-1&0&1\\-1&1&1&0\end{pmatrix}}_{A}$$

求组基 $\eta_1\sim\eta_4$ s.t. $\mathcal{A}(\eta_1\sim\eta_4)=(\eta_1\sim\eta_4)B$，$B$为对角阵

step1：求特征值，算出特征向量$\xi_1\sim\xi_4$ [构得可逆矩阵 $P(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)$ s.t. $P^{-1}AP=\Lambda$]

step2：将$\xi_1\sim\xi_4$正交化，再单位化，构得正交矩阵Q s.t. $Q^TAQ=\Lambda$

构得 $|\lambda E-A|=(1-\lambda)^3(\lambda+3)$　$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$　$\lambda_4=-3$

$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$时

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}-1&1&1&-1\\1&-1&-1&1\\1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&1&1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\quad\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\quad\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

对ξ_1,ξ_2,ξ_3进行正交化得

$$V_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\quad V_2=\begin{pmatrix}\frac12\\-\frac12\\1\\0\end{pmatrix}\quad V_3=\begin{pmatrix}-\frac13\\\frac13\\\frac13\\1\end{pmatrix}$$

单位化得 $W_1\sim W_3$

$W_1=\frac{1}{\sqrt2}V_1$　$W_2=\frac{\sqrt6}{2}V_2$　$W_3=\frac{2}{\sqrt3}V_3$

$\lambda_4=-3$时

$$|A-\lambda E|=\begin{pmatrix}3&1&1&-1\\1&3&-1&1\\1&-1&3&1\\-1&1&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&4&4\\0&4&0&4\\0&0&4&4\\-1&1&1&3\end{pmatrix}$$

$$\xi_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$\xi_1\sim\xi_3$与ξ_4正交，故对其单位化即可，

$$W_4=\frac12\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

故 $$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{\sqrt6}{4}&-\frac{2}{3\sqrt3}&\frac12\\\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{\sqrt6}{4}&\frac{2}{3\sqrt3}&-\frac12\\0&\frac{\sqrt6}{2}&\frac{2}{3\sqrt3}&-\frac12\\0&0&\frac{2}{\sqrt3}&\frac12\end{pmatrix}$$

$$Q^TAQ=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&-3\end{pmatrix}$$