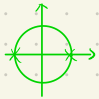
9.6 隐函数定理



条件　　　　结论

theorem（隐函数定理）：开集 $D \subset \mathbb{R}^2$，函数 $F: D \to \mathbb{R}$ 满足条件：

a、$F \in C^1(D)$　$\frac{\partial F}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial F}{\partial y}$ 在D中连续

b、$(x_0, y_0) \in D$ s.t. $F(x_0, y_0) = 0$　常数const也可

c、$\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y} \neq 0$

$\exists$ 包含 (x_0, y_0) 的开矩形 $I \times J \subset D$，s.t.：

1、$\forall x \in I$，$F(x,y)=0$ 在J中有唯一解

2、$y_0 = f(x_0)$

3、$f \in C^1(I)$　f在I上有连续的导数

4、$x \in I$ 时有 $f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}$，其中 $y = f(x)$　（略定理proof）

（多维情形的隐函数定理）：开集 $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$，$F: D \to \mathbb{R}$，满足条件

a、$F \in C^1(D)$

b、$F(x_0, y_0) = 0$　$x_0 \in \mathbb{R}^n$，$y_0 \in \mathbb{R}$ 且 $(x_0, y_0) \in D$

c、$\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y} \neq 0$

$\exists (x_0, y_0)$ 的邻域 $G \times J$，G为 x_0 在 $\mathbb{R}^n$ 一个邻域，J为R中含 y_0 开区间

1、$\forall x \in G$，$F(x,y)=0$ 在J中有唯一解

2、$y_0 = f(x_0)$

3、$f \in C^1(G)$

4、$x \in G$ 时 $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}$

9.7 隐映射定理

F def 在开集 $D\subset R^{m+n}$ 上，在 $m\times(n+m)$ 矩阵

$$JF=\begin{array}{c}\begin{array}{cc} J_xF & J_yF \end{array}\\ \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} & \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}\end{array}$$

中作分块：$JF=(J_xF, J_yF)$，其中

$$\begin{cases} J_xF=\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \\ J_yF=\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix} \end{cases}$$

theorem：开集 $D\subset R^{m+n}$，$F: D\to R^m$，满足下列条件：

a、$F\in C^1 D$

b、$(x_0,y_0)\in D$ s.t. $F(x_0,y_0)=0$

c、$\det J_yF(x_0,y_0)\neq 0$

∃ (x_0,y_0) 邻域 $G\times H$ s.t.

1、$\forall x\in G$，有唯一解 $f(x)$

2、$y_0=f(x_0)$

3、$f\in C^1(G)$

4、$x\in G$ 时 $Jf(x)=-[J_yF(x,y)]^{-1}J_xF(x,y)$，其中 $y=f(x)$

9.8 逆映射定理

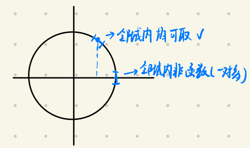
隐函数定理：

隐函数定义：设 $E\subset R^{n+1}$，$F: E\to R$，和方程 $F(P,y)=0$　　$(E=I\times J)$

计 $\exists\ I\subset R^n$、$J\subset R$，s.t. $\forall\ P\in I$，有唯一确定的 $y\in J$ 与之对应

使得 $(P,y)\in E$，且满足 $F(P,y)=0$，称由 $F(P,y)=0$ 确定了一个定义在 I，值域 J 的隐函数

将此隐函数记为 $y=f(P)$，$P\in I$，$y\in J$，则成立恒等式 $F(P,f(P))\equiv 0$，$P\in I$



$x^2+y^2=1$

$y=\pm\sqrt{1-x^2}$

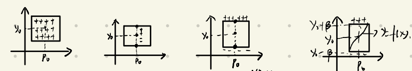
$y=\sqrt{1-x^2}$

$y=-\sqrt{1-x^2}$

当 $|x|>1$ 时 无意义.

$x\to 1$ 时 近似取直线

(充分条件)



a　b　c　d

3+4.　2　1

隐函数存在唯一性定理：(局部性的隐函数存在定理)

设 $F(P,y)=0$ 中的函数 $F(P,y)$ 满足以下四个条件

1. $F(P,y)$ 在以 (P_0,y_0) 为内点某区域 $E\subset R^{n+1}$ 上连续

2. $F(P_0,y_0)=0$

3. 在E内存在连续的偏导数 $F_y(P,y)$

4. $F_y(P_0,y_0)\neq 0$

3. $F_x(P,y)$ 连续

4. $F_x(P_0,y_0)\neq 0$
$\Downarrow$
$x=g(y)$

可以得到：

1、$\exists\ U(P_0)\subset D$，在 $U(P_0)$ 内由 $F(P,y)=0$ 唯一确定一个隐函数 $y=f(P)$，$P\in U(P_0,\alpha)$

满足 $f(P_0)=y_0$，当 $P\in U(P_0,\alpha)$ 时 s.t. $(P,f(P))\in U((P_0,y_0))$，$F(P,f(P))\equiv 0$

(一一对映)

2、$f(P)$ 在 $U(P_0,\alpha)$ 上连续

(连续)

隐函数可微性定理：

设函数 $F(P,y)$ 满足隐函数存在定理中的4个条件，同时在E内存在连续的 $F_{x_i}(P,y)$

则由方程 $F(P,y)=0$ 所确定的隐函数 $y=f(P)$ 在 I 内有连续的导函数，且

$$\frac{\partial f(P)}{\partial x_i}=-\frac{F_{x_i}(P,y)}{F_y(P,y)}\quad (P,y)\in I\times J\quad i=1\sim n\quad P=(x_1,x_2,\cdots x_n)\quad \begin{cases} I=U(P_0,\alpha)\\ J=(y_0-\beta,y_0+\beta)\end{cases}$$

proof: $y=f(P)$　$y+\Delta y=f(P+\Delta P)$　由条件得 $F(x,y)$ 可微，有 $F(x,y)=0$，$F(x+\Delta x,y+\Delta y)=0$

use 微分中值定理得 $\exists\,\theta$，s.t. $F(P+\Delta P,y+\Delta y)-F(P,y)=\sum F_{x_i}(P+\theta\Delta P,y+\theta\Delta y)\Delta x_i+F_y(P+\theta\Delta P,y+\theta\Delta y)\Delta y$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x_i}=-\frac{F_{x_i}(P+\theta\Delta P,y+\theta\Delta y)}{F_y(P+\theta\Delta P,y+\theta\Delta y)}\qquad \frac{\partial f(P)}{\partial x_i}=\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x_i}=-\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{F_{x_i}(P+\theta\Delta P,y+\theta\Delta y)}{F_y(P+\theta\Delta P,y+\theta\Delta y)}=-\frac{F_{x_i}(P,y)}{F_y(P,y)}\quad (P,y)\in I\times J$$

显然 $\frac{\partial f(P)}{\partial x_i}$ 也是连续函数

$y'=-\frac{F_x}{F_y}$

while $F(P,y)$ 存在二阶连续偏导数时，所得隐函数也二阶可导

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2}=-\frac{1}{F_y}\left(F_{x_ix_i}+2F_{x_iy}\,y'+F_{yy}\,y'^2\right)$$

$$=\frac{2F_{x_i}F_yF_{x_iy}-F_y^2F_{x_ix_i}-F_{x_i}^2F_{yy}}{F_y^3}$$

(不用记，用链式法则推导)

隐映射定理：

set $E\subset R^n$ 为子集，$P\in E$，$f: E\to R^m$，$Q=f(P)$

set $E\subset R^{n+m}$ 为开集，$F: E\to R^m$ 的映射，计：$f: E\to R^m$，$Q=f(P)$

满足以下三个条件

1) $F\in C^k(E,R^m)$ — F具有k阶连续偏导映射，即 $F=(F_1,\cdots,F_m)^T$

2) $F(P_0,Q_0)=0$，其中 $P_0=(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ $Q_0=(y_1^0,\cdots,y_m^0)$

即有m个方程；$F(P_0,Q_0)=(F_1,\cdots,F_m)^T_{(P_0,Q_0)}=0$.

3) $\det(J_Q F(P_0,Q_0))\neq 0$，即 $\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}\neq 0$

$\xRightarrow{\text{可推导得}}$

$\exists$ 包含 (P_0,Q_0) 的一个区间 $I\times J\subset E\subset R^{n+m}$，s.t.

1) $\forall P\in I$，方程组 $F(P,Q)=0$ 在 J 中有唯一解 $Q=f(P)$　$f: I\to J$ 为隐藏在 $F(P,f(P))=0$ 的方程中

2) $Q_0=f(P_0)$

3) $f\in C^k(I,R^m)$

4) $P\in I$，$Jf(P)=-(J_Q F(P,Q))^{-1} J_P F(P,Q) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$，其中 $Q=f(P)$

example：

设函数 $f(x,y)$　$g(x,y)$ 具有连续偏导数，$u=u(x,y)$　$v=v(x,y)$ 由方程组 $\begin{cases} u=f(ux,\ v+y) \\ g(u-x,\ v^2y)=0 \end{cases}$

所确定的隐函数组，试求 $\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial v}{\partial y}$

不妨设 $\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u-f(ux,v+y)=0 \\ g(u-x,v^2y)=0 \end{pmatrix}$，则有 $\begin{bmatrix} F_x & F_y & F_u & F_v \\ G_x & G_y & G_u & G_v \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -uf_1 & -f_2 & 1-xf_1 & -f_2 \\ -g_1 & v^2g_2 & g_1 & 2vyg_2 \end{bmatrix}$

故 $P=(x,y)$　$Q=(u,v)$

由 $Jf(P)=-[J_Q F(P,Q)]^{-1} J_P F(P,Q)$ 得 $\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 1-xf_1 & -f_2 \\ g_1 & 2vyg_2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -uf_1 & -f_2 \\ -g_1 & v^2g_2 \end{pmatrix}=\dfrac{\begin{pmatrix} 2yuvf_1g_2+f_2g_1 & 2vyf_2g_2-v^2f_2g_2 \\ g_2-uf_1g_1-xf_1g_2 & xv^2f_1g_2-v^2g_2-f_2g_2 \end{pmatrix}}{f_2g_1+2vyg_2-2xyvf_1g_2}$

$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot A^*$

$A^*=(A_{ji})$ 伴随矩阵. A_{ji} 为 a_{ji} 的代数余子式 $[(-1)^{i+j}M_{ij}]$

逆映射：

局部逆映射定理：

设 $E\subset R^n$ 为开集，$f: E\to R^n$，计

1) $f\in C^k(E,R)$，$k\geq 1$

2) $f(P_0)=Q_0$，其中 $P_0\in E$，$Q_0\in R^n$

3) $\det J_P f(P_0)\neq 0$，即 $\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}\neq 0$

$\Longrightarrow$

则 $\exists$ P_0 的开邻域 U 与 Q_0 的开邻域 V s.t.

1) $f(U)=V$，且 f 在 U 上为单射

2) g 为 f 在 U 上的逆映射，$g\in C^k(V,U)$

3) $Q\in V$ 时，$J_Q g(Q)=(J_P f(P))^{-1}$

$P=g(Q)$，$Q=f(P)$，$f: U\to V$ 为 C^k 微分同胚

一一映射（可非连续）

同构为连续的一一映射

整体逆映射定理：

设 $E\subset R^n$ 为开集，$f: E\to R^n$，计

(1) $f\in C^k(E,R^n)$ $k\geq 1$

(2) $\forall P\in E$，$\det Jf(P)\neq 0$；则 $V=f(E)$ 为开集

(3) f 为 E 上的单射

$\Longrightarrow$

f $\exists$ 逆映射 $f^{-1}: V\to U$

即 $P=f^{-1}(Q)$ $Q=f(P)$

$f\in C^k(V,E)$，且 $Jf^{-1}(Q)=(Jf(P))^{-1}$

$Q=f(P)$ 可详写为：$(y_1,\cdots,y_n)^T=(f_1(x_1\cdots x_n),f_2(x_1\cdots x_n),\cdots,f_n(x_1\cdots x_n))^T$

$$Jf^{-1}(Q)=(Jf(P))^{-1}:\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\frac{\partial(x_1\cdots x_n)}{\partial(y_1\cdots y_n)}=\frac{1}{\frac{\partial(y_1\cdots y_n)}{\partial(x_1\cdots x_n)}}$$

隐函数在几何上的应用：

一、切空间与切向量

def1: set Δ为R^s中的开集， $X:\Delta\to R^n$ 即 $\left\{\begin{array}{l} u=(u_1,u_2,\cdots,u_s)^T \\ \downarrow \\ X(u)=(x_1(u_1\cdots u_s),\cdots,x_n(u_1\cdots u_s))^T \end{array}\right.$ 为一个mapping 则称 $S: X(\Delta)=\{X(u): u\in\Delta\}$ 为n维曲面，而 $X(u)$ is called 曲面S的参数表示

当 $X(u)$为C^k $(k\geq 0)$时称S为C^k曲面， 当 $\text{rank}(X_{u_1}(u^0),\cdots,X_{u_s}(u^0))^T=\text{rank}\begin{pmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_s}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_s}\end{pmatrix}=s$ 时，称 $X(u^0)$ 为曲面S的正则曲面，否则称为奇异点。

列满秩

if 曲面上$\forall$ point 都为正则点，则称S为s维C^k光滑曲面， trivial $(X_{u_1}(u),X_{u_2}(u),\cdots,X_{u_s}(u))$ 是线性无关的

def2: 设$X(u)$为 s维 $C^k(k\geq1)$正则曲面S，称X_{u_i}为关于参数坐标u_i的坐标切向量，它是曲线 $X_i=X_i(u_1^0,\cdots,u_{i-1}^0,u_i,u_{i+1}^0,\cdots,u_n^0)$ $i=1\to n$ 的切向量.

由于 $X(u)$为正则曲面，故$\text{rank}(X'_{u_1}\cdots X'_{u_s})^T=s$ ，即 $(X'_{u_1},X'_{u_2},\cdots,X'_{u_s})$ 线性无关，故 $T_{X(u^0)}S=\{\sum_{i=1}^{s}\alpha_i X'_{u_i}(u^0)\mid\alpha_i\in R\}$ 为曲面S在$X(u^0)$处的切空间

切向量

$T_{X(u^0)}S$ 的每个向量称为曲面S在$X(u^0)$处的切向量　$T_{X(u^0)}S$是s维线性向量空间

theorem 1: set 曲面S: $X(u)$ 在$u^0\in\Delta$处可微，$\{X'_{u_1}(u^0),\cdots,X'_{u_s}(u^0)\}$ 线性无关， $u^0=u(0)$ 为$u(t)$在$t=0$处可导，则 $\left.\frac{dX(u(t))}{dt}\right|_{t=0}\in T_{X(u^0)}S$ → 真正代表的意思就是

t=0处的切线

线性面来

反之，$\forall\{\alpha_i\}_{i=1}^{s}\in R^s$，$\sum_{i=1}^{s}\alpha_i X'_{u_i}(u^0)\in T_{X(u^0)}$，必$\exists$ $X(u(t))\in S$ s.t. $u(0)=u^0$ 且 $\left.\frac{dX(u(t))}{dt}\right|_{t=0}\in T_{X(u^0)}S$

设 $X:(a,b)\to R^n$ 为C^k正则曲线，记为C　$(x_1,\cdots,x_n)^T=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))^T$　$t\in[a,b]$

曲线C在t_0的切向量

切空间：$T_{X(t_0)}C=\{\alpha X'(t_0)\mid\alpha\in R\}$　$\frac{y_1-x_1(t_0)}{x'_1(t_0)}=\frac{y_2-x_2(t_0)}{x'_2(t_0)}=\cdots=\frac{y_n-x_n(t_0)}{x'_n(t_0)}\;(=\alpha)$

在$X(t_0)$处切线为：$y=X(t_0)+\alpha X'(t_0)$

在$X(t_0)$处法平面为：$x'_1(t_0)[y_1-x_1(t_0)]+x'_2(t_0)[y_2-x_2(t_0)]+\cdots+x'_n(t_0)[y_n-x_n(t_0)]=0$

切空间与某一点处的切超平面

特殊情况：$\Delta \subset R^2$ 为开集，$F: \Delta \to R^3$

$(u,v) \mapsto F(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))^T$ 为 C^k 映射

$\operatorname{rank}(F_u, F_v) = 2$，$S = F(\Delta)$ 是 C^k 正则超曲面（列满秩）

切空间：

$$T_{F(u,v)} S = \{\alpha_1 F_u(u,v) + \alpha_2 F_v(u,v) \mid (\alpha_1, \alpha_2) \in R^2\}$$

在 (u,v) 处切（超）平面：

$$y = F(u,v) + \alpha_1 F_u(u,v) + \alpha_2 F_v(u,v)$$

一般化后：设 $\Delta \subset R^{n-1}$ 为开集，$F: \Delta \to R^n$

$$u = (u_1, u_2, \cdots, u_{n-1}) \mapsto F(u_1, u_2, \cdots, u_{n-1}) = (x_1(u_1, \cdots, u_{n-1}), x_2(u_1, \cdots, u_{n-1}), \cdots, x_n(u_1, \cdots, u_{n-1}))^T$$

为 $C^k (k \geq 1)$ 映射，$\operatorname{rank}(F_{u_1}, \cdots, F_{u_{n-1}}) = n-1$，$S = F(\Delta)$ 是 $n-1$ 维正则超曲面

切空间：

$$T_{F(u)} S = \{\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i F_{u_i}(u) \mid (\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}) \in R^{n-1}\}$$

在 $(u_1, u_2, \cdots, u_{n-1})$ 处切（超）平面：

$$y = F(u_1, \cdots, u_{n-1}) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i F_{u_i}(u)$$

切平面的法向量表示

特殊情形：在点 $F(u,v)$ 的法向量 $n(u,v)$ 是

$$n(u,v) = F_u(u,v) \times F_v(u,v)$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_u(u,v) & y_u(u,v) & z_u(u,v) \\ x_v(u,v) & y_v(u,v) & z_v(u,v) \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right)$$

一般情况：设 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 为 R^n 的标准正交基，

则 $n-1$ 维在 $F(u)$ 的法向量为

$$n(u) = \begin{vmatrix} e_1 & \cdots & e_n \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_{n-1}} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_{n-1}} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{\partial(x_1, x_2, \cdots \overline{x_i} \cdots x_n)}{\partial(u_1, u_2, \cdots, u_{n-1})} e_i$$

（$\overline{x_i}$ represent 缺失分量）.

$$n(u) \cdot \frac{\partial F}{\partial u_i} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_i} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_i} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_{n-1}} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_{n-1}} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{or} \quad [y - F(u)] \cdot n(u) = 0 \qquad y = (y_1, \cdots, y_n)$$

$n(u)$ 未必为单位向量，故仍需求出其模长，此处省略相关步骤，直接给出计算结果

$$g_{ij} = F_{u_i} \cdot F_{u_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_k}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial u_j} \qquad i,j = 1 \sim n$$

$$\|n(u)\| = \det^{\frac{1}{2}}(g_{ij}) \qquad n_0(u) = \pm \frac{n(u)}{\|n(u)\|} = \pm \frac{1}{\det^{\frac{1}{2}}(g_{ij})} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{\partial(x_1, x_2 \cdots \overline{x_i} \cdots x_n)}{\partial(u_1, \cdots u_i \cdots, u_{n-1})} e_i$$

g_{ij} 即为第一基本量，$n=3$ 时为 E, G, F

n 维空间，$n-1$ 维曲面

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 &= x_1(u_1, u_2, \cdots, u_{n-1}) \\ x_2 &= x_2(u_1, u_2, \cdots, u_{n-1}) \\ &\vdots \\ x_n &= x_n(u_1, u_2, \cdots, u_{n-1}) \end{aligned} \right.$$

固定 $n-2$ 个未知数，则为 1 维曲线

二、法空间与法向量

上述讨论了 $C^k(k\geq 1)$ 正则超曲面的切空间与法向量，那么 s 维的 C^k 的正则曲面的法空间该如何表示

我们希望可用 切空间 $T_{F(u)}S$ 的基 $\{F_{u_1},\cdots,F_{u_{n-1}}\}$ 来表示 法空间 $T^{\perp}_{F(u)}S=\{n \mid n\perp T_{F(u)}S$，即 $n\cdot F_{u_i}(u)=0 \quad i=1,2,\cdots,n-1\}$

（事实上，法空间就是切空间的正交补空间）

设 $F(u)=F(u_1,\cdots,u_s,\cdots,u_n)$ 为 C^k 阶 s 维的正则超曲面，$u=(u_1,\cdots,u_s,\cdots,u_n)=(P,Q)$，$P=(u_1,\cdots,u_s)$，$Q=(u_{s+1},\cdots,u_n)$，则 $J_uF=(J_PF,J_QF)$

由于 $\operatorname{rank}(J_uF)=s$，不妨设 $\operatorname{rank}(J_PF)=s$

因为 $(J_PF,J_QF)\cdot\begin{pmatrix}-(J_PF)^{-1}J_QF\\ I_{n-s}\end{pmatrix}=-J_QF+J_QF=0$

故 (J_PF,J_QF) 与 $(-(J_PF)^{-1}J_QF \quad I_{n-s})^T$ 正交

$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}-(J_PF)^{-1}J_QF\\ I_{n-s}\end{pmatrix}=n-s$

故 $\begin{pmatrix}-(J_PF)^{-1}J_QF\\ I_{n-s}\end{pmatrix}$ 为 $T^{\perp}_{F(u)}S$ 的基

由 $J_uF(J_PF,J_QF)$ 来表示，是 $\operatorname{span}(J_uF)$ 正交补空间

example 1：set $\Delta\subset\mathbb{R}^n$ 为开集，$f:\Delta\to\mathbb{R}^1$

$u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)\longmapsto c=f(u_1,u_2,\cdots,u_n)\in\mathbb{R}^1$ 为 C^k 映射，

$\operatorname{rank}(f_{u_1},f_{u_2},\cdots,f_{u_n})=1 \qquad S=f^{-1}(c)=\{(u_1,\cdots,u_n)\in\Delta \mid c=f(u),u\in\Delta\}$

或为 ϕ，或为 C^k 流形，或为 C^k 超曲面。

proof：$S\neq\phi$，则 $\operatorname{grad}f=(f_{u_1},\cdots,f_{u_n})$ 法向量场；若 $u^0\in S$ 为定点，则

过 u^0 的切平面为 $(u-u^0)\cdot\operatorname{grad}f=0$ / $\sum_{i=1}^{n}(u_i-u_i^0)\frac{\partial f(u^0)}{\partial x_i}=0$

法一：$f[u(t)]=c$ 即 $f[u_1(t),u_2(t),\cdots,u_n(t)]=c$，关于 t 两边求导可得

$$J_uf\cdot J_tu=(f_{u_1},\cdots,f_{u_n})\begin{pmatrix}\frac{du_1(t)}{dt}\\ \vdots\\ \frac{du_n(t)}{dt}\end{pmatrix}=0$$

法二：由隐映射 $\frac{\partial f}{\partial u_n}\neq 0$ 可得 $f[u_1,\cdots,u_n(u_1,\cdots,u_{n-1})]=c$

$$J_{(u_1\cdots u_{n-1})}f[u_1,\cdots,u_{n-1}(u_1,\cdots,u_{n-1})]=0$$

$$(f_{u_1},f_{u_2},\cdots,f_{u_n})\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\ 0&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&0&\cdots&1\\ \frac{\partial u_n}{\partial u_1}&\frac{\partial u_n}{\partial u_2}&\cdots&\frac{\partial u_n}{\partial u_{n-1}}\end{pmatrix}=0$$

example 2：设一般的二次曲线为 $L: Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$，$P_0(x_0,y_0)\in L$

proof L 在 P_0 处切线：$Ax_0x+B(y_0x+x_0y)+Cy_0y+D(x+x_0)+E(y+y_0)+F=0$

令 $G(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F$ 　其法向量为 $\begin{pmatrix}G_x(P_0)\\ G_y(P_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2Ax_0+2By_0+2D\\ 2Bx_0+2Cy_0+2E\end{pmatrix}$

可得切线方程 $(Ax_0+By_0+D)(x-x_0)+(Bx_0+Cy_0+E)(y-y_0)=0$

而 $P_0(x_0,y_0)$ 在 L 上，即 $F=-[Ax_0x+B(y_0x+x_0y)+Cy_0y+D(x+x_0)+E(y+y_0)]$ □

可得 proof.

example 3：$L: x^2+y^2+z^2=50 \quad x^2+y^2=z^2$ 是 $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ 的 C^k 正则映射，求曲线在 $P_0(3,4,5)$ 处切线与法平面

法一：$\underbrace{(J_QF,J_PF)}_{法}\underbrace{\begin{pmatrix}I_{n-s}\\ -(J_PF)^{-1}J_QF\end{pmatrix}}_{切}=0$ 可求得切向量

曲面的切平面，R^3中曲面 通常有3种表示方式

1、曲面的显式表示：$z=f(x,y)$ $(x,y)\in D\subset R^2$

2、隐式曲面方程：$F(x,y,z)=0$ F在Ω上连续，$\frac{\partial F}{\partial x}$ $\frac{\partial F}{\partial y}$ $\frac{\partial F}{\partial z}$ 也连续

3、参数曲面方程：$\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \\ z=z(u,v)\end{cases}$ $(u,v)\in\Delta$

$x=x$
$y=y$
$z=z(x,y)$

$F(x,y,z(x,y))$

$z-z(x,y)=0$

曲面的切平面：

① 曲面显式表示：

$z=f(x,y)$，显式方程 always can be translated into 隐式方程

$F(x,y,z)=z-f(x,y)=0$ $(x_0,y_0)\in D$ 令 $z_0=f(x_0,y_0)$

$\frac{\partial F}{\partial x}$ + $\frac{\partial F}{\partial y}$ + $\frac{\partial F}{\partial z}$ = 0

$-f_x$ $-f_y$ 1

$(-f_x,-f_y,1)$ 为法向量

② 隐式曲面方程

$P_0(x_0,y_0,z_0)\in D$，作过P_0的曲面上的曲线 Γ，Γ参数方程 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t)\end{cases}$

将P_0代入得 $F(x(t),y(t),z(t))=0$

↓求导　　　　↓求导

$\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)x'(t)+\frac{\partial F}{\partial y}(P_0)y'(t)+\frac{\partial F}{\partial z}(P_0)z'(t)=0$

$$\underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial x}(P_0),\frac{\partial F}{\partial y}(P_0),\frac{\partial F}{\partial z}(P_0)\right)}_{\nabla F(P_0)：曲面在P_0处的法向量}\cdot\underbrace{(x'(t),y'(t),z'(t))}_{切向量}=0$$

在$P_0(x_0,y_0,z_0)$处的切平面方程：$(x-x_0)\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)+(y-y_0)\frac{\partial F}{\partial y}(P_0)+(z-z_0)\frac{\partial F}{\partial z}(P_0)=0$

$$\underbrace{(x-x_0,y-y_0,z-z_0)}_{P_0点处切平面}\cdot\underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial x}(P_0),\frac{\partial F}{\partial y}(P_0),\frac{\partial F}{\partial z}(P_0)\right)}_{P_0点处的法向量}=0$$

几何意义

③ 参数曲面方程

曲面Σ在点 (u,v) 处有法向量 $\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)$

$\|r_u \times r_v\|^2 = \|r_u\|^2\|r_v\|^2 - (r_u \cdot r_v)^2$ 模长

曲面Σ的单位法向量为：$\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)$

$$\begin{cases} E = \|r_u\|^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \\ F = r_u \cdot r_v = \frac{\partial x^2}{\partial u \partial v} + \frac{\partial y^2}{\partial u \partial v} + \frac{\partial z^2}{\partial u \partial v} \\ G = \|r_v\|^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \end{cases}$$

微分 → 切面

$z - z_0 = f_x(x-x_0) + f_y(y-y_0) + o(\rho)$.

$\downarrow$ $o(\rho)=0$

$z - z_0 = f_x(x-x_0) + f_y(y-y_0) \iff -f_x(x-x_0) - f_y(y-y_0) + z - z_0$

$(x-x_0), y-y_0, z-z_0$ 为平面上向量

$(-f_x, -f_y, 1)$ 为法向 $\iff$ 一般情况 $F(x,y,z)$ (F_x, F_y, F_z).

$\frac{x-x_0}{-f_x} = \frac{y-y_0}{-f_y} = \frac{z-z_0}{1}$ 法线。

条件极值

Lagrange 不定乘数法

def：set $E\subset R^{n+m}$ 为开集，$f: E\to R^1$ 为 n+m 元函数，$\phi: E\to R^m$ 为映射，$M=\{P\in E \mid \phi(P)=0\}$

若 $\exists\, P_0(\in M)$ 邻域 $U\subset R^{n+m}$ s.t. $f(P_0)=\min f(M\cap U)$ / $f(P_0)=\max f(M\cap U)$

称 $f(P_0)$ 为目标函数 f 在约束条件 $\phi(P)=0$ 下的条件极小(大)值；P_0 称为 f 的条件极小(大)值点。

$\xrightarrow{\text{高维 situation}}$

$P=(X,Y)\in R^{n+m}$，$\phi(P)=0$ 变为 $\phi(X,Y)=0$，若 ϕ 为 C^1 映射，且 $J_Y\phi\neq 0$（矩阵），$P_0=(X,Y)\in M$，有 $\phi(X_0,Y_0)=0$

由隐映射定理得 $\exists\, Y=\varphi(X)$ s.t. $Y_0=\varphi(X_0)$，X_0 即为 $f(X,\varphi(X))$ 达到极值的点，将 n+m 个变量由 $\phi(X,Y)=0$ 化为 n 个独立变量

theorem：set $E\subset R^{n+m}$ 为开集，$f: E\to R^1$ 为 n+m 元函数，$\phi(=(\phi_1,\cdots,\phi_m)^T): E\to R^m$ 为映射，$M=\{P\in E\mid \phi(P)=0\}$，$P_0\in M$

若：
1. $f\in C^1(E,R^1)$，$\phi\in C^1(E,R^m)$
2. rank $J\phi(P_0)=m$
3. P_0 为 f 在约束条件 $\phi(P)=0$ 下取到极值条件点

则 $\exists\, \Lambda_0\in R^m$，s.t. Λ_0 与 P_0 满足方程 $J_P f(P)+\Lambda J_P\phi(P)=0$（n+m 个行向量 0）

$\Lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)$，满足 n+m 个方程 $\frac{\partial f(P)}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\frac{\partial \phi_j(P)}{\partial x_i}=0 \quad i=1,2,\cdots,n+m$

Example：

1. 圆柱面：$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx-1=0$ 它与平面 $x+y-z=0$ 相交得椭圆，试求该椭圆的面积

(自原点至椭圆上任意点 (x,y,z) 距离 $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 最大/小值 即为长/短半轴)

$L=x^2+y^2+z^2+\lambda(x+y-z)-\mu(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx-1)$
$\begin{cases} L_x= \\ L_y= \\ L_z= \\ L_\lambda= \\ L_\mu= \end{cases}$

2. 试求函数 $f(x,y,z)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ $(x>0,y>0,z>0)$ 在条件 $xyz=a^3$ $(a>0)$ 下的最小值，由此导出不等式

不妨设 $L=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\lambda(xyz-a^3)$
$\begin{cases} L_x= \\ L_y= \\ L_z= \\ L_\lambda= \end{cases}$

$3(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})^{-1}\le\sqrt[3]{xyz}$

多元函数的泰勒公式

theorem (泰勒定理)：if $f: E(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ 在 P_0 邻域 $U(P_0)$ 内有直到 $n+1$ 阶的连续偏导数，对 $U(P_0)$ 内任一点 $(x_1^0+\Delta x_1, \cdots, x_n^0+\Delta x_n)$，$\exists \theta \in (0,1)$ s.t.

$f(P_0+\Delta P) = f(x_1^0+\Delta x_1, \cdots, x_n^0+\Delta x_n)$ （f在P_0点的m阶 Taylor 公式）

$$= f(x_1^0, \cdots, x_n^0) + \left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right) f(x_1^0, \cdots, x_n^0) + \frac{1}{2!}\left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 f(x_1^0, \cdots, x_n^0) + \cdots + \frac{1}{m!}\left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^m f(x_1^0, \cdots, x_n^0) + R_m$$

$$R_m = \frac{1}{(m+1)!}\left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{m+1} f(x_1^0+\theta\Delta x_1, \cdots, x_n^0+\theta\Delta x_n)$$

二元函数的 Taylor 公式：

$f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 有关于 x,y 的各个 m 阶连续偏导数，可取 Peano 余项 $R_m(x,y) = o(r^m)$，$r \to 0$，$r = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

(Taylor theorem)：if $f: D(\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ 在 P_0 的某邻域 $U(P_0)$ 内有直到 $m+1$ 阶的连续偏导数，对 $U(P_0)$ 内任一点 $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$，$\exists \theta \in (0,1)$ s.t.

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0) + \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0,y_0) + \frac{1}{2!}\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0) + \cdots + \frac{1}{m!}\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x_0,y_0) + R_m$$

$f(x_1, \cdots, x_n)$ 为 n元二次连续可微函数，$P_0(x_1^0, \cdots, x_n^0) \in D$

$$f(P_0+\Delta X) = f(P_0) + \nabla f(P_0) \cdot \Delta X^T + \frac{1}{2!} \Delta X Q \Delta X^T + o(r^2)$$

Lagrange 余项：$R_m(x,y) = \frac{1}{(m+1)!}\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right)^{m+1} f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)$

$\Delta X = (\Delta x_1, \cdots, \Delta x_n) = (x_1 - x_1^0, \cdots, x_n - x_n^0)$　　$\nabla f(P_0)$为 $f(x)$在P_0梯度

$Q = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)\Big|_{x=P_0}$　(Hesse 矩阵)

9.6 隐函数定理

9.7 隐映射定理

9.8 逆映射定理

9.9 高阶偏导数

可微 det： $f(x_0+h)-f(x_0)=Jf(x_0)h+\sum_{i=1}^{n}\beta_i(h)h_i$

微分 det： $f(x_0+h)-f(x_0)=Ah+r(h)$ $\quad A=(a_{ij})_{m\times n}$ $\quad a_{ij}=\frac{\partial f_i(x_0)}{\partial x_j}$ $\quad A/Jf(x_0)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_m(x_0)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m(x_0)}{\partial x_n}\end{pmatrix}$

$df(x_0)=Ah$

复合求导： $z_j=f_j(g_1(x_1\cdots x_m),\cdots,g_m(x_1\cdots x_m))$ $\quad j=1\cdots l$

z_j 对 x_i 的偏导为：

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial z_l}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial z_l}{\partial x_n}\end{pmatrix}_{l\times n}=\begin{pmatrix}\frac{\partial z_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial y_m}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial z_l}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial z_l}{\partial y_m}\end{pmatrix}_{l\times m}\cdot\begin{pmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}_{m\times n}$$

$l=1$ 时： $\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial z}{\partial x_n}\right)_{1\cdot n}=\left(\frac{\partial z}{\partial y_1}\cdots\frac{\partial z}{\partial y_m}\right)_{1\cdot m}\begin{pmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}_{m\cdot n}$

切线与切平面：

显式表示
- 法向量： $JF(P_0)=\left(\frac{\partial F}{\partial x}(P_0),\frac{\partial F}{\partial y}(P_0),\frac{\partial F}{\partial z}(P_0)\right)$
- 切平面： $\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{P_0}(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{P_0}(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{P_0}(z-z_0)=0$

参数表示
- 单位法向量： $\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)$
- 第一基本量：
  - $E=(\frac{\partial x}{\partial u})^2+(\frac{\partial y}{\partial u})^2+(\frac{\partial z}{\partial u})^2$
  - $F=\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}$
  - $G=(\frac{\partial x}{\partial v})^2+(\frac{\partial y}{\partial v})^2+(\frac{\partial z}{\partial v})^2$

多元 Taylor 公式： $f(a+h)=\underline{f(a)}+\underline{Jf(a)h}+\underline{\frac{1}{2}(h_1\cdots h_n)Hf(a)\begin{pmatrix}h_1\\ \vdots\\ h_n\end{pmatrix}}+\cdots\cdots$

$$Hf(a)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}(a)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a)\end{pmatrix}_{n\times n}$$

Hesse Matrix

一元函数求极值情况

多元函数的费马引理：

$\nearrow$ $f(x_1,\cdots,x_n)$ 在 x_0 处可微？

（极值的必要条件）— 让函数 $f(x_1\cdots x_n)$ 在 $P_0(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ ∃偏导数，且在 P_0 取得极值，必有 $f_{x_1}(P_0)=f_{x_2}(P_0)=\cdots=f_{x_n}(P_0)=0$

满足 $f_{x_1}(P_i)=\cdots=f_{x_n}(P_i)=0$ 的点 P_i is called 稳定点

$\begin{cases} \text{偏导数∃时，极值点} \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} \text{稳定点} \\ \text{偏导数!∃时，也有可能 ∃极值点} \end{cases}$

（极值的充分条件）— ① $f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $U(x_0;\delta)$ 可导，$f''(x_0)$ 存在，让 $f'(x_0)=0$　$f''(x_0)\neq 0$

$x=x_0$ 为 $f(x)$ 的一个极值点并且 $\begin{cases} f''(x_0)>0, & x=x_0 \text{ 为极小值} \\ f''(x_0)<0, & x=x_0 \text{ 为极大值} \end{cases}$

proof: $f(x)=f(x_0)+\cancel{f'(x_0)(x-x_0)}+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)$

② $f(x)$ 的邻域内∃n阶导函数（$f^{n}(x_0)$∃），$f'(x_0)=f^{2}(x_0)=\cdots=f^{n-1}(x_0)=0$

$\begin{cases} n\text{为偶数，∃极值} & \begin{cases} f^{n}(x_0)>0 & x=x_0 \text{ 为极小值} \\ f^{n}(x_0)<0 & x=x_0 \text{ 为极大值} \end{cases} \\ n\text{为奇数，!∃极值} \end{cases}$

多元函数 f 在点 $P_0(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 取得极值的充分条件：

假定 f 具有二阶连续偏导数，记 $H_f(P_0)$，称为 f 在 P_0 的 Hesse 矩阵

$$H_f(P_0)=\begin{bmatrix} f_{x_1x_1}(P_0) & \cdots & f_{x_1x_n}(P_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1}(P_0) & \cdots & f_{x_nx_n}(P_0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_nx_1} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{bmatrix}$$

（极值的充分条件）：设 $f(P)$ 在点 P_0 的某邻域 $U(P_0)$ 内 ∃二阶连续偏导数

且 P_0 为 f 的稳定点

$H_f(P_0)$ 为正定矩阵 $\Longrightarrow$ $f(P_0)$ 为极小值

…　负定矩阵 $\Rightarrow$ … 极大值

…　不定矩阵 $\Rightarrow$ … 非极值

① 求解函数最值问题：

（1）求出 $f(P)$ 的稳定点　（2）求出 $f(P)$ 偏导数!∃的点

（3）求出 $f(P)$ 区域边界上的最值

最大值 $M=\max\{(1)\ (2)\ (3)\}$。最小值 $m=\min\{(1)\ (2)\ (3)\}$.

做两道题

就明白了

② 求解函数极值问题

1）求出 $f'(P_0)$，并求出 $f'(P_0)=0$ 的所有稳定点

前题：P_0 为 f 的稳定点，$f'(P_0)=0$

$f(x,y)$ 为二元函数情况：$H_f(P_0)=\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}_{P_0}$

$\begin{cases} ① \text{二阶主子式} <0 & \text{非极值} \\ ② \text{二阶主子式} >0 & \begin{cases} \text{一阶}>0 & \text{极小值} \\ \text{一阶}<0 & \text{极大值} \\ \text{一阶}=0 & \text{非极值} \end{cases} \\ ③ \text{二阶主子式} =0 & \text{无法判断} \end{cases}$

（最小二乘法问题）：用一条直线，使得这n个点的偏差平方之和为最小