Algebra

抽象代数 — 姚慕生

抽象代数 algebra

数学作业纸

2.28 科目 math

班级: 姓名: 编号: 第 1 页

第一章：预备知识

1.1 集合

$a\in A \Leftrightarrow a\notin A$ 元素、 $A\cap B$、$A\cup B$、$A-B=\{x \mid x\in A$ 但 $x\notin B\}$

$\forall a\in A, \exists a\in B \Rightarrow A\subset B$ 集合 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$、$M_n(\mathbb{F})$ —方阵、$GL_n(\mathbb{F})=\{A\in M_n(\mathbb{F}) \mid |A|\neq 0\}$

指标集：I为集合，$\forall \alpha\in I$，有A_α这样一集合与之对应

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha=\{x \mid \exists \alpha\in I \text{ s.t. } x\in A_\alpha\} \qquad \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha=\{x \mid \forall \alpha\in I \text{ s.t. } x\in A_\alpha\}$$

1.2 Cartesian 积

def: $A\times B=\{(a,b) \mid a\in A, b\in B\}$ $(a,b)=(c,d) \Leftrightarrow a=c$ 且 $b=d$

1.3 等价关系、商集

def：A、B为集合，$A\times B$的一个子集R is called A到B的一个关系，$A\times A$的子集 is called A上的关系

若$(a,b)\in R\subset A\times B$，称a与b R相关，记为$aRb$

def：set R为A上的关系，若R满足：① 自反性，$a\in A$, $(a,a)\in A$ 关系R is called A上的等价关系

② 对称性，若$(a,b)\in R$，$(b,a)\in R$

③ 传递性，$(a,b)\in R$，$(b,c)\in R$，则$(a,c)\in R$

等价类：$[a]=\{x\in A \mid x\sim a\}$ ：① 若$[a]=[b] \Leftrightarrow a\sim b$ (proof).

$[a]=\{x\in S \mid x\sim a\}$, $x\sim a$, $a\sim b$, $x\sim b$, $[a]=[b]$

② 若$[a]\cap[b]=\phi \Leftrightarrow a\nsim b$.

$[a]\cap[b]=c$ $a\sim c$, $c\sim b$ $a\sim b$ 矛盾.

一个集合若能表示为两两互不相交子集之并，则称这些子集族为该集合的一个划分

若 $A_\alpha, \alpha\in I$ 为A的一族子集：① $A=\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ ② $\forall \alpha\neq\beta$，$A_\alpha\cap A_\beta=\phi$

称 $A_\alpha, \alpha\in I$ 为A的划分.

2.28

数学作业纸

科目 math - algebra

班级： 姓名： 编号： 第 2 页

def: set "$\sim$" 为集合A上的一个等价关系，A上所有等价类的集合 is called A关于"$\sim$"的商集 $A/\sim$

$A/\sim = \{[a] \mid a \in A\}$.

1.4 映射.

def: A, B为集合，M为A到B的关系 $(M \subset A \times B)$ 若M满足：$\forall a \in A, \exists!\, b \in B$, s.t. $(a,b) \in M$

M is called A到B的映射 A-定义域 B-值域，记为：$f: A \to B$

$a \mapsto b = f(a)$

def: ① $f: A \to B$ $b = f(a)$，b is called a的像，a is called b的一个原像.

② $\mathrm{Im} f = \{b \in B \mid \exists a \in A \text{ s.t. } b = f(a)\}$ $\mathrm{Im} f$ 为A在f下的像

③ $f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}$ 记号 b的所有原像.

④ $A' \subset A$ $f(A') = \{b = f(a) \mid a \in A'\}$. ⑤ $B' \subset B$ $f^{-1}(B') = \{a \in A \mid f(a) \in B'\}$

子集

def: $f: A \to B$ ① $\mathrm{Im} f = B$，f为满射 ② $a \neq a' \in A \Rightarrow f(a) \neq f(a') \in B$，f为单射

③ f既单又满，f为双射

def: $f: A \to B$ $g: B \to C$ $g \cdot f: A \to C$

def: $f: A \to B$, $\exists g: B \to A$ s.t. $g \cdot f = Id_A$, $f g = Id_B$ 称f可逆，g为f的一个逆.

f可逆，f为双射 (充要)

collary: f可逆，f的逆 g $\exists!$

1.6 偏序和 Zorn 引理

Def.： 设 A 为一个非空集合，P 是 A 上一个关系，计 P 满足以下条件：

(1) $\forall a \in A$，$(a,a) \in P$

(2) 计 $(a,b) \in P$ 且 $(b,a) \in P$，则 $a=b$

(3) 计 $(a,b) \in P$，$(b,c) \in P$，$(a,c) \in P$

则称 P 是 A 上一个偏序关系，带偏序关系的集合称为 偏序集/半序集

Zorn lemma： 设 S 是偏序集，计 S 中每根链均有上界，则 S 有极大元

1.5 二元运算

def: S为一个集合，$S\times S\to S$ 的一个映射 is called S上的一个二元运算

set "$*$" 与 "$\cdot$" 为 S上 2种运算，如 若 满足.

结合律: (1) $\forall a,b,c\in S$，均有 $a*(b*c)=(a*b)*c$

交换律: (2) $\forall a,b\in S$，均有 $a*b=b*a$

左分配律: (3) $\forall a,b,c\in S$，均有 $a*(b\cdot c)=(a*b)\cdot(a*c)$

对称群: $(G_F, \circ, id)$

右 ……: $(b\cdot c)*a=(b*a)\cdot(c*a)$

第二章: 群论

① $(F,+,0)$ GL_n $(GL_n(F), *, E)$

② $(F^*, *, 1)$ $O_n(R)$ $AA^T=E$

2.1 群的概念

③ $(Z,+,0)$ $SO_n(R)$ $|A|=1$

def: S为非空集，S上∃二元运算"$\cdot$"，$\forall x,y\in S$，∃! $x\cdot y\in S$ 与之对应，~~S为半群~~

结合律 — 半群 结合+交换 — 交换半群

若 ∃e s.t. $\forall a\in S$，有 $ea=ae=a$，e is called S的幺元，半群 is called 幺半群

def: 若 一个幺半群 G (幺元为e) 满足: $\forall a\in G$，∃a'，s.t. $a'a=aa'=e$，a'为逆元，a^{-1}

称为群 $|G|$ represent G的元素数，若 $|G|=n$，G为n阶群

性质: 1. 群的幺元都是唯一的 2. 群G中∀一元a，其 a^{-1} 也唯一 3. 群G中 ∀a 有 $(a^{-1})^{-1}=a$

4. $a,b\in$ 群G，$(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$ 5. $\forall a,b\in$ 群G，$ax=b$ $ya=b$ 在G中有唯一解.

6. 若 $au=bu$，则 $a=b$ 若 $va=vb$ 则 $a=b$

2.28

数学作业纸

科目 Algebra

班级：　　　　姓名：　　　　编号：　　　　第 4 页

2.2 子群及陪~~?~~集 coset

G 的平凡子群：$\{e\}$，G

def：G 为群，H 为 G 的~~子群~~子集，if H 在 G 运算下也为群，H is called G 的子群

theorem：H 为 G 的非空子集，if H 满足以下条件之一则 H 为 G 的子群

(1) $\forall a,b\in H$，$ab\in H$ 且 $a^{-1}\in H$

(proof)

(2) $\forall a,b\in H$，$ab^{-1}\in H$

A与所有 n阶 可逆 方阵均交换

$\Downarrow$

$A(E+E_{ij})=(E+E_{ij})A$

$AE_{ij}=E_{ij}A \Rightarrow A=aE$

corollary：H 为群 G 的有限子~~群~~集，$\forall a,b\in H$，有 $ab\in H$，则 H 为 G 的子群.

子空间的 $\cup$ 一般不构成子空间

（$\cup$ 包含时成立）

$\forall c_1,c_2\in G$　　$c_1c_2\in C$　　$c_1^{-1}\in G$

def：G 为群，$C=\{c\in G \mid gc=cg，\forall g\in G\}$，$C$ 中元素与 G 中元素的乘法可交换，C is called G 的中心

theorem：群的 center 必为子群.(proof)

$c_1c_2g=c_1gc_2=gc_1c_2\in G.$

$cg=gc$　　$cgc^{-1}=g$　　$gc^{-1}=c^{-1}g$

def：S 为群 G 的子集，G 中包含集合 S 的所有子群的交 is called 由 S 生成的子群，$\langle S\rangle$

theorem：S 为 G 的子集，则 $\langle S\rangle=\{a_1^{\varepsilon_1}\cdot a_2^{\varepsilon_2}\cdot\cdots\cdot a_n^{\varepsilon_n} \mid n\in N，a_i\in S，\varepsilon_i=\pm1\}$. ?.

① $e\in$ ② $a,b\in H_\alpha$　$ab^{-1}\in H_\alpha$　$ab^{-1}\in\bigcap_{\alpha} H_\alpha$

$\langle S\rangle=\bigcap_{\substack{H<G\\S\subset H}} H$

prop ~~def~~：set a 为群 G 的元素，$o(a)=n$，则由 a 生成的 G 的循环子群 $\langle a\rangle$ 的阶为 n.

def：set a 为群 G 的元素，if $\exists$ minimal $n\in N$ s.t. $a^n=e$，call n 为元素 a 的周期

（e 的周期为 1，用 $o(a)$ 表示　if $\nexists$ n s.t. $a^n=e$，$o(a)=0/\infty$）

prop：a 为 G 的元素，且 $o(a)=n$，if m 为整数，且 $a^m=e$，则 $n\mid m$

$\langle S\rangle=H$

① $H<G$（非空，封闭）　③ $\langle S\rangle$ 为子群 $\Rightarrow H<\langle S\rangle$

② $S\subset H$　　$H=\langle S\rangle$

def: set H 为群 G 的子群，$a\in G$，则称集合 $Ha=\{ha \mid h\in H\}$ 是 G 的一个右 ~~倍群~~ 倍集 / 右陪集

$aH=\{ah \mid h\in H\}$ 是 G 的一个左 ~~倍群~~ 倍集 / 左陪集

构造的 n 阶可交换群：$a\oplus b=\begin{cases} a+b & a+b<n \\ a+b-n & a+b\geq n \end{cases}$

非交换群：1、Hamiton 四元 ~~数~~ 群（有无 dim > 4 的 situation？）

2、$A(S) \longleftrightarrow \{1\sim n$ 的所有排列$\}$　　$A(S)$：$\{f: S\to S \mid$ 双射$\}$

$\sigma \longleftrightarrow \sigma(1)\cdots\sigma(n)$　　$|A(S)|=n!$，记为 S_n

第二章：群论

2.1 群的概念

Def：S为非空集，S上$\exists$二元运算"$\cdot$"(乘法)．$\forall x, y \in S$，always $\exists!$ 元 $x \cdot y \in S$ 与之对应

该乘法满足结合律，则称S为半群

if 半群又满足交换律，半群又称交换半群

if 半群S中$\exists$元素e s.t. $\forall a \in S$ 有 $ea = ae = a$，则称e为S的幺元，这样的群称为幺半群

Def：一个幺半群G(幺元为e) if 满足以下条件则称为群：

对$\forall a \in G$，$\exists a'$，s.t. $a'a = aa' = e$，元素a'称为逆元，记为a^{-1}

if 群G满足交换律，称为Abel群

2.2 子群及陪集

Def 1：G 为群，H 为 G 的子集，if H 在群 G 的运算下也为群，则称 H 为群 G 的子群。

prop：H 为群 G 的非空子集，if H 满足以下条件之一，则 H 为 G 的子群：

子群

(1) $\forall a,b \in H$，$ab \in H$ 且 $a^{-1} \in H$

(2) $\forall a,b \in H$，$ab^{-1} \in H$　　proof

Corollary：H 为群 G 的有限子集，if $\forall a,b \in H$，均有 $ab \in H$，则 H 为 G 的子群

Def 2：G 为一个群，$C = \{c \in G \mid gc = cg, \forall g \in G\}$ 称 C 为 G 的中心

prop：群的中心必是子群　proof

$\langle S \rangle = \bigcap_{\substack{H<G \\ H \supseteq S}} H$　（$\langle S \rangle$ 为 S minimal 子群）

Def 3：S 为群 G 的子集，G 中包含集合 S 的所有子群的交 称为 由 S 生成的子群，记为 $\langle S \rangle$

包含 S 的 G 的子群 H

$n=0$　$n=1$　$n=2$

$\{e\}$　$\{a, a^{-1}\}$　$\{a^{\pm1}, b^{\pm1}\}$

①② $\Rightarrow \langle S \rangle \subset H$

① $H<G$（对乘法，取逆封闭）　② $S \subset H$　$\forall a \in S$ 对 H 中 $n=1$ 时元素　$\longrightarrow$

③ $\forall a_1^{\varepsilon_i} \cdots\cdots a_n^{\varepsilon_i} \in H$，$a_1, a_2, \cdots, a_n \in S \subset \langle S \rangle$

$a_1^{\varepsilon_i} \cdot a_2^{\varepsilon_i} \cdots\cdots a_n^{\varepsilon_i} \in \langle S \rangle$，$H \subset \langle S \rangle$

prop：S 为 G 的子集，则 $\langle S \rangle = \{a_1^{\varepsilon_1} \cdot a_2^{\varepsilon_2} \cdots\cdots a_n^{\varepsilon_n} \mid n \in N, a_i \in S, \varepsilon_i = \pm 1\}$　proof

Def 4：let a 为群 G 的元素，if $\exists$ minimal $n \in N^*$ s.t. $\underbrace{a^n = e}_{n\text{次运算}}$，称 n 为 a 的周期.

e 的周期为 1，if $!\exists\, n$ s.t. $a^n = e$，称 a 的周期为 $0/\infty$．元素周期用 $o(a)$ or $|a|$

例：$G \in Z$，$1 \in Z$，$o(1) = 0$　$G(+, 0)$

prop：$a \in G$　$o(a) = n$ 且 $a^m = e$，$m \in Z$，则 $n \mid m$　—— 利用辗转相除法

$\langle a \rangle = \{a^s \mid s \in Z\}$　$a^n = e$　$\langle a \rangle = \{a, \cdots, a^{n-1}, e\}$　n 个 $\rightarrow$

prop：$a \in G$，$o(a) = n$ 则 $|\langle a \rangle| = n$　proof

$n=1$

G 为 group，$S = \{a\}$ 则 $\langle S \rangle = \underline{\{a^n \mid n \in Z\}}_{H}$

proof：① $H<G$　② $S \subset H$　①② $\Rightarrow \langle S \rangle \subset H$

③ $a \in S \subset \langle S \rangle$　$a^n \in \langle S \rangle$，$\langle S \rangle \subset H$

$n=2$

G 为 group　$S = \{a, b \mid a \neq b\}$

$\langle S \rangle \supsetneqq \{a^m b^n \mid m, n \in Z\}$

$abab \notin a^m b^n$

$Z=\{1\}$ $Z^{\times}=\{1,-1\}=\langle -1\rangle$

$G=\{1,-1,i,-i\}$ $G=\{\alpha\in G \mid \alpha^n=1\}$
$=\{1,w,w^2,\cdots,w^{n-1}\}$
$=\langle w\rangle$

$w=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$
n元素

$\boxed{G=\langle a\rangle,\ 则\ G=\{a^n \mid n\in Z\}}$

左右陪集

G is group $S\subset G$

① 计 $H=\langle S\rangle$ 则 S中元素 is called 生成元 $|S|<\infty$，H is called 有限生成子群

② $G=\langle S\rangle$ 则 G is called 有限生成群 $S=\{a\}$，$G=\langle S\rangle$ is called 循环群 $G=\langle a\rangle$

def:(陪集) G is group，$a\in G$，$H<G$，$Ha=\{ha \mid h\in H\}$ 右陪集 is called G中H的陪集
$aH=\{ah \mid h\in H\}$ 左陪集

prop：① $Ha=Hb \Longleftrightarrow ab^{-1}\in H$ ①' $aH=bH$ ……

proof ② H为有限群，$|Ha|=|Hb|$ ②' $|aH|=|bH|$ ……

③ $Ha\neq Hb$，则 $Ha\cap Hb=\phi$ ③' $aH\neq bH$ ……

左陪集给出了划分.

$G=\bigcup_{i=1}^{s}a_i$ $a_i\cap a_j=\phi$ $(i\neq j)$

$\Rightarrow |G|=|a_1H|+|a_2H|+\cdots+|a_sH|$

$|a_1H|=|eH|=H \Rightarrow |G|=s|H|$

(有限群必定有周期).

(Lagrange定理)：set H是有限群G的子群，则 $|H|$ 是 $|G|$ 的因子 / G中 计 $H<G$ 则 $|H| \mid |G|$

proof

theorem：计 H为有限群G的子群，则 $|G|=|H|\cdot[G:H]$ ($|G|<\infty$) ($[G:H]$ means $|G|$ 右陪集个数 称为H在G中指数)

corollary：计 $|G|<\infty$，则 G中任一元素的周期必是 $|G|$ 的因子

计 $|G|<\infty$，$\forall a\in G$，$a^{|G|}=e$

计 $|G|=p$，p为素数，则 G为循环群

Euler定理：若 a,n 都是正整数且a与n互素，则 $a^{\varphi(n)}\equiv 1 \pmod n$

Fermat小定理：set p为素数，a为自然数，则 $a^p\equiv a \pmod p$.

2.3 正规子群与商群

正规子群

Def 1：let G 为群，H 为 G 的子群，若 $\forall a\in G$，总成立 $Ha=aH$，称 H 为 G 的正规子群/不变子群 $H\lhd G$

prop: let H 为群 G 的子群 ① 若 $\forall g\in G$，$\forall h\in H$，均有 ghg^{-1} / $g^{-1}hg$ $\in H$，则 H 为 G 的正规子群

② 若 $\forall g\in G$，$gHg^{-1}=H$，则 H 为 G 的正规子群　　proof

def: G is group，$H<G$，def $a\sim b \rightleftharpoons aH=bH$ (proof) 证明这个为等价关系.

$G/\sim=\{aH \mid a\in G\}$

Def：G is group，$H\lhd G$，$a\sim b \rightleftharpoons aH=bH$，定义 $G/\sim=\{aH \mid a\in H\}$

规定 $G/\sim \times G/\sim \to G/\sim$　　this is well defined.

$(aH,bH)\mapsto abH$

良定性 proof.

$\Leftarrow$

设 H 为 G 的正规子群，若 $Ha=Ha_1$　$Hb=Hb_1$　to prove $Hab=Ha_1b_1$

$Ha=Ha_1$　$Hb=Hb_1 \Rightarrow aa_1^{-1}\in H$　$bb_1^{-1}\in H$，故 $(ab)(a_1b_1)^{-1}\in H$

$(ab)(a_1b_1)^{-1}=abb_1^{-1}a_1^{-1}=\underbrace{ah_1a_1^{-1}\in H}$　　$ah_1\in aH=Ha$

$\exists h_2$ s.t. $ah_1=h_2a$　　$ah_1a_1^{-1}=h_2aa_1^{-1}\in H$

$Hab=Ha_1b_1$

$\Rightarrow$:

要证 $H\lhd G$ 即证 $ghg^{-1}\in H$　取 $g\in G$

$Hg\cdot Hhg^{-1}=Hg\cdot Hg^{-1}=He=H$　　而 $Hg\cdot Hhg^{-1}=Hghg^{-1}$

$Hhg^{-1}=Hg^{-1}$　　$ghg^{-1}\in H \Rightarrow H\lhd G$.　□

lemma：let H 为 G 的子群，$\bar{G}$ 为 H 全体右陪集所成商集，则　$(Ha)(Hb)=H(ab) \Longleftrightarrow H\lhd G$

Def：$(G/\sim,\cdot)$ 构成一个群（$G/\sim$ 称为商群，记为 G/H）

H — 幺元

Ha^{-1} — 逆元.

Def 2：let G 为一个群，H 为 G 的正规子群，$\bar{G}$ 为 H 的右陪集的集合，$\bar{G}$ 在 $Ha\cdot Hb=Hab$ 定义下构成的群 称为 G 关于 H 的商群，记为 $\bar{G}=G/H$

商群 $\bar{G}$ 中的元素常用元素的等价类 $\bar{a}$ $\bar{b}$ 来表示 $(\bar{a}=Ha,\ \bar{b}=Hb)$

$(Ha)\cdot(Hb)=H(ab) \Longleftrightarrow \bar{a}\cdot\bar{b}=\overline{ab}$

Abel 群 子群 均为 正规子群

群 → 子群 → 商集 + 运算 → 商群.

单群：G中只有{e}与G无非正规子群 (simple group)

(有限单群分类定理) EGA SGA

prop1: 素数阶群一定为单群. (lagrange定理)

prop2: the subgroup of Abel group 正规子群.

prop3: $|G|<\infty$ $|G/H|=\frac{|G|}{|H|}$ (lagrange).

2.4 同态与同构

def: G_1, G_2 为 group, $f: G_1 \to G_2$, 计 $\forall a, b \in G$, $f(ab) = f(a)f(b)$

则称 f 为一个 G_1 到 G_2 的群同态　f 为双射, 则 f 为同构, 也称 G_1, G_2 同构　$G_1 \cong G_2$

同态的性质

$f: G_1 \to G_2$ 同态

1、 $f(e_1) = e_2$　　若 $f: G_1 \to G_2$ 为群同态, 则 $f(e)$ 为 G_2 的幺元

2、 $\forall g \in G_1$　$f(g^{-1}) = f^{-1}(g)$　　群同态 $f: G_1 \to G_2$ 将逆元变为逆元, 即 $f(x^{-1}) = f^{-1}(x)$

3、 $Im f = \{y = f(x) \mid x \in G_1\}$　$Im f < G_2$　　$f: G_1 \to G_2$ 为群同态, 则 $Im f$ 是 G_2 的子群

canonical

4、 $ker f = \{x \in G_1 \mid f(x) = e_2\}$　$ker f \lhd G_2$　　$f: G_1 \to G_2$ 为群同态, e' 为 G_2 幺元, 则 $ker f = \{x \in G_1 \mid f(x) = e'\}$

5、 同构关系是一个等价关系　proof　　$ker f \lhd G_1$, 称为同态 f 的核.

G: $H \lhd G$　$\pi: G \to G/H$

$g \mapsto gH$

典范映射

计 $G_1 = G_2$ 则 $f: G \to G$ called 自同态

set H 为群 G 的正规子群, G 到商集 $\bar{G} = G/H$ 上的自然映射是群同态, called 自然同态

同态基本定理:

set f 是群 G_1 到 G_2 的满同态, 则 f 诱导出 $G_1/ker f \to G_2$ 的同构 $\bar{f}$,

其中 $\bar{f}(\bar{a}) = f(a)$ 对 $\forall a \in G_1$ 成立

令 $K = ker f$, 由于 $ker f$ 为 G_1 的正规子群, def $G_1/ker f \to G_2$ 的 relation $\bar{f}$: $\bar{f}(\bar{a}) = f(a)$

① well-def: 计 $\bar{a} = \bar{b}$ 即 $Ka = Kb$ or $ab^{-1} \in K$ 则 $f(ab^{-1}) = e'$, e' 为 G_2 中幺元, 于是 $f(ab^{-1}) = f(a)f(b^{-1}) = e'$ $\Rightarrow$ $f(a) = f(b)$

② 同态: $\bar{f}(\bar{a}\bar{b}) = \bar{f}(\overline{ab}) = f(ab) = f(a)f(b) = \bar{f}(\bar{a})\bar{f}(\bar{b})$

③ 单: 计 $\bar{f}(\bar{a}) = \bar{f}(\bar{b})$ 则 $f(a) = f(b)$　$f(ab^{-1}) = e'$　$ab^{-1} \in K$　$\bar{a} = \bar{b}$

而由条件得 f 为满同态, 得到 $\bar{f}$ 为一个同构.

同态基本定理

1、设 f 是 $G_1 \to G_2$ 的群同态, 则　$G_1/ker f \cong Im f$

2、$\forall$ 群同态 $f: G_1 \to G_2$ 可分解为: $f = j \cdot \bar{f} \cdot \eta$

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d] & G_2 \\ G_1/ker f \arrow[r, "\bar{f}"'] & Im f \arrow[u, "j"'] \end{tikzcd}$$

η: $G_1 \to G_1/ker f$ 自然同态　$\bar{f}$: $G_1/ker f \to Im f$ 同构　j: $Im f \to G_2$ 同态

对应定理 设 $f: G_1 \to G_2$ 为群上的满同态，则有

1) 设 H 为 G_1 的子群，则 $f(H)$ 是 G_2 的子群

2) 设 K 为 G_2 的子群，则 $f^{-1}(K) = \{x \in G_1 \mid f(x) \in K\}$ 是 G_1 子群，且 $f^{-1}(K) \supseteq \ker f$

3) $\{G_1$ 中包含 $\ker f$ 的子群$\}$ $\xleftrightarrow{1:1}$ $\{G_2$ 的子群$\}$，

$H \qquad\qquad f(H)$.

$H \lhd G_1 \Longleftrightarrow f(H) \lhd G_2$ 同时 $G_1/H \cong G_2/f(H)$

theorem: set $f: G_1 \to G_2$ 的群同态，则

1) f 为单同态 $\Longleftrightarrow \ker f = \{e\}$

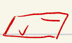
2) 设 $H_1 \lhd G_1$，$H_2 \lhd G_2$ 且 $f(H_1) \subseteq f(H_2)$ $\exists\, G_1/H_1 \to G_2/H_2$ 的同态 $\bar{f}$ s.t. $\eta_2 f = \bar{f}\eta_1$ （η_1、η_2 为自然同态）

$$\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_1"'] & G_2 \arrow[d, "\eta_2"] \\
G_1/H_1 \arrow[r, "\bar{f}"'] & G_2/H_2
\end{tikzcd}$$

商集到底代表什么

$V/W = \{\alpha + w \mid w \in W\}$

$\alpha + W$.



第一同构定理: set H, N 为群 G 的正规子群且 $H \subseteq N$，则

$$G/H \,/\, N/H \cong G/N$$

第二同构定理: $H \lhd G$，K 为 G 的子群，则 $K \cap H \lhd G$ 且 $KH/H \cong K/H \cap K$

theorem: G is group，则 $\mathrm{Inn}\, G$ 为 $\mathrm{Aut}\, G$ 的正规子群且 $\mathrm{Inn}\, G \cong G/C$ C is the center of G.

2.5 循环群

北京林业大学 2023--2024 学年第 二 学期考试试卷（A 卷）

课程名称： 近世代数 　课程所在学院： 理学院

考试班级______ 学号______ 姓名______ 成绩______

试卷说明：

1. 本次考试为 闭 卷考试。本试卷共计 4 页，共 7 大部分，请勿漏答；
2. 考试时间为 120 分钟，请掌握好答题时间；
3. 答题之前，请将试卷上的考试班级、学号、姓名填写清楚；
4. 本试卷答案写在试卷上；
5. 答题完毕，请将试卷交回，不得带出考场；
6. 考试中心提示：请你遵守考场纪律，诚信考试、公平竞争！

得分

一、(每小题3分，共30分) 判断正误.

1. (　　) 全体有理数在通常乘法下构成一个群;
2. (　　) 群中任何元素的周期和它的逆元的周期相等;
3. (　　) 给定群中，两个正规子群的交还是正规子群;
4. (　　) $f: G \to G$ 为群同态, $g \in G$, 则 $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$;
5. (　　) 任意两个循环群，如果它们的阶相同，则它们一定同构;
6. (　　) 存在包含8个元素的域;
7. (　　) 所有整数构成有理数环的一个理想;
8. (　　) 实数域的任意非零自同态均为单同态;
9. (　　) 唯一分解整环中任何理想均为主理想;
10. (　　) 具有恒等元的交换环中，极大理想为素理想.

得分

二、(12分) (1) 叙述正规子群和商群的定义; (2) 证明 $2\mathbb{Z}$ 为整数加法群 $\mathbb{Z}$ 的正规子群，并写出商群 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 中的所有元素.

得分

三、(12分) 将置换 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 写成不相交循环之积，并求该置换的周期与奇偶性.

得分

四、(12分) (1) 叙述群的直积的定义; (2) 证明交换群与交换群的直积还是交换群.

得分

五、(12分) 设 R 为带有恒等元的环. (1) 叙述零因子的定义; (2) 叙述可逆元的定义; (3) 讨论可逆元与零因子的关系并说明理由.

得分

六、(12分) (1) 叙述不可约元的定义; (2) 判断多项式 x^2+1 在环 $\mathbb{Z}_2[x]$ 中是否为不可约元并说明理由.

得分

七、(10分) 令 $F = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. (1) 证明 F 为域; (2) 判断环 $F[x]$ 中是否存在次数为2的不可约多项式，如果存在请写出一个，如果不存在请说明理由.