Lie Algebra

properties of rotation

1) linear: $R(\lambda v+w)=\lambda R(v)+Rw$

same.

2) lengths and angles

$(v^*)^T v = v^\dagger v = v\cdot w$

$v^T v = (v_1^* \; v_2^* \cdots v_n)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = |v_1|^2 + \cdots |v_n|^2$

$a \cdot bi$ (取共轭)

3) orientation: $v^T w = (Rv)^T(Rw) = v^T \underbrace{R^T R}_{I} w$

det $R=1$ (方向, V都不变)

$O(n)=\{R^T R = I\}$

$v^\dagger w = (Uv)^\dagger (Uw)$

$= v^\dagger \underbrace{U^\dagger U}_{I} w$ $\quad U(n)=\{U^\dagger U = I\}$

R 实数

C 复数

$\mathbb{C}(\alpha+\beta)$

不满足的性质

1. 斜对称: α, β, L $\quad [\alpha,\beta]=-[\beta,\alpha] \Leftrightarrow [\alpha,\alpha]=0$ (叉积满足) cross product.

2. 偏斜: $[\alpha,[\beta,\gamma]]+[\gamma,[\alpha,\beta]]+[\beta,[\gamma,\alpha]]=0$
   jacobi

$M_{2\times 2} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $a,b,c,d \in \mathbb{C}$

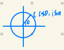
交换子: $[A,B]=AB-BA$, $[A,[B,C]]=[A, BC-CB] = \overset{A(BC-CB)}{ABC-ACB} - \overset{(BC-CB)A}{BCA+CBA}$

烦数 线代数可惜 矩阵lie algebra 的子空间

叉积: $(\mathbb{C}^3, \times)$, $[v,w]=v\times w$ $\quad v\times w = -w\times v$ (prove cross product 满足 Jacobi).

associative algebra $A, *$ $\quad [\alpha,\beta]=\alpha * \beta - \beta * \alpha$

sl_2

复数单位圆: $e^{i\theta}=\cos\theta + i\sin\theta$ 

Lie Group

$[X,Y]$

4) — 1) closure

1) 闭包 — for all $X,Y \in g$ $\quad [X,Y]\in g$

2) 双线性 bilinearity

$[aX+bY,Z]=a[X,Z]+b[Y,Z]$

$[X,aY+bZ]=a[X,Y]+b[X,Z]$

2) associativity — 4) Jacobi

$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$

← Group的条件 (more essential)

1) 闭包 (封闭)

2) associativity $(g\cdot h)\cdot k = g\cdot(h\cdot k)$, 不可交换的

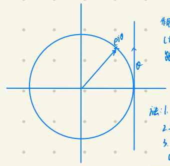
3) 恒等式 (do nothing)

4) inverse 可逆

$|z||w|=|zw|$ - check

manifold的条件

几何旋转 (不用维度)



作用: 1. 将切向量与圆上点对应
(切向量上距离为θ, 圆上距恒点
距离也为θ, 同时圆上点也为原切向量

坐标轴由恒等式 / 1 处切线构成

法: 1. 有李群
2. 找恒点, 切线
3. 让切向量在切空间内找 点 (指数映射)

aiming: lie group → lie algebra
(群上的点) (取对数成为空间向量)

lack: 1. 复数圆相关知识 < 距离表示公式

lack: 1. 李括号
2. how to 将两个切向量转换为另个
3. BCH formula (求指数上复制群乘法)

2) 交换律. ~~M22~~

结合律. M22 ~~✓~~ (叉积无交换性)

可逆性 (excep 0)

一、Definitions

$L \times L \xrightarrow{映射} L$

over F ：[F denotes to an arbitrary field ($F \in \mathbb{C}$)] 矩阵变化

数域 related
1) definition: 1. $F \in \mathbb{C}$ 2. $0, 1 \in F$ 3. 运算封闭
2) 任何数域都 include $\mathbb{Q}$
3) $\mathbb{Q}$. $\mathbb{R}$ 间 $\mathbb{Q}$. $\mathbb{C}$ 间 存在无数数域 / $\mathbb{R}$. $\mathbb{C}$ 间无其他数域

域的特征：
1. n个单位元相加 $=0$ (each number 自己+自己，不论多少次都 $\neq 0$)
2. 存在素数p，满足自己和自己加p次后，result $=0$ (F_2，特征值为2) $x=-x$，因此在 F_2 的域上很多都以加2数等于0

一般代数 means 线性空间 + bilinear 运算

satisfy

L_1: $[\,,\,]$ the bracket operation is bilinear $\xrightarrow[\text{means}]{双线性}$
1. $a(\lambda b+\mu c) = \lambda ab + \mu ac = (\lambda b + \mu c)a$
2. $(a+b, c) = (a,c) + (b,c)$ $(a, b+c) = (a,b) + (a,c)$

L_2: $[x,x]=0$ for all x in L 反对称性

L_3: $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$ $(x,y,z \in L)$ $\longrightarrow$ Jacobi identity

$L_2 \Rightarrow [x,y] = -[y,x]$: by L_2 imply $[x+y, x+y] = [x, x+y] + [y, x+y] = \cancel{[x,x]} + \cancel{[y,y]} + [x,y] + [y,x] = 0 \longrightarrow [x,y] = -[y,x]$

$[x,y] = -[y,x] \rightarrow L_2$ 前提：$\mathbb{F} \neq 2$: $[x,x] = -[x,x]$ $2[x,x]=0$ (即 $\mathbb{F}_2$ must 满足反对称性)

eg、$\mathbb{R}^3$ $[x,y] = x \times y$ 是李代数，because satisfy L_1、2、L_3 L

2、同态，两代数之间的映射 φ，It φ 保持所有运算 (加法、数乘、代数)

$\varphi(a+b)$ $\varphi(ka)$ $\phi([x,y]) = [\phi(x), \phi(y)]$

域 F, lie algebra L and L' isomorphism (同构)

$\phi: L \to L'$ $\forall x,y \in L$, $\phi([x,y]) = [\phi(x), \phi(y)]$ 同构 (1.先是线性空间同构，再是李代数同构)

3、子代数：代数L某个子集 k，k关于所有运算封闭，称为子代数

$\forall x,y \in k$, $[x,y] \in k$ (L为李代数，k也为一个李子代数)

二、Linear lie Algebra

V-有限维向量空间 ， End V — 线性变换 $V\to V$ （End V 为向量空间 $\dim \mathrm{End}\,V = n^2$ ）

End V 上定义 $[\,,\,]$ 运算 $[X,Y]$ ，End V 构成李代数

$gl(V) = \mathrm{End}\,V = \underset{n\times n\text{全体矩阵}}{gl(n,\mathbb{F})} = gl(V)$

取标准基 e_{ij} 为 $a_{ij}=1$ 其余为0，的 $n\times n$ 的域F上的矩阵，$e_{ij}\in gl(n,\mathbb{F})$

$\delta_{ab}\begin{cases}1 & a=b\\ 0 & a\neq b\end{cases}$

since $e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il} \Longrightarrow [e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk}e_{il} - \delta_{li}e_{kj}$ （线性变换与矩阵的联系）

（系数都是 ±1 or 0，若陆F的素域中 → {0,1} consist (at least) $\mathbb{Q}$ ）

典型 lie Algebra $A_l . B_l . C_l . D_l$

relating knowledge { trace：主对角线上各个元素总和/特征值的总和
endomorphism：与同构的区别（可逆自同态），从数学对象到其自身的态射（映射） example：$f: V\to V$（线性变换） 向量space V；$f: S\to S$（函数） 集合

A_l：presume $\dim V = l+1$ $sl(V) / sl(l+1, \mathbb{F})$ → 迹0的自同态集合

迹(trace)：矩阵对角线上数之和 性质：
1. $Tr(xy) = Tr(yx)$
2. $Tr(x+y) = Tr(x) + Tr(y)$
3. $Tr(A) = Tr(A^T)$

$sl(V)$ is a subalgebra of $gl(V)$, named as special linear algebra （特殊线性代数）

total dimension of A：$l + (l+1)^2 - (l+1)$

1) $sl(V)$ 是 $gl(V)$ 的真子代数，so dimension most is $(l+1)^2-1$ （ dimension of $gl(V) = (l+1)^2$ ）

2) trace=0 的 all 线性无关的矩阵，数量之和即为 dimension of $sl(V)$

i：对角线不全为0，找对角线元素

$h_i = e_{ii} - e_{i+1,i+1}$ $(i\in[1,l])$

$\begin{pmatrix}0 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \\ & & & 0\end{pmatrix} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} a_i$

$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$

$\begin{pmatrix}1 & & \\ & -1 & \\ & & \ddots \\ & & & 0\end{pmatrix} a_1 + \begin{pmatrix}0 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0\end{pmatrix} a_1+a_2 + \begin{pmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \\ & & & -1 \\ & & & & \ddots & 0\end{pmatrix} a_1+a_2+a_3 + \cdots + \begin{pmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \\ & & & & -1\end{pmatrix} \sum_{i=1}^{n-1} a_i = 0$

$+ a_{n-1} + -(a_1 + \cdots + a_{n-1})$
$\qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\|}{a_n}$

$\begin{pmatrix} a_1 & & & & \\ & -a_1+a_1+a_2 & & & \\ & & -a_1-a_2+a_1+a_2+a_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -a_1+\cdots+-a_{n-2}+a_1+\cdots+a_{n-2}+a_{n-1} \\ & & & & & \underline{-(a_1+\cdots+a_{n-1})} = a_n \end{pmatrix}$

l

ii：对角线全为0，找非对角线元素

e_{ij} $(i\neq j)$, $i\in[1, l+1]$, $j\in[1, l+1]$

$(l+1)^2 - (l+1)$

total $= (l+1)^2 - (l+1) + l = (l+1)^2 - 1$

C_l：presume $\dim V = 2l$ （基为 $V_1, V_2, \cdots, V_{2l}$ ）

$S = \begin{pmatrix}0 & I_l \\ -I_l & 0\end{pmatrix}$ define V上 非退化（$\det\neq 0$）、反对称（$a_{ij}+a_{ji}=0$, all diagonal $=0$）形式 f

偶维数

用 $sp(V)$ or $sp(2l, \mathbb{F})$，named as symplectic algebra （辛代数）

满足 $f(X(v), w) = -f(v, X(w))$ 的所有自同态X组成

total dimension：$2l^2 + l$

对于 $X = \begin{pmatrix}m & n\\ p & q\end{pmatrix}$ 是辛代数的条件：$SX = -X^tS$

$SX = \begin{pmatrix}0 & I_l\\ -I_l & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m & n\\ p & q\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p & q\\ -m & -n\end{pmatrix}$

$-X^tS = -\begin{pmatrix}m^t & p^t\\ n^t & q^t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & I_l\\ -I_l & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p^t & -m^t\\ q^t & -n^t\end{pmatrix}$

$\underline{q = -m^t} \to$ trace=0

$\underline{n^t = n \quad p = p^t} \to$ n,p为对称矩阵

i：对角线 ：l

$e_{ii} - e_{i+l,i+l}$ $(i\in[1,l])$

m与q是对应的 故只求解m一个即可

ii：m,q非对角线部分：$l^2 - l$

$e_{ij} - e_{j+l,i+l}$ $(i\in[1,l], j\in[1,l), i\neq j)$

iii：n的部分

对角：$e_{i,l+i}$ $(i\in[1,l])$ $\quad l$

非对角：$e_{i,l+i} + e_{j,l+i}$ $(1\le i<j\le l)$ $\quad \frac{l^2-l}{2}$

iiii：P的部分

对角：$e_{l+i,i}$ $(i\in[1,l])$ $\quad l$

非对角：$e_{l+i,j} + e_{j+l,i}$ $(1\le i<j\le l)$ $\quad \frac{l^2-l}{2}$

total：$l + l^2 - l + 2l + l^2 - l = 2l^2 + l$

B_ℓ: presume $V=2\ell+1$，取 V上 非退化、对称、双线性 形式 f，其矩阵为 $S=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&I_t\\0&I_t&0\end{pmatrix}$

用正交代数 $D(V)$ or $D(2\ell+1,F)$ 来表示

由满足 $f(X(v),w)=-f(v,X(w))$ 的 V的所有自同态组成

$X=\begin{pmatrix}a&b_1&b_2\\c_1&m&n\\c_2&p&q\end{pmatrix}$ X 是正交代数条件是满足运算 $SX=-X^tS$

$$SX=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&I_t\\0&I_t&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b_1&b_2\\c_1&m&n\\c_2&p&q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b_1&b_2\\c_2&p&q\\c_1&m&n\end{pmatrix}$$

$$-X^tS=-\begin{pmatrix}a^t&c_1^t&c_2^t\\b_1^t&m^t&p^t\\b_2^t&n^t&q^t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&I_t\\0&I_t&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a&-c_2^t&-c_1^t\\-b_1^t&-p^t&-m^t\\-b_2^t&-q^t&-n^t\end{pmatrix}$$

$a=0$

$c_1=-b_2^t$

$c_2=-b_1^t$

$q=-m^t$ → trace=0

$n^t=-n$ $p^t=-p$

→ n、p为反对称矩阵 ⟨ 1.对角=0；2.反对称

i：对角线：ℓ

II：m与q非对角线：$\ell^2-\ell$

III：n的非对角：$\frac{\ell^2-\ell}{2}$

IV：p的 非对角：$\frac{\ell^2-\ell}{2}$

V：c_1与c_2：$\ell+\ell$

total $=2\ell^2+\ell$

D_ℓ: presume $V=2\ell$ 矩阵 $S\begin{pmatrix}0&I_t\\I_t&0\end{pmatrix}$

D_ℓ为另一个正交矩阵，结构 dim$=2\ell$（偶数），并且S有更简单的形式

其余均与B_ℓ相同

$SX=-X^tS$ $X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$

$$SX=\begin{pmatrix}0&I_t\\I_t&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c&d\\a&b\end{pmatrix}$$

$$-X^tS=-\begin{pmatrix}a^t&c^t\\b^t&d^t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&I_t\\I_t&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-c^t&-a^t\\-d^t&-b^t\end{pmatrix}$$

$c=-c^t$ $b=-b^t$ → b、c为反对称

$a=-d^t$ → trace=0

I：a的 对角线：ℓ a的非对角线：$\ell^2-\ell$

II：b非对角线：$(\ell^2-\ell)\frac{1}{2}$

III：c非对角线：$(\ell^2-\ell)\frac{1}{2}$

total：$2\ell^2-\ell$

其它$gl(n,F)$的子代数：

$t(n,F)$ — 上三角矩阵 $a_{ij}=0$ if $i>j$

$n(n,F)$ — 严格上三角矩阵 $a_{ij}=0$ if $i\geq j$

$D(n,F)$ — 对角矩阵 $a_{ij}=0$ if $i\neq j$

$[D(n,F),n(n,F)]=n(n,F)$ ✓

$[t(n,F),t(n,F)]=n(n,F)$ ✓

$t(n,F)=n(n,F)+D(n,F)$ —向量空间上的加法

---

example 1：$A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$，$AB-BA=B$，prove：$B^n=0$

example 2：
$$\begin{vmatrix}x+n&-n&&&\\1&x+n-1&\ddots&&\\&2&\ddots&-2&\\&&\ddots&x+1&-1\\&&&n&x\end{vmatrix}=$$

example 3：Jordan-chevalling

$A=S+N$ $\mathbb{C}^{n\times n}$ $SN=NS$

S→对角，N→幂零

example 4：$A,B\in \mathrm{End}V$ $AB=BA$ A、B可对角化，则可同时对角化

example 5：$B(X,Y)$ $\mathbb{F}^{n\times n}$上 双线性函数，满足 $B(XY,Z)=B(X,YZ)$

$\Rightarrow B(X,Y)=c\cdot tr(XY)$

example 6：有限个真子空间的并，不等于全空间

$\{D\in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)\mid D(\alpha\times\beta)=(D\alpha)\times\beta+\alpha\times(D\beta)\}$

$D(\alpha)=\gamma\times\alpha$

$\mathbb{F}^{n\times n}$ $\{D\in \mathrm{End}(\mathbb{F}^{n\times n})\mid D(AB)=D(A)B+AD(B)\}$

$C\in\mathbb{F}^{n\times n}$ $D(A)=[C,A]$

$\{D\in \mathrm{End}(\mathbb{F}[x])\mid D(f(x)g(x))=D(f(x))g(x)+f(x)D(g(x))\}$

$D_1\in \mathrm{End}\,V$

$D_2\in \mathrm{End}\,V$

$D_1\circ D_2\notin \mathrm{End}V$

$D_1\circ D_2-D_2\circ D_1\in \mathrm{End}V$

$D_1\circ D_2=D_2[D(f(x))g(x)]+D_2(g(x))D(f(x))+\cdots$

4项

三. Lie Algebra of derivations

定义基础代数只需双线性

1、F algebra（不一定是结合的），有一个在 F 上的向量空间，赋予双线性运算 $U\times U\to U$（用"列"表示）　　先定义F代数

导子的定义　　莱布尼茨律

2、通过对U的推导，给出一个线性映射 $\delta: U\to U$ 满足 product rule $\delta(ab)=a\delta(b)+b\delta(a)$，即为导子　　满足条件，给出定义

全体U的导子称为 Der U，Der U 是 End U 的向量子空间（线性空间），Der U 也是 $gl(V)$ 的一个子代数

对加法、数乘封闭　　证明满足李代数性质（1、2点 线性空间已证明，只要证 [,]）

3、$[\delta,\delta']$，两个导子的交换子也是导子

$$[\delta,\delta'](ab)=\delta\delta'(ab)-\delta'\delta(ab)=\delta\big(\delta'(a)b+a\delta'(b)\big)-\delta'\big(\delta(a)b+a\delta(b)\big)$$

$$\delta_1\delta_2(ab)=\delta_1(\delta_2(a)b+a\delta_2(b))=\delta_1\delta_2(a)b+\cancel{\delta_2(a)\delta_1(b)}+\cancel{\delta_1(a)\delta_2(b)}+a\delta_1\delta_2(b)$$

$\forall \delta_1,\delta_2\in Der\,U$，$[\delta_1,\delta_2]\in Der\,U$

$$\delta_2\delta_1(ab)=\delta_2\delta_1(a)b+\cancel{\delta_1(a)\delta_2(b)}+\cancel{\delta_2(a)\delta_1(b)}+a\delta_2\delta_1(b)$$

$$[\delta_1,\delta_2](ab)=(\delta_1\delta_2-\delta_2\delta_1)(a)b+a(\delta_1\delta_2(b)-\delta_2\delta_1(b))$$

$$=[\delta_1,\delta_2](a)b+a[\delta_1,\delta_2](b)$$

由于李代数满足上述F代数条件，define Der L

1、定义 $ad\,x$：$\forall x\in L$，$y\mapsto[x,y]$，是 L 的自同态（单向，同构为可逆自同态），（$ad\,x$ 是一个自同态映射）　$ad\,x$ 是一个运算　　定义 $ad\,x$

2、$ad\,x\in Der\,L$，by Jacobi identity：$[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$　　by 导子的定义：$\delta([x,y])=[\delta(x),\delta(y)]$

$[x,[y,z]]=[[x,y],z]+[y,[x,z]]$

Jacobi：$[x,[y,z]]=[[x,y],z]+[y,[x,z]]$

① by 导子定义 $\delta(yz)=\delta(y)z+y\delta(z)$

② 把 ( ) 看作 [,]　　$\delta[y,z]=[\delta(y),z]+[y,\delta(z)]$

③ 把 δ 换成 $ad\,x$　　$ad\,x[y,z]=[ad\,x(y),z]+[y,ad\,x(z)]$

$[x,\cdot\cdot]: L\xrightarrow{ad\,x}L$

$ad\,x(y)$: $[x,y]$

$(y\to[x,y])$

$=[ad\,x(y),z]+[y,ad\,x(z)]$

$=ad\,x[y,z]$

（所有 ad 形式导子称为内导子，其余外导子）

理解 $ad\,x(yz)=ad\,x(y)z+y\,ad\,x(z)$

[把 $ad\,x$ 看作 $\delta(yz)=\delta(y)z+y\delta(z)$]

$L\xrightarrow{ad}Der\,L$　ad 是个映射　　即证 $ad[x,y]=[ad\,x,ad\,y]$　能否保持不变

$ad[x,y]\,z=[[x,y],z]=-[[y,z],x]-[[z,x],y]=[x,[y,z]]-[y,[x,z]]$　作用在 z 上

验证结果不变　$=ad\,x(ad\,y(z))-ad\,y(ad\,x(z))=(ad\,x\,ad\,y-ad\,y\,ad\,x)(z)=[ad\,x,ad\,y]z$

3、伴随表示：当 $x\neq0$ 时，$ad\,x$ 可能 $=0$（dim=1 Lie alge ϕ）map $L\to Der\,L$ 称为 L 的伴随表示（即 $x\to ad\,x$ ϕ）

4、$ad_L x$ and $ad_K x$，$\begin{cases} ad_L x：x\text{为L的元素} \\ ad_K x：x\text{为L的子代数K的元素} \end{cases}$ $\longrightarrow$ 避免歧义

四、Abstract Lie Algebra

(Ado, Iwasawa 定理)：有限维李代数必同构于某个线性李代数

假设有李代数 L，F上，$\dim L = n$，$(x_1 \cdots x_n)$ 为一组基　(其中，若 $\forall x, y \in L$ $[x,y]=0$，称这种为 Abelian 李代数(交换李代数))

$[x_i, x_j] = \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^{k} x_k$ ；$x_i, x_j, [x_i, x_j], x_k \in L$　$[x_i, x_j] = \underline{x_i x_j - x_j x_i}$ 可用一系列 $\underline{\lambda}$ x_k 表示　λ 再用 a_{ij}^{k} 表示

$[x_j, x_i] = \sum_{k=1}^{n} a_{ji}^{k} x_k$

因为 $[x_i, x_j] = -[x_j, x_i]$　所以 $a_{ij}^{k} + a_{ji}^{k} = 0$

$y = \sum_{k=1}^{n} y_k x_k$，$z = \sum_{k=1}^{n} z_k x_k$　$[y, z] = \sum_{i,j=1}^{n} [x_i, y_j] y_i z_j$

(L_1)　(L_2) $[x_i, x_i] = 0$，$[x_i, x_j] = -[x_j, x_i]$ (char $F \neq 2$)

(L_3)　$[x_i, [x_j, x_k]] = [x_i, \sum_{l=1}^{n} a_{jk}^{l} x_l]$

$= \sum_{l=1}^{n} a_{jk}^{l} \sum_{m=1}^{n} a_{il}^{m} x_m$

$= \sum_{l=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} a_{jk}^{l} a_{il}^{m} x_m$

$j \to k \to i \to l$

$\sum_{l=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} (a_{jk}^{l} \cdot a_{il}^{m} + a_{ki}^{l} \cdot a_{lj}^{m} + a_{il}^{l} \cdot a_{jk}^{m}) \cdot x_m = 0$

$[x_i, [x_j, x_k]] + [x_j, [x_k, x_i]] + [x_k, [x_i, x_j]]$

$\dim L = 1$，$[x, ax] = a[x, x] = 0$

$\dim L = 2$，① $[x, y] = 0$　　② $[x_1, x_2] = ax_1 + bx_2 = x$

$\forall x, y \in L$，$[x, y] = 0$　　不妨设 $a \neq 0$，$y = \frac{x_2}{a}$，$x = ax_1 + bx_2$

，则 L 为 Abel/交换李代数　　$[x, y] = [ax_1 + bx_2, \frac{x_2}{a}] = [x_1, x_2] = x$　∃[基, 基] = 一个基、

~~(二维非交换李代数，可用维度基去确定)~~

Exercise

1. Let L be the real vector space $\mathbf{R}^3$. Define $[xy] = x \times y$ (cross product of vectors) for $x, y \in L$, and verify that L is a Lie algebra. Write down the structure constants relative to the usual basis of $\mathbf{R}^3$.

first step – verify L is a Lie algebra

Le real vector space R^3, L为线性空间，L满足线性空间所有性质，L equipped with bilinear

$[a,a] = a \times a = 0$ $\quad [a,[b,c]] + [b,[c,a]] + [c,[a,b]] = 0$ □

L is a Lie algebra □

(L1): cross product is bilinear

(L2): $[x,x] = x \times x = 0$

(L3): $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$

$x_1(1,0,0)$ $\quad [x_1,x_2] = x_1 \times x_2 = x_3$

$x_2(0,1,0)$ $\quad [x_1,x_3] = x_2$

$x_3(0,0,1)$ $\quad [x_2,x_3] = x_1$

2. Verify that the following equations and those implied by (L1) (L2) define a Lie algebra structure on a three dimensional vector space with basis (x, y, z): $[xy] = z$, $[xz] = y$, $[yz] = 0$.

$x(a,0,0)$ $\quad x(0,a,0)$ $\quad x(0,0,a)$

$y(0,b,0)\,/\,(0,0,b)$

$z(0,c,0)\,/\,(0,0,c)$

6种 basis arrangement.

$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]]$

$= [x,0] + [y,-y] + [z,z] = 0$

3. Let $x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ be an ordered basis for $\mathfrak{sl}(2, F)$. Compute the matrices of ad x, ad h, ad y relative to this basis.

$[x,h] = xh - hx = -2x$

$[x,y] = xy - yx = h$

$[y,h] = yh - hy = 2y$

$\mathrm{ad}x(x,h,y) = (\mathrm{ad}x(x), \mathrm{ad}x(h), \mathrm{ad}x(y)) = ([x,x],[x,h],[x,y])$

$= (0,-2x,h) = (x,h,y)\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\mathrm{ad}y(x,h,y) = (\mathrm{ad}y(x), \mathrm{ad}y(h), \mathrm{ad}y(y)) = ([y,x],[y,h],[y,y])$

$= (-h, 2y, 0) = (x,h,y)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$\mathrm{ad}h(x,h,y) = (\mathrm{ad}h(x), \mathrm{ad}h(h), \mathrm{ad}h(y)) = ([h,x],[h,h],[h,y]) = (2x, 0, -2y)$

$= (x,h,y)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

4. Find a linear Lie algebra isomorphic to the nonabelian two dimensional algebra constructed in (1.4). [Hint: Look at the adjoint representation.]

$[x_1, x_2] = ax_1 + bx_2 = x = [x_1, x_2]$

Define a map φ: $L \mapsto \mathrm{ad}L$

$x \mapsto \mathrm{ad}x$

$y \mapsto \mathrm{ad}y$

$[x,y] \mapsto \mathrm{ad}[x,y]$

$a \neq 0$ $\quad x = ax_1 + bx_2 \quad y = \frac{x_2}{a}$

$[x,y] = [ax_1 + bx_2, \frac{x_2}{a}] = (ax_1 + bx_2)\frac{x_2}{a} - \frac{x_2}{a}(ax_1 + bx_2) = x_1x_2 - x_2x_1$

$= [x_1, x_2]$

$\mathrm{ad}L \cong L$

$[\mathrm{ad}x, \mathrm{ad}y] = \mathrm{ad}[x,y] = \mathrm{ad}x$

二维非交换李代数可用一维简单表示

5. Verify the assertions made in (1.2) about $\mathfrak{t}(n, F)$, $\mathfrak{d}(n, F)$, $\mathfrak{n}(n, F)$, and compute the dimension of each algebra, by exhibiting bases.

$t(n,F)$ 上三角矩阵 $\quad n(n,F)$ 严格上三角矩阵 $\quad D(n,F)$ 对角矩阵

$\dim = \frac{n^2-n}{2} + n = \frac{n^2+n}{2}$ $\quad \dim = \frac{n^2-n}{2}$ $\quad \dim = n$

$A, B \in t(n,F)$, $[A,B] \in t(n,F)$

同理可证 $A, B \in n(n,F)$ or $D(n,F)$, $[A,B]$ closed

$A \in D(n,F)$ $\quad B \in n(n,F)$ $\quad [A,B] \in n(n,F)$

$A_i \in t(n,F)$ $\quad A_i = B_i + C_i$ $\quad B_i \in D(n,F)$ $\quad C_i \in n(n,F)$ $\quad [A_1, A_2] \in n(n,F)$

$i = 1, 2$

标量矩阵 $\quad$ 单位的标量倍.

6. Let $x \in \mathfrak{gl}(n, F)$ have n *distinct* eigenvalues $a_1, \ldots, a_n$ in F. Prove that the eigenvalues of ad x are precisely the n^2 scalars $a_i - a_j$ $(1 \le i, j \le n)$, which of course need not be distinct.

补一下特征值 related 知识

$\mathrm{diag}(a_1 \cdots a_n)$ $\quad e_{ij}$, $1 \le i, j \le n$ be the basis of $\mathfrak{gl}(n,F)$ $\quad \mathrm{ad}x(e_{ij}) = [x, e_{ij}] = xe_{ij} - e_{ij}x =$

$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} & & \\ & 1 & \\ & & \end{pmatrix}}_{e_{ij}} - \underbrace{\begin{pmatrix} & & \\ & 1 & \\ & & \end{pmatrix}}_{e_{ij}}\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & a_i & \\ & & \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & & \\ & a_j & \\ & & \end{pmatrix}$

$= (a_i - a_j)e_{ij}$

7. Let $\mathfrak{s}(n, F)$ denote the **scalar matrices** (=scalar multiples of the identity) in $\mathfrak{gl}(n, F)$. If char F is 0 or else a prime not dividing n, prove that $\mathfrak{gl}(n, F) = \mathfrak{sl}(n, F) + \mathfrak{s}(n, F)$ (direct sum of vector spaces), with $[\mathfrak{s}(n, F), \mathfrak{gl}(n, F)] = 0$.

$A \in sl(n,F)$ $\quad B = aE \in s(n,F)$ $\quad [A,B] = AB - BA = aA - aA = 0$

$\dim(gl) = \dim(sl) + \dim(s)$ $\quad$ so $\quad gl(n,F) = sl(n,F) + s(n,F)$

$n^2 \qquad n^2-1 \qquad 1$ $\qquad$ direct sum of vector spaces.

8. Verify the stated dimension of D_ℓ.

9. When char F = 0, show that each classical algebra $L = A_\ell, B_\ell, C_\ell$, or D_ℓ is equal to $[LL]$. (This shows again that each algebra consists of trace 0 matrices.)

补特征值 related

8、略

9、let $x_1 \cdots x_\ell$ be the basis of L $(A_\ell, B_\ell, C_\ell, D_\ell)$ $\quad [L,L] = \{[x_i, x_j] = \sum_{k=1}^{\ell} a_{ij}x_k,\ x_i, x_j \in L\}$,

$\sum_{k=1}^{\ell} a_{ij}x_k \in L$, $\quad [x_i, x_j] \in L$

$[L,L] = L$

10. For small values of ℓ, isomorphisms occur among certain of the classical algebras. Show that A_1, B_1, C_1 are all isomorphic, while D_1 is the one dimensional Lie algebra. Show that B_2 is isomorphic to C_2, D_3 to A_3. What can you say about D_2?

It is known to us that: $\dim$: $A_\ell = (\ell+1)^2 - 1$ $\quad B_\ell = 2\ell^2 + \ell$ $\quad C_\ell = 2\ell^2 + \ell$ $\quad D_\ell = 2\ell^2 - \ell$

$\dim A_1 = \dim B_1 = \dim C_1 = 1$ $\quad$ so $\quad A_1 \cong B_1 \cong C_1$

$D_1 = 1$ $\qquad \dim B_2 = \dim C_2 = 10$ $\qquad B_2 \cong C_2$

$\dim A_3 = \dim D_3 = 15$ $\qquad A_3 \cong D_3$

$\dim D_2 = 6$.

11. Verify that the commutator of two derivations of an F-algebra is again a derivation, whereas the ordinary product need not be.

presume δ_1, δ_2 are two derivations of F-algebra.

$[\delta_1, \delta_2](ab) = \delta_1\delta_2(ab) - \delta_2\delta_1(ab)$

$\delta_1\delta_2(ab) = \delta_1(\delta_2(a)b + a\delta_2(b))$

$= \delta_1\delta_2(a)b + \cancel{\delta_1(b)\delta_2(a)} + \cancel{\delta_1(a)\delta_2(b)} + a\delta_1\delta_2(b)$

$\delta_2\delta_1(ab) = \delta_2\delta_1(a)b + \cancel{\delta_2(b)\delta_1(a)} + \cancel{\delta_2(a)\delta_1(b)} + a\delta_2\delta_1(b)$

$[\delta_1, \delta_2](ab) = b[\delta_1, \delta_2](a) + a[\delta_1, \delta_2](b)$

$\delta_1, \delta_2 \in \mathrm{Der}\,U$ $\quad a, b \in U$ $\quad [\delta_1, \delta_2](ab) \in \mathrm{Der}\,U$.

but $\delta_1\delta_2(ab) \notin \mathrm{Der}\,U$

$\delta_1\delta_2(ab) = \delta_1(\delta_2(a)b + b\delta_2(a)) +$

~~$\delta_2(\delta_1(a)b + a\delta_1(b))$~~

$= \delta_1\delta_2(a)b + \delta_1(b)\delta_2(a) + \delta_1(b)\delta_2(a) + b\delta_1\delta_2(a)$

~~$+ \delta_2\delta_1(a)b + \delta_1(a)\delta_2(b) + \delta_2(a)\delta_1(b) + a\delta_2\delta_1(b)$~~

$\neq \delta_1\delta_2(a)b + a\delta_1\delta_2(b)$ $\quad$ 不再保持双线性

$F \cdot G(f(x) \cdot g(x)) =$ $\quad$ 不再属于 Lie algebra

12. Let L be a Lie algebra and let $x \in L$. Prove that the subspace of L spanned by the eigenvectors of ad x is a subalgebra.

$a_1 \sim a_\ell$ 作为 $\mathrm{ad}x$ 的特征向量 $v_1 \sim v_\ell$ 的特征值

$\mathrm{ad}x(v_i) = [x, v_i] = xv_i - v_ix = a_iv_i \quad i \in [1, \ell]$

$\mathrm{ad}x[v_i, v_j] = [x, [v_i, v_j]]$ $\qquad [x,[v_i,v_j]] + [v_i,[v_j,x]] + [v_j,[x,v_i]] = 0$

$= [v_i, [x, v_j]] - [v_j, [x, v_i]] = [v_i, a_jv_j] - [v_j, a_iv_i] = a_j[v_i, v_j] + a_i[v_i, v_j] = (a_i + a_j)[v_i, v_j]$

2、Ideals and homomorphisms

2.1 Ideals（理想）

子空间 $\xrightarrow{[\,,\,]\text{封闭}}$ 子代数 $\xrightarrow{\text{吸收律}}$ 理想（性质好的子代数）

定义　1、有一个李代数 L 的子空间 I：if $x\in L$，$y\in I$ $\Longrightarrow$ $[x,y]\in I$ or $[y,x]\in I$（吸收律）叫作 I 为 L 的理想

（因为 $[x,y]=-[y,x]$）

（ideal 作用是在群论中的正规子群和环论中的两侧理想）作为同态的核心

0（仅由0向量组成的子空间）和 L 本身是 L 的理想

center：中心是代数中环论的一个概念

环R的中心是集合 $C=\{c\in R \mid cr=rc,\ \forall r\in R\}$

example：

① 中心：$Z(L)=\{z\in L \mid [x,z]=0 \text{ for all } x\in L\}$　（L是交换矩阵当且仅当 $Z(L)=L$）Abel

$x\in L, z\in L$　$[x,z]=[\cancel{L},L]=0$　if L 为 Abel，则 $Z(L)$ 可取L全体（$Z(L)=L$）

center $Z(L)=\{z\in L \mid zx=xz,\ \forall x\in L\}$　$[x,z]=0$

② L 的导出代数，记作 $[L,L]$，由 $[x,y]$ 所有线性组合组成。导出代数类似于群的交换子群，一定是 ideal　$[x_i,y_i]$?

叫作导出代数

性质：1、if I、J 是李代数 L 的2个ideals，则 $I+J=\{x+y \mid x\in I, y\in J\}$ 也是ideal / $[I,J]=\{\sum x_iy_i \mid x_i\in I, y_i\in J\}$ 也是ideal　上述导出代数 $[L,L]$ 为其一

即证明 $[x+y,z]\in L \Leftarrow z\in L \rightarrow$

$=\underbrace{[x,z]}_{I}+\underbrace{[y,z]}_{J}$

得证

证明 $[z,[x,y]]\in I$

$\underbrace{[[z,x],y]}_{[I,y]}+\underbrace{[x,[z,y]]}_{[x,J]}$　得证

2、通过分析 ideal 来分析李代数的结构：

分类：① simple L（单李代数）

if 李代数 L，只有 0 和自身 作为ideal，无其它 ideals（条件是 $[L,L]\neq 0$，L为非交换矩阵，避免讨论一维代数）

example：L simple $\Longrightarrow$ $Z(L)=0$ and $L=[L,L]$

$Z(L)=L$ or 0　if $Z(L)=L$　则 $[L,L]=L\neq 0$、不符合 center 的条件.

example：

$L=sl(2,F)$　char $F\neq 2$　基 $\begin{array}{ccc} x & y & h \\ \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\end{array}$

$[x,y]=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}=h$

$[h,x]=2x$　$[h,y]=-2y$

$\underbrace{\begin{bmatrix}A_{11}&\cdots&A_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ A_{n1}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix}}_{A,\ n\times n}\underbrace{\begin{bmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{bmatrix}}_{n\times 1}=\underbrace{\begin{bmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_n\end{bmatrix}}_{n\times 1}=\lambda\begin{bmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{bmatrix}$　n维向量　n维向量　特征值　特征向量

$(A-\lambda I)v=0$　$\det(A-\lambda I)=0$

（x,y,h 是 ad h 的特征向量，特征值为 $2,-2,0$ 因为char $\neq 2$，所以特征值不同）

假设 $I\neq 0$ 是 L 的一个ideal，$ax+by+ch\in I$，（a,b,c 不全为0）

x作用2次：$[x,[x,ax+by+ch]]=[x,[x,ax]+[x,by]+[x,ch]]=[x,0+bh-2cx]=-2bx$

y作用2次：$[y,[y,ax+by+ch]]=-2ay$

① $b\neq 0$　$x\in I$

② $a\neq 0$　$y\in I$

③ $a=0, b=0, c\neq 0$，$h\in I$（假设里有说明）

$I=L$，$sl(2,F)=L$ 为单李代数

② not simple L（$\dim\neq 1$）

可以分解出一个非0真ideal，从而获取更小维度的李代数　商代数 L/I（I 是 L 的ideal）的构造在形式上与商环的构造相同 ?

if L 不是单的，L 有非平凡理想 I，$L/I=\{x+I \mid x\in L\}$，L/I 为商李代数

向量空间 L/I 是一个商空间，李乘法的定义：$[x+I,y+I]=[x,y]+I$

$x+I=x'+I$　$x'=x+u$（$u\in I$）

$y+I=y'+I$　$y'=y+v$（$v\in I$）

李代数，+封闭　（$x,y\in L$）

$[x',y']=[x+u,y+v]=[x+u,y]+[x+u,v]$

$=[x,y]+\underbrace{([u,y]+[x,v]+[u,v])}_{\text{全在}I\text{中}}$

（只要有 I 中元素作 $[\,,\,]$ 也在 I 中）

$[x',y']+I=[x,y]+I$

理想，看作0空间

① $\bar{\alpha}=\{\alpha+y \mid y\in N\}$

$:=\alpha+N$　称为N的一个陪集

③

(normalizer) K是L子代数, L为Lie alge, $N_L(K)$为L的子代数

概念(类似于群论): 1、L的子代数/子空间K正规化子子代数的定义: $N_L(K)=\{x\in L \mid [x,K]\subset K\}$

by Jacobi identity $N_L(K)$是L的子代数, 被描述为L的最大子代数, K是ideal (如果K是子代数)

① $N_L(K)$是L的子代数 → 证明$N_L(K)$满足子代数性质

$x_1,x_2\in N_L(K)$, $\forall y\in K$ $[x_1,y]\in K$ $[x_2,y]\in K$

即证 $[[x_1,x_2],y]\in N_L(K)$ x_1与x_2做[,]仍是normalizer

Jacobi: $[y,[x_1,x_2]]=[\underbrace{[y,x_1]}_{K},x_2]+[x_1,\underbrace{[y,x_2]}_{K}]\in N_L(K)$

所以 $[x_1,x_2]\in N_L(K)$

② K为$N_L(K)$的理想, 若$K=N_L(K)$, 我们称K自正规子

2. X为L的子集, (不用为子代数) X的中心化子的定义: $C_L(X)=\{x\in L \mid [x,X]=0\}$
(centralizer)

by Jacobi -- $C_L(X)$也是L的子代数

证明: $x_1,x_2\in C_L(X)$, $x_0\in X$

$[x_0,[x_1,x_2]]=[\underbrace{[x_0,x_1]}_{0},x_2]+[x_1,\underbrace{[x_0,x_2]}_{0}]=0$

$[x_1,x_2]\in C_L(X)$, $C_L(X)$为L的子代数

2.2 Homomorphisms and representations

homomorphism
1. 同态定义: 线性变换$\phi: L\to L'$ (L和L'的代数均在F上) $\phi([x,y])=[\phi(x),\phi(y)]$ 对所有$x,y\in L$成立, 则称为同态

单态性: monomorphism : $\ker\phi=0$
外态: epimorphism : $\mathrm{Im}\,\phi=L'$
> isomorphism 同构

$\ker\phi$是L的一个ideal, 若$\phi(x)=0$, 任意的$y\in L$, $\phi[x,y]=[\phi(x),\phi(y)]=0$

$\mathrm{Im}\,\phi$是L'的一个子代数,

homomorphism
2、同态和ideal间存在的定义关系(一一对应)

2.1 Ideals（理想）

0（仅由0向量组成的子空间）和L本身是L的理想

定义 1、有一个李代数L的子空间I满足条件：if $x\in L$, $y\in I$ $\Longrightarrow$ $[x,y]\in I$ ，就把I叫作L的理想

有2个之前已经prove过的推论：计I, J为L的ideal，则1、I+J也为ideal；（与线性空间作类比）
2. [I, J]也为ideal

即证 $[I+J, L] \in \underline{I+J}$

$$[x+y,z] = (x+y)z - z(x+y) = xz+yz-zx-zy = xz-zx+yz-zy = \underbrace{[x,z]}_{I} + \underbrace{[y,z]}_{J}$$

1) 单李代数（simple）

计 李代数L，只有 0和自身 作为ideal，无其它 ideals（解释是 $[L,L]\neq 0$，L为非交换矩阵）
$\begin{cases} [L,L]=0 \rightleftharpoons L \text{ is abelian} \\ [L,L]\neq 0 \rightleftharpoons \dim L \geq 2 \end{cases}$

如果L为 simple lie algebra $\Rightarrow$ $[L,L]=L$　（$[L,L]\in$ ideal $\{L, 0\}$ 已知$\neq 0$. $[L,L]=L$）

2) 不简单的李代数

计 lie algebra not simple，分解出 ideal（非0）　　不是具体的数字，是抽象的空间

$\frac{L/I}{\text{商李代数}}$ $x+I$ $\begin{cases} 1、\text{vector space} \\ 2、[x+I, y+I] = [x,y]+I \end{cases}$ $\rightarrow$ $\begin{cases} x'+I = x+I \\ y'+I = y+I \end{cases}$

$[x',y'] = [x+u, y+v] = [x+u, y] + [x+u, v]$
$= [x,y] + \underbrace{[u,y]}_{I} + \underbrace{[x,v]}_{I} + \underbrace{[u,v]}_{I}$ $\Longleftrightarrow$ $[x,y]+I$

① 正规化子 normalizer ： normalizer of subalgebra K of L

$N_L(K) := \{x\in L \mid [x,K]\subseteq K\}$

性质 $\begin{cases} ① \text{ K为normalizer 的1个ideal} \\ ② \text{ } N_L(K)\text{为 maximal subalgebra（极大子代数）} \end{cases}$　　不作证明，与此处无关

自正规子： $K = N_L(K)$　后续相关

② 中心化子 ：
centerlier
$C_L(K) := \{x\in L \mid [x,K]=0\}$

$L: V\to W$
$\ker(L) = \{v\in V \mid L(v)=0\} = L^{-1}(0)$

2.2 同态　Homomorphisms

线性变化ϕ：$L\to L'$（L, L'都是数域F上的李代数）满足 条件 $\begin{cases} 1. \text{ 线性变化（加法 数乘）} \\ 2. \text{ } \phi[x,y] = [\phi(x), \phi(y)] \quad (\forall x,y\in L) \end{cases}$ +

集合
① $\ker\phi = 0$　monomorphism 单同态
$\ker\phi = \{x\in L \mid \phi(x)=0\} = 0$
② $\operatorname{Im}\phi = L'$　epimorphism 满同态　满射
$\operatorname{Im}\phi = \{\phi(x) \mid \forall x\in L\} = L'$
③ ①+②　isomorphism 同构

性质： 1. $\ker\phi$ 为L的ideal（$\ker\phi(x)=0$ $y\in L$ $\phi[\ker, y]) = [\underset{0}{\ker\phi}, \phi(y)]] = 0$）①

2. $\operatorname{Im}\phi$ 为L'的 subalgebra

$\phi[\ker, y] = [\ker\phi, \phi(y)] = [0, \phi(y)] = ?$

$\phi[x,y] = [\phi x, \phi(y)] = ?$

同态前提
$6(\alpha+\beta) = 6(\alpha) + 6(\beta)$
$k6(\alpha) = 6(k\alpha)$.

反证法：
$\exists\ \alpha\neq\beta$　$6(\alpha) = 6(\beta)$
$6(\alpha) - 6(\beta) = 6(\alpha-\beta) = 0$
$\alpha=\beta$
不

3条基本定理: $\varphi: L\to L'$

I为L的ideal，典范映射: $x\to x+I$（元素 → 集合）$L\to L/I$ （暂且权当是个映射）

1) $\phi: L\to L'$是李代数同态, $L/\ker\phi \cong \mathrm{Im}\,\phi$ （同构，象）（怎么证明，不清楚）

$\forall I$是L的ideal, s.t. $I\subseteq \ker\phi$, $\exists!$（有唯一）同态 $\psi: L/I\to L'$, 使下图可交换（π为典范映射）

②

映射的复合

$\phi=\psi\circ\pi$

$$\begin{tikzcd} x \in L \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & L' \\ L/I \arrow[ur, dashed, "\exists!\psi"'] & \end{tikzcd}$$

典范映射

$x+I$

商代数 $x+I\in L/I$, $x+I\subseteq x+\ker\phi$ （$\ker\phi$不是0吗，$x+\ker\phi\subseteq x+I$ 吗）

step1: $x \xrightarrow{\pi} x+I \longrightarrow x+\ker\phi$

step2: $x+\ker\phi$ 为 $L/\ker\phi$ 中元素 （① 证 prove $\ker\phi$为ideal，故把$\ker\phi$看作I即可）

step3: $x \xrightarrow{\pi} x+I \xrightarrow{\psi} \phi(x) \longleftrightarrow x+\ker\phi$

$\psi: L/\ker\phi \to L'$

2) I与J为L的ideal, $I\subseteq J$, 则 J/I 为 L/I 的一个ideal, 且 $(L/I)/(J/I) \cong L/J$（同构）

prove: J/I为L/I的ideal，即证 $[J/I, L/I]\in J/I$ （ideal的吸收律）

$x\in L$, $x+I\in L/I$　　$y\in J$, $y+I\in J/I$ （商代数内容）

$[y+I, x+I]=\underbrace{[x,y]}_{J}+I \in J/I$ □

prove: $(L/I)/(J/I)\cong L/J$

L/J

$(x+I)+(y+I)$（元素，集合）　$x+J$

$\boxed{L+J}$　　$x+J$

$x+y+I\in L+I$ （因为J/I为L/I的ideal）

$y+I$　$x+I$

$\boxed{L+I}$　　$L+I\cong L+J$

3) 如果I, J为L的理想，∃$(I+J)/J$与$I/(I\cap J)$之间的自然同构

$(I+J)/I$ 与 $J/(I\cap J)$

$I+J$

$I \quad\quad J$

$I\cap J$

$L'=L/(I\cap J)$ $J'=J/(I\cap J)$ $I'+J'=L'$

$I'=I/(I\cap J)$ $I'\cap J'=0$

即证 $I'+J'/J' \cong (I+J)/J \overset{?}{\cong} I/(I\cap J)=I'$ $(I'+J')/J' \cong I'$

$x\in I$ $y\in J$ $z\in(I\cap J)$ (by b)

$(I+J)/I$ $I/(I\cap J)$ $(I+J)/I \cong I/(I\cap J)$.

$x+y+I \in (I+J)/I$. $x+y+I \cong x+z$.

$x+z\in I/(I\cap J)$ $z\in y+I$.

Lie algebra 的表示是 同态 $\phi: L\longrightarrow gl(V)$ ($V=$ F上的 vector space).

$gl(V)$ 不一定要求为有限维，无穷维也成立.

1.3中所提及的伴随所示 $ad: L\longrightarrow gl(L)$

$x\longrightarrow ad\,x$ $(ad\,x(y)=[x,y])$

ad为一个线性变换，保留括号：

$[adx, ady](z) = adx\,ady(z) - ady\,adx(z)$

$= adx\,[y,z] - ady\,[x,z]$

$= [x,[y,z]] - [y,[x,z]]$

$= [[x,y],z] = ad[x,y](z)$.

1. 线性映射 2、$ad[x,y]=[adx, ady]$ 保持李括号.

满足1, 2, 为同态

ad 的 kernel: $\ker ad = \{x\in L \mid ad(x)=0\}$ all $x\in L$, $adx=0$.

$\ker ad = Z(L)$ center $Z(L)=\{z\in L \mid zx=xz, \forall x\in L\}$

$[x,z]=0$

$[L,L]\neq 0$

则 $[L,L]=L \rightarrow [L,L]=0$ $L=0$.

if L is simple, $Z(L)=0$, $ad: L\rightarrow gl(L)$

$\ker ad = Z(L)=0 \Rightarrow \ker ad$ 为单同态

(∀ simple 李代数 ≅ 线性李代数).

?

$L\rightarrow gl(L)$ 单同态.

simple Lie algebra ≅ 线性李代数.

?

2.3 Automorphisms（自同构）

Aut L : L到数 (?) 结构自同构　　Aut L为群、

L is a linear Lie algebra，且 $L\subseteq gl(V)$.

if $g\in GL(V)$ is 可逆自同态.

$gLg^{-1}=L$

map: $x\mapsto gxg^{-1}$ 是L的自同构.

(Example: $L=gl(V)$ or $sl(V)$，则 map是显然的).

$$g[x,y]g^{-1}=g(xy-yx)g^{-1}=[gxg^{-1},gyg^{-1}]\quad \forall x,y\in L,\ g\in GL(V).$$

$$\underbrace{gxg^{-1}}_{a}\underbrace{gyg^{-1}}_{b}-\underbrace{gyg^{-1}}_{b}\underbrace{gxg^{-1}}_{a}$$

if char $F=0$，$x\in L$，$\operatorname{ad}x$ 幂零，$(\operatorname{ad}x)^k=0$　$k>0$.

$e^A=1+A+\frac{A^2}{2!}+\cdots+\cdots$

$e^{\operatorname{ad}x}=\exp(\operatorname{ad}x)=1+\operatorname{ad}x+\frac{(\operatorname{ad}x)^2}{2!}+\cdots+\frac{(\operatorname{ad}x)^{k-1}}{(k-1)!}$

$\exp(\operatorname{ad}x)\in\operatorname{Aut}L$. ① $\varphi[x,y]=[\varphi(x),\varphi(y)]$ 是否为同态 ② inverse $1-\eta+\eta^2\cdots\pm\eta^{k-1}$ 求逆（可逆自同态）　if 记 $\exp\delta=1+\eta$

③ $\forall\varphi\in\operatorname{Aut}L$　$\varphi\psi\varphi^{-1}=\varphi\exp\operatorname{ad}x\,\varphi^{-1}=\exp(\operatorname{ad}\varphi(x))$ 为正规子群.

命题：char $F=0$，L为F上李代数，δ为L上幂零导子，则 $\exp\delta\in\operatorname{Aut}L$.

$\forall x,y\in L$，$\exp\delta([x,y])=\qquad\qquad=[\exp\delta x,\exp\delta y]$

$(fg)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(k)}g^{(n-k)}$　　$\delta([x,y])=\sum_{k=0}^{n}C_n^k[\delta^k x,\delta^{n-k}y]$

$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$　　$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$

$\frac{\delta^n(xy)}{n!}=\frac{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!}\delta^k(x)\delta^{n-k}(y)}{n!}$ … $\delta^n(xy)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\delta(x)\cdot\delta^{n-k}(y)$ $=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\delta^k(x)\delta^{n-k}(y)$

$$\frac{\delta^n(xy)}{n!}=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}\frac{1}{(n-i)!}\cdot\delta^i(x)\cdot\delta^{n-i}(y).$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}\delta^i(x)\cdot\frac{1}{(n-i)!}\delta^{n-i}(y).$$

$$\exp\delta([x,y])=\sum_{n=0}^{k}\frac{\delta^n}{n!}([x,y])=\underline{\sum_{n=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{\delta^i x}{i!},\frac{\delta^{n-i}y}{(n-i)!}\right]}$$

$e^{\delta[x,y]}$

$$[\exp\delta(x),\exp\delta(y)]=\left[\sum_{n=0}^{k-1}\frac{\delta^n x}{n!},\sum_{n=0}^{k-1}\frac{\delta^n y}{n!}\right]=\underline{\sum_{n=0}^{2k-2}\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{\delta^i x}{i!},\frac{\delta^{n-i}y}{(n-i)!}\right]}$$

$\exp\delta([x,y])=[\exp\delta x,\exp\delta y]$　　$e^\delta-1=\eta$

$\exp\delta=1+\underline{\delta+\frac{\delta^2}{2}+\cdots+\frac{\delta^{k-1}}{(k-1)!}}=1+\eta$.　　$1+\eta=e^\delta$ 可逆

$\eta^k=0$　　$1-(-\eta)^k=1=(1+\eta)(1-\eta+\eta^2+\cdots\pm\eta^{k-1})$

$\exp\delta$为可逆线性变换，$\exp\delta\in\operatorname{Aut}L$，$\exp\delta$ $\operatorname{ad}x\in\operatorname{Aut}L$.

if $\operatorname{ad}x=0$　$\exp\operatorname{ad}x$ 为内自同构，$\operatorname{Int}L$　$\exp(\operatorname{ad}x)$ 类似此形式.

$\operatorname{Int}L$为正规子群，

$\forall x\in\operatorname{Int}L$，$\forall g\in\operatorname{Aut}L$，

$x=\exp\operatorname{ad}x_1,\cdots\exp\operatorname{ad}x_n$

$g\exp(\operatorname{ad}x_1),\cdots\exp\operatorname{ad}x_n g^{-1}=g\exp(\operatorname{ad}x_1)g^{-1}\cdots\cdots g\exp(\operatorname{ad}x_n)g^{-1}$

$$g\exp\operatorname{ad}x_i\,g^{-1}=g\sum_{n=0}^{k-1}\frac{(\operatorname{ad}x_i)^n}{n!}g^{-1}=\sum_{n=0}^{k-1}\frac{(g\operatorname{ad}x_i g^{-1})^n}{n!}=\exp(g\operatorname{ad}x_i g^{-1})$$

$g\in\operatorname{Aut}L$，同态

$(g\operatorname{ad}x_i g^{-1})y=g[x_i,g^{-1}y]=[gx_i,y]=\operatorname{ad}gx_i(y)\quad\forall y\in L$　　结论：

$\exp(g\operatorname{ad}x_i g^{-1})=\operatorname{ad}gx_i$　　$\operatorname{Int}L$ 为 $\operatorname{Aut}L$ 的正规子群.

if $L\subseteq gl(V)$，char $F\neq 0$，$x\in L$ 是幂零的，那么 $\forall z\in L$.

$(\exp x)y(\exp x)^{-1}=\exp\operatorname{ad}x(y)$.

$\operatorname{ad}x=\lambda x+\rho_x$，$\lambda x$ and ρ_x 代表左乘与右乘

why $\operatorname{ad}x$ 幂零：$\operatorname{ad}x(z)=xz-zx$

$\operatorname{ad}x=\lambda x-\rho_x$　$\left\langle\begin{matrix}\lambda_x(z)=xz\\ \rho_x(z)=zx\end{matrix}\right\rangle$　λx与ρ_x可换　$\lambda_x\rho_x(z)=xzx=$

x为幂零.

$(\lambda x-\rho_x)^n=\Sigma\cdots\lambda_x^{?}\rho_x^{n-?}$　$\operatorname{ad}x$幂零

x为幂零　$e^{\lambda x}=\lambda e^x$

$\exp(\operatorname{ad}x)=\exp(\lambda x+\rho_x)=\underline{\exp\lambda x\cdot\exp(\rho_x)}=\lambda\exp(x)\cdot\rho\exp(-x)$

$e^{\operatorname{ad}x}=e^{\lambda x+\rho_x}=e^{\lambda x}\cdot e^{\rho_x}$　$\lambda_{\exp x}$　$\lambda(E)\cdot\lambda(E)$

λ的表达式可提出.

$e^{\lambda x}=\exp(\lambda x)=1+\lambda x+\cdots+\frac{\lambda_x^{k-1}}{(k-1)!}=(1+x+\cdots+\frac{x^{k-1}}{(k-1)!})\cdot\lambda$　?

$e^{\rho_x}=$

$\lambda x(z)=xz$　　$(\lambda x(z))^2=(xz)^2\neq\lambda x^2(z)=x^2z$.

1. prove that the set of all inner derivations $ad\,x$, $x \in L$, is an ideal of Der L

$L \to L$

$d[x,y] = [d(x),y] + [x,d(y)]$

show $[\mathrm{Der}\,L, \mathrm{I}\,\mathrm{Der}\,L] \subseteq \mathrm{I}\,\mathrm{Der}\,L$

$d \in \mathrm{Der}(L)$ $\quad ad\,x \in \mathrm{I}\,\mathrm{Der}\,L$

$$[d, ad\,x](y) = d(ad\,x(y)) - ad\,x(d(y))$$
$$= d[x,y] - [x,d(y)]$$
$$= [d(x),y] + \cancel{[x,d(y)]} - \cancel{[x,d(y)]}$$
$$= ad_{d(x)}(y) \in \mathrm{I}\,\mathrm{Der}\,L.$$

3. prove that center of $gl(n,F)$ equals $s(n,F)$, prove that $sl(n,F)$ has center 0, unless char F divides n, in which case the center is $s(n,F)$.

2. show that $sl(n,F)$ is precisely the derived algebra of $gl(n,F)$.

by 1.) known: $gl(n,F) = sl(n,F) \oplus s(n,F)$ $\quad$ dim $n^2 = n^2-1+1$

any $A, B \in gl(n,F)$ $\quad [A,B] = AB - BA$ has trace $= 0$ $\quad$ thus $gl(n,F) \subseteq sl(n,F)$

$\{e_{ij}\}$ be the standard basis of $gl(n,F)$, a basis of $sl(n,F)$ is $\beta = \{e_{ij} \mid i \neq j\} \cup \{e_{ij} - e_{i+1,i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1\}$

$[e_{ii}, e_{ij}] = e_{ij} \in gl(n,F)'$

$[e_{i+1\,i}, e_{i\,i+1}] = e_{ii} - e_{i+1\,i+1}$ $\quad$ Thus $sl(n,F) \subseteq gl(n,F)$.

3、1 Solvable and nilpotent Lie algebras.

L与斜列应该加0

定义 L 的理想序列 (导出级数)：$L^{(0)} = L$，$L^{(1)} = [L, L]$，$L^{(2)} = [L^{(1)}, L^{(1)}]$，$\cdots$，$L^{(i)} = [L^{(i-1)}, L^{(i-1)}]$.

若 $\exists\, n \in N^*$, s.t. $L^{(n)} = 0$，称 L 可解.（abelian 可解，simple 代数不可解）.

（上三角）upper triangular matrices $t(n,F)$，$\dim t(n,F) = \frac{n(n+1)}{2}$

$i<l$：$[e_{ii}, e_{il}] = e_{il}$ $(i<l)$　　$n(n,F) \subset [L, L]$

$n(n,F)$ 为上三角幂零矩阵的子代数.

$t(n,F) = D(n,F) + n(n,F)$　$D(n,F)$ 为 abelian　so that $n(n,F) = L$ 的导出代数.

$x, y \in t(n,F)$　$[x, y] \in n(n,F)$　$[x^n, y^n] = 0$

define $i<j$, $k<l$ $(i \neq l)$ 提 $[e_{ij}, e_{kl}] = e_{il}$ $(j=k)$

$= 0$ $(j \neq k)$

性质：① L 可解，L 的所有子代数和同态像可解.　$[k,k] = k^{(1)} \subseteq [L, L] = L^{(1)}$　$k^n \subseteq L^n$，$k^{(n)}$ 可解.

$\phi: L \to \mathrm{Im}\, L$ 同态像　$\phi[L, L] = [\phi(L), \phi(L)] = \phi(L)^{(1)} = \mathrm{Im}^{(1)} L$　$L^{(n)} = 0$　$\phi(L^{(n)}) = (\phi(L))^n$

? ② I 为 L 的可解理想，s.t. L/I 可解，L 也可解.　$[x, y] = z$　$[\bar{x}, \bar{y}] = \bar{z}$　$L^{(n)} \in (L/I)^{(n)} \subseteq I$　$(L/I)^{(n)} = 0$　$I^{(k)} = 0$

③ I、J 为 L 的可解理想，I+J 也可解.　① $i_1, i_2 \in I$　$j_1, j_2 \in J$　$[i_1+j_1, i_2+j_2] = [i_1, i_2] + [i_1, j_2] + [j_1, i_2] + [j_1, j_2] \in I + J^{(1)}$

presume $J \subseteq I$，$(I+J)^k \subseteq I + J^k$　$J^k = 0$　$I^{(n)} = 0$　$(I+J)^{n+k} \subseteq I^{(n)} + J^{(k)} = 0$　I+J 可解.

② $(I+J)/J \cong I/(I \cap J)$　由①得 $I \cap J$ 可解　由②得 $I/(I \cap J)$ 可解

so $(I+J)/J$ 可解

根基：极大可解理想 − Rad L，$I+J = I = J$　(I、J 均为 Rad L)　唯一性

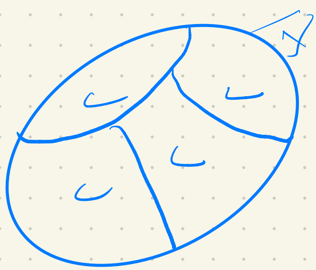
半单代数：Rad L = 0，单李代数 ⇄ 半单

L/Rad L 是半单的：若 Rad(L/Rad L) ≠ 0，x + Rad L

$[x + \mathrm{Rad}\, L, x + \mathrm{Rad}\, L] \subseteq \mathrm{Rad}\, L$

$\dim(\underbrace{\mathbb{F}x + \mathrm{Rad}\, L}_{\text{可解}}) > \dim(\mathrm{Rad}\, L)$，Rad L 矛盾.

2



白

5

3.2 Nilpotency (幂零).

定义 L 的理想序列 (降序中心级数/下中心级数)： $L^0=L$, $L^1=[L,L]$ $(=L^{(1)})$, $L^2=[L,L^1]$, ⋯, $L^i=[L,L^{i-1}]$

if $\exists\, n\in\mathbb{N}^*$, s.t. $L^n=0$. L is called nilpotent (幂零的).

$L^{(i)}\subset L^i$ 可解 $\rightleftharpoons$ 幂零

$[L^{(i-1)},L^{(i-1)}]$ $[L,L^{i-1}]$

L L L L.

L 为 Lie algebra

a. if L 为幂零的, L 的所有子代数和同态像是幂零的

set k is a subalgebra of L

$k^i\subset L^i$ $\phi: L\to M$ $M=\phi(L)$.

$k^i=[k,k^{i-1}]\subseteq L^i$ $\phi(L^i)=M^i$

$k^n\subset L^n=0$ $\phi(L^n)=M^n$ $\phi(0)=0$

b. if $L/Z(L)$ 为幂零的, L 也是幂零的.

$Z(L)=\{z\in L \mid \forall x\in L,\ xz=zx\}$ $[x,z]=0$

$L^n=0$ $L^n\subseteq Z(L)$ $L^{n+1}=[L,L^n]\subset[L,Z(L)]=0$

c. if L 为幂零且非零, $Z(L)\neq 0$.

let $L^k=0$ $L^{k-1}\neq 0$

$L^k=[L,L^{k-1}]=0$ $L^{k-1}\subseteq Z(L)$ □.

L 幂零的条件可改写如下：

对于某些 n (depends on L) if $\forall x_i, y\in L$, 有 $\mathrm{ad}x_1\,\mathrm{ad}x_2\cdots\mathrm{ad}x_n(y)=0$

$\forall x\in L$, $(\mathrm{ad}\,x)^n=0$

L 为 Lie algebra, $x\in L$, if adx 为幂零自同态, call X ad-幂零

if L 为幂零的 $\Longleftrightarrow$ L 的所有元素都是 ad-幂零的

$[x_1,[x_2,\cdots[x_n,y]]\cdots]$ $x_1,x_2,\cdots,x_n\in L$ $y\in L$

let $x_1=x_2=\cdots=x_n$ $(\mathrm{ad}x_1)^n(y)=0$, 幂零 $\Rightarrow$ $\mathrm{ad}x\in\mathrm{ad}L$ 幂零.

$\forall x\in L$, adx 为 L 上的幂零变换.

Engel 定理： if L 的所有元素都是 ad-幂零的, 则 L 为幂零的

lemma ： Let $x\in gl(V)$ 为幂零自同态, 则 adx 为幂零的

proof: adx 可用 λ_x ρ_x 来表示, 且 λ_x, ρ_x 可交换, $\mathrm{ad}x=\lambda_x-\rho_x$ by Ring 中知识 (Ring 中可交换的幂的和差也是幂零的)

(λ_x: 左乘, ρ_x: 右乘)

as a result adx is 幂零的.

proof: $(\lambda_x)^n(y)=x^ny=0$ (x 幂零, $x^n=0$) $(\lambda_x-\rho_x)^{2n}=C-(\lambda_x)^k(\rho_x)^{2n-k}$

$(\rho_x)^n(y)=x^ny=0$ (——) 必有 n 的次, 故 $=0$ $(\lambda_x-\rho_x)^{2n}=0$

故 adx=0. adx 幂零.

(warning： 在 gl(V) 中 matrix 可能为 ad-幂零, 但非幂零 (单位矩阵即为反例)) adx 幂零 $\rightleftharpoons$ X 幂零

两种不同类型幂零矩阵： $\underset{\text{ad-幂零}}{\underline{D(n,F)}}$ and $\underset{\text{幂零}}{\underline{n(n,F)}}$

3.3 Proof of Engel's Theorem (Engel 定理：计 L 的所有元素都是 ad-幂零的，则 L 为幂零的)

单个幂零线性变化至少有一个特征向量，对应其唯一的特征值 0，这正是以下定理 $\dim=1$ 的情况

Theorem：L 为 $gl(V)$ 的子代数，V 为有限维，L 由幂零自同态组成，$V\neq 0$，$\exists$ 非零 $v\in V$，其中 $L.v=0$（L 作用在 V 上）

v 为 L 中全体元素公共特征向量
且为关于 0 这个特征值的特征向量

$\dim L=1$，$\exists v\in V$ 中，$v\neq 0$ $L.v=0$

$\dim L\leq n-1 \Rightarrow \dim L=n$ 成立　$\dim L>1$ L 中有非 0 真子代数 K　$\dim K\leq \dim L-1$

作为线性 space L/K，K 作用在 L/K 上，有 $x+K$，$[K, x+K]=0=K$（商代数 $[,]$）

k=0?

$[x+k_1,k_2]\in K$，$x\in N_L(K)$，$\mathbb{F}x+K$ 以 K 为 ideal

$\mathbb{F}x+K$ 为 $\dim K+1$ 维子代数，可找到 $\dim L-1$ 维子代数 K

let $L=\mathbb{F}x+K$　$z\notin K$，$z\in L$　W 为 K 全体特征向量，关于 0 的特征向量　$W=\{x\in V\mid K.x=0\}$　$W\neq 0$

$\forall k\in K$，$\forall w\in W$

$k.(x.w)=[k,x]+xk=[k,x].w+x.k.w=0$

$[k,[x,w]]+[x,[w,k]]+[w,[k,x]]=0$

$=[[w,k],x]+[[k,x],w]$

$k.x.w=0 \Rightarrow x.w\subseteq W$

$\exists w'\in W$，$x.w=0$，$k.w'=0$ $(\mathbb{F}x+K).w'=0$ （显然）

$L.w'=0$

$v=w'$ □

proof of Engel theorem：

adL 为 $gl(L)$，adL 由幂 0 变换 consist by theorem mentioned above 有 $v\in L$，$v\neq 0$ $\mathrm{ad}L(v)=0\Rightarrow[L,v]=0$

v 在 $Z(L)$ 中

$v\in Z(L)\neq 0$，$L/Z(L)$ 也为 ad-幂 0，（对 1 维成立，n-1 维成立 $\Rightarrow$ 数学归纳法 n 维成立）

$\downarrow$ proof

$x+Z(L)\neq Z(L)$，$x\notin Z(L)$

$\mathrm{ad}(x+Z(L))^k(y+Z(L))=\underset{\text{幂0}}{\underline{(\mathrm{ad}x)^k}}y+Z(L)=0$

商代数

Corollary：计 L 幂零，$\exists$ V 中一组基 s.t. L 矩阵为严格上三角矩阵
推论

$Z(L)$ 是 adL 不变子空间

计 $V_1=\mathrm{span}\{\xi_1\cdots\xi_k\}$　$x\in L$　$x.v_1\in V_1$

$x(\xi_1\cdots\xi_k,\eta_1\cdots\eta_k)=(\xi_1\cdots\xi_k,\eta_1\cdots\eta_k)\begin{pmatrix}\overset{x_1}{\square} & \ddots \\ 0 & \underset{x_2}{\square}\end{pmatrix}$

$L/Z(L)$ 幂零 $\rightarrow$ L 幂零

x 在 V_1 中一　x_1

x .. V/V_1 中 ..　x_2

Lemma：L 是幂零的，K 为 L 的 ideal，计 $K\neq 0$，$K\cap Z(L)\neq 0$
$(Z(L)\neq 0)$

$L\xrightarrow{\mathrm{ad}_K} gl(K)$　$\mathrm{ad}_K(L)$ 幂零

$\mathrm{ad}_K(L)$ 公共特向量 y

$\forall x\in L$　$[x,y]=0$　$y\in Z(L)$

$Z(L)\cap K=y$

Lie Theorem

4.1 Lie 定理

域F特征为零，代数闭域

Theorem: L为$gl(V)$一个可解子代数，V有限维，$V\neq 0$，L在V中有一个公共特征向量.

proof: ① 对L的dim 使用数学归纳法

$\dim L=1$

? $\dim L=n$ (let $\dim\leq n-1$ 都成立)

L中维数为 $n-1$ 的 ideal K ($[L,L]\subseteq N$，则 linear space $N\subseteq L$ 为L的ideal)

K在V中有公共特征向量v，$\forall x\in K$，$x.v=\lambda(x)v$

$W=\{v\in V \mid x.v=\lambda(x)v, x\in K\}$　　$L=K+\mathbb{F}z$，$z\notin K$

if $z(W)\subseteq W$，W为z不变子空间，z在W中有特征向量 w

$z.w=\lambda(z)w$　，$(x+az).w=(\lambda(x)+a\lambda(z))w$

w 即为L的公共特征向量

② W是z的不变子空间

$\forall v\in W$，$v_0=v$　$v_1=z.v$ ……　$v_n=z^{n}.v$