# $R^n$ 集合上的重积分

## 1. Rieman 积分的定义与可积条件

def 1: set $f$ 为定义在 $\Omega(\subset R^n)$ 上的函数，$J\in R$，若 $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，对 $\forall$ 可测分割（连通区域）

$T$: $\bigcup_{i=1}^{n}\Omega_i=\Omega$，$\Omega_i\cap\Omega_j=\phi$ 及 $\forall \xi_i\in\Omega_i$，$i=1\sim n$，while $\|T\|_{max}<\delta$ 时 必有 $\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Omega_i-J\right|<\varepsilon$ 则称 $f$ 在 $\Omega$ 上可积，$|\Omega_i|$ 为 $\Omega_i$ 的超体积

，J 为 $f$ 在 $\Omega$ 上的 n 重 Rieman 积分 记作：$J=\int_\Omega f(x)\,d|\Omega|=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)|\Omega_i|$

## 2. Rieman 积分性质

theorem 1: set $\Omega$ 为 $R^n$ 中可测区域（$|\Omega|$ 是可求的）$f$ 在 $\Omega$ 上可积，则积分值 $J=\int_\Omega f\,d|\Omega|$ 唯一（proof 显然）

example: prove $D(x)$ 非 Rieman 可积 （$\exists=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}>|(\,[\illegible]\,)-(\,[\illegible]\,)|=|1-0|=1$ ）

theorem 2: set $\Omega$ 为 $R^n$ 中的可测区域，$f$ 在 $\Omega$ 上可积，则 $f$ 在 $\Omega$ 上有界，反之不成立 （proof: [illegible] ）

（Lebegue 数定理）

theorem3: set $\Omega$ 为 $R^n$ 中有界闭集，$\{G_\alpha\}_{\alpha\in T}$ 为 $\Omega$ 的一个开覆盖，则 $\exists \lambda>0$，s.t. $\Omega$ 中子集 A 的直径 $d(A)<\lambda$ 时，$\exists\ \alpha_0\in T$ s.t. $A\subset G_{\alpha_0}$ （proof: 假设结论不成立，即 $\forall n\geq 1\ \exists A_n\subset\Omega$，s.t. $d(A_n)<\frac{1}{n}$，而 $A_n\notin G_\alpha$ 内 在 $A_n$ 中取点 $P_n$，

则 $\{P_n\}$ 为 $\Omega$ 中可数点集，by 有界数列必有收敛子列（致密性定理）$\exists$ 子列 $\{P_{n_k}\}$ s.t. $\lim_{k\to\infty}P_{n_k}=P_0\in\Omega$

由于 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in T}$ 为 $\Omega$ 的一个开覆盖，$\exists \alpha_0$ s.t. $P_0\in G_{\alpha_0}$，因此 $\exists\ P_0$ 开邻域 $U(P_0,\delta)\subset G_{\alpha_0}$

$\lim_{k\to\infty}P_{n_k}=P_0$，故 $\exists\ n_{k_0}>\frac{2}{\delta}$ 且 $d(P_{n_{k_0}},P_0)<\frac{\delta}{2}$，$\forall P\in A_{n_{k_0}}$ 有 $d(P,P_0)\leq d(P_{n_{k_0}},P)+d(P_{n_{k_0}},P_0)$

从而 $A_{n_{k_0}}\subset U(P_0,\delta)\subset G_\alpha$ 矛盾，故 presume 不成立 $<d(A_{k_0})+\frac{\delta}{2}<\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}=\delta$ ）

theorem 4: Rieman 可积的充要条件，set $f$ 为可测集 $\Omega$ 上有界（$|f(p)|\leq M$，$p\in\Omega$），则下述结论等价

(1) function $f$ 为 $\Omega$ 上 Rieman 可积

(2) …… $f$ 为 $\Omega$ 的上积分与下积分相等，$S=s$

(3) $\forall \varepsilon>0$，$\exists$ 可测集 $\Omega$ 的某个分割 T. s.t. $S(T)-s(T)=\sum_{i=1}^{n}\omega_i|\Omega_i|<\varepsilon$

(4) $\exists$ 可测集 $\Omega$ 的分割列 $T_m$，s.t. $\lim_{m\to\infty}[S(T_m)-s(T_m)]=0$.

(5) T 为可测集 $\Omega$ 的 $\forall$ 分割，有 $\lim_{\|T\|\to 0}[S(T)-s(T)]=0$

(6) $\forall\varepsilon>0$，$\exists\ \Omega$ 的可测分割 $T$: $\bigcup_{i=1}^{n}\Omega_i=\Omega$，$\Omega_i\cap\Omega_j=\phi$，$\forall\ \xi=(\xi_i)_{i=1}^{n}$，$\xi_i\in\Omega_i$，有 $|S(T,f,\xi)-J|<\varepsilon$

(7) $\forall\varepsilon>0$，$\eta>0$，$\exists\ \Omega$ 的某分割 T，s.t. $\sum_{\omega_i\geq\varepsilon}|\Omega_i|<\eta$

(8) $f$ 在 $\Omega$ 上 a.e 连续，$f$ 的不连续点集 $D_f$ 为零测集，$m(D_f)=0$.

外测度：$m^*E=\inf\{m^*E=\{\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|\ \big|\ E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i$，$I_i$ 为 $R^n$ 中的长方体 $\}\}$ $\forall\varepsilon>0$，$\exists\ I_i$ $(i=1,2,\cdots)$ s.t. $E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i$ 且 $m^*E<\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|<m^*E+\varepsilon$

开区间

$(3) \underset{②}{\overset{①}{\rightleftarrows}} (7)$：

① $\sum_{i=1}^{n} w_i |\Omega_i| = S(T) - s(T) < \sigma = \varepsilon \cdot \eta$

$\varepsilon \sum_{w_i \geq \varepsilon} |\Omega_i| \leq \sum_{w_i \geq \varepsilon} w_i |\Omega_i| < \sum_{i=1}^{n} w_i |\Omega_i| < \varepsilon\eta$

② $\forall \varepsilon > 0$，$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2|\Omega|}$，$\eta_1 = \frac{\varepsilon}{2|M-m+1|} > 0$　∃分割T s.t. $\sum_{w_i \geq \varepsilon_1} |\Omega_i| < \eta_1$

$S(T,f) - s(T,f) = \sum_{i=1}^{n} w_i |\Omega_i| = \sum_{w_i \geq \varepsilon_1} w_i |\Omega_i| + \sum_{w_i < \varepsilon_1} w_i |\Omega_i| \leq (M-m) \cdot \eta_1 + \varepsilon_1 \cdot \sum_{w_i < \varepsilon_1} |\Omega_i| \leq (M-m) \cdot \frac{\varepsilon}{2|M-m+1|} + \frac{\varepsilon}{2|\Omega|} \cdot \Omega < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$(3) \underset{②}{\overset{①}{\rightleftarrows}} (8)$：

① $\forall \varepsilon > 0$，∃可测集Ω的某个分割T，$S(T,f) - s(T,f) < \delta \cdot \varepsilon$

令 $D_\delta = \{P \in \Omega \mid w_f(P) = \lim_{r \to 0^+} [\sup_{Q \in U(P,r)} f(Q) - \inf_{P \in U(P,r)} f(P)] \geq \delta\}$ —点集.

则 $\sum_{D_\delta \cap \Omega_i \neq \phi} |\Omega_i| < \varepsilon$

显然 $D_\delta \subset \bigcup_{D_\delta \cap \Omega_i \neq \phi} \Omega_i$，由测度单调性得：$m D_\delta \leq m(\bigcup_{D_\delta \cap \Omega_i \neq \phi} \Omega_i) \leq \sum_{D_\delta \cap \Omega_i \neq \phi} |\Omega_i| < \varepsilon$

$D_\delta$为零测集，$D_f = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_{\frac{1}{n}}$ 也为零测集，f在Ω连续

② $D_f$为零测集，由外测度定义，$\forall \varepsilon > 0$，∃开区间列 $I_i$，s.t. $D_f \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ 且 $\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < \frac{\varepsilon}{4M+1}$

不妨设Ω为有界闭区域，否则取其闭包，$\Omega - \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ 为闭集，$\forall P \in \Omega - \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$，f在P连续，$\exists Q \in U(P) \cap \Omega$ 时

$|f(Q) - f(P)| < \frac{\varepsilon}{2|\Omega|}$

$\psi' = \{I_k\}_{k=1}^{m} \cup \{U(P_j)\}_{j=1}^{l}$

显然 $\psi = \{I_i\}_{i=1}^{\infty} \cup \{U(P)\}_{P \in \Omega - \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i}$ 为有界闭区域Ω的开覆盖. by 有限覆盖定理，∃ψ的有限子集ψ'覆盖Ω

by lebegue数 $\lambda = \lambda(\psi') > 0$，当Ω的分割 T：$\bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i = \Omega$，$\Omega_i \cap \Omega_j = \phi$，$\|T\| < \delta$时有

$0 \leq S(T,f) - s(T,f) = \sum_{i=1}^{n} w_i^f |\Omega_i| = \sum_{\substack{\Omega_i \subset I_k \\ k=1\cdots m}} w_i^f |\Omega_i| + \sum_{\substack{\Omega_i \subset P_j \\ j=1\cdots l}} w_i^f |\Omega_i| = \sum_{\substack{\Omega_i \subset I_k \\ k=1\cdots m}} [\sup f(Q) - \inf f(Q)] |\Omega_i| + \sum_{\substack{\Omega_i \subset U(P_j) \\ j=1\cdots l}} [\sup f(Q) - \inf f(Q)] |\Omega_i|$

$\leq 2M \sum_{\Omega_i \subset I_k} |\Omega_i| + \frac{\varepsilon}{2|\Omega|} \sum_{\Omega_i \subset U(P_j)} |\Omega_i| < 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M+1} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

why not M

外测度：$m^*E = \inf\{m^*E = \{\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| \mid E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i, I_i 为 R^n 中的长方体\}\}$

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists I_i$ $(i=1,2,\cdots)$ s.t. $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ 且 $m^*E < \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < m^*E + \varepsilon$

$m^* \mathbb{Q}[0,1] =$　　　　　　　　　　　　　　零面为ε

Cauchy - Schwaz 不等式：$\sum a_i b_i \leq (\sum a_i^2)^{\frac{1}{2}} (\sum b_i^2)^{\frac{1}{2}}$

1、f在[a,b]连续，φ在$\Omega \subset R^n$上 Rieman可积 $\Longrightarrow$ $f \circ \varphi$ 在Ω上 Rieman可积

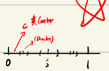
2、f、φ 均 Rieman可积，$f \circ \varphi$ 未必 Rieman可积

$f(x) = sgn(x)$　　$\varphi(x) = R(x)$　　$f \circ \varphi = D(x)$

3、f Rieman可积，φ连续，$f \circ \varphi$ 未必 Rieman可积

$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & t \in C \\ \frac{1}{2}(b_n - a_n) - |t - \frac{1}{2}(a_n + b_n)| & t \in (a_n, b_n) \quad n \in N \end{cases}$　　$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x \in (0,1] \end{cases}$　　$f \circ \varphi = \begin{cases} 0 & t \in C \\ 1 & t \in [0,1] \setminus C \end{cases}$

Exquicite 构巧：类康托集的构造.



# 第二节：Rieman 积分的性质

## 一、Rieman function 性质

定理：set $\Omega$ 为 $R^n$ 中的可测区域（体积 $|\Omega|$ 可求），$f$、$f_1$、$f_2$ 为可积函数

(1) $\forall c\in R$，有 $\int_\Omega c\,dv = c\cdot|\Omega|$

(2) $\forall c\in R$，有 $\int_\Omega cf\,dv = c\int_\Omega f\,dv$

(3) $\int_\Omega (f_1+f_2)\,dv = \int_\Omega f_1\,dv + \int_\Omega f_2\,dv$

(4) $f\geq 0$，$\int_\Omega f\,dv\geq 0$；若 $f_1\geq f_2$，$\int_\Omega f_1\,dv\geq\int_\Omega f_2\,dv$

(5) $|f|$ $\Omega$ 上可积，且 $\left|\int_\Omega f\,dv\right|\leq\int_\Omega|f|\,dv$

## 二、$R^n$ 有界集上的 Rieman 积分

def: set $\Omega\in R^n$，为有界可测集，$f:\Omega\to R$ 是可测函数，

记 $f_\Omega(p)=\begin{cases} f(p), & p\in\Omega\\ 0, & p\notin\Omega\end{cases}$ 称其为 $f$ 的零延拓　　$\int_\Omega f(p)\,dv = \int_I f_\Omega(p)\,dv$

lemma 1：$\int_\Omega f(p)\,dv$ 与包含 $\Omega$ 的闭区间 $I$（$\subset R^n$）的选择无关

lemma 2：set $\Omega\in R^n$，是有界可测集，则 $m\Omega=0 \Longleftrightarrow \int_\Omega 1\,dv=0$.

(proof)

$\Rightarrow$:

set $\Omega$ 为零面积，

$\chi_\Omega(p)=\begin{cases}1 & p\in\Omega\\ 0 & p\notin\Omega\end{cases}$

$\int 1\,dv=\int_\Omega \chi_\Omega(p)\,dv = 1\cdot 0+0\,|I-\Omega|=0$

$\Leftarrow$:

$\int_\Omega 1\,dv=0$　set $I$ 的区间分割 $T: I=\bigcup_{i=1}^k I_i$　对 $\Omega\cap I_i\neq 0$ 取 $\xi_i\in\Omega\cap I_i$

$S(T,\chi_\Omega,\xi)=\sum_{\Omega\cap I_i\neq 0}1\cdot|I_i|+\sum_{\Omega\cap I_i=0}0\cdot|I_i| = \sum_{\Omega\cap I_i\neq 0}|I_i|$　　$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{\Omega\cap I_i\neq 0}|I_i| = \lim_{\|T\|\to 0}S(T,\chi_\Omega,\xi)=\int_I\chi_\Omega\,dv=\int_\Omega 1\,dv=0$

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\|T\|<\delta$ 时，$|\Omega|\leq\sum_{\Omega\cap I_i\neq 0}|I_i| = S(T,\chi_\Omega,\xi)<\varepsilon$　，由外测度 def，$\Omega$ 为零测集.

lemma 3：set $\Omega\in R^n$，为有界可测集，闭区间 $I\supset\Omega$，则 $|\Omega|>0 \Longleftrightarrow$ 对 $I$ 的分割 $T: \bigcup_{i=1}^k I_i$，有

$\lim_{\|T\|\to 0}\bar{S}(T,\chi_\Omega) = \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{\Omega\cap I_i\neq\phi}|I_i| = \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{I_i\subset\Omega}|I_i| = \lim_{\|T\|\to 0}s(T,\chi_\Omega)$　，此时 $|\Omega|=\int_\Omega 1\,dv=\int_I\chi_\Omega\,dv$

set $\Omega$ 为有体积的集合，$|\Omega|>0$，且 $|\Omega|=\int_\Omega 1\,dv=\int_I\chi_E\,dv$

$\Longleftrightarrow \lim_{\|T\|\to 0}S(T,\chi_\Omega)=\lim_{\|T\|\to 0}s(T,\chi_\Omega)$　$(=|\Omega|)$

$\Longleftrightarrow \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{\Omega\cap I_i}|I_i| = \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{\Omega\subset I_i}|I_i| = |\Omega|$

lemma 4：set $\Omega\in R^n$，为有界可测集，则 $|\Omega|\neq 0 \Longleftrightarrow m\partial\Omega=0$　，即 $|\partial\Omega|=0$

$\Leftarrow$：set $\partial\Omega$ 的体积（测度）为零，即 $m\partial\Omega=0$　，$\Omega$示 $=\phi$，为零测集 $\Rightarrow$ $\partial\Omega$ 与 $\Omega$示 都为零测集 + $m\partial\Omega=0$　，函数1可积，$\Omega$ 为可测集

$\Rightarrow$：set $\Omega$ 的体积不为零，$\forall$ 取闭区间 $I\supset\Omega$，由定理3，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $\|T\|<\delta$ 时有 $\sum_{\substack{\Omega\cap I_i\neq\phi\\ I_i\not\subset\Omega}}|I_i| = \sum|I_i| - \sum_{I_i\in\Omega}|I_i| < \frac{\varepsilon}{2}$

## 三、中值定理

积分中值定理：set $\Omega\ (\subset \mathbb{R}^n)$ 是有界连通紧集，且测度 $>0$，$f, g: \Omega \to \mathbb{R}$，且 $f$ 在 $\Omega$ 上连续，$g$ 在 $\Omega$ 上可积且不变号，$\exists \xi \in \Omega$ s.t.

$$\int_\Omega f \cdot g \, dv = f(\xi) \int_\Omega g \, dv$$

lemma 1：set $f$ 在 $[a,b]$ 上 Rieman 可积，则变上限积分 $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ 满足 Lipschitz 条件，且在 $[a,b]$ 上一致连续。

# 第三节：定积分的计算及相关问题拓展

def：set $f$ 在 $[a,b]$ 上 Rieman 可积，且在 $x_0$ 点连续，则 $\varphi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ 在 $x_0$ 处可导，且 $\varphi'(x_0)=f(x_0)$.

Newton-Leibniz 公式：set $f$ 在 $[a,b]$ 连续，$F$ 为 $f$ 在 $[a,b]$ 上 $\forall$ 一原函数，$F'(x)=f(x)\ \forall x \in [a,b]$，则 $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b F'(t)\,dt = F(b)-F(a)$.

推广后的 N-L 公式：$f$ 在 $[a,b]$ 上 Rieman 可积，$F$ 在 $[a,b]$ 连续，且在 $[a,b]$ 有限个点外 $F'(x)=f(x)$

Rieman 可积 + $\exists$ 原函数 （条件不足）.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0.$$

proof:

① $f^2(x) \le (b-a) \int_a^b [f'(x)]^2 dx$

② $\int_a^b f^2(x)\,dx \le \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b [f'(x)]^2 dx$

def：在 $I$ 上 $f_n$ 一致收敛于 $f(x)$，记作 $f_n \rightrightarrows f$ := $\forall \varepsilon>0$，$\exists N$，$n>N$ 时，$\forall x\in I$ 都有 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ or $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in I} |f_n(x)-f(x)|=0$（余项准则） 常用于 prove 不一致收敛

勒贝格控制收敛定理：if 可测函数数列 $\{f_n\}$ 在可测集 $E$ 上几乎处处收敛于可测函数 $f$，且有 $|f_n(x)|\le F(x)$，$F(x)$ 是 L-可积（即 $\int_E F(x)\,dx$ 存在）

则 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$

theorem4：设 $f_n \xrightarrow{一致} f$ 于 $E\subset R^n$，$n\to+\infty$，if $f_n$ 在 $P_0$ 点连续，$n=1,2,\cdots$，则 $f$ 也在 $P_0$ 点连续

当 $f_n$ 在 $E$ 上连续时，$f(x)$ 也在 $E$ 上连续 （prove — use def and 绝对值不等式）

theorem5：set $f_n$ 在有界集 $E$ 上 R-可积，且 $f_n \xrightarrow{一致} f$ 于 $E\subset R^n$（$n\to+\infty$），则 $f$ 也在 $E$ 上 R-可积，且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,dv = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n\,dv = \int_E f\,dv$$

$\Updownarrow$ compare

设函数序列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 可积，且 $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 也可积

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

proof 1：

$f_n(P)$ 在 $E$ 上 R-可积，by R-可积的必要+充要条件，$f_n$ 在 $E$ 上有界且几乎处处连续

$mD_{不}^{f_n}=0$，又因为 $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{一致} f$，by theorem4 $D_{不}^{f} \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_{不}^{f_n}$ 故 $D_{不}^{f}=0$.

$$D_{连}^{f_n} \subset D_{不}^{f} \quad \Updownarrow \quad D_{不}^{f} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} D_{不}^{f_n}$$

so $f$ 也 R-可积，$f_n \rightrightarrows f$ $\exists\ |f_n(P)-f(P)|<\frac{\varepsilon}{|E|}$

$\left|\int_E f_n\,dv-\int_E f\,dv\right| \le \int_E |f_n-f|\,dv < \varepsilon$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n\,dv = \int_E f\,dv = \int_E \lim\limits_{n\to+\infty} f_n\,dv$

---

proof 2：

$f_n(x)\rightrightarrows f(x)$ $\exists\ n>N$ 时 $\forall x\in[a,b]$ s.t. $|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3(b-a)}$ 记 $n_0=N+1$ 故 $f_{n_0}(x)$ 均满足以上 situation

$\{f_n\}$ 可积得 $\sum \omega_k(f_{n_0})\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{3}$ $\forall x',x''\in[x_{k-1},x_k]$ 有 $|f(x')-f(x'')| \le \underbrace{|f(x')-f_{n_0}(x')|}_{\frac{\varepsilon}{3(b-a)}} + \underbrace{|f_{n_0}(x')-f_{n_0}(x'')|}_{\omega_k(f_{n_0})} + \underbrace{|f_{n_0}(x'')-f(x'')|}_{\frac{\varepsilon}{3(b-a)}}$

$\omega_k(f) = \sup|f(x')-f(x'')| \le \omega_k(f_{n_0}) + \frac{2\varepsilon}{3(b-a)}$

$\sum \omega_k\Delta x_k \le \sum \omega_k(f_{n_0}) + \sum \frac{2\varepsilon}{3(b-a)}\Delta x_k = \frac{\varepsilon}{3}+\frac{2\varepsilon}{3}=\varepsilon$，故 $f(x)$ 可积，$\Rightarrow \int \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int f(x)\,dx$

$\left|\int f_n(x)\,dx - \int f(x)\,dx\right| = \left|\int[f_n(x)-f(x)]\,dx\right| \le \int |f_n(x)-f(x)|\,dx < \varepsilon$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\int f_n(x)\,dx = \int f(x)\,dx$.

theorem: ① $\lim\limits_{n\to\infty}\int_\Omega f_n(P)\,dv = \int_\Omega \lim\limits_{n\to\infty} f_n(P)\,dv = \int_\Omega f(P)\,dv$

② $\lim\limits_{P\to P_0}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(P) = \lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{P\to P_0} f_n(P)$

③ $\dfrac{\partial f_n(P,t)}{\partial t} \rightrightarrows g(P,t) \qquad f_n(P,t_0)\to f(P,t_0)$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\partial f_n(P,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(P,t)$

注：连续一定可积  $(0,1)$ 可积

$f_n$ 在 $E\times(a,b)$ $(\subset R^n\times R)$ 上有连续偏导的函数列，

计对 $\forall (P,t)\in E\times(a,b)$，$\dfrac{\partial f_n(P,t)}{\partial t}\rightrightarrows g(P,t)$

$\forall P\in E$，$\exists t_0\in(a,b)$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(P,t_0)=A$

$g(P,t)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\partial f_n(P,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(P,t))}{\partial t}$

proof $\Rightarrow$：由定理4可得：$g(P,t)$ 在 $(a,b)$ 上连续且可积

$\forall t\in(a,b)$，$\dfrac{\partial f_n(P,t)}{\partial t}$ 在 $[t_0,t]$ 上可积 得

$$\begin{cases} f_n(P,t) = f_n(P,t_0) + \int_{t_0}^{t}\dfrac{\partial f(P,t)}{\partial t} \\ f(P,t) = f(P,t_0) + \int_{t_0}^{t} g(P,s)\,ds \end{cases}$$

$$\frac{\partial(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(P,t))}{\partial t} = \frac{\partial f(P,t)}{\partial t} = g(P,t) = \lim_{n\to\infty}\frac{\partial f_n(P,t)}{\partial t}$$

Egorov theorem: $f_n(P)\xrightarrow{a.e.} f(P)$, $m\{P \mid f_n(P) \not\to f(P)\}=0$, $\forall\delta$, $\exists E_\delta$ s.t. $\begin{cases} 1.\ m(E\setminus E_\delta)<\delta \\ 2.\ f_n \overset{E_\delta}{\rightrightarrows} f \end{cases}$

(n乘处有限 above $f_n(P)$; n乘处收敛 above $m\{\dots\}=0$)

叶戈罗夫定理

(proof)

$E_{n,k}=\bigcup\limits_{m\geq n}\{x\in A \mid |f_m(x)-f(x)|\geq \frac{1}{k}\}$ $\quad E_{n+1,k}\subseteq E_{n,k}$

假设 A上 $\mu$-几乎处处点收敛 $\mu(\bigcap\limits_{n\in N} E_{n,k})=0$

$\mu(E_{n_k,k})<\frac{\varepsilon}{2^k}$，令 $B=\bigcup\limits_{k\in N} E_{n_k,k}$

$\forall\varepsilon$，$\frac{1}{k}<\varepsilon$，$n>n_k$，$|f_n-f|<\varepsilon$ 在 $A\setminus B$ 中

$\mu(B)\leq\sum\limits_{k\in N}\mu(E_{n_k,k})<\sum\limits_{k\in N}\frac{\varepsilon}{2^k}=\varepsilon$

set $E\subset R^n$ 为可测集，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $E$ 上一列非负可测函数，

当 $x\in E$ 时对 $\forall$ 正整数 $n$ 有 $f_n(x)\le f_{n+1}(x)$，令 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$，$x\in E$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,dx=\int_E f(x)\,dx=\int_E \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$

$f_n(x)\le f_{n+1}(x)\le f(x)$

故 $\int_E f_n(x)dx\le\int_E f_{n+1}(x)\,dx\le\int_E f(x)dx$

易得 $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,dx\le\int_E f(x)\,dx}$

$f_n(x)\le\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x).$

下证 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx\ge\int_E f(x)\,dx$

$\forall$ 取 $E$ 上非负函数 $\varphi(x)$，$x\in E$ 时 $0\le\varphi(x)\le f(x)$

在 $E_n$ 上 $f_n(x)\ge c\cdot\varphi(x)$

令 $E_n=E(f_n\ge c\cdot\varphi)$，$E_n$ 为 $E$ 可测子集，$E_n\subset E_{n+1}$，$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n=E$

$\int_E f_n(x)dx\ge\int_{E_n}f_n(x)dx\ge\int_{E_n}c\cdot\varphi(x)dx=c\cdot\int_{E_n}\varphi(x)dx$

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{E_n}\varphi(x)\,dx=\int_E\varphi(x)dx$ 得 —— 定理

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,dx\ge c\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\int_{E_n}\varphi(x)\,dx=c\int_E\varphi(x)\,dx$

由于 $c\in(0,1)$ 任意 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,dx\ge\int_E\varphi(x)\,dx$

$\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx\ge\int_E f(x)dx}$

**Levi theorem**：假设 $\{f_n\}_{n\ge1}$ 为 $(X,A,\mu)$ 上定义的上升的正函数列，$\forall x\in X$，$i\ge1$ 有 $\forall i,x$ $f_i(x)\le f_{i+1}(x)$

$\forall x\in X$ 令 $f(x)=\lim\limits_{i\to\infty}f_i(x)$ 那么 $f$ 为可测函数并且 $\lim\limits_{i\to\infty}\int_X f_i\,d\mu=\int_X f\,d\mu$

特别地，对于 $\forall$ 正函数 $\{g_i\}_{i\ge1}$，函数级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}g_i$ 是 $X$ 上良好定义的可测函数且 $\int_X\sum\limits_{i=1}^{\infty}g_i\,d\mu=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\int_X g_i\,d\mu$

换序

Levi 定理：$0<f_1(x)<\cdots<f_n(x)<f_{n+1}(x)<\cdots$，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_I f_n(x)=\int_I f(x)\,dx$

**Fatou lemma**：测度空间 $(\Omega,F,\mu)$ 和一套 $X\in F$，让 $\{f_n\}$ 是一序列 $(F,B_{R\ge0})$ - 可测非负函数 $f_n: X\to[0,+\infty)$

定义函数 $f: X\to[0,+\infty)$ $\forall x\in X$ $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\inf f_n(x)$，$f$ 是可测的 则 $\int_X f\,d\mu\le\lim\limits_{n\to\infty}\inf\int_X f_n\,d\mu.$

(取下极限原因：函数列可能不收敛，但下极限一定存在，可能是 $-\infty$ 而已).

令 $g_k(x)=\inf\limits_{j}\{f_j(x): j\ge k\}$ $g_k(x)\uparrow$ 数列下极限定义 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n$

$\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}f_k(x)=\lim\limits_{k\to\infty}g_k(x)$

levi theorem

$\int_E\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}f_k(x)\,dx=\int_E\lim\limits_{k\to\infty}g_k(x)\,dx=\lim\limits_{k\to\infty}\int_E g_k(x)\,dx$

$=\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}\int_E g_k(x)\,dx\le\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}\int_E f_k(x)\,dx$

Fatou theorem：$f_n(x)\ge0$ $\int_I\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}f_n(x)dx\le\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\int_I f_n(x)dx$ $\inf\uparrow$ (proof) use levi 定理 to prove. fatou

(use fatou lemma to prove lebesgue 控制收敛)

$A=\sup\inf\{f_i(x_0)\}$

$A=\sup\limits_{n=1}^{\infty}\inf\limits_{i\ge n}\{f_i(x)\}$

$-\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}f_n(x)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(-f_n(x))$

proof: $[\lim_{n\to\infty} f_n(x)]' = g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$

如何换序、

set $f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 在 $[a,b]$ 上可微，且满足2个条件

1、$\exists\, x_0\in[a,b]$ s.t. $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$ 收敛

2、$[a,b]$上一致成立 $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \varphi(x)$

则有

1、$\exists\, f(x)$ s.t. $[a,b]$上一致有 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

2、$f(x)$ 在$[a,b]$上可微且 $f'(x)=\varphi(x)$ 即 $(\lim_{n\to+\infty} f_n(x))' = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x)$

换序proof:

$\phi_n(t) = \frac{f_n(t)-f_n(x)}{t-x}$  $n=1,2,\cdots$

$\phi(t) = \frac{f(t)-f(x)}{t-x}$  $t\in[a,b]$

显然有 $\lim_{t\to x}\phi_n(t) = f_n'(x)$ — 导数def.

$\lim_{n\to+\infty}\phi_n(t)=\phi(t)$ — 一致收敛.

$|\phi_n(t)-\phi_{n+p}(t)| \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$

$\lim_{t\to x}\lim_{n\to\infty}\phi_n(t) = \lim_{n\to\infty}\lim_{t\to x}\phi_n(t)$

$\lim_{t\to x}\phi(t) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$

$\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \varphi(x)$

$f'(x)=\varphi(x)$ □.

$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \varphi(x)$

$\int_{x_0}^{x} \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx$

↓ 一致收敛原因

$\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} f_n'(x)\,dx = \int_{x_0}^{x}\varphi(x)\,dx$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx$

$[\lim_{n\to\infty} f_n(x)]' = \varphi(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$

$f_n(x)-f_n(x_0) = \int_{x_0}^{x} f_n'(x)\,dx$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) - A = \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f_n'(x)\,dx$   一致收敛

$= \int_{x_0}^{x} \lim_{n\to\infty} f_n'(x)\,dx$

$= \int_{x_0}^{x} g(x)\,dx$

set $g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)\,dx$

$[\lim_{n\to\infty} f_n(x)]' = g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)\,dx$

默认 $f_n'(x)$ 存在（$f_n(x)$ 可导）

$f_n'(x) \rightrightarrows \varphi(x)$   $f_n'(x)$ 可积，$\varphi(x)$ 可积

$f_n(x_0) \Rightarrow f(x_0)$