Topology

1) 欧拉定理

对于多面体，$V-E+F$ 的取值只与多面体的表面所能连续变化为曲面的亏格有关，与多面体具体形状无关

2) 闭形式与恰当形式

闭形式是否为恰当形式 depends on 定义域是否为恰当定理

几何：

↓

拓扑： 同胚： $\varphi: S \to E$

连续双射 φ^{-1} 也连续

拓扑不变量：

$\forall$ 空间 X define $\mu(X)$，$\forall$ μ 满足 $\forall$ X 与 Y 同胚 $\mu(X) \simeq \mu(Y)$

同胚： $\varphi: X \to Y$ 称为同胚的，φ 为双射，φ、φ^{-1} 均连续

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 称为连续函数，$\forall$ $x_0 \in \mathbb{R}^n$，f 在 x_0 连续.

结论： $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 连续 $\Longleftrightarrow$ 在 f^{-1} 下，开集原像为开集

开集的原象是开集.（没有距离、用开集 define 连续.）

（ε-N 语言类似）.

拓扑空间和连续函数

拓扑空间：

$\mathbb{R}^n$，$\mathcal{T}=\{\mathbb{R}^n$中通常意义下开集之U$\}$

definition：集合X上的一个拓扑$\mathcal{T}$是X的子集族$\mathcal{T}$，满足以下条件：　　$\mathcal{T}$是一个集合族

1. $\varnothing$ and X 在$\mathcal{T}$中
2. $\mathcal{T}$的$\forall$子族的元素的并($\cup$)在$\mathcal{T}$中
3. $\mathcal{T}$的$\forall$有限子族元素的交($\cap$)在$\mathcal{T}$中

拓扑 tell you what is 开集.

无限 situation 不行 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})=\{0\}$，独点集是闭集(非开集)，所以不在其中.

一个满足$\mathcal{T}$拓扑$\mathcal{T}$的集合X叫做一个拓扑空间，一个拓扑空间就是有序偶对$(X,\mathcal{T})$，X为集合　$\mathcal{T}$为X上拓扑　$\mathcal{T}$中的成员称作此拓扑空间的开集

$\begin{cases} 2^X & \text{— 离散拓扑} \\ \{X,\varnothing\} & \text{— 平凡拓扑} \end{cases}$

$\mathcal{T}$ and $\mathcal{T}'$为集合X上2个拓扑，if $\mathcal{T}'\supset\mathcal{T}$，则称$\mathcal{T}'$细于$\mathcal{T}$（真包含—严格细于）

拓扑的基：

$\mathcal{B}$为集合族

(by 集合的交.并.补运算)

definition：if X为集合，X的某拓扑的一个基是X的子集族$\mathcal{B}$（成员称为基元素），满足条件

(1) 对于$\forall x\in X$，at least $\exists$一个包含x的基元素B. / $\forall x\in X$，$\exists B\in\mathcal{B}$，st. $x\in B$

(2) if $x\in$ 2个基元素$B_1\cap B_2$，则$\exists$包含x的一个基元素B_3，St. $B_3\subset B_1\cap B_2$. / $x\in B_1\cap B_2$ $(B_1,B_2\in\mathcal{B})$，$\exists B_3\in\mathcal{B}$，st. $x\in B_3\subseteq B_1\cap B_2$

if $\mathcal{B}$满足以上2个条件，则 define 由$\mathcal{B}$生成的拓扑$\mathcal{T}$如下：if 对于$\forall x\in U$，$\exists$一个基元素$B\in\mathcal{B}$ St. $x\in B$ 且 $B\subset U$，则X的子集U称为开集.

$\mathcal{T}=\{U\mid\forall x\in U,\exists B\in\mathcal{B},\text{st. }x\in B\subset U\}$ ✓

① $\mathcal{T}=\{U\subseteq X\mid\forall x\in U,\exists B\in\mathcal{B},\text{St. }x\in B\subseteq U\}$

② $\mathcal{T}=\{\cup\mathcal{B}'\mid\mathcal{B}'\subseteq\mathcal{B}\}$　任意并的拓扑

$\mathcal{B}'$中所有元素并集　基的子集　基

lema 1：X为一个集合，$\mathcal{B}$为X的拓扑$\mathcal{T}$的一个基，则$\mathcal{T}=\mathcal{B}$中所有元素并的族

lema 2：X为一个拓扑空间，$\mathcal{C}$是X的开集的一个族，它满足对于X的每个开集U及每个$x\in U$，$\exists\mathcal{C}$的一个元素C St. $x\in C\subset U$，那么$\mathcal{C}$就是X上这个拓扑的一个基

lema 3：设$\mathcal{B}$和$\mathcal{B}'$分别是X的拓扑$\mathcal{T}$和$\mathcal{T}'$的基，则下列条件等价

(1) $\mathcal{T}'$细于$\mathcal{T}$

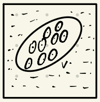
(2) 对于$\forall x\in X$及包含x的每一个基元素$B\in\mathcal{B}$，$\exists$一个基元素$B'\in\mathcal{B}'$ St. $x\in B'\subset B$

① $\overline{\mathcal{B}}=\{U\in 2^X\mid\forall x\in U,\exists B\subseteq\mathcal{B}\text{ St. }x\in B\subseteq U\}$

① 将$\varnothing$与X代入后面判断条件.

② $\forall$并：$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$（标示为V并）

lema 4：$\mathbb{R}_\ell$和$\mathbb{R}_K$的拓扑都严格细于标准拓扑，但他们之间不可比较



取$\overline{\mathcal{B}}$中$\{V_\alpha\}_{\alpha\in J}$

$V=\bigcup_{\alpha\in J}V_\alpha$ to prove $V\in\overline{\mathcal{B}}$

$\Leftrightarrow\forall x\in V$，$\exists\alpha\in J$ St. $x\in V_\alpha\in\overline{\mathcal{B}}$

Definition：X的某拓扑的一个子基S是X的子集的一个族，它的并$=X$，由子基S生成的拓扑$\mathcal{T}$定义为S中元素的有限交的所有并的族.

demonstrate：$\exists B\in\mathcal{B}$ St. $x\in B\subseteq U\in V_\alpha\in\overline{\mathcal{B}}$.

任意集合.

② $\overline{\mathcal{B}}'=\{\cup\mathcal{B}'\mid\mathcal{B}'\subset\mathcal{B}\}=\overline{\mathcal{B}}$

$\forall V\in\overline{\mathcal{B}}'$，V为$\mathcal{B}$某些元素的并

$\forall x\in V$　$\exists B\in\mathcal{B}$ St. $x\in B\subseteq V$

度量拓扑

定义：集合X的一个度量是一个函数 $d: X\times X \longrightarrow R$，s.t. 以下性质成立

(1) 对于所有$x, y\in X$，$d(x,y)\geq 0$；等号 $\Longleftrightarrow$ $x=y$ 时成立

(2) ······ $x, y \in X$，$d(x,y) = d(y,x)$

(3) (三角不等式) ···，$d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$.

给定X的一个度量d，数$d(x,y)$称为x与y间在度量d下的距离，对于$\varepsilon>0$，考虑所有与x distance$<\varepsilon$的点y的集合

$B_d(x,\varepsilon) = \{y \mid d(x,y) < \varepsilon\}$ 称为以x为中心的ε-球（简单记为$B(x,\varepsilon)$）

定义：设d是集合X的一个度量，则全体ε-球$B(x,\varepsilon)$族，其中$x\in X$，$\varepsilon>0$，是X的某一个拓扑的基，这个拓扑称为由度量d诱导出来的度量拓扑