第七章：线性变换

7.1 — 线性变换的定义

def：set V 和 V' 为域 F 上两个线性空间，V 到 V' 的一个 $\mathcal{A}$ if 保持加法和数量乘法

$\mathcal{A}(\alpha+\beta)=\mathcal{A}(\alpha)+\mathcal{A}(\beta)\quad \forall\alpha,\beta\in V$

$\mathcal{A}(k\alpha)=k\mathcal{A}(\alpha)\quad \forall\alpha\in V,\ k\in\mathbb{F}$ 　　称 $\mathcal{A}$ 是 V 到 V' 的一个线性映射

if $V=V'$，则线性映射 is called 线性变换

if $V\to F$，则线性映射 is called 线性函数

$V=R^3$，$\alpha\in R^3$，将每个向量变到它到 α 上的内投影

$$\pi_\alpha:\ V\longrightarrow \pi$$
$$\beta\longmapsto\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$$

$V=V_1\oplus V_2$ （投影映射）

$$T_1:\ V\longrightarrow V_1$$
$$\alpha_1+\alpha_2\longmapsto\alpha_1$$

嵌入映射

$$\sigma_1:\ V_1\longrightarrow V$$
$$\alpha_1\longmapsto\alpha_1+0$$

旋转变化

$$P_\theta:\ V\longrightarrow V$$
$$\alpha\longmapsto\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\alpha$$

域 F 上线性空间 V 到 V' 的线性映射 A 具有下列性质，线性变换也具有

1) $A(0)=0'$，$0'$ 为 V' 中的零向量

2) $A(-\alpha)=-A(\alpha)$，$\forall\alpha\in V$

3) $A(k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s)=k_1A(\alpha_1)+\cdots+k_sA(\alpha_s)$

4) A 将 V 中所有线性相关的向量组映射成 V' 中线性相关的向量组

（A 可能将 V 中线性无关的向量组映射成线性相关的向量组）

5) set $\alpha_1\sim\alpha_n$ 是 V 的一组基，那么 V 中任意向量 $\alpha=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_n\alpha_n$ 有

$A(\alpha)=\sum_{i=1}^{n}a_iA(\alpha_i)$ （V 中一组基 $\alpha_1\sim\alpha_n$ 在 A 下的象知晓后，那么 V 中 V 向量在 A 下的象就确定）　　满射？

线性映射与同构映射相比 缺少双射这一条件

7.2 线性变换的运算与线性映射的整体结构

$Hom=(V,V')$ 为 V到V' 所有线性映射组成的集合

$Hom=(V,V)$ 为V上所有线性变换组成的集合

线性映射 $\begin{cases}\text{乘法，符合结合律、不符合交换律}\\\text{加法，符合结合律与交换律}\end{cases}$

def：一个非空集合 $\mathscr{A}$ 如果有加法、乘法运算，以及域 F 与 $\mathscr{A}$ 的数量乘法

并且 $\mathscr{A}$ 对于加法和数量乘法 构成域F上的一个线性空间，

$\mathscr{A}$ 对于加法和乘法 构成一个有单位元的环，$\mathscr{A}$ 的乘法与数量乘法满足

$k(\alpha\beta)=(k\alpha)\beta=\alpha(k\beta)$ $\forall k\in F,\ \alpha,\beta\in\mathscr{A}$

称 $\mathscr{A}$ 为域F上的一个代数，将线性空间 $\mathscr{A}$ 的维数称为代数 $\mathscr{A}$ 的维数

$Hom(V,V)$ 是域F上的一个代数

7.3 线性映射和线性变换的矩阵.

def：线性映射A被它在V的一组基上的作用所决定.

V与V' 均为域F上有限维线性空间，$\dim V=n$ $\dim V'=s$，A为V到V' 的一个线性映射

$\begin{cases}\varepsilon_1\sim\varepsilon_n \text{ 为 V的基}\\\eta_1\sim\eta_s \text{ 为 V'的基}\end{cases}$

$\forall \xi\in V$，$\exists(x_1,\cdots,x_n)$ s.t. $\xi=\sum_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i$

$A(\xi)=A(x_1\varepsilon_1+\cdots+x_n\varepsilon_n)=x_1A\varepsilon_1+\cdots+x_nA\varepsilon_n$

$=\mathscr{A}$

A represent 线性映射

$A(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(A\alpha_1,\cdots,A\alpha_n)=(\eta_1,\cdots,\eta_s)A\rightarrow$ 提矩阵 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{s1}&\cdots&a_{sn}\end{pmatrix}_{s\times n}$

$\mathscr{A}(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)=(\mathscr{A}\varepsilon_1,\cdots,\mathscr{A}\varepsilon_n)=(\eta_1\cdots\eta_s)A$

$\Rightarrow$ 从V到V' 的每一个线性映射 $\mathscr{A}$ 都有唯一确定的 $s\times n$ 矩阵A与之对应

$\sigma: Hom(V,V')\longrightarrow M_{s\times n}(F)$

$\mathscr{A}\longmapsto A$

《高代》谢启鸿 P193 具体推导过程

证明 σ 保持加法与数乘可得 $Hom(V,V')\cong M_{s\times n}(F)$

def：对于V中的线性变换 $\mathscr{A}$，由于 $\mathscr{A}\varepsilon_i\in V$，因此 $\mathscr{A}\varepsilon_i$ 可用V中的基 $\varepsilon_1\sim\varepsilon_n$ 线性表出，

$\mathscr{A}(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(\mathscr{A}\varepsilon_1,\mathscr{A}\varepsilon_2,\cdots,\mathscr{A}\varepsilon_n)$

$=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)A$ $\quad A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$

矩阵A is called $\mathscr{A}$ 在基 $\varepsilon_1\sim\varepsilon_n$ 下的矩阵.

请给出2个线性空间之间所有的线性映射？ $Hom(R^3,R)$

$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{A}(1)$

$A_{3\times1}$ $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

因此 σ 是环 $Hom(V,V)$ 到 $M_n(F)$ 的一个同构映射.

定义 7.3.11. 设 M 和 M' 都是域 F 上的代数，如果存在 M 到 M' 的一个双射 σ，使得 σ 既是线性空间 M 到 M' 的同构映射，又是环 M 到 M' 到同构映射，那么称代数 M 与 M' 是同构的，并且称 σ 是代数 M 到 M' 的一个同构映射.

以上的讨论证明了下述定理：

定理 7.3.12. 设 V 是域 F 上 n 维线性空间，V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 与它在 V 的一组基下的矩阵 A 的对应是代数 $Hom(V,V')$ 到 $M_n(F)$ 的一个同构映射，那么称代数 $Hom(V,V')$ 与 $M_n(F)$ 是同构的.

命题：$\mathscr{A}$ - F - dim=n linear space 上的线性变换，在V中一组基 $(\varepsilon_1\sim\varepsilon_n)$ 下矩阵为A 则 $rank(\mathscr{A})=rank(A)$

lemma：$\mathscr{A},\mathscr{B}\in Hom(V,V)$，$\varepsilon_1\sim\varepsilon_n$ 为线性空间V中的一组基，if $(\mathscr{A}\varepsilon_1,\cdots,\mathscr{A}\varepsilon_n)=(\mathscr{B}\varepsilon_1,\cdots,\mathscr{B}\varepsilon_n)$ 单射

$\mathscr{A}=\mathscr{B}$ $\quad (\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)A=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)B$

lemma：$\varepsilon_1\sim\varepsilon_n$ 为线性空间V中一组基，$\forall$一组向量 $\alpha_1\sim\alpha_n$ 一定有个线性变换 $\mathscr{A}$ s.t. $\mathscr{A}(\varepsilon_i)=\alpha_i$ $i=1\sim n$ 满射

$\mathscr{A}\varepsilon_i \Leftrightarrow A\varepsilon_i=\alpha_i$

V上的线性变换 $\mathscr{A}$ 可逆

$\Leftrightarrow\exists$ V上线性变换 $\mathscr{B}$，s.t. $\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B}\mathscr{A}=\mathscr{E}$

$\Leftrightarrow\exists$ F上 $B_{n\times n}$ s.t. $AB=BA=E$

$\Leftrightarrow$ A可逆

theorem：$\varepsilon_1\sim\varepsilon_n$ 为线性空间V中一组基，$\alpha_1\sim\alpha_n$ 为V中 $\forall$ n个向量，$\exists!$ $\mathscr{A}$ s.t. $\mathscr{A}\varepsilon_i=\alpha_i$ $i=1\sim n$

线性变换在不同基下的矩阵之间的关系

theorem：set 线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_n$ 下矩阵为 A，向量 ξ 在基 $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_n$ 下坐标为 $(x_1, \cdots, x_n)$，$\mathscr{A}(\xi)$ 在基 $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_n$ 下坐标为 $(y_1 \sim y_n)$

可以按公式 $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

prop1：任何方阵均可写成一个幂等矩阵和一个可逆矩阵的乘积 (proof)

---

theorem：F 上 n 维线性空间 V 中线性变换 $\mathscr{A}$ 在两组基 $\begin{cases} \varepsilon_1 \sim \varepsilon_n \\ \eta_1 \sim \eta_n \end{cases}$ 下矩阵 $\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}$，$X$ 为过渡矩阵：$B = X^{-1}AX$

同一线性变换 $\mathscr{A}$ 在不同基下的矩阵相似

(proof)

def：$A, B \in F^n$，if we can find F 上 n 级可逆矩阵 X，s.t. $B = X^{-1}AX$，则称 A 相似于 B $A \sim B$ （相似是等价关系）

$\mathscr{A}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) = (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n)A$

$\mathscr{A}(\eta_1 \cdots, \eta_n) = (\eta_1 \cdots \eta_n)B$

$(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n)X = (\eta_1 \cdots \eta_n)$

$\mathscr{A}(\eta_1 \cdots \eta_n) = (\eta_1 \cdots \eta_n)B = (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n)XB$

$= \mathscr{A}(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n)X = (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n)AX$

$XB = AX$

$B = X^{-1}AX$

$A = XBX^{-1}$

假设 $A \in F^{n \times n}$，TFAE：

1、$A = \lambda E$

2、矩阵 A 与所有 n 阶矩阵可交换

3、矩阵 A 与所有 n 阶可逆矩阵可交换。

A 相似于 B，则

1) $A^m \sim B^m$

2) $cA \sim cB$

3) $A^T \sim B^T$

4) $\det A = \det B$

5) $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$

7.4 特征值与特征向量

def: set $\mathscr{A}$为数域F上线性空间V的一个线性变换，if 对于数域F中一个元素λ_0，∃非零向量ξ，st. $\mathscr{A}\xi = \lambda_0\xi$

λ_0 — 特征值　ξ — 属于特征值λ_0的一个特征向量

注：1、特征值可以为任意数（included 0）

2、特征向量非零（$\xi \neq \vec{0}$）　特征值由特征向量唯一决定

3、对F上n维线性空间V上的线性变换$\mathscr{A}$，设它在V的一组基$\varepsilon_1 \sim \varepsilon_n$下矩阵为A，

且ξ在$\varepsilon_1 \sim \varepsilon_n$下坐标为X，set $\lambda_0 \in F$ 可得　$\mathscr{A}\xi = \lambda_0\xi \Leftrightarrow AX = \lambda_0 X$

由此可得结论：

1）λ_0为$\mathscr{A}$一个特征值 $\Longleftrightarrow$ λ_0是矩阵A的一个特征值

2）ξ是$\mathscr{A}$的属于特征值λ_0的一个特征向量 $\Longleftrightarrow$ ξ的坐标X是A的属于特征值λ_0的特征向量

初等变换：1、行交换会改变特征值

2、行倍乘会改变特征值

3、行加法不会改变特征值

求取特征值和特征向量方法

$$\mathscr{A}\xi = \lambda_0\xi$$

$$\Leftrightarrow (A - \lambda_0 E)\xi = 0$$

$$\Leftrightarrow (A - \lambda_0 E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$为 $(A - \lambda_0 E)X = 0$ 的非零解

齐次线性方程组有非零解 $\Longleftrightarrow$ 系数行列式为0

常数项为0 —— 齐次线性方程组

方程组的解 = $\underbrace{\text{特解}}_{\text{非齐次}}$ + $\underbrace{\text{基础解系}}_{\text{齐次}}$

λ_0代入 $(A - \lambda_0 E)$

（未经过初等变化的情况）

特征多项式：

def: set A为数域F上的n级矩阵，λ为不定元，矩阵 $\lambda E - A$ 的行列式 $|\lambda E - A|$

被称为A特征值多项式，这是数域F上 n次多项式 $f_A(x)$

theorem：相似的矩阵具有相同的特征多项式　proof

theorem：λ_0为线性变换$\mathscr{A}$的特征值 $\Longleftrightarrow$ λ_0是A的特征多项式的根

推论：λ_0是线性变换$\mathscr{A}$的特征值 $\Longleftrightarrow$ λ_0是A的特征多项式的根 $\Longleftrightarrow$ λ_0为$\mathscr{A}$的特征多项式的根 $\Longleftrightarrow$ λ_0是矩阵A的特征值

若两个矩阵具有相同的特征多项式，不一定相似　$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

特征子空间

def: 线性空间V上的线性变换$\mathscr{A}$的任一特征值λ_0，全部适合条件 $\mathscr{A}\alpha = \lambda_0\alpha$ 的向量α所组成的集合是V的一个子空间

称为$\mathscr{A}$的一个特征子空间，记为V_{λ_0}，集合表示为 $V_{\lambda_0} = \{\alpha \mid \mathscr{A}\alpha = \lambda_0\alpha, \alpha \in V\}$（包含零空间）

example：$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\mathscr{A}$的特征值有 $\lambda_1 = 5$　特征子空间 $\langle \xi_3 \rangle$　$\xi_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$

$\lambda_2 = -1$（二重根）　特征子空间 $\langle \xi_1, \xi_2 \rangle$　$\begin{cases} \xi_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_3 \\ \xi_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \end{cases}$

特征多项式的性质：

theorem：set $\lambda_1 \sim \lambda_n$ 为 $A \in M_n(R)$ 的 n 个特征值，即 $|\lambda E - A| = (\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_n)$

则 1) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

2) $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = |A|$

proof

$$|\lambda E - A| = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$
$$= (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$$

$$f(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})\cdots(\lambda - a_{nn})$$
$$\lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n |A|$$

由上述定理得 $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = -a_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = tr(A)$

$a_n = (-1)^n |A| = |A|.$

推论：1) if $\lambda_1 \sim \lambda_n$ 是矩阵 A 的特征值，A 为可逆矩阵，则 $\lambda_1^{-1} \sim \lambda_n^{-1}$ 为矩阵 A^{-1} 的特征值　　$P^{-1}A^{-1}P = (P^{-1}AP)^{-1}$

2) if $\lambda_1 \sim \lambda_n$ 为矩阵 A 的特征值，其中 A 为可逆矩阵，则 $|A|\lambda_1^{-1}, \cdots, |A|\lambda_n^{-1}$ 是矩阵 A 的伴随矩阵 A^* 的特征值.

$$A \cdot A^* = |A| E \Rightarrow |A^*| = |A|^{n-1}$$

proof

3) 相似矩阵具有相同特征值，具有相同的迹

theorem：$\forall$ 复矩阵必复相似于一个上三角矩阵　proof

proof：不妨设 A 为 n 阶复矩阵，下用数学归纳法和基扩充定理证明

当 n=1 时 结论显然成立，设 n-1 阶成立，下证 n 阶也成立

$\exists \lambda_1$ s.t. $A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1$，将 α_1 扩充为 C^n 一组基 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$

P 为 n 阶可逆矩阵　$P = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$

$$AP = (A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_n) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

A_1 为 n-1 阶方阵，故 $\exists$ $Q^{-1}A_1Q = S$　(S 为 n-1 阶上三角矩阵)

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

$$(PQ)^{-1}APR = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & Q^{-1}A_1Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & S \end{pmatrix}$$ 为复的上三角矩阵，与 A 相似

命题：若 $A \in F^{n\times n}$，$f(x) \in F[x]$，则

1) 若 λ 是矩阵 A 的特征值，则 $f(\lambda)$ 是矩阵 $f(A)$ 的特征值

2) 若 $\lambda_1 \sim \lambda_n$ 是矩阵 A 的特征值，则 $f(\lambda_1) \sim f(\lambda_n)$ 是矩阵 $f(A)$ 的特征值

proof：由上述得 $\forall$ 复矩阵必复相似于一个上三角矩阵，即 $\exists$　$P^{-1}AP = T$

T 为对角线上元素为 A 的特征值 $\lambda_1 \sim \lambda_n$，$f(A) = Pf(T)P^{-1}$

---

proof：

$|\lambda E - AB| = |\lambda E - BA|$

$$\begin{pmatrix} \lambda E & A \\ B & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & 0 \\ -B & \lambda E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda E - AB & \lambda A \\ 0 & \lambda E \end{pmatrix}$$

$|\lambda E - AB| \cdot |\lambda E| = |\lambda E - AB|$

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ -B & \lambda E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda E & A \\ B & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda E & A \\ 0 & -BA + \lambda E \end{pmatrix}$$

$|\lambda E| \cdot |\lambda E - AB| = |\lambda E - BA|$

$|\lambda E - A_1B_1| = |\lambda E - B_1A_1|$ 得　　$A_{m\times n}$　$B_{n\times m}$　3x2　2x3

$A_1 = (A\ 0)$　　$B_1 = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}$　　$m \geq n$

$$|\lambda E - AB| = \left|\lambda E - \begin{pmatrix} BA & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right|$$

$$|\lambda E - AB| = \begin{vmatrix} \lambda E - AB & 0 \\ 0 & \lambda E \end{vmatrix} = |\lambda E - A| \cdot \lambda^{m-n}$$

定理：if $A \in F^{m\times n}$，$B \in F^{n\times m}$，$m \geq n$　则

1) $|\lambda E - AB| = \lambda^{m-n}|\lambda E - BA|$

2) $tr(AB) = tr(BA)$

proof

极小多项式与 Hamilton-Cayley 定理

def：（零化多项式） set $A\in F^{n\times n}$ （$\mathscr{A}\in Hom(V,V)$） 若∃ $f(x)\in F[x]$ s.t. $f(A)=0$ （$f(\mathscr{A})=0$）
则称 $f(x)$ 是矩阵 A（$\mathscr{A}$）的零化多项式

零化多项式存在，且不唯一：

1、$A\in F^{n\times n}$，$\dim_F(F^{n\times n})=n^2$， $a_0E+a_1A+\cdots+a_{n^2}A^{n^2}=0$ $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n^2}x^{n^2}$ $f(A)=0$

2、$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$ $f(x)=(x-1)(x-2)$ $f(A)=0$ 且 $N\cdot f(A)$ 均为 A 的零化多项式

def：在 A 的零化多项式中，次数 minimal 的首一多项式 is called 矩阵A的极小多项式（$m_A(x)$）

prop：
1、对 $f(x)$ 是 A 的零化多项式，则 $m_A(x)\mid f(x)$ $\longrightarrow$ 代余除法
2、极小多项式唯一
3、相似矩阵有相同的极小多项式 $\longrightarrow$ $B=P^{-1}AP$ 《高代》谢启鸿 P_{273}
$m_A(A)=m_A(PBP^{-1})=Pm_A(B)P^{-1}$

proof

极小多项式相同的矩阵不一定相似 $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

prop：1、若矩阵 $A=\begin{pmatrix}A_1&0\\0&A_2\end{pmatrix}$ 则 $m_A(x)=[m_{A_1}(x),m_{A_2}(x)]$

2、设 λ 为矩阵A的特征值，则 $(x-\lambda)\mid m_A(x)$
$\Downarrow$
$(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_s)\mid m_A(x)$

proof

还是数学归纳法

lemma：若矩阵 $A=\begin{pmatrix}\lambda_1&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\&\lambda_2&\cdots&a_{2n}\\&&\ddots&\vdots\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$，则 $f(A)=0$ proof

详细证明见 P_{42}

（Hamilton-Cayley 定理）：set $A\in M_n(F)$，$f(x)$ 是 A 的一个特征多项式，则 $f(A)=0$

proof 1：

数域 $F\subset C$，由 lemma 得：$A\in M_n(F)$ 相似于复上三角矩阵，∃P s.t. $P^{-1}AP=B$ 为上三角阵
P、B 均为复矩阵；A 与 B 有相同的特征多项式，记 $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$

$f(B)=0$ 而 $f(A)=A^n+a_1A^{n-1}+\cdots+a_nI_n$

$=(PBP^{-1})^n+a_1(PBP^{-1})^{n-1}+\cdots+a_nI_n$

$=PB^nP^{-1}+a_1PB^{n-1}P^{-1}+\cdots+a_nI_n$

$=P(B^n+a_1B^{n-1}+\cdots+a_nI_n)P^{-1}$

$=Pf(B)P^{-1}=0$

特征多项式 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ 零化多项式

将极小多项式与特征多项式建立联系

相关重要的def：1. 零化多项式

2. 极小多项式

3. 特征多项式

lemma：6.3.1：$f(x)$为A适合的一个多项式（$f(A)=0$），A的极小多项式 $m_A(x) \mid f(x)$

6.3.2：$m(x)$为A的极小多项式，λ_0为A的特征值，则 $(x-\lambda_0) \mid m(x)$

$m(A)=0$ $\quad$ $m(A)\alpha = m(\lambda)\alpha = 0.$

$\Downarrow$

$m(\lambda_0)=0$

故 $(x-\lambda_0) \mid m(x)$

corollary：6.3.1：A的极小多项式$m(x)$为特征多项式的因式 $m_A(x) \mid f_A(x)$

6.3.2：$m_A(x)$与$f_A(x)$有相同的根（不计重数）

相互整除 $m(x) \mid f(x)$ → $m(x) \mid f_A(x)$

零化多项式

$(x-\lambda_0) \mid m(x)$ →

对角矩阵

def: set 矩阵 $A\in F^{n\times n}$，若存在可逆矩阵 P st. $P^{-1}AP$ 为对角形，则称矩阵 A 可对角化

$$\mathscr{A}(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

λ_i 为 $\mathscr{A}$ 的特征值

theorem: 1、set $\mathscr{A}$ 是 n 维线性空间 V 中的一个线性变换，$\mathscr{A}$ 可对角化 $\Longleftrightarrow$ $\mathscr{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量　　proof

$\Longrightarrow$: $\mathscr{A}(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$　　$\mathscr{A}\varepsilon_i=\lambda_i\varepsilon_i$　$i=1\sim n$

故 $\varepsilon_1\sim\varepsilon_n$ 为 $\mathscr{A}$ n 个线性无关的特征向量

$\Longleftarrow$: $\mathscr{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量 $\varepsilon_1\sim\varepsilon_n$，对应特征值为 $\lambda_1\sim\lambda_n$ st. $\mathscr{A}\varepsilon_i=\lambda_i\varepsilon_i$

$$\mathscr{A}(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

φ 为 V 上线性变换，$\lambda_1\sim\lambda_k$ 为 φ 的全部特征值. V_i 为 λ_i 的特征子空间

proof: φ 可对角化 $\Longleftrightarrow$ $V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_k$

2、属于不同特征值的特征向量是线性无关　　proof　（数学归纳法）

推论：1、if 在 n 维线性空间 V 中，线性变换 $\mathscr{A}$ 的特征多项式在数域 P 中有 n 个不同的根 / n 个不同的特征值，那么 $\mathscr{A}$ 在某组基下是对角形的

2、在复数域上的线性空间中，if 线性变换 $\mathscr{A}$ 的特征多项式无重根，$\mathscr{A}$ 在某组基下的矩阵为对角形．（代数基本定理：$\forall$ n 次多项式在 C 上有 n 个根）

（重根中得到的一组特征向量也是线性无关的）.

3、if $\lambda_1\sim\lambda_k$ 为线性变换 $\mathscr{A}$ 的不同的特征值，而 $\alpha_{i1}\sim\alpha_{ir_i}$ 为 λ_i 的线性无关的特征向量，$i=1\sim k$，则

$\alpha_{11},\cdots,\alpha_{1r_1},\cdots,\alpha_{k1},\cdots,\alpha_{kr_k}$ 也线性无关

proof 也相同

推广

4、if $\lambda_1\sim\lambda_k$ 为线性变换 $\mathscr{A}$ 不同的特征值，则 $V_{\lambda_1}+\cdots+V_{\lambda_k}=V_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_k}$　　proof

（数学归纳法）

proof: 对 k 使用数学归纳法得　$k=1$ 时，V 非零，结论显然成立

设 $k=n$ 时结论成立，下证 $k=n+1$ 时结论也成立

$\lambda_1\sim\lambda_n$ 所对应的特征子空间为直和 $V_1\oplus\cdots\oplus V_n$

下证 $V_{n+1}\cap(V_1\oplus\cdots\oplus V_n)=0$

presume $v\in V_{n+1}\cap(V_1\oplus\cdots\oplus V_n)$　　$v=v_1+\cdots+v_n$

$\downarrow\times\lambda$

$\mathscr{A}(v)=\mathscr{A}(v_1)+\cdots+\mathscr{A}(v_n)$　　$\lambda v=\lambda v_1+\cdots+\lambda v_n$ ②

$\lambda v=\lambda_1 v_1+\cdots+\lambda_n v_n$ ①

①②得：$(\lambda_1-\lambda)v_1+\cdots+(\lambda_n-\lambda)v_n=0$　　$v_1\sim v_n$ 为直和可得

$(\lambda_i-\lambda)v_i=0$

$\lambda_i\neq\lambda$，故 $v_i=0$

所以 $V_{n+1}\cap(V_1\oplus\cdots\oplus V_n)=0$

proof 略有技巧性，需多加练习

Def: 1. set λ_i 为 $\mathscr{A}$ 的一个特征值，将 λ_i 作为 $\mathscr{A}$ 的特征多项式的根的重数叫作 λ_i 的 代数重数（重数）

2. $\mathscr{A}$ 特征值 λ_i 的特征子空间 V_{λ_i} 的维数叫做 λ_i 的 几何重数

prop: 1. 域 F 上的 n 维线性空间的线性变换 $\mathscr{A}$ 的 特征值 λ_i 的 几何重数 ≤ 代数重数

proof

（指的是单个的特征值）

$\dim(V_{\lambda_i}) = t$，λ 的代数重数为 m，取其基向量 $\xi_1 \sim \xi_t$，扩充为基向量组 $\xi_1 \sim \xi_t, \cdots \xi_n$

$\mathscr{A}(\xi_1 \cdots \xi_t \cdots \xi_n) = (\xi_1 \cdots \xi_t \cdots \xi_n) T \qquad T = \begin{pmatrix} \lambda_i E_t & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$

$\mathscr{A}$ 的特征多项式为 $\underbrace{(\lambda E - T)}_{\text{代数重数的def}} = (\lambda - \lambda_i)^t g(\lambda)$（是否为对角阵无所谓）

故 $t \le m$

推论：$\mathscr{A}$ 为 n 维线性空间 V 上的线性变换，$\lambda_1 \cdots \lambda_k$ 为 $\mathscr{A}$ 的特征值，重数分别为 $n_1, \cdots, n_k$ THAE:

(1) $\mathscr{A}$ 可对角化

(2) $\dim V_{\lambda_i} = n_i$

(3) $\dim V_{\lambda_1} + \cdots + \dim V_{\lambda_k} = n$

(4) $V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$

proof

1) ⇒ 2)：$\mathscr{A}$ 可对角化，即存在 n 个线性无关的向量

$\sum_{i=1}^{k} n_i = n$，有 $\lambda_i \in F$，$V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_k} = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k} \subset V$

$\mathscr{A}(\eta_{11}, \cdots, \eta_{kk}) = (\eta_1, \cdots, \eta_{k n_k}) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_k \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_k \end{pmatrix}$

$V_{\lambda_1} = \langle \eta_{11}, \cdots, \eta_{1 n_1} \rangle$

$\vdots$

$V_{\lambda_k} = \langle \eta_{k1}, \cdots, \eta_{k n_k} \rangle$

$\dim V_{\lambda_i} = n_i$

2) ⇒ 3) 代入 $V_{\lambda_i} = n_i$ 即得结果

3) ⇒ 4) 直和定义

4) ⇒ 1) 易得 $\dim V_{\lambda_1} + \cdots + \dim V_{\lambda_k} = n$

$\mathscr{A}$ 可对角化

幂等矩阵 $A^2 = A$ 是否可对角化，且相似于对角矩阵 $\mathrm{diag}\{1, 1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0\}$

即证 特征值 0, 1 的代数重数 = 几何重数

proof

$\lambda \xi = A\xi = A^2 \xi = \lambda^2 \xi \qquad \lambda^2 = \lambda \qquad \lambda = 1 \text{ or } 0$

$A(A-E) = 0$ 得 $r(A) + r(A-E) \le n$

$A + E - A = E$ 得 $r(A) + r(A-E) \ge r(E) = n$

$> r(A) + r(A-E) = n$

$\lambda = 1$ 时 1 的几何重数为 $r(A)$

$(A - \lambda E)\xi = 0$

$(A-E)\xi = 0$ 基础解系有 $n - r(A-E) = r(A)$ 个解（线无关）

$\lambda = 0$ 时 0 的几何重数为 $n - r(A)$

$(A - \lambda E)\xi = 0$

$A\xi = 0$ 基础解系有 $n - r(A)$ 个解（线无关）

共用 $n - r(A) + r(A) = n$ 个线性无关的解向量，故可对角化，相似于 $\begin{array}{c} \begin{array}{cc} r & n-r \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \end{array}$ 矩阵

使用判定条件：$\mathscr{A}$ 有 n 个线性无关的解向量

proof: 若矩阵 A 满足 $A^2 = E$，则 A 可对角化

proof

$A\xi = \lambda \xi$ 得 $\qquad \lambda^2 \xi = A^2 \xi = \xi \qquad \lambda = \pm 1$

$\lambda = 1$ 时

$(A - \lambda E)\xi = 0$

$(A - E)\xi = 0$

有 $n - r(A-E)$ 个线无关解

$\lambda = -1$ 时

$(A - \lambda E)\xi = 0$

$(A + E)\xi = 0$

有 $n - r(A+E)$ 个线无关的解。

$A^2 - E = 0 \Rightarrow (A+E)(A-E) = 0$

$r(A+E) + r(A-E) \le n$

$A + E + E - A = 2E$

$r(A+E) + r(E-A) \ge r(2E) = n$

$r(A+E) + r(A-E) = n$

$r(A-E) + r(A+E) = n$ 得 共有 $2n - (r(A-E) + r(A+E)) = n$ 个线性无关解，故可对角化

若 $A \ne 0$，但 $A^k = 0$，则 A 不可对角化

proof

$(A - \lambda E)\xi = 0$

$A\xi = 0$

$\dim(\xi) = n - r(A) \ne n$，故不可对角化