八、多变量函数的连续性

8.1 n维Euclid空间

def 集合 $R^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n): x_i\in R\ i=1\sim n\}$，$x$为$R^n$中一个点（向量）

定义以上线性运算的集合R^n，称为 n维向量空间

定义有内积的向量空间R^n，称为 n维Euclid空间（欧氏空间）

$\forall\ x\in R^n$，def $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$ 向量x的范数

球：$B_r(a)=\{x\in R^n: \|x-a\|<r\}$

闭球：$\bar{B}_r(a)=\{x\in R^n: \|x-a\|\le r\}$

有界集E：$E\subset R^n$，$\exists r>0$ s.t. $E\subset B_r(0)$，E is called 有界集

无界集F：$\forall m\in N^*$，$\exists x_m\in F$ s.t. $\|x_m\|>m$

8.2 R^n中点列的极限

设$x_i\in R^n$ $(i=1,2\cdots)$，称$\{x_i\}$为R^n中的一个点列

def：设$\{x_i\}$为R^n中一个点列，$a\in R^n$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in N^*$，$i>N$时有 $\|x_i-a\|<\varepsilon$

称点a为点列$\{x_i\}$的极限，记作 $\lim\limits_{i\to\infty}x_i=a$ or $x_i\to a\ (i\to\infty)$

def：$\{x_i\}$为R^n中的点列，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in N^*$，当$k,l>N$时 $\|x_k-x_l\|<\varepsilon$

$\{x_i\}$ is called 基本点列

theorem 8.2：$\lim\limits_{i\to\infty}x_i=a$ 等价于点列$\{x_i\}$按分量收敛于a (proof)

theorem 8.3：$\{x_i\}$为收敛点列 $\Longleftrightarrow$ $\{x_i\}$为基本点列 (proof)

theorem 8.4：(Bolzano — Weierstrass) 从任一有界的点列中可选出收敛的子点列 (proof)

f 测度在 Ω 上 a.e. 连续 / $\|\Omega^{\text{不}}_f\| = 0$ $d(P,Q) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

$d|\Omega| = \sup_{P,Q \in \Omega} d(P,Q)$.

why $\lim_{p\to\infty} d(P,Q) = \max_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

1. 夹挤定理：

2. Cauchy 不等式：

$d(P,Q) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

$\boxed{\text{while } p = \infty \quad d(P,Q) = \max_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \quad ?}$

多维空间距离公式

① $\lim_{p\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

取 $\max |x_i - y_i| = a$

① $\underset{= a_{max}}{(a_{max}^p)^{\frac{1}{p}}} \le (a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} \le \max_{i=1}^{n} a_i$

② $\le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le (a^p)^{\frac{1}{p}} = a = \max |x_i - y_i|$

②

② Cauchy-Schwarz inequality : $\frac{(\Sigma u_i)^2}{\Sigma v_i} \le \Sigma \frac{u_i^2}{v_i}$

$(\Sigma (x_i - y_i))^p \le$

$(\Sigma a_i)^p \le n^p \cdot a^p$

$\frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^p}{n} \le \frac{a_1^p}{1} + \frac{a_2^p}{1} + \cdots + \frac{a_n^p}{1}$

$\left(\frac{(\Sigma a_i)^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} = (n^{p-1} a^p)^{\frac{1}{p}}$

$= n^{\frac{p-1}{p}} \cdot a$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\Sigma a_i}{n} = a \Leftarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a$

$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(\Sigma a_i)^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} = ? \quad = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{p-1}{p}} a = a$

E_1：集合运算

$\mathbb{R}$ 表示实数域，$\bar{\mathbb{R}}$ 表示 $\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$，对集合 X，用 2^X 表示 X 的所有子集组成的集合(集合族)，称为 X 的 幂集

集合上极限：$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m = \{w : w$ 在无穷多个 A_n 中出现$\}$

集合下极限：$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m = \{w :$ 从某个 n 开始 w 属于后续所有 $A_n\}$

单调集列 $\bigcap_{n=1}^{\infty}$ $\bigcup_{n=1}^{\infty}$

G_δ 型集 $[0,1]$ G_δ - $\bigcap$开

F_σ 型集 $(0,1)$ F_σ $\bigcup$闭

直积(笛卡尔积)：集合 A,B $A\times B=\{(x,y) : x\in A,\ y\in B\}$ 类似可 define $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ X^n, X^T (T 为 $\mathbb{R}$ 的子集)

上确界：$A\subset\mathbb{R}$，m 为 A 的一个上界，且对 A 的任意上界 m' 都有 $m\le m'$，称 m 为 A 的上确界，记为 $\sup A$。 if A 无有限的上界 则令 $\sup A=+\infty$ （类似定义下确界）

数列上极限：$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{n\to\infty}\sup_{m\ge n} a_m$ （可以等于 $\pm\infty$） 类似 definite 下极限，函数上极限与下极限

集合中元素的个数，分为三种情况： 1、有限个 2、无限可数个，称为可列个 3、无限不可数个

$\mathbb{R}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n) : x_i\in\mathbb{R},\ i=1,2,\cdots,n\}$ 模为 $\|x\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$ 两点 x,y 距离为 $d(x,y)=\|x-y\|$ 序列 $\{x_n\}\subset\mathbb{R}^n$ 收敛到极限 x，定义为 $\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$

$\mathbb{R}^n$ 中的点集 A 中点的分类：

内点 x： x 的邻域 均属于 A

边界点 x： $x\in A$ 且 x 的任意一个邻域 均与 A^c 都有非空交集（其中，若 x 的一个邻域中仅有 x 属于 A 称 x 为 孤立点）

聚点 x： 存在 $x_n\in A$，$x_n\neq x$ 使得 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$

闭包： A 与 A 的所有内点组成的集合的并集 称为 A 的闭包，记为 $\bar{A}$

$\mathbb{R}^n$ 中的闭集：A 包含其所有的聚点。即 A 对极限运算封闭。有限多个闭集的并是闭集，任意多个闭集的交是闭集，闭包是闭集

$\mathbb{R}^n$ 中的开集： 所有点都是内点的集合

生成的 σ 代数：设全集为 X，A 是 X 的一些子集组成的集合族，称包含 A 所有 σ 代数的交集为 A 生成的 σ 代数。

Borel σ 代数：$\mathbb{R}^n$ 中所有开集生成的 σ 代数称为 Borel σ 代数，记为 $\mathcal{B}^n$，其中的集合称为 Borel 集

（Borel 集合的余集/可列并/可列交/上极限/下极限运算 结果均为 Borel 集）

8.3 R^n中的开集和闭集

开集 def：$E\subset R^n$，$a\in E$，$\exists r>0$，s.t. $B_r(a)\subset E$，a is called 内点

点E全体内点所构成的集合 E° is called E的内部

if $E^\circ=E$，E为 R^n 中的开集

（$E=\phi$，$E^\circ=\phi$，$E=E^\circ$ 故 ϕ 为开集 、R^n也为开集）

空心球：$B_r(\check{a})=\{x\in R^n: 0<\|x-a\|<r\}$

不依赖于开集而判断闭集的办法

def：设 $E\subset R^n$，$a\in R^n$：$\forall r>0$，在空心球 $B_r(\check{a})$ 中总有E中的点，称a为凝聚点 or 极限点

E的极限点可以 $\in$ or $\notin E$，if $a\notin E$，则称a为E的孤立点

def：点集 $E\subset R^n$ 的极限点的全体 is called E的导集（E'）　$\bar{E}=E'\cup E$　$\bar{E}$ is called 闭包

theorem 8.3.3/4：E为闭集 $\Longleftrightarrow$ $E'\subset E$ / $\bar{E}=E$　（proof）

$\Longleftrightarrow$ E中$\forall$收敛点列的极限也在E中　（proof）

theorem：E的导集E' 和 闭包$\bar{E}$ 均为闭集（proof）

E°为$\subset E$的max开集，$\bar{E}$为包含E的minimal 闭集　（proof）

theorem 8.3.1 ：对$\forall$集E，E的内部E°为开集　（proof）

theorem 8.3.2 ：在空间R^n中

1）R^n、ϕ为开集 \ 闭集

2）设$\{E_\alpha\}$为R^n一个开子集族，指标α来自一个指标集I，则 $\bigcup_{\alpha\in I}E_\alpha$ 也为开集

（任意多个开集的并为开集）\（任意多个闭集的交为闭集）

3）设 $E_1,E_2,\cdots,E_m$ 为有限个开集，$\bigcap_{i=1}^{m}E_i$ 也为开集　（proof）.

（有限个开集的交为开集）\（有限个闭集的并为闭集）

def：设点集 $E\subset R^n$，$(E^c)^\circ$ 中的点称为E的外点，E的外点全体称为外部（闭集）

既非内点又非外点 is called 边界点，E的边界点全体称为边界 ∂E

$\forall E\subset R^n$，$E^\circ\cup(E^c)^\circ\cup\partial E=R^n$

$diam(E)=\sup\{\|x-y\|: x,y\in E\}$

theorem 8.3.7：（闭区间套定理）set $\{F_i\}$（非空，$i=1,2,3\cdots$）为一列闭集，$F_1\supset F_2\supset\cdots$

$\lim_{i\to\infty} diam(F_i)=0$，$\bigcap_{i=1}^{\infty}F_i$ 只含唯一的点　（proof）.

8.4 列紧集和紧致集 ?

def: set $E \subset R^n$，计 E中∀一点列均有子列收敛于E中一个点，称E为 R^n 中的 列紧集

theorem：R^n 中的集合E为列紧集 $\Longleftrightarrow$ E为有界闭集 (proof).

def: set $E \subset R^n$，$\mathcal{F} = \{G_\alpha\}$ 为 R^n 中一个开集族，计 $E \subset \bigcup_\alpha G_\alpha$，则称开集族 $\mathcal{F}$ 为E的开覆盖

($\forall a \in E$，∃开集 $G_\alpha \in \mathcal{F}$ st $a \in G_\alpha$)

def: set $E \subset R^n$，计能从E的∀一个开覆盖中选出有限个开集，它们仍为能组成E的开覆盖，称E为紧致集

theorem：$E \subset R^n$ 为紧致集 $\Longleftrightarrow$ E为有界闭集

R^n 中 有界闭、列紧、紧致 为等价

8.5 集合的连通性 ?

def: 设$E \subset R^n$，if E的任一分解式 $E = A \cup B$ 满足条件 $A \neq \phi$，$B \neq \phi$ 且 $A \cap B \neq \phi$ s.t. $\begin{cases} 1、A \cap B' \neq \phi \\ 2、A' \cap B \neq \phi \end{cases}$ 中至少有一个不成立，

称E为R^n中的连通集 or E是连通

def: 在R^n中，连通的开集称为区域，区域的闭包称为闭区域

theorem: 1、开集$E \subset R^n$为连通集 $\Longleftrightarrow$ E不能分解为非空集合 $A \cup B$ 且 $A \cap B = \phi$ (proof)

2、在R^1，集合E连通 $\Longleftrightarrow$ E为区间 (proof)

3、道路连通一定是连通集 (proof)

def: set $E \subset R^n$，if $\forall$两点$P, Q \in E$，$\exists$连续曲线$l \subset E$ 将P Q 连接，称E为道路连通

(R^n中的连续曲线可用参数方程表示)