线性方程组

消元法

定义：由 sm 个数排成 s 行 m 列的表称为一个 $s\times m$ 矩阵，i 行 j 列交叉位置元素称为矩阵的 (i,j) 元

定理1：任意一个矩阵都可以经一系列初等行变换成阶梯形矩阵、

n维向量空间

定义：数域 K 上所有 n 元有序数组组成的集合 K^n，连同定义在上面的加法和数乘，及满足8条运算法则

称为数域 K 上一个 n维向量空间，K^n 的元素称为 n维向量

$\rightleftharpoons$ 在 K^n 中，给定向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，对于 $\beta\in K^n$，if $\exists$ K 中一组数 $c_1\cdots c_s$ s.t. $\beta=\sum_{i=1}^{s}c_i\alpha_i$

称 β 可以由 $\alpha_1\sim\alpha_s$ 线性表出

$\rightleftharpoons$ 数域 K 上线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$ 有解

$$x_1\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}a_{21}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{pmatrix}+\cdots+x_n\begin{pmatrix}a_{n1}\\a_{n2}\\\vdots\\a_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$$

$\rightleftharpoons$ K 中存在一组数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ s.t.

$$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_n\alpha_n=\beta$$

若线性方程组有无解 $\rightleftharpoons$ 常数项列向量 β 能否由系数矩阵的列向量线性表出、

命题：数域 K 上 n 元线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$ 有解

$\rightleftharpoons$ β 可以由 $\alpha_1\sim\alpha_n$ 线性表出

$\rightleftharpoons$ $\beta\in\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\rangle$　β 属于 α_1-α_n 生成的子空间

定义：if n 元线性方程组的一部分未知量可以用其它未知量至多一次式表示，则该表达式为该线性方程组的一般解

这些其余未知量称为自由未知量

定义：常数项全为0的线性方程组称为齐次线性方程组

推论1：n 元齐次线性方程组有非零解 $\rightleftharpoons$ 系数矩阵 by 初等行变换所化成的阶梯矩阵非零行数目 $r<n$

线性相关和线性无关向量组

定义：K^n 中向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s(s\geq1)$ 是线性相关的 $\rightleftharpoons$ $\exists$ 不全为0的数 $k_1\sim k_s$，则 $k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=0$

推论：1、包含零向量的向量组一定线性相关

2、单个向量组线性相关（无关）$\rightleftharpoons$ $\alpha=0$ $(\alpha\neq0)$

3、K^n 中基向量组线性无关

线性组合：　线性表出：　行列式　表示方式　部分组：

延伸组 or：向量组线性无关，则每个向量添上（减去）m 个分量得到的延伸组（缩短组）也线性无关

缩短组

齐次线性方程组：
- ~~相关：有非零解
- ~~无关：只有零解

设向量组 $\alpha_1\sim\alpha_s$ 线性无关，则 β 可由 $\alpha_1\sim\alpha_s$ 线性表出 $\rightleftharpoons$ $\alpha_1\sim\alpha_s,\beta$ 线性相关

极大线性无关组，向量组的秩 (UF)

命题：1、向量组与它的极大线性无关组等价

推论：1、向量组 $\beta_1\sim\beta_r$ 可以由向量组 $\alpha_1\sim\alpha_s$ 线性表出，if $r>s$，则 β 向量组线性相关

2、 、、、　、、、　、、、线性表出，if β 线性无关，$r\leq s$

定义：向量组的极大线性无关组所含向量个数称为向量组的秩

向量组 $\alpha_1\sim\alpha_s$ 线性无关 $\rightleftharpoons$ 秩=向量个数

矩阵的秩 (UF)

任一非零矩阵的秩 = 不为0子式的最高阶数

线性方程组有解的充要条件

定理1：

线性方程组有解判别定理：数域K上线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$ 有解 $\Longleftrightarrow$ rank系数矩阵 = rank增广矩阵

定理2：

n元线性方程组有解，r(系数矩阵) = n 则有唯一解，<n 则有无穷解

推论：数域K上n元齐次线性方程组有非0解 $\Longleftrightarrow$ 系数矩阵的 $r<n$

齐次线性方程组的解集的结构

数域K上n元齐次线性方程组

$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0$ 的一个解是 K^n 中一个向量，称其为方程组的一个解向量，W为方程组的解集，是 K^n 的一个子空间，也称解空间。

计 $r(A)=n$ $W=\{0\}$；计 $r(A)<n$，W为非0子空间，解空间的一个基即为基础解系

定义1：齐次线性方程组有非0解时，计有限多个解 $\eta_1\sim\eta_t$ 满足：

1) 线性无关

2) 方程组任一解均可被线性表出　　称 $\eta_1\sim\eta_t$ 为方程组的一个基础解系.

定理1：K上n元齐次……解空间W的维数：$\dim W=n-\text{rank}(A)$　A为系数矩阵

非齐次线性方程组的解集结构

$$\begin{cases} x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta \\ x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0 \end{cases}$$

— 导出组，解空间为W

定理：数域K上n元非齐次……有解，解集U为　$U=\{\gamma_0+\eta \mid \eta\in W\}$　γ_0 是非齐次……一个解（γ_0 为特解）

推论：计 n元非齐次线性方程组有解，解唯一 $\Longleftrightarrow$ 导出组只有0解