北京林业大学 20 19 --20 20 学年第 一 学期期末考试试卷

课程名称： 高等代数（A 卷） 课程所在学院： 理学院

考试班级＿＿＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿＿＿ 成绩＿＿＿＿＿＿

试卷说明：

1. 考试时间为 120 分钟，请掌握好答题时间；
2. 答题之前，请将试卷和答题纸上的考试班级、学号、姓名填写清楚；
3. 本试卷所有试题答案写在 试卷 上；（特殊要求请详细说明）

答题完毕，请将试卷正面向外交回，不得带出考场；

一、判断题（本题共 8 小题，每题 3 分，共 24 分）.

1. （　　）多项式 $2x^2+2$ 在实数上为不可约多项式，在复数域上为可约多项式.

2. （　　）多项式 x^4+4x^2-4x-3 在有理数域上有重因式.

3. （ X ）√ 已知线性方程组 $A_{m\times n}x=b$，且 A 行满秩，则 $A_{m\times n}x=b$ 必有解.

$r(A)=r(\bar{b})$

$$\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{matrix}$$

√

4. （ √ ）在复数域上，矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ 与单位阵合同.

5. （ X ）设 A 为一个三阶方阵，则 $\left|-A^T\right|=\left|A^T\right|=|A|$.

6. （ X ）√ 包含零向量的向量组一定线性相关，线性无关组的部分组一定线性无关.

分量

7. （ X ）非齐次线性方程组的解向量的线性组合还是该线性方程组的解.

8. （ X ）若实对称矩阵 A 的一切顺序主子式全小于零，则 A 是负定矩阵.

二.（6 分）设 A 为 n 阶方阵，证明存在一个 n 阶非零方阵 B 使得 $AB=0$ 的充要条件是 $|A|=0$.

不妨设B列向量为 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$

$AB=(A\beta_1,A\beta_2,\cdots,A\beta_n)=(0,0,\cdots,0)$ $\Rightarrow$

$A\beta_i=0\ (i=1,2,\cdots,n)$ B为n阶非零方阵，必有 $\beta_i\neq0$，$\exists A\beta_i=0$

$$\begin{cases} a_{11}b_1+a_{12}b_2+\cdots+a_{1n}b_n=0 \\ \vdots \\ a_{n1}b_1+a_{n2}b_2+\cdots+a_{nn}b_n=0 \end{cases}$$

$\beta_i\neq0$，方程有非零解 $\Longleftrightarrow |A|=0$

故 $AB=0 \Longleftrightarrow |A|=0$

$\Leftarrow$：构造B，有非0解 $B(\beta_i,\beta_i,\cdots\beta_i)$

三.（**10 分**）设 $f(x)$，$g(x)$ 为数域 $\mathbb{F}$ 上的多项式.

证明 $\big(f(x),g(x)\big)=1$ 的充要条件是 $\big(f(x)g(x),f(x)+g(x)\big)=1$.

四.（**10 分**）计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ n-1 & n & 1 & & & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & & n-1 \end{vmatrix}$.

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1+\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{n}+\cdots\frac{1}{n} & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

过程补全.

$$=\frac{(1+n)n}{2n}=\frac{n+1}{2}\cdot n^{n-1}\cdot(-1)^{n^2-n}$$

五.（10 分）设有方程组 $\begin{cases}(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=3,\\ x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda.\end{cases}$

讨论 λ 取什么值时，此方程组有（1）唯一解；（2）无解；（3）有无限多个解？

并在有无限多解时求其通解和其导出组的基础解系.

唯一解：$\begin{vmatrix}1+\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1+\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1+\lambda\end{vmatrix}\neq 0$ $\lambda^2(\lambda+3)\neq 0$ $\lambda\neq -3$ $\lambda\neq 0$

$\lambda\neq -3$ or 0 时方程有唯一解

判断增广系数矩阵的秩

无穷解：$\det A=0$ $\lambda=-3$ $|A|=\begin{vmatrix}-2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 3\\ 1 & 1 & -2 & -3\end{vmatrix}$

$\begin{matrix}1 & 1 & -2 & -3\\ 0 & -3 & 3 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{matrix}$

$x_3=0$ 时：$\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}$ $x_3=1$ 时 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot k$

$r=2<n=3$，x_3 为自由变量 通解 基础解系

解：$\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $(k\in R)$

无解：$\begin{vmatrix}1+\lambda & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\end{vmatrix}$ $\operatorname{rank}(A)<\operatorname{rank}\begin{pmatrix}0\\3\\\lambda\end{pmatrix}$

$\lambda=0$ 时方程无解.

六.（10 分）设 A 为 n 阶方阵，且 $A^2=E$.

证明 $r(A+E)+r(A-E)=n$.

$A^2-E=0$ $\underset{\alpha}{(A+E)}\underset{\beta}{(A-E)}=0$

已知 $r(A)+r(B)\geq r(A+B)$

$\because \alpha\cdot\beta=0$，$r(\alpha)+r(\beta)\leq n$（易证）

$r(A+E)+r(A-E)=r(A+E)+r(E-A)$

$\geq r(A+E+E-A)=r(2E)$

$=n$

$r(A+E)+r(A-E)\leq n$

故 $r(A+E)+r(A-E)=n$

七.（10 分）设 A 为 n 阶实方阵.

证明 $r(A^TA)=r(A)$.

$r(A^TA)=r(A)\Leftrightarrow AX=0$ 与 $A^TAX=0$ 有相同基础解系

$A^TAx_2=0$

$x_2^TA^TAx_2=0$

$(Ax_2)^TAx_2=0$

设 $Ax_2=(c_1,c_2,\cdots c_n)$

$(Ax_2)^TAx_2=\sum_{i=1}^{n}c_i^2=0$ $c_i=0\ (i=1,\cdots n)$

$Ax_2=0$

$Ax_1=0\Rightarrow A^TAx_1=0$

$A^TAx_2=0\Rightarrow Ax_2=0$

$n-r(A^TA)=n-r(A)$

故 $r(A^TA)=r(A)$.

$AX=0\Rightarrow A^TAX=0$

$A^TAX=0\Rightarrow X^TA^TAX=0\Rightarrow (AX)^TAX=0$

$AX=0$

具有相同的解空间以及相同个数的基础解系

$n-r(A)=n-r(A^TA)$.

七.（10 分）设 A 为实对称矩阵. 证明 A 半正定的充要条件是 A 的一切主子式大于或等于零.

A是半正定的，$\forall\alpha$ 有 $\alpha^TA\alpha\geq 0$ 取 $\alpha(1,0\cdots0)$

$\Rightarrow$: A半正定，$f=X^TAX$ 为半正定二次型.

构造新二次型 $f(x_{i1},\cdots,x_{ik})=(x_{i1},x_{i2},\cdots x_{ik})A_k\begin{pmatrix}x_{i1}\\ \vdots\\ x_{ik}\end{pmatrix}$

则 $f(x_{i1},x_{i2}\cdots x_{ik})$ 也是半正定

而 $f(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{ik})$ 对应矩阵为 A_k，为A的k阶主子式，则 $\det A_k\geq 0$

$\Leftarrow$ 要证A半正定 $\Longleftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$, $A+\varepsilon E$ 是正定的，下证 $A+\varepsilon E$ 各阶顺序主子式为正.

A_k 为A的k阶顺序主子式，则 $A_k+\varepsilon E$ 为 $A+\varepsilon E$ 的顺序主子式 $|A_0|=|A_k|$

$$|A_k+\varepsilon E|=\begin{vmatrix}a_{11}+\varepsilon & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}+\varepsilon & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\varepsilon^k+a_{k-1}\varepsilon^{k-1}+\cdots+a_1\varepsilon+a_0>0.$$

八.（10 分）利用矩阵的合同变换将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=-2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 化成标准型，写出合同变换以及二次型的标准型，并判断二次型的有定性.

$$f(x_1,x_2,x_3)=-2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\\\hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\rightarrow\begin{array}{ccc}-1&-1&2\\-1&0&1\\1&1&0\\\hline\end{array}\rightarrow\begin{array}{ccc}-2&-1&2\\-1&0&1\\2&1&0\\\hline 1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{array}\rightarrow\begin{array}{ccc}-2&-1&2\\0&\frac12&0\\2&1&0\\\hline\end{array}\rightarrow\begin{array}{ccc}-2&0&2\\0&\frac12&0\\2&0&0\\\hline 1&-\frac12&0\\1&\frac12&0\\0&0&1\end{array}\rightarrow\begin{array}{ccc}-2&0&2\\0&\frac12&0\\0&0&2\end{array}\rightarrow\begin{array}{ccc}-2&0&0\\0&\frac12&0\\0&0&2\\\hline 1&-\frac12&1\\1&\frac12&1\\0&0&1\end{array}\quad C=\begin{pmatrix}1&-\frac12&1\\1&\frac12&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$f(y_1,y_2,y_3)=-2y_1^2+\frac12y_2^2+2y_3^2$ 作非退化线性替换 $X=CY$ $C=\begin{pmatrix}1&-\frac12&1\\1&\frac12&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

二次型非正定也非负定，即不定型.

北京林业大学 20 18 --20 19 学年第 一 学期期末考试试卷

课程名称：　高等代数（B卷）　课程所在学院：　理学院
考试班级＿＿＿＿＿＿＿学号＿＿＿＿＿＿姓名＿＿＿＿＿＿成绩＿＿＿＿＿＿

试卷说明：

1. 考试时间为 120 分钟，请掌握好答题时间；
2. 答题之前，请将试卷和答题纸上的考试班级、学号、姓名填写清楚；
3. 本试卷所有试题答案写在 试卷 上；（特殊要求请详细说明）

答题完毕，请将试卷正面向外交回，不得带出考场；

一、判断题（本题共 10 小题，每题 3 分，共 30 分）．

~~1.~~ （　　）多项式 $x-2$ 在复数域上为可约多项式.

~~2.~~ （　　）多项式是否可约与数域扩大无关.

3. （ X ）互换行列式的两行，行列式的值不改变.

4. （ √ ）可逆矩阵的行列式不为 0.

5. （ X ）线性无关向量组的部分组线性无关.

6. （ √ ）设 A 为一个四阶方阵，则 $\left|-A^T\right|=\left|A^T\right|=|A|$.

7. （ √ ）包含零向量的向量组一定线性相关.

8. （ X ）非齐次线性方程组的解向量的线性组合还是该线性方程组的解.

9. （ √ ）设 A,B 均为 n 阶矩阵，那么秩 $(A+B)\le$ 秩 (A) + 秩 (B) .

10. （ √ ）正定矩阵一定可逆.

二.（10分）若 $f(x), g(x), h(x)$ 为数域 F 上的多项式，若 $\left(f(x), \mathrm{g}(\mathrm{x})\right)=1, \left(f(x), h(\mathrm{x})\right)=1$，证明 $(f(x), g(x)h(x))=1$.

三.(10 分) 计算 n 阶行列式 $D_{n+1}=\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & 1+a_3 & a_4 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1+a_4 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$.

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a_1+a_2+\cdots+a_n & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1+a_1+a_2+\cdots+a_n)$$

四．（10 分)）求非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 7 \end{cases}$ 的通解.

$$\left|\begin{matrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -4 & 7 \end{matrix}\right| \longrightarrow \left|\begin{matrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 4 \end{matrix}\right|$$

$n=4 \quad r=3 \quad n-r=1$

故取 x_4 为自由未知量.

$x_4=0$ 特解 $\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{8}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$　$x_4=1$ $k\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{13}{3} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $k\in R$

通解为 $\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{8}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{13}{3} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $k\in R$.

$A\cdot B=0 \quad r(A)+r(B)\le n$

五．（15 分）设 A 为 $n\times n$ 的矩阵，满足 $A^2=E$，证明 $r(A+E)+r(A-E)=n$.

$A^2=E \quad A^2=E^2$　　不妨设矩阵 $A+E$，$A-E$ 为 α、β.

$A^2-E^2=(A+E)(A-E)=0 \quad \alpha\cdot\beta=0 \quad \beta(\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_n)$

① $\alpha=0 \quad \beta\neq 0 \quad A=-E \quad r(A+E)+r(A-E)=r(-2E)+0=n$

② $\alpha\neq 0 \quad \beta=0 \quad A=E \quad r(A+E)+r(A-E)=r(2E)+0=n$

③ $\alpha\neq 0$ 且 $\beta\neq 0$

$\alpha\beta=(\alpha\beta_1,\alpha\beta_2,\cdots,\alpha\beta_n)=(0,0,\cdots,0)$

$\alpha\beta_i=0 \quad (i=1\sim n)$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

$\det\neq 0$ 有非0解

$\mathrm{rank}\,\alpha = n-\mathrm{rank}(\beta)$

$\mathrm{rank}\,\alpha+\mathrm{rank}\,\beta = n$

$r(\alpha)+r(\beta)\geq n$：

$r(\alpha)+r(-\beta)\geq r(\alpha-\beta)=r(A+E-A+E)=r(2E)=n$

$r(\alpha)+r(\beta)\leq n$：

β 为 $Ax=0$ 的解，不妨设 $\beta_1\sim\beta_r$ 为 $Ax=0$ 的基础解系

则 $\{\beta_1\cdots\beta_n\}$ 可由 $\{\beta_1\cdots\beta_r\}$ 线性表出

$r(\alpha)+r(\beta)\leq r(\alpha)+r(\text{基础解系})=n$

六.（10 分）若实对称矩阵 $A=(a_{ij})$ 为正定矩阵，证明 A 主对角线上元素 a_{ii} 均为正数.

正定矩阵 $\xrightarrow{\text{合同变换}}$ 规范型 $\xrightarrow{\text{标准型}}$ $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&\ddots\\&&&&1\end{pmatrix}$.

A为正定阵，$\forall\, x\neq 0$, always $x^TAx>0$ 取 $x_1\sim x_n$ 为 $\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$

$x_i^TAx_i=a_{ii}>0$，主对角元素均为正数.

七.（15 分）利用矩阵的合同变换将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=-2x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3$ 化成标准型，求其合同变换，并判断二次型是否正定.

$f(x_1,x_2,x_3)=-2x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3$

作可逆线性替换得 $\begin{cases}x_1=y_1+y_2\\x_2=y_1-y_2\\x_3=y_3\end{cases}$ $x=C_1Y$ $C_1=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$f(x)=x^TAx$
$=(CY)^TACY$
$=Y^T\underline{C^TAC}Y$

$f(x_1,x_2,x_3)=-2(y_1^2-y_2^2)+2y_3(y_1+y_2)+4y_3(y_1-y_2)$

$=-2y_1^2-2y_2^2+\underline{2y_1y_3}+2y_2y_3+\underline{4y_1y_3}-4y_2y_3$

$=-2(y_1^2-3y_1y_3+\frac{9}{4}y_3^2)-2(y_2^2+y_2y_3+\frac{1}{4}y_3^2)+5y_3^2$

$=-2(y_1-\frac{3}{2}y_3)^2-2(y_2+\frac{1}{2}y_3)^2+5y_3^2$

作可逆线性替换得 $\begin{cases}y_1-\frac{3}{2}y_3=z_1\\y_2+\frac{1}{2}y_3=z_2\\y_3=z_3\end{cases}$ $\begin{cases}y_1=z_1+\frac{3}{2}z_3\\y_2=z_2-\frac{1}{2}z_3\\y_3=z_3\end{cases}$ $Y=C_2Z$ $C_2=\begin{pmatrix}1&0&\frac{3}{2}\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}$

$x=C_1Y=C_1C_2Z$ $C_1C_2=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&\frac{3}{2}\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$

C_1C_2 非正定，为~~负定~~二次型.

非正非负

$\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&0&2\\1&2&0\\\hline1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{1行+2行}}\begin{matrix}-1&-1&3\\-1&0&2\\1&2&0\end{matrix}\xrightarrow{\text{1列+2列}}\begin{matrix}-2&-1&3\\-1&0&2\\3&2&0\\\hline1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{matrix}\xrightarrow{\text{2行}+(-\frac{1}{2})\text{1行}}\begin{matrix}-2&-1&3\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\3&2&0\end{matrix}\xrightarrow{\text{2列}+(-\frac{1}{2})\text{1列}}\begin{matrix}-2&0&3\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\3&\frac{1}{2}&0\\\hline1&-\frac{1}{2}&0\\1&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{matrix}$

$\begin{matrix}-2&0&3\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&\frac{9}{2}\end{matrix}\rightarrow\begin{matrix}-2&0&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&\frac{9}{2}\end{matrix}\Bigg|\begin{matrix}1&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\1&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\0&0&\frac{9}{2}\end{matrix}$ $\begin{matrix}-2&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&4\end{matrix}$ $\begin{matrix}1&-\frac{1}{2}&2\\1&\frac{1}{2}&1\\0&0&\frac{9}{2}\end{matrix}$ C

$f(z_1,z_2,z_3)=-2z_1^2+\frac{1}{2}z_2^2+4z_3^2$

北京林业大学 2017 --20 18 学年第 二 学期考试试卷(B)

课程名称：高等代数　　课程所在学院：理学院

考试班级＿＿＿＿＿＿学号＿＿＿＿＿＿姓名＿＿＿＿＿＿成绩

试卷说明：

1. 考试时间为 120 分钟，闭卷，请掌握好答题时间；
2. 试卷攻击 4 页，共 7 大部分，请勿漏答；
3. 答题之前，请将试卷和答题纸上的考试班级、学号、姓名填写清楚；
4. 本试卷所有试题答案写在 试卷 上；（特殊要求请详细说明）
5. 答题完毕，请将试卷正面向外交回，不得带出考场；
6. 考试中心提示：请你遵守考场纪律，诚信考试、公平竞争；

题目	一	二	三	四	五	六	七
得分							

一、判断题（本题共 6 小题，每题 5 分，共 30 分）.

1. （ √ ）线性空间的两个子空间的并还是子空间.

2. （ √ ）齐次线性方程组的所有解在向量加法和数乘下构成线性空间.

3. （ √ ）若可逆矩阵 A 和 B 相似，则 A 的转置矩阵和 B 的转置矩阵也相似.

4. （　　）设 $\mathcal{A}$ 为线性空间 V 上的线性变换，则 $\mathcal{A}$ 的特征子空间是 $\mathcal{A}$ - 子空间.

5. （　　）欧氏空间上的对称变换在任意一组基下的矩阵为对称矩阵.

6. （　　）设 V 为一个欧氏空间，则对任意的向量 $0 \neq \alpha \in V$，则 $|\alpha| > 0$.

二、(18 分) 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$，和 A 交换的所有的实矩阵的集合记为 $C(A)$. 令

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 3 & & \\ & & 5 & \\ & & & 7 \end{pmatrix}.$$ 对角矩阵可交换的也是对角矩阵.

求实线性空间 $C(A)$ 的基与维数.

$C \cdot A = A \cdot C$　不妨设 $C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$

$$C \cdot A = \begin{pmatrix} a_{11} & 3a_{12} & 5a_{13} & 7a_{14} \\ a_{21} & 3a_{22} & 5a_{23} & 7a_{24} \\ a_{31} & 3a_{32} & 5a_{33} & 7a_{34} \\ a_{41} & 3a_{42} & 5a_{43} & 7a_{44} \end{pmatrix}$$

由 $CA=AC$ 得: $a_{ij}=0\ (i \neq j)$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 3a_{21} & 3a_{22} & 3a_{23} & 3a_{24} \\ 5a_{31} & 5a_{32} & 5a_{33} & 5a_{34} \\ 7a_{41} & 7a_{42} & 7a_{43} & 7a_{44} \end{pmatrix}$$

dim=4

基 $C(A)$: $\varepsilon_1\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ $\varepsilon_2\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ $\varepsilon_3\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ $\varepsilon_4\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

三. (12 分) 设 V 为实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间，设 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 为 V 中 s 个线性无关的向量，请证明 V 的子空间 $L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s)$ 的维数等于 s.

$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 为 V 中 s 个线性无关向量　$\sum_{i=1}^{s} k_i\beta_i = 0 \rightleftharpoons k_1=k_2=\cdots=k_s=0$

$\beta_1 \sim \beta_s$、β 任加一个线性相关, 故 V 中 $\forall$ 向量均可被其线性表出.

故 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 为 V 的一组基　$\dim V = \dim(\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_s) = s$

$\dim L(\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_s) = \operatorname{rank}(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s)$

$\beta_1 \sim \beta_s$ 在 V 中线性无关, 在 L 中仍线性无关, 故 $\operatorname{rank}(\beta_1 \cdots \beta_s) = s$.

~~四.~~（8 分）设 A 是一个 3 阶复矩阵，如果 A 的最小多项式是 $(\lambda-1)^3$，求 A 的若尔当标准型.

~~五.~~（10 分）求矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 6\\ -1 & 0 & 3\\ -1 & -1 & 4\end{pmatrix}$ 的若尔当标准型.

六.（12 分）用正交线性替换化二次型 $-2xy+2xz+2yz=0$ 为标准型.

七.(10 分）欧氏空间 V 中的线性变换称为反称的，如果对任意的 α，$\beta\in V$。

$$(\mathrm{A}(\alpha),\beta)=-(\alpha,\mathrm{A}(\beta)).$$

请证明A 反称的充分必要条件是，A 在一组标准正交基下的矩阵为反对称的（$A=-A'$）.

北京林业大学 2022--2023 学年第 一 学期考试试卷（A 卷）

课程名称： 高等代数 　　课程所在学院： 理学院

考试班级________ 学号________ 姓名________ 成绩________

试卷说明：

1. 本次考试为 开 卷考试。本试卷共计 2 页，共 6 大部分，请勿漏答；
2. 考试时间为 120 分钟，请掌握好答题时间；
3. 答题之前，请将答题纸上的考试班级、学号、姓名填写清楚；
4. 本试卷答案写在答题纸上；
5. 答题完毕，请将答题纸交回，不得带出考场；
6. 考试中心提示：请你遵守考场纪律，诚信考试、公平竞争！

一、填空题(2分×10)

1, 排列 3467215 的逆序数为______.

2, 行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ 的值为______.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3, 线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$ 至多存在__2__个线性无关的解.

4, 向量组 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 的秩为______.

5, 已知向量组 α, β, γ 线性无关, 则向量组 $\alpha+\beta, \alpha-\beta, \gamma$ 的秩为______.

6, 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵的秩为______.

7, 矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵中第 1 行第 2 列元素为______.

8, 实二次型 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$ 的正惯性指数为______.

9, 全体 3 阶实对称矩阵, 对于矩阵的加法和数乘构成的实线性空间的维数为__6__.

10, 3 维实向量空间 $\mathbb{R}^3$ 中, 向量组 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 生成的子空间与向量组 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 生成的子空间的交的维数为______.

$x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$

$a\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a+b \\ a+b \end{pmatrix}$

二、判断题(2分×10)

1, n 阶排列中, 奇排列和偶排列各占一半.

2, 行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$.

n元齐次线性方程组的解集

3, ~~任意线性方程组~~的解集对于向量加法和数乘构成一个线性空间.

4, 包含零向量的向量组线性相关.

$\begin{cases} x+y=b & \checkmark \\ a+b=y & \times \\ a+b=0 & \times \end{cases}$

所方程只满足1个

故dim=1

A、B为n阶对称矩阵，AB也为对称矩阵 $\Longleftrightarrow$ A与B可交换.

同阶、可交换 对称矩阵

5, ~~对称矩阵~~的乘积为对称矩阵.

6, 初等矩阵可逆. 由单位矩阵经过一次初等变化得到的矩阵

7, 任意实方阵合同于对角矩阵.

对称

8, 正定矩阵的行列式为正.

9, 每个 3 维线性空间可以写为 3 个 1 维子空间的直和.

10, 任意线性空间中存在向量在该线性空间的任意基下的坐标相同.

三、(15分)

(1) 叙述齐次线性方程组有解判定定理并举例说明;

(2) 叙述非齐次线性方程组有解判定定理并举例说明.

四、(15分)

(1) 叙述矩阵 A 的秩 $r(A)$ 的定义;

(2) 设 A, B 为同阶方阵, 讨论 $r(A+B)$ 与 $r(A)+r(B)$ 的大小关系并说明原因;

(3) 设 A, B 为同阶方阵并且 B 可逆, 讨论 $r(AB)$, $r(A)\cdot r(B)$, $r(AB^{-1})$, $r(A)\div r(B)$ 的大小关系并说明原因.

$r(A)$、 $n\,r(A)$ $r(A)$ $\frac{r(A)}{n}$

五、(15分)

(1) 构造一个正定的包含交叉项的 3 元二次型并说明该二次型正定的原因;

(2) 写出该二次型的矩阵 A;

(3) 把 A 写成三个秩为 1 的对称矩阵之和.

六、(15分)

(1) 叙述线性空间的子空间的定义;

(2) 令 $V=\mathbb{R}^2$ 为 2 维实向量构成的线性空间, 构造该空间的一个 1 维子空间 W;

(3) 构造一个方程组使得 W 为该方程组的解空间.

求收

三、(1) n元齐次线性方程组有非零解 $\Longleftrightarrow r<n$ （$AX=0$）

只有0解 $\Longleftrightarrow r=n$

(2) n元非齐次线性方程组 （$AX=B$） 有唯一解 $\Longleftrightarrow r(A)=r(A,B)=n$

有无穷解 $\Longleftrightarrow r(A)=r(A,B)<n$

无解 $\Longleftrightarrow r(A)<r(A,B)$

四、(1) $r(A)$=A的非零子式的最高阶数

(2) A、B列向量组 $\alpha_1\sim\alpha_n$ $\beta_1\sim\beta_n$ $A+B:\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_n+\beta_n$

再设极大线性无关组表出，即证.

五、$f(x)=x^2+xy+y^2+z^2=(x+\frac{1}{2}y)^2+\frac{3}{4}y^2+z^2$

作非退化线性替换. $x+\frac{1}{2}y=z_1$, $\frac{\sqrt3}{2}y=z_2$, $z=z_3$

$\begin{cases} x=z_1-\frac{1}{\sqrt3}z_2 \\ y=\frac{2}{\sqrt3}z_2 \\ z=z_3 \end{cases}$ $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{\sqrt3}&0\\0&\frac{2}{\sqrt3}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}$

$x=Cy.$

$A=\begin{pmatrix}1&\frac12&0\\\frac12&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $C^{-1}=\begin{pmatrix}1&\frac12&0\\0&\frac{\sqrt3}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$A=A_1+A_2+A_3$ (也可以直接凑)

$C^T AC=\underset{\text{对角矩阵}}{B}=E_1+E_2+E_3$

$A_1+A_2+A_3=A=(C^T)^{-1}(E_1+E_2+E_3)(C^{-1})$

$A_1=(C^T)^{-1}E_1(C^{-1})=\begin{pmatrix}1&\frac12&0\\\frac12&\frac14&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$A_2=(C^T)^{-1}E_2(C^{-1})=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\frac34&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$A_3=(C^T)^{-1}E_3(C^{-1})=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

六、(1) 非空集、加法、数乘封闭

(2) $c\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $c\in\mathbb{R}$ $L(1,0)$

(3) $\begin{cases} x\text{任意} \\ y=0. \end{cases}$ $W=c\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$为该方程组解空间.

$W=L(1,0)$