二次型、矩阵的合同

1、二次型及其标准型

定义：数域K上一个n元二次型是系数在K中的n个变量的二次齐次多项式

一般形式为：$f(x_1,x_2\cdots x_n)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1n}x_1x_n+a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+\cdots+2a_{2n}x_2x_n+\cdots+a_{nn}x_n^2$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j \quad (a_{ij}=a_{ji})$$

$A=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$ $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_n\end{pmatrix}$ A是二次型矩阵，A对称 $f(x_1\cdots x_n)=X'AX$

令 $Y=(y_1,y_2\cdots y_n)^T$，设C为数域K上可逆矩阵，则 $X=CY$（非退化线性替换），

n元二次型 X^TAX 经 $X=CY$ 得：$(CY)^TA(CY)=Y^T\underbrace{C^TAC}_{B}Y=Y^TBY$（变量 $y_1\cdots y_n$）的二次型

$A\simeq B \iff$ 存在K上可逆矩阵C，使得 $C^TAC=B$

$\iff$ 存在K上初等矩阵 $P_1,P_2\cdots P_t$，使得 $C=P_1P_2\cdots P_t$ $P_t^T\cdots P_2^TP_1^TAP_1P_2\cdots P_t=B$

等价定义：数域K上两个n元二次型 X^TAX 与 Y^TBY，存在非退化线性替换 $X=CY$，$X^TAX\to Y^TBY$，则二次型等价，$X^TAX\cong Y^TBY$

合同定义：数域K上两个n级矩阵，if 存在n级可逆矩阵C，$C^TAC=B$，则A、B合同，$A\simeq B$

命题1：数域K上2个n元二次型 X^TAX 与 Y^TBY 等价 $\iff$ n级矩阵A、B合同

命题2：实数域上的n元二次型 X^TAX 有一个标准型为：$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$（$\lambda_1\cdots\lambda_n$ 为A的特征值）

定理1：数域K上任一对称矩阵合同于对角矩阵

prove：n=1时成立，对n作数学归纳法，假设n-1级矩阵 $\simeq$ 对角矩阵

$A=\begin{bmatrix}a_{11}&\alpha\\ \alpha'&A_1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}a_{11}&0\\0&A_2\end{bmatrix}$ $A_2=A_1-a_{11}^{-1}\alpha'\alpha$ $A_2^T=A_1^T-a_{11}^{-1}\alpha^T(\alpha')^T$ （A_2 为n-1级对称矩阵）

$\begin{bmatrix}1&0\\-a_{11}^{-1}\alpha'&I_{n-1}\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}1&-a_{11}^{-1}\alpha\\0&I_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&0\\0&A_2\end{bmatrix}$

定理2：数域K上任一n元二次型等价于一个只含平方项的二次型

（思路惊为天人）

$\begin{pmatrix}A\\I\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{对I只作列变化}]{\text{对A作行列变化}}\begin{pmatrix}D\\C\end{pmatrix}$

D为对角矩阵 $\mathrm{diag}\{d_1,\cdots,d_n\}$ $C^TAC=D$

令 $X=CY$ 得 $X^TAX=Y^T\underline{C^TAC}Y=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$

数学归纳法，n=1成立，假设n-1阶成立，证明n阶成立

① $a_{11}\neq0$ ② $a_{11}=0$ $a_{ij}\neq0$ ③ $a_{ij}=0$ (n-1)阶

① n=1时显然成立

② 假设n-1阶成立 $a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1n}x_1x_n+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2$

i: $a_{11}\neq0$ …

ii: $a_{11}=0$ $a_{ij}\neq0$ 非退化替换 …

定理3：数域K上n元二次型 X^TAX 任一标准型中系数不为0的平方项个数等于它的矩阵A的秩

设 X^TAX 经非线性替换 $X=CY$ 化为标准型 $d_1y_1^2+\cdots+d_ry_r^2$（$d_1\sim d_r$ 都 $\neq0$）

$C^TAC=\mathrm{diag}\{d_1,d_2,\cdots,d_r,0\cdots0\}$ $\mathrm{rank}(A)=r$

二次型 X^TAX 的矩阵A的秩就称为二次型 X^TAX 的秩

例5：prove：数域K上的n级矩阵 $\mathrm{diag}\{\lambda_1\cdots\lambda_n\}\simeq\mathrm{diag}\{\lambda_{i_1}\sim\lambda_{i_n}\}$ $\lambda_{i_1}\sim\lambda_{i_n}$ 为 $\lambda_1\sim\lambda_n$ 的全排列

作业第3题

例7：A为数域K上n级矩阵，prove：A为斜对称矩阵 $\iff\forall K^n$ 中列向量α，有 $\alpha^TA\alpha=0$

$\longrightarrow$：by 斜对称、列向量αα易得

$\longleftarrow$：ε_i 为单位矩阵第i列，设A列向量组为 α_i

$0=\varepsilon_i^TA\varepsilon_i=\varepsilon_i^T\alpha_i=a_{ii}$ $i=1,2,\cdots,n$

$0=(\varepsilon_i+\varepsilon_j)^TA(\varepsilon_i+\varepsilon_j)=(\varepsilon_i+\varepsilon_j)^T(\alpha_i+\alpha_j)=a_{ij}+a_{ji}=0$

例8：设A是数域K上一个n级对称矩阵，prove：if $\forall K^n$ 中的列向量α有 $\alpha^TA\alpha=0$，则 $A=0$

由例7 $\longleftarrow$ 可得 A为斜对称矩阵 $A^T=-A$，A又为对称矩阵，$A^T=A$， $A^T=A=-A=0$

例9：设 $A=\begin{pmatrix}A_1&A_2\\A_3&A_4\end{pmatrix}$ 是n级对称矩阵，且 A_1 是r级可逆矩阵，prove：$A\simeq\begin{pmatrix}A_1&0\\0&A_4-A_2^TA_1^{-1}A_2\end{pmatrix}$

分块矩阵易得结果，加上 $C^TAC=B$ 的结果即可prove合同

例10：证明数域K上斜对称矩阵一定合同于下述对角矩阵 $\mathrm{diag}\{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},(0),\cdots,(0)\}$

对斜对称矩阵级数n作第二数学归纳法，n=1时 $(0)\simeq(0)$ n=2时 设 $a\neq0$ 则 $\begin{pmatrix}0&a\\-a&0\end{pmatrix}\simeq\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$

假设对于小于n级的斜对称矩阵命题为真。下证n级成立 $C=\begin{pmatrix}C_1&\\&C_2\end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix}A_1&A_2\\A_3&A_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1&A_2\\-A_2^T&A_4\end{pmatrix}\simeq\begin{pmatrix}A_1&0\\0&A_4+A_2^TA_1^{-1}A_2\end{pmatrix}$ $(\underbrace{A_4+A_2^TA_1^{-1}A_2}_{B})^T=-(\quad)$ 为n-2级反称矩阵

$C^T\begin{pmatrix}A_1&0\\0&B\end{pmatrix}C=\begin{pmatrix}C_1^TA_1C_1&0\\0&C_2^TBC_2\end{pmatrix}\simeq\mathrm{diag}\{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},(0)\cdots(0)\}$

2、实二次型的规范型

n元实二次型 X^TAX 经过适当的非线性替换 $X=CY$ 可化成如下标准型

$d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_py_p^2-d_{p+1}y_{p+1}^2-\cdots-d_ry_r^2$ （r为该二次型的秩）

再作一个非退化的线性替换，可化成如下的规范型

$z_1^2+z_2^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_r^2$，实二次型的规范型由自然数p、r决定

复二次型的规范型：

$z_1^2+z_2^2+\cdots+z_r^2$

1、复二次型 X^TAX 的规范型是唯一的

2个n元复二次型等价 $\iff$ 规范型相同 $\iff$ 秩相等

2个复对称矩阵合同 $\iff$ 它们的秩相等

一个n元实二次型可以分解为2个实系数1次齐次多项式乘积

$\iff$ 它的秩=2且符号差=0 or 秩=1

分类标准

规范型中，系数为+1的平方项个数p被称为正惯性指数

系数为-1的平方项个数r-p被称为负惯性指数

正惯性指数－负惯性指数＝2p-r 被称为 X^TAX 的符号差

定理1（惯性定理）：n元实二次型 X^TAX 的规范型是唯一的

n级实对称矩阵A合同于对角矩阵 $\underbrace{\mathrm{diag}\{1,\cdots,1,-1,\cdots,-1,0\cdots0\}}_{\text{合同规范型}}$ 1的个数=p，-1个数=r-p

设n元实二次型 X^TAX 的秩为r。经过非退化线性替换 $X=CY$ $X=BZ$ 变成2个规范型

$X^TAX=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2$ $X^TAX=z_1^2+\cdots+z_q^2-z_{q+1}^2-\cdots-z_r^2$

下证 p=q，经过非线性替换 $Z=B^{-1}CY$ 有：$y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2=z_1^2+\cdots+z_q^2-z_{q+1}^2-\cdots-z_r^2$

假设 p>q，Y取 $\beta(k_1,\cdots,k_p,0\cdots0)$ $k_1\sim k_p$ 不全为0，s.t. $z_1\sim z_q$ 全为0，让 $G=B^{-1}C$ $Z=GY$

Y取β时有 $\begin{cases}z_1=g_{11}k_1+\cdots+g_{1p}k_p\\ \vdots\\ z_q=g_{q1}k_1+\cdots+g_{qp}k_p\end{cases}$ q<p，方程有非0解，$\exists k_1\sim k_p$ 不全为0 s.t. $z_1=\cdots=z_q=0$

s.t. 上述式子左端>0，右端≤0，因此假设不成立

同理可证 q≤p.

n元实二次型等价 $\iff$ 规范型相同 $\iff$ 秩相等，p相等

n级矩阵合同 $\iff$ r、p都相等.

例4：n级实对称矩阵/复对称矩阵 分别组成集合有多少个合同类

$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ $n+1$

例5：prove：1个n元实二次型可以分解成2个实系数1次齐次多项式的乘积

$\iff$ 它的 r=2 且 2p-r=0 or r=1

习题第6题 （思路惊为天人）

有关二次型的问题经常需要作非线性替换

化成规范型/标准型，再从其中观察 rank，p，2p-r.

例6：设 X^TAX 是一个n元实二次型，prove：if R^n 中有列向量 α_1,α_2 s.t. $\alpha_1^TA\alpha_1>0$ $\alpha_2^TA\alpha_2<0$

在 R^n 中有非0列向量 α_3，使得 $\alpha_3^TA\alpha_3=0$

作非退化线性替换 $X=CY$ s.t. $X^TAX=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2$ rank=r

$\alpha_1^TA\alpha_1>0$ $\alpha_2^TA\alpha_2<0$，$p>0$，$r-p>0$ 取 $Y(\underbrace{1\cdots,1}_{p个}\cdots0)$ $\alpha_3^TA\alpha_3=1-1=0$

例7：设A为一个n级实对称矩阵，prove：if $|A|<0$，那么在 R^n 中有非0列向量α，s.t. $\alpha^TA\alpha<0$

$|A|<0$，则 X^TAX 的 rank=r，且r-p为奇数，再作非退化线性替换，取合适向量即可

例8：设实二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=l_1^2+\cdots+l_s^2-l_{s+1}^2-\cdots-l_{s+u}^2$，其中 l_i 为 $x_1\sim x_n$ 的1次齐次多项式

证明：$p\le s$，$r-p\le u$

作非退化线性替换 $X=CY$ 得 $L=HX$ $L=HCY$

$f(x_1\cdots x_n)=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_{p+q}^2$ ①

$=l_1^2+\cdots+l_s^2-l_{s+1}^2-\cdots-l_{s+u}^2$ ②

不妨假设 p>s，Y取 $(k_1\cdots k_p,0\cdots0)$ $k_1\sim k_p$ 不全为0实数

$\begin{cases}l_1=g_{11}k_1+\cdots+g_{1p}k_p\\ \vdots\\ l_s=g_{s1}k_1+\cdots+g_{sp}k_p\end{cases}$ s<p，有非0解，$k_1\sim k_p$ 不全为0 满足齐次线性方程组

$l_1=\cdots=l_s=0$ ①>0 ②≤0 矛盾，故 p≤s

同理可证 q≤u

3.正定二次型和正定矩阵

定义：n元实二次型X^TAX是正定的 $\Leftrightarrow$ R^n中非零列向量α 均有$\alpha^TA\alpha>0$

（n元实二次型X^TAX是正定的 $\Leftrightarrow$ $p=n$ ）

推论1：n元实二次型X^TAX是正定的 $\Leftrightarrow$ 规范型为$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2$

$\Leftrightarrow$ 标准型中n个系数全大于0

定义：如果实二次型为正定的，实对称矩阵A是正定的，R^n中非零列向量α 均有$\alpha^TA\alpha>0$

n级实对称矩阵A是正定的 $\Leftrightarrow$ A的正惯性指数$(p)=n$

$\Leftrightarrow$ $A\simeq I$ ∃可逆P，$A=P^TP$

$\Leftrightarrow$ A的合同标准型中对角元全>0

$\Leftrightarrow$ 顺序主子式>0

$\Leftrightarrow$ A的特征值>0

推论2：正定矩阵行列式>0

设A为n级正定矩阵，$A\simeq I$，∃可逆C，s.t. $A=C^TIC$ $|A|=|C^TC|=|C|^2>0$

推论3：实对称矩阵A是正定的 $\Leftrightarrow$ A的所有顺序主子式>0

$\rightarrow$：$k\in\{1,\cdots,n\}$ 将A分块矩阵 $A=\begin{bmatrix} A_k & B_1 \\ B_1^T & B_2 \end{bmatrix}$ $|A_k|$为A的k阶主子式

R^k中任取非0列向量δ，$0<\begin{bmatrix}\delta\\0\end{bmatrix}^TA\begin{bmatrix}\delta\\0\end{bmatrix}=\delta^TA_k\delta$ A_k为正定矩阵 $|A_k|>0$

$\leftarrow$：对实对称矩阵的级数n作数学归纳法

定义：实对称矩阵A为半正定，对∀R^n中非0列向量α，都有$\alpha^TA\alpha\geq0$

负定/半负定 $\alpha^TA\alpha</\leq0$

n元实二次型X^TAX是半正定的 $\Leftrightarrow$ $p=rank$

$\Leftrightarrow$ 规范型为：$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_r^2$ $(r\in[0,n])$

$\Leftrightarrow$ 标准型中n个系数全非负

$p=rank$ $\Leftrightarrow$ n级实对称矩阵A为半正定的

$A\simeq\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $r=rank(A)$ $\Leftrightarrow$

A的合同标准型中的主对角元全非负 $\Leftrightarrow$

A的特征值全非负 $\Leftrightarrow$

实对称矩阵A是正定的 $\Leftrightarrow$ A的所有顺序主子式全大于0

实对称矩阵A是半正定的 $\Leftrightarrow$ A的所有主子式全非负

实对称矩阵A是负定的 $\Leftrightarrow$ 奇数阶顺序主子式<0，偶数阶顺序主子式>0

例1：prove：设A为n级正定矩阵，那么A^{-1}也为正定矩阵

∃n级可逆矩阵C，s.t. $A=C^TIC$ $A^{-1}=(C^TIC)^{-1}=C^{-1}I(C^T)^{-1}=[(C^{-1})^T]^TI(C^{-1})^T$

例5：prove：n级实对称矩阵A为正定矩阵 $\Leftrightarrow$ ∃n级可逆矩阵C，s.t. $A=C^TC$

A为正定n级实对称 $A\simeq I$，有可逆矩阵C $A=C^TIC=C^TC$

例8：prove：实对称矩阵A为对称 $\Leftrightarrow$ A的所有主子式都>0

例9：设A为n级正定矩阵，B为n级实对称矩阵，∃n级可逆矩阵C s.t. C^TAC，C^TBC为对角矩阵

A……：$A\simeq I$ $C_1^TAC_1=I$

$(C_1^TBC_1)^T=C_1^TBC_1$，$C_1^TBC_1$为n…对称…，作非退化线性替换 $(C_1C_2)^TBC_1C_2=diag\{\lambda_1\sim\lambda_n\}$

令$C=C_1C_2$ $C^TAC=C_2^TIC_2=I$

$C^TBC=diag\{\lambda_1\sim\lambda_n\}$

例10：prove：设A，B均为n级正定矩阵，AB为正定矩阵 $\Leftrightarrow$ $AB=BA$

$T^TAT=diag\langle\lambda_1\sim\lambda_n\rangle$ $T^T(AB)T=T^TAT\,T^TBT=diag\langle\lambda_1\mu_1\sim\lambda_n\mu_n\rangle$

$T^TBT=diag\langle\mu_1\sim\mu_n\rangle$

例11：prove：设A为n级正定矩阵，B为n级半正定矩阵，A+B为正定矩阵

$\alpha^TA\alpha+\alpha^TB\alpha=\alpha^T(A+B)\alpha>0$

例13：prove：实对称矩阵A半正定 $\Leftrightarrow$ 有实对称矩阵C，s.t. $A=C^2$