Operations Research

运筹学

第一章：线性规划

一、线性规划模型 (LP): Linear Programming

1、LP 的一般形式

$$\min \quad c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

目标函数 (objective function)

$$
\begin{aligned}
s.t. \quad & a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=b_i & i\in[1,p] \\
& a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n\geq b_i & i\in[p+1,m] \\
& x_j \geq 0 & j=1,\cdots,q \\
& x_j \gtrless 0 & j=q+1,\cdots,n
\end{aligned}
$$

约束条件 (constrains).

约束矩阵A (由系数 a_{ij} 组成的矩阵) $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

决策变量 x_j $(j=1,\cdots,n)$

目标函数 $z=\sum_{j=1}^{n} c_jx_j$

价值向量 $c=(c_1,c_2,\cdots,c_n)^T$ 价值系数 c_j $(j=1,2,\cdots,n)$

右端向量 $b=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^T$

非负约束 $x_j\geq 0$ 无限制变量/自由变量 $x_j \gtrless 0$

2、LP 的规范形式 (≥) 与 标准形式 (=)

I: 规范形式

$$\begin{cases} \min \ C^Tx \\ s.t. \ Ax\geq b \\ \quad\quad x\geq 0 \end{cases}$$

II: 标准形式

$$\begin{cases} \min \ C^Tx \\ s.t. \ Ax=b \\ \quad\quad x\geq 0 \end{cases}$$

3、可行解/可行点/可行区域

可行解/可行点：满足所有约束条件的向量 $x=(x_1,\cdots,x_n)^T$ is called 可行解/可行点

可行区域：由所有可行点组成的集合 is called 可行区域，记为 D

线性规划问题分类：

(1) $D=\phi$，该问题无解 or 不可行

(2) $D\neq\phi$，但目标函数在D上无界，则该问题无界

(3) $D\neq\phi$，且目标函数有 limited 最优值，则该问题有最优值

4、模型转换

I：一般形式的Lp $\Longrightarrow$ 规范形式（一）：清除等号约束与符号无限制变量

等号约束：$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i$

$\Downarrow$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\geq b_i\\ \sum_{j=1}^{n} -a_{ij}x_j\geq -b_i\end{cases}$$

符号无限制变量 $x_j\geq 0$：引入非负变量 $x_j^+\geq 0$ 与 $x_j^-\geq 0$

$\Downarrow$

$x_j=x_j^+-x_j^-$

II：一般形式的Lp $\Longrightarrow$ 标准形式（二）：清除不等式约束 和 符号无限制变量

不等式约束：$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\geq b_i$

$\Downarrow$

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j-s_i=b_i \quad (s_i\geq 0)$

符号无限制变量处理同上

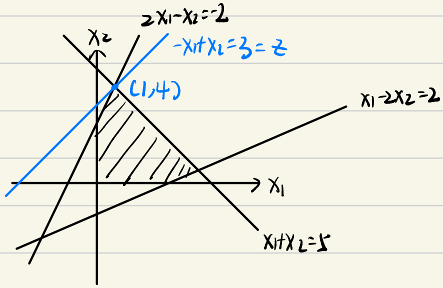
$\begin{cases}-s_i \text{ 为剩余变量 (slack variable)}\\ +s_i \text{ 为松弛变量 (surplus variable)}\end{cases}$

二、可行区域与基本可行解

1.图解法

若线性规划问题只有2个变量，则其可在平面上具体画出

$$\begin{cases} \max \ z=-x_1+x_2 \\ s.t. \ \ 2x_1-x_2 \geq -2 \\ \quad\quad x_1-2x_2 \leq 2 \\ \quad\quad x_1+x_2 \leq 5 \\ \quad\quad x_1\geq 0,\ x_2\geq 0 \end{cases}$$



$x_2=x_1+z$ $\quad z_{max}=3$

图解法结论：

(1) 线性规划的可行区域D是若干个半平面的交集，形成了一个有界的凸多边形

(2) 给定的线性规划，若有最优解，最优解总在D的某个顶点达到（基本可行解—多面凸集的顶点）

对于具有n个变量的一般线性规划问题，结论依旧成立。

推广 { 2维平面的直线 ⇒ 高维空间的超平面
2维平面的凸多边形 ⇒ 高维空间的多面凸集

2.可行区域的几何结构

考虑标准形式的LP问题

$$\begin{cases} \min \ z=c^Tx & x\in R^n,\ c\in R^n,\ b\in R^n \\ s.t. \ Ax=b & A\in R^{m\times n} \quad rank(A)=m<n \\ \quad\ \ x\geq 0 & D=\{x\in R^n \mid Ax=b,\ x\geq 0\}\neq\emptyset \end{cases}$$

凸集：

特性：形体中任何两点的连线段落在该线段中

def: 设 $S \subset R^n$ 为n维欧氏空间中一点集，$\forall x \in S$，$y \in S$ 与 $\forall \lambda \in [0,1]$ 有

$\lambda x + (1-\lambda) y \in S$　　S is called 凸集

顶点：

特性：凸集中 !∃ ∀ 2个不同的点 x_1, x_2，s.t. x 在线段 $x_1 x_2$ 上，x is called 凸集的顶点

def：设S为凸集，$x \in S$，$\forall y \in S$，$z \in S$，$y \neq z$，$\forall \lambda \in (0,1)$ 都有

$x \neq \lambda y + (1-\lambda) z$　　x is called 凸集S的一个顶点

超平面：

def: 给定 $\underset{1\times1}{b} \in R^1$ 及非零向量 $\underset{n\times1}{a} \in R^n$，称集合 H 为 R^n 中一个超平面

$$H = \{\underset{n\times1}{x} \in R^n \mid a^T x = b\}$$

由超平面H产生了2个闭的半空间　$H^+ = \{x \in R^n \mid a^T x \geq b\}$　均为凸集

$H^- = \{x \in R^n \mid a^T x \leq b\}$

故满足 $\begin{cases} \text{线性等式：} & a_i^T x = b_i \quad i \in [1, p] \\ \text{线性不等式：} & a_i^T x \geq b_i \quad i \in [p+1, p+q] \end{cases}$ 的全体向量x的集合也为凸集

多面凸集：

def: 满足上述线性等式/不等式的全体x所构成的集合S为多面凸集

(especially 非空有界的多面凸集 is called 多面体)

theorem: 1.2.1: $D=\{x\in R^n \mid Ax=b,\ x\geq 0\}$ 线性规划的可行区域 D 为凸集 (proof: 按def写)

1.2.2: ∀多个凸集的交还是凸集 (proof: trivial)

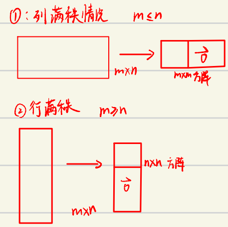
3. 基本可行解及线性规划的基本定理

$$\begin{cases} \min c^T x \\ s.t.\ Ax=b \\ \quad x\geq 0 \end{cases}$$

step 1: 分块, $A=(B,N)$ B为满秩方阵, X对应划分为 $x=\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ $Ax=b \Longrightarrow Bx_B+Nx_N=b$

step 2: 左乘 B^{-1}, $x_B+B^{-1}Nx_N=B^{-1}b \Longrightarrow x_B=B^{-1}b-B^{-1}Nx_N$

step3: 令 $x_N=0$, $x=\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$



基本可行解的def:

B为 rank=m 的约束矩阵 $A\in R^{m\times n}$ 中一个 m阶满秩子方阵, 称B为一个基/基阵

B中m个线性无关的列向量 is called 基向量, 变量x中与之对应的m个分量 is called 基变量

令 all 非基变量取值为0, 得到的解 $x=\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ is called 相应于B的基本解

while $B^{-1}b\geq 0$, 基本解 is called 基本可行解, B is called 可行基

退化与非退化:

- 非退化 (Nondegenerate): 基本可行解 x 的基本量 均为正
- 退化 (degenerate): ∃ x的基变量 取值为零.

theorem:

1.2.3: 可行解 $\bar{x}$ 为基本可行解 $\Longleftrightarrow$ 正分量对应A中列向量线性无关

⇒: by def is trivial ⇐: 数学归纳法, k=m trivial, k<m $x_1 \sim x_k$ 为基本可行解

1.2.4: $\bar{x}$ 为基本可行解 $\Longleftrightarrow$ $\bar{x}$ 为可行域 D 的顶点. (Lp 基本 theorem 1)

反证法, 基本可行解 ⇔ 顶点 ⟶ 非基本可行解 ⇔ 非顶点 ⇒: 线性相关可得 线性表出 ⇐: 得到线性相关

1.2.5: 标准形式的 Lp 问题 if ∃ 可行解, 至少有一个基本可行解.

$x^0=(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$, $Ax^0=b$ $x^0\geq 0$, presume $x_j^0>0$ $(j\in[1,k])$ $x_l^0=0$ $(l\in[k+1,n])$ $\begin{cases} A_1 \sim A_k \text{ 线无关}, x^0 \text{为基本可行解} \\ \sum_{j=1}^{k}\delta_j A_j=0,\ \delta_l=0\ (l\in[k+1,n]),\ \delta=(\delta_1,\cdots,\delta_k,\delta_{k+1},\cdots,\delta_n) \end{cases}$ $A\delta=\sum_{j=1}^{k}\delta_j A_j+\sum_{l=k+1}^{n}\delta_l A_l=0$

$A(x^0\pm\varepsilon\delta)=Ax^0\pm\varepsilon A\delta=b$
故 $x^0\pm\varepsilon\delta$ 均为 $Ax=b$ 的可行解.

1.2.6: 标准形式的Lp问题有 limited 最优值, 则一定∃一个基本可行解为最优解. (Lp ⋯ 2)

三、单纯形方法

考虑标准形式的Lp问题

$$\begin{cases} \min & z=C^T x \\ \text{s.t.} & Ax=b \\ & x\geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \min & z=z_0-\xi^T x \\ \text{s.t.} & x_B+B^{-1}N x_N=\bar{b} \\ & x\geq 0 \end{cases}$$

Presume $D=\{x\in R^n \mid Ax=b,\ x\geq 0\}\neq\emptyset$, $\operatorname{rank}(A)=m<n$ $\quad x_B=B^{-1}b-B^{-1}Nx_N$

由 Lp fundemental theorem 2 得：if standard Lp question ∃ limited 最优值，必在某一基本可行解处达到

mind map:

first step: 先找一个基本可行解 ↘

second step: 判断 whether 为最优解 ↘

third step: find next 基本可行解

假设已找到一个非退化的基本可行解 x（即已找到一个基 B）$\quad Ax=b \Rightarrow (B;N)\binom{x_B}{x_N}=b$

$\qquad Bx_B+Nx_N=b$

将方程 $Ax=b$ 化成等价方程组：$x_B+B^{-1}Nx_N=B^{-1}b$（典式）

目标 function：$z=C^Tx$

$$\begin{aligned} &=C_B^T x_B+C_N^T x_N \\ &=C_B^T(B^{-1}b-B^{-1}Nx_N)+C_N^T x_N \\ &=C_B^T B^{-1}b-(C_B^T B^{-1}N-C_N^T)x_N \end{aligned}$$

令 $\xi_N=C_B^T B^{-1}N-C_N^T$，$\xi_B=0$ 即 $\xi^T=(\xi_B^T\ \ \xi_N^T)$ 检验数向量

$=(0\ \ C_B^T B^{-1}N-C_N^T)$

$z=C^Tx=C_B^T B^{-1}b-\xi^T x_N$

$$\underbrace{\begin{aligned}&\min\ z=C^T x\\ &\text{s.t.}\begin{cases}Ax=b\\ x\geq 0\end{cases}\end{aligned}}_{Lp} \Longrightarrow \underbrace{\begin{aligned}&\min\ z=C_B^T B^{-1}b-\xi^T x\\ &\text{s.t.}\begin{cases}x_B+B^{-1}Nx_N=B^{-1}b\\ x\geq 0\end{cases}\end{aligned}}_{Lp'}$$

$$\begin{aligned} \xi^T&=(\xi_B^T,\ \xi_N^T)=(0,\ C_B^T B^{-1}N-C_N^T) \\ &=(C_B^T B^{-1}B-C_B^T,\ C_B^T B^{-1}N-C_N^T) \\ &=(C_B^T B^{-1}B,\ C_B^T B^{-1}N)-(C_B^T,\ C_N^T) \\ &=C_B^T B^{-1}(B,N)-C^T \\ &=C_B^T B^{-1}A-C^T \end{aligned}$$

检验数向量ξ计算

theorem:

1.3.1 (最优性准则) 计 LP' 中 检验数向量 $\zeta \le 0$，则 x 为原问题最优解

$z = c^T x = z_0 - \zeta^T x \ge z_0 = c^T \bar{x}_0$

1.3.2 计 LP' 中 检验数向量 ζ 的第 k 个分量 $\zeta_k > 0$，而和 ζ_k 对应列向量 $\bar{A}_k = B^{-1}A_k \le 0$，则原问题无界

反证法 + 构造巧妙

1.3.3 对于非退化的基本可行解 $\bar{x}$，计 检验数向量 ζ 的第 k 个分量 $\zeta_k > 0$，而向量 $B^{-1}A_k$ 至少有一个正分量，则可找到一个新的基本可行解 $\hat{x}$ s.t. $c^T\hat{x} < c^T\bar{x}$

迭代原理

1、从一个基可行解转换至相邻基可行解（此处假定该基可行解非最优解）

$Ax = b$

① $\sum_{i=1}^{m} P_i x_i = b$，因 all 非基变量为0，故 $\sum_{i=1}^{m} P_i x_i = b$，而 $P_1 \sim P_m$ 为一组基 $P_j \,(j \in [1,n]) = \sum_{i=1}^{m} P_i a_{ij}$

$P_j - \sum_{i=1}^{m} P_i a_{ij} = 0$ 取 $\theta > 0$

② $\theta(P_j - \sum_{i=1}^{m} P_i a_{ij}) = 0$ ①+②得：$\sum_{i=1}^{m}(x_i - \theta a_{ij})P_i + \theta P_j = b$ $\sum_{i=1}^{m} x' P_i = b$

原本 $X_{(0)} = (x_1, x_2, \cdots, x_m, 0, \cdots, 0)$

现在 $X_{(1)} = (x_1 - \theta a_{1j}, x_2 - \theta a_{2j}, \cdots, x_m - \theta a_{mj}, 0 \cdots \theta \cdots 0)$

Aiming to ensure $X_{(1)}$ 为可行解，need ensure $x_i - \theta a_{ij} \ge 0$

$$\begin{cases} 1.\ a_{ij} \le 0 \text{时}，x_i - \theta a_{ij} \ge 0 \text{ 恒成立} \\ 2.\ a_{ij} > 0 \text{时}，\theta \le \dfrac{x_i}{a_{ij}} \end{cases}$$

，故 $\theta = \min\left\{\frac{x_i}{a_{ij}} \middle| a_{ij} > 0\right\} = \frac{x_l}{a_{lj}}$

x_j — 入基

x_l — 出基

（x_l 为第1个变0的基变量）

2、最优性检验

如果一个基可行解（顶点）的相邻基可行解（相邻点）都不如该基可行解

那么该基可行解一定为最优解

初始基可行解 ⟶ 判断是否最优 ⟶ 是 ⟶ over

判断是否最优 ⟶ 非 ⟶ 寻找单位变动创造最大收益的非基变量作入基

⟶ 寻找入基变量变动后率先降至0的基变量作出基变量 ⟶ 换基再算

单纯形方法的步骤

- step 1：找一个初始的可行基 B
- step 2：求出对应典式与检验数向量 ζ
- step 3：求出 $\zeta_k = \max\{\zeta_j \mid j=1,\cdots,n\}$
- step 4：if $\zeta_k \le 0$ 停止 $\Longrightarrow$ 已找到最优值 $z = C_B^T B^{-1} b$
- step 5：if $\bar{A}_k \le 0$，停止 $\Longrightarrow$ 原问题无界
- step 6：求 $\min\left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} \;\middle|\; \bar{a}_{ik} > 0,\ i=1,\cdots,m \right\} = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}}$
- step 7：以 A_k replace A_{B_r} 得到新基，转 step 2

$$\min\ z = -x_2 + 2x_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 + x_5 = 2 \\ x_j \ge 0 \quad j=1,2,\cdots,5 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & \\ \hline 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

$B=(A_1,A_4,A_5)$ 为一个单位矩阵 且 $b=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} \ge \vec{0}$，故基 B 为可行基

x_1, x_4, x_5 为基变量，x_2、x_3 为非基变量

基 B 对应的一组基本可行解为 $x=(2,0,0,1,2)^T$ $\quad z_0 = 0$

$Ax=b$ 为典型 $\qquad z + x_2 - x_3 = 0$

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & RHS \\ & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ x_4 & 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ x_5 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

$\zeta_2 = 1 > 0$，故当前非最优解

$\min\{\frac{1}{1}, \frac{2}{1}\} = 1$，故 a_{22} 为转轴元

x_4 为出基变量，x_2 为进基变量

$\longrightarrow$

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & RHS \\ & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ x_1 & 1 & 0 & -5 & 2 & 0 & 4 \\ x_2 & 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ x_5 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}$$

$\zeta_3 = 1 > 0$，故当前非最优解

$\min\{\frac{1}{2}\}$，故 a_{33} 为转轴元

x_5 为出基变量，x_3 为进基变量

$\longrightarrow$

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & RHS \\ & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ x_1 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{13}{2} \\ x_2 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ x_5 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

$\zeta \le 0$ $\qquad$ 故当前为最优解

$x = (\frac{13}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)^T$ $\quad$ 目标 function 为：$z = -\frac{3}{2}$

矩阵形式表达

$$\begin{cases} \text{目标函数：} & z - C^T x = 0 \\ \text{约束函数：} & A\vec{x} + I\vec{x_s} = \vec{b} \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{x}\text{：原始变量} \\ \vec{x_s}\text{：松弛变量} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -C^T & 0 \\ 0 & A & I \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} z \\ x \\ x_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$$

初始

$$\begin{array}{ccc|c} z & \vec{x} & \vec{x_s} & RHS \\ 1 & -C^T & 0 & 0 \\ 0 & A & I & b \end{array}$$

迭代后

$$\begin{array}{cccc} z & \vec{x} & \vec{x_s} & RHS \\ 1 & C_B^T B^{-1} A - C^T & C_B^T B^{-1} & C_B^T B^{-1} b \\ 0 & B^{-1} A & B^{-1} & B^{-1} b \end{array}$$

由典式 $x_B = B^{-1}b - B^{-1}N x_N$ 得

$$\underbrace{\begin{cases} \text{目标：} & z = C_B^T B^{-1} b \\ \text{约束：} & x_B = B^{-1} b \end{cases}}_{\text{由前面 }\zeta\text{ 检验数向量处得}}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} z \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & C_B^T B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C_B^T B^{-1} b \\ B^{-1} b \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & C_B^T B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -C^T & 0 \\ 0 & A & I \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & C_B^T B^{-1} A - C^T & C_B^T B^{-1} \\ 0 & B^{-1} A & B^{-1} \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} z \\ x \\ x_s \end{bmatrix}$$

四、初始解

1. 两阶段法

LP问题
$$\begin{cases} \min & z = C^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \quad (b \geq 0) \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

辅助LP问题
$$\begin{cases} \min & g = \sum_{i=n+1}^{n+m} x_i \\ \text{s.t.} & Ax + X_a = b \\ & x \geq 0, \; X_a \geq 0 \end{cases}$$

Situation 1: 辅助LP问题 $g=0$ 且 x_j ($j=n+1 \sim n+m$) 皆为非基变量

Situation 2: g 最优值 >0，则原问题无解

Situation 3: g 最优值 $=0$，$\exists x_j = 0$ 但 x_j 为基变量

example:

$$\begin{cases} \min & z = 5x_1 + 21x_3 \\ \text{s.t.} & x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 = 2 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 1 \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1 \sim 5 \end{cases} \longrightarrow \text{辅助LP question} \begin{cases} \min & g = x_6 + x_7 \\ \text{s.t.} & x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 + x_6 = 2 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_7 = 1 \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
z:	-5	0	-21	0	0	0	0	0
g:	0	0	0	0	0	-1	-1	0
	1	-1	6	-1	0	1	0	2
	1	1	2	0	-1	0	1	1

(计算复杂，需要多加注意)

$\longrightarrow$

z:	$\frac{1}{4}$	0	0	$-\frac{21}{8}$	$-\frac{21}{8}$	$\frac{21}{8}$	$\frac{21}{8}$	$\frac{63}{8}$
g:	0	0	0	0	0	-1	-1	0
	$\frac{1}{4}$	0	1	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

LP 辅助 question 最优解为 $(0, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, 0, 0, 0)^T$

LP question 的一个基本可行解 $X^0 (0, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, 0, 0)^T$

$\longrightarrow$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{11}{4}$	$-\frac{9}{4}$	$\frac{31}{4}$
0	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	2	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

原LP question 最优解为 $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, 0)$ $z_{min} = \frac{31}{4}$

五、对偶性及对偶单纯形法

对偶理论 (duality theorem)：

每一个线性规划问题必然有与之相伴而生的另一个线性规划问题，其中一个称之为"原始"记为 P，另一个对偶的记作 (D)。下面我们将涉及三个问题：① 给出 LP 问题 (P) 后如何写出 P 的对偶问题 ② 研究问题 P 与 D 之间的关系；③ 给出求解 LP 的对偶单纯形算法

1、对偶线性规划

一般形式的 LP question

$$\begin{cases} \min & c^T x \\ s.t. & a_i^T x = b_i & i = 1 \sim p \\ & a_i^T x \geq b_i & i = p+1 \sim m \\ & x_j \geq 0 & j = 1 \sim q \\ & x_j \gtrless 0 & j = q+1 \sim n \end{cases}$$

规范形式：

$$\begin{cases} \min \ c^T x \\ s.t. \ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \xLeftrightarrow{\text{对偶问题}} \begin{cases} \max \ b^T w \\ s.t. \ A^T w \leq c \\ w \geq 0 \end{cases}$$

标准形式：

$$\begin{cases} \min \ c^T x \\ s.t. \ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \xLeftrightarrow{\text{对偶问题}} \begin{cases} \max \ b^T w \\ s.t. \ A^T w \leq c \\ w \gtrless 0 \end{cases}$$

why $Ax \geq b \xLeftrightarrow{\text{对偶问题}} A^T Y \leq C$

如下规范 LP 形式： minimize $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$

$$s.t. \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \geq b_1 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \geq b_m \\ x_1, \cdots, x_n \geq 0 \end{cases} \xRightarrow{\text{每行同乘 } y_i \text{ 得}} \quad y_1 \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j + y_2 \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j + \cdots + y_m \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \geq y_1 b_1 + y_2 b_2 + \cdots + y_m b_m$$

$$x_1 \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1} y_i\right) + x_2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} a_{i2} y_i\right) + \cdots + x_n \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} a_{in} y_i\right) \geq \sum_{j=1}^{m} y_j \cdot b_j$$

$Ax \geq b$

而 $\forall \ x_1 \sim x_n$ 需要满足 $\underline{\sum_{i=1}^{m} a_{i1} y_i \leq c_i \ \text{即} \ A^T Y \leq C}$

$AY \leq C$

对偶问题为 $\max \ b_1 y_1 + \cdots + b_m y_m$

$$s.t. \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{i1} \cdot y_i \leq c_1 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{m} a_{in} \cdot y_i \leq c_n \end{cases}$$

（原始问题对偶规划问题）

def：给定一个一般形式的LP问题，称它为原始问题，那么它的对偶问题如下：

原问题与对偶问题的转化：

1. 变量约束 ⇒ 资源约束（变号）
2. 资源约束 ⇒ 变量约束（不变号）

原始（P）：

$$\min \ c^T x$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} a_i^T x = b_i & i=1,\cdots,p \\ a_i^T x \geq b_i & i=p+1,\cdots,m \\ x_j \geq 0 & j=1,\cdots,q \\ x_j \gtrless 0 & j=q+1,\cdots,n \end{cases}$$

价值向量 ⇔ 右端向量

等式约束 ⇔ 自由变量

不等约束 ⇔ 非负变量

非负变量 ⇔ 不等约束

自由变量 ⇔ 等式约束

对偶（D）：

$$\max \ b^T w$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} w_i \gtrless 0 \\ w_i \geq 0 \\ A_j^T w \leq c_j \\ A_j^T w = c_j \end{cases}$$

example：原始问题

$$\begin{cases} \min \ 5x_1 + 21x_3 \\ \text{s.t.} \ x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 = 2 \\ \quad x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 1 \\ \quad x_j \geq 0 \qquad j=1,2,\cdots,5 \end{cases}$$

对偶问题

$$\begin{cases} \max \ 2w_1 + w_2 \\ \text{s.t.} \ w_1 + w_2 \leq 5 \\ \quad -w_1 + w_2 \leq 0 \\ \quad 6w_1 + 2w_2 \leq 21 \\ \quad -w_1 \leq 0 \\ \quad -w_2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\min z = (5,0,21,0,0)X$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} X \leq \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

弱对偶性定理：

计 X为原问题的可行解，Y为对偶问题可行解，则恒有：

$$CX \geq Y^T b$$

$AX \geq b \Rightarrow Y^T AX \geq Y^T b$

$A^T Y \leq c \Rightarrow X^T A^T Y \leq X^T c$

最优性：

计 X 为原问题的可行解，Y为对偶问题可行解，且 $cx = Y^T b$，则 X、Y 分别为原问题和对偶问题的最优解.

强对偶性定理：

计 原问题与其对偶问题均有可行解，则两者均有最优解，且最优解目标函数值相同

互补松弛性定理：（双最优解情况）

若原问题中某一约束条件对应的对偶变量值为非零，则该约束条件取严格等式

若约束条件取严格不等式，则其对应的对偶变量一定为零.

2、对偶理论

theorem：1、计一个 Lp 问题有最优解，则它的对偶问题也有最优解，且最优值相等.

2、计 x, w 分别是原始及其对偶问题的可行解，则

x, w 分别为原始及对偶问题最优解 $\Longleftrightarrow c^T x = w^T b$

3、对偶问题的对偶为原始 Lp 问题

4、给定一个原始 Lp 问题和它的对偶，则下表中的三种情况恰有其一发生

原始	对偶问题：有最优解	对偶问题：问题无界	对偶问题：无可行解
有最优解	①	/	/
问题无界		/	③
无可行解	/	③	②

5、（互补松紧性）设 x 和 w 分别是原始和对偶问题的可行解，则它们分别是原始和对偶问题最优解的充要条件为：

$\forall\ i=1\sim m$ 和 $j=1\sim n$ 有 $\begin{cases} y_i(a_i^T x - b_i)=0 \\ (c_j - A_j^T y)x_j = 0 \end{cases}$

example：

consider Lp question:

$$\min\ x_1+x_3$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+2x_2\le 5 \\ \frac{1}{2}x_2+x_3=3 \\ x_j\ge 0 \quad j=1,2,3 \end{cases}$$

已知最优解 $x^*=(0,\frac{5}{2},\frac{7}{4})^T$

Duality：

$$\max\ 5y_1+3y_2$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} -y_1\le 1 \\ -2y_1+\frac{1}{2}y_2\le 0 \\ y_2\le 1 \\ y_1\ge 0 \quad y_2\text{无限制} \end{cases}$$

由互补松紧性条件 $\begin{cases} \forall\ 1\le i\le m,\ y_i(a_i^T x-b_i)=0 \\ \forall\ 1\le j\le n,\ (c_j-A_j^T y)x_j=0 \end{cases}$ 得

$$\begin{cases} y_1\cdot(x_1-2x_2-5)=0 \\ y_2\cdot(\frac{1}{2}x_2+x_3-3)=0 \end{cases} \quad \& \quad \begin{cases} x_1\cdot(-y_1-1)=0 \\ x_2\cdot(-2y_1+\frac{1}{2}y_2)=0 \\ x_3\cdot(y_2-1)=0 \end{cases}$$

$y_1=\frac{1}{4}\quad y_2=1$

对偶单纯形算法

step1：先选出基变量　　　　即最负（右侧RHS中）

① 为减少原始解的不可行性，选择行 r 作为旋转行，它对应的 $\bar{b}_r<0$（原始Lp要求 $x\geq 0$），有 $r\leftarrow \arg\min\{\bar{b}_i \mid i=1,2,\cdots,m\}$

② 通过旋转变换，增加目标函数值，且保持对偶解可行性

③ presume $\bar{a}_{rk}$ 为转轴元，旋转变化后，目标函数为 $\hat{z}=z-\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}}\xi_k$，新的检验数 $\hat{\xi}_j=\xi_j-\frac{\bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rk}}\xi_k$

step2：进基变量 x_k 选取

① $\xi_k\leq 0$，$\bar{b}_r<0$，增加 z 值，要求转轴元 $\bar{a}_{rk}<0$

② 保持对偶解可行性，要求 $\forall\ 1\leq j\leq n$，$\xi_j-\frac{\xi_k}{\bar{a}_{rk}}\bar{a}_{rj}\leq 0$

③ 若 $\bar{a}_{rj}\geq 0$，因为 $\xi_k\leq 0$，$\bar{a}_{rk}<0$，则已有 $\xi_j-\frac{\xi_k}{\bar{a}_{rk}}\bar{a}_{rj}\leq 0$

④ 假设 $\bar{a}_{rj}<0$，保证 $\xi_j-\frac{\xi_k}{\bar{a}_{rk}}\bar{a}_{rj}\leq 0$，即 $\xi_j\leq\frac{\xi_k}{\bar{a}_{rk}}\bar{a}_{rj}$，即 $\frac{\xi_j}{\bar{a}_{rj}}\geq\frac{\xi_k}{\bar{a}_{rk}}$　　$k\leftarrow\arg\min\{\frac{\xi_j}{\bar{a}_{rj}} \mid \bar{a}_{rj}<0, j=1\cdots n\}$

对偶单纯形算法—总结

1. 找一个原始Lp问题的基本解（但不可行）和对偶Lp问题的一个可行解（$\xi\leq 0$），组成初始单纯形表.
2. $r\longleftarrow\arg\min\{\bar{b}_i \mid i=1,2,\cdots,m\}$
3. if $\bar{b}_r\geq 0$，则当前解就是原始Lp问题最优解，pause
4. if $\forall\ 1\leq j\leq n$，$\bar{a}_{rj}\geq 0$，则原始问题无可行解，pause
5. $k\longleftarrow\arg\min\{\frac{\xi_j}{\bar{a}_{rj}} \mid \bar{a}_{rj}<0, j=1,2,\cdots,n\}$
6. 以 $\bar{a}_{rk}$ 为转轴元做一次旋转变化，转第2步.

六、灵敏度分析

1、改变价值向量c

$\left\{\begin{array}{l}\text{价值向量由 } c \text{ 变为 } c' \\ \text{约束矩阵A和右端向量b不变}\end{array}\right.$

考虑如下的Lp问题 ⟶ presume 已得到如下图所示单纯形表 ⟶ 最优基本可行解：

$$\left\{\begin{array}{ll}\min & c^Tx \\ \text{s.t.} & Ax=b \\ & x\geq 0\end{array}\right.$$

	x_B	x_N	RHS
z	0	$c_B^TB^{-1}N-c_N^T$	$c_B^TB^{-1}b$
x_B	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$

$x=\begin{pmatrix}x_B\\x_N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B^{-1}b\\0\end{pmatrix}$ 对应可行基为B，I为m阶单位矩阵

(由 $z=c^Tx$，$x_B+B^{-1}Nx_N=B^{-1}b$ 得

$z=c_B^TB^{-1}b-(c_B^TB^{-1}N-c_N^T)x_N$

$\Downarrow$

$z+(c_B^TB^{-1}N-c_N^T)x_N=c_B^TB^{-1}b$)

$\left\{\begin{array}{l}\zeta_N'^T=c_B^TB^{-1}N-c_N'^T \\ z_0=c_B^TB^{-1}b\end{array}\right.$

故只需改变上表第0行．$\left\{\begin{array}{ll}\text{if } \zeta'\leq 0 & \text{，x仍为原问题最优解} \\ \text{if } \zeta'>0 & \text{，按单纯形法进行迭代重新求解}\end{array}\right.$

当价值向量只有一个分量 c_k 变为 c_k' 时，情况更为简明，按下述办法处理

situation 1：x_k 为非基变量（c_N 改变）

$$\zeta_k'=c_B^T(B^{-1}N)_{(k)}-c_k'=c_B^TB^{-1}N_{(k)}-c_k+c_k-c_k'=\underline{\zeta_k+c_k-c_k'}$$

if $\left\{\begin{array}{l}\text{1、}\zeta_k'\leq 0 \text{ 则x还是新问题的最优解} \\ \text{2、}\zeta_k'>0 \text{ 则由此开始进行单纯形迭代}\end{array}\right.$

situation 2：x_k 为基变量（c_B 改变）

$$\zeta_N'^T=c_B'^TB^{-1}N-c_N^T=c_B^TB^{-1}N+(c_B'^T-c_B^T)B^{-1}N-c_N^T$$

$$=c_B^TB^{-1}N-c_N^T+(0,\cdots,c_k'-c_k,\cdots,0)B^{-1}N$$

$$=\underline{\zeta_N^T+(c_k'-c_k)B^{-1}N}$$

新的目标函数：$z_0'=c_B'^TB^{-1}b=c_B^TB^{-1}b+(c_k'-c_k)(B^{-1}b)$

将单纯形表上第 l 行元素（改变的基变量所在行）乘以 $c_k'-c_k$ 加到第0行

再令 $\zeta_k'=0$ 即可得到新问题单纯形表．

2、改变右端向量b

设右端向量 b 变为 b'，则由下表可知 只需修改单纯形表中最右端一列 $\left(\frac{z_0}{\bar b}\right)$，即可得到新单纯形表，新表中的 $\bar b$ 和 z_0 按下式计算

	x_B	x_N	RHS		
z	0	$c_B^TB^{-1}N-c_N^T$	$c_B^TB^{-1}b$	$\longrightarrow c_B^TB^{-1}b'$	z_0'
x_B	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$	$\longrightarrow B^{-1}b'$	$\bar b'$

if 只改变右端向量中一个分量 b_s，且 B^{-1} 是已知的，则 $\bar b'=B^{-1}b'=B^{-1}b+B^{-1}(b'-b)=\underline{\bar b+(b_s'-b_s)B_s^{-1}}$

第二章：整数规划

1、整数线性规划模型简介

旅行售货员问题（TSP） Travelling salesman problem

det $x_{ij}=\begin{cases}1 & \text{salesman travel from } v_i \text{ to } v_j\\ 0 & \text{other sltuation}\end{cases}$

该问题数学模型为

$$\min \quad z=\sum_{i,j=0}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{cases}
\text{s.t.} \quad \sum_{i=0}^{n} x_{ij}=1 & j=0,\cdots,n\\
\sum_{j=0}^{n} x_{ij}=1 & i=0,\cdots,n\\
u_i-u_j+n x_{ij}\le n-1 & 1\le i\ne j\le n\\
x_{ij}=0 \text{ or } 1 & i,j=0,\cdots,n\\
u_i\text{为实数} & i=1,\cdots,n
\end{cases}$$

2、Gomory 割平面法

3、分枝界定法