矩阵

一、矩阵运算

$A_{mn}B_{nl}=(C_{ij})_{ml}$（其中 $C_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$）

associative ① $A(BC)=(AB)C$

commutative ② $A(B+C)=AB+AC$　$(A+B)C=AC+BC$

③ $(kA)B=k(AB)=A(kB)$

④ $A_{mn}\cdot E_n=A_{mn}=E_mA_{mn}$

1、矩阵加法：秩$(A+B)\le$秩$(A)+$秩(B)

矩阵乘法：秩$(AB)\le\min\{$秩(A),秩$(B)\}$

2、设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$　$B=(b_{ij})_{n\times n}$，则 $|AB|=|A|\,|B|$

$|AB|=|A|\,|B|=|B|\,|A|=|BA|$

3、(Binet-Cauchy公式)　$A=(a_{ij})_{s\times n}$　$B=(b_{ij})_{n\times s}$

1) 若 $s>n$，$|AB|=0$　（$r(AB)\le r(A)\le n<s$，非满秩故为0）

2) 若 $s\le n$，$|AB|=$（A的所有s阶子式 × B的相应s阶子式乘积）之和

$$|AB|=\sum_{1\le v_1<\cdots<v_s\le n}A\begin{pmatrix}1,\cdots,s\\v_1,\cdots,v_s\end{pmatrix}\cdot B\begin{pmatrix}v_1,\cdots,v_s\\1,\cdots,s\end{pmatrix}$$

$r(AB)\le r(A)$

$r(AB)=r[(AB)^T]=r(B^TA^T)$

$r(B^TA^T)\le r(B^T)=r(B)$

$r(AB)=r(B^TA^T)\le r(B)$

$r(A)+r(B)\le r(A+B)$ 可用极大线性无关组证明

1、demonstration：

$A_{n\times m}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1m}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2m}\\\vdots&&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nm}\end{pmatrix}$　$B_{m\times l}\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1l}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{m1}&b_{m2}&\cdots&b_{ml}\end{pmatrix}$

$AB=C_{n\times l}=D_{n\times l}$　$A_1,A_2\cdots A_n$ 为 A 的行向量　$B_1,B_2\cdots B_l$ 为 B 的列向量

$C_1,C_2\cdots C_n$ 为 AB 的行向量　$D_1,D_2\cdots D_l$ 为 AB 的列向量

证明：秩$(AB)\le$秩(A)　$C\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\\vdots\\C_n\end{pmatrix}$

$D(D_1\ D_2\cdots D_l)$

$D_i=\sum_{k=1}^{m}b_{ki}A_k$　$(i=1,2,\cdots,l)$

证明：秩$(AB)\le$秩(B)

$C_i=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}B_k$　$(i=1,2,\cdots,n)$

2. demonstration

$$\begin{vmatrix}A&0\\-I&B\end{vmatrix}=|A|\,|B|=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}&0&\cdots&0\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}&0&\cdots&0\\-1&\cdots&0&b_{11}&\cdots&b_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&\cdots&-1&b_{n1}&\cdots&b_{nn}\end{vmatrix}\to\begin{vmatrix}0&\cdots&0&\sum a_{1k}b_{k1}&\cdots&\sum a_{1k}b_{kn}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&\cdots&0&\sum a_{nk}b_{k1}&\cdots&\sum a_{nk}b_{kn}\\-1&\cdots&0&b_{11}&\cdots&b_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&\cdots&-1&b_{n1}&\cdots&b_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}0&AB\\-I&B\end{vmatrix}=|AB|(-1)^{(1+2+\cdots n)+[(n+1)+\cdots+2n]}\,|-I|$$

$$=|AB|(-1)^{n^2}(-1)^n|I|=|AB|$$

4、若 $k\ne0$，$r(kA)=r(A)$

$r(kA)=r[(kI)(A)]\le r(A)$

$r(A)=r[(k^{-1}I)(kA)]\le r(kA)$

5、$A_{s\times n}$，$r(A^TA)=r(AA^T)=r(A)$

证一：$(A'A)X=0$ 与 $AX=0$ 同解 ①

$\downarrow$

$n-r(A'A)=n-r(A)$ ②

$\downarrow$

$r(A'A)=r(A)$

① η 为 $AX=0$ 一个解 $\longrightarrow$ η 也为 $A'AX=0$ 一个解

δ 为 $A'AX=0$ 一个解　$\delta'A'A\delta=0$　$(A\delta)'A\delta=0$

设 $(A\delta)^T=(c_1\cdots c_n)$

$(A\delta)^T(A\delta)=c_1^2+\cdots+c_n^2=0$　$c_1=\cdots=c_n=0$

$A\delta=0$　$\longrightarrow$ η 也为 $AX=0$ 一个解

$r(A'A)=r(A)$

6、行(列)满秩矩阵 means, 行(列)向量线性无关

$A_{s\times n}=B_{s\times r}C_{r\times n}$　设 A的行向量极大无关……：$\gamma_{i1}\cdots\gamma_{ir}$

$r(A)=r$　列满秩　行满秩

$$A=\begin{pmatrix}k_{11}\gamma_{i1}+k_{12}\gamma_{i2}+\cdots+k_{1r}\gamma_{ir}\\\vdots\\k_{n1}\gamma_{i1}+k_{n2}\gamma_{i2}+\cdots+k_{nr}\gamma_{ir}\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}k_{11}&\cdots&k_{1r}\\\vdots&&\vdots\\k_{n1}&\cdots&k_{nr}\end{pmatrix}}_{B}\underbrace{\begin{pmatrix}\gamma_{i1}\\\vdots\\\gamma_{ir}\end{pmatrix}}_{C}$$

显然 C为 $r\times n$ 行满秩矩阵

$r(A)=r(BC)\le r(B)$　$r(B)\ge r$

B只有r列，$r(B)\le r$　B为 $s\times r$ 满秩矩阵

7、Cauchy-Bunyakovsky 不等式，$\forall\ a_n,b_n\in R$

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots b_n^2)\ge(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)^2$$

二、特殊矩阵

1、对角矩阵：$\mathrm{diag}\{d_1,d_2\cdots d_n\}$

BA（AB），对角矩阵主元乘A的行(列)

2、基本矩阵：E_{ij}　(i,j)元为1，其余元素为0

$E_{ij}A$（AE_{ij}），A的第j行移到第i行，其余行为0行

A的第i列移到第j列，其余列为0列

3、初等矩阵

4、上三角/下三角矩阵

2个n级上(下)三角矩阵 A、B的乘积仍为上三角矩阵

AB的主元＝A与B相应主对角元的乘积

5、对称矩阵：$A^T=A$

AB为对称矩阵 $\Longleftrightarrow$ A与B可交换

6、斜对称矩阵：$A^T=-A$　$(a_{ij}=-a_{ji}\quad a_{ii}=0)$

奇数级斜对称矩阵 $|A|=0$

例1：设D为主对角元两两不等的对角矩阵，与D可交换矩阵为对角矩阵　demonstration

例2：与所有n级矩阵可交换的矩阵一定是n级数量矩阵　demonstration

例3：K上任一n级矩阵A都可被唯一表示成一个对称矩阵与一个斜对称矩阵之和　demonstration

矩阵的转置

$(A^T)^T=A$　　$(AB)^T=B^TA^T$

$(A+B)^T=A^T+B^T$　　$(kA)^T=k(A^T)$

秩$(A)=$秩(A^T)

prove：秩A＝A的行秩＝A的列秩

‖

秩$A^T=A^T$的列秩＝A^T的行秩

三、可逆矩阵（非奇异矩阵）

伴随矩阵 A^*

$AA^*=|A|I=A^*A\Longleftrightarrow|A|\,|A^*|=\big||A|E\big|$　　$|A^*|=|A|^{n-1}$

$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$

数域K上n级矩阵A可逆 $\Longleftrightarrow$ A为满秩矩阵

$\Updownarrow$

A的行/列向量组为 K^n 的一个基 $\Longleftrightarrow$ A的行/列向量组线性无关

$\Updownarrow$

A的行/列空间 $=K^n$

$A^*=(A_{ji})$　伴随矩阵　A_{ji}为a_{ji}的代数余子式 $[(-1)^{i+j}M_{ij}]$

A可逆 $\overset{充要}{\Longleftrightarrow}$ A是非退化矩阵

$AA^{-1}=A^{-1}A=E$

$A\cdot A^*=A^*A=|A|E$；$d=|A|=\det A\ne0\Longleftrightarrow A(\frac{1}{d}A^*)=(\frac{1}{d}A^*)A=E$

性质：1、可逆矩阵经过初等行变换化成的简化矩阵为单位矩阵

2、矩阵A可逆 $\Longleftrightarrow$ 可表示成一些初等矩阵乘积

3、可逆矩阵左(右)乘A，$r(A)$不变

典型例题：

1、设 A可逆，则 A^*也可逆，并求 $(A^*)^{-1}$

$AA^*=|A|I$　$(\frac{1}{|A|}A)A^*=I$，所以A^*可逆

$(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A$

2、设 A为幂零矩阵，它的幂指数为l，则$I-A$可逆，求$(I-A)^{-1}$

$A^l=0$，s.t. $(I-A)(I+A+\cdots A^{l-1})=I-A^l=I$，所以$I-A$可逆

$(I-A)^{-1}=I+A+A^2+\cdots+A^{l-1}$

3、设数域K上n级矩阵满足 $b_mA^m+b_{m-1}A^{m-1}+\cdots+b_1A+b_0I=0$

（$b_i\in K$，$b_0\ne0$）则A可逆，并求A^{-1}

$(-\frac{b_m}{b_0}A^{m-1}-\frac{b_{m-1}}{b_0}A^{m-2}-\cdots-\frac{b_1}{b_0}I)A=I$，A可逆，且$A^{-1}$易得

4、证明：数域K上可逆的上三角矩阵的逆矩阵仍为上三角矩阵

设 $A=(a_{ij})$ 为数域K上的n级可逆……，by 第i行乘a_{ii}^{-1}，及第i行适当倍数加至各行，可将A化为 I

$P_mP_{m-1}\cdots P_2P_1A=I$，$A^{-1}=P_mP_{m-1}\cdots P_2P_1$　P_i都是上三角矩阵，从而其乘积 A^{-1}也为上三角矩阵

5、J代表元素全为1的n级矩阵，则 $A=J-I$，求 A^{-1}　矩阵数乘为一次乘所有数

设 $A^{-1}=aI+bJ$　$I=(aI+bJ)(J-I)=(a-b)J-aI+bnJ=(a-b+bn)J-aI$

6、求下述A级矩阵A的逆矩阵

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&0&\cdots&0&0\\-1&2&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&2&-1\\0&0&0&\cdots&-1&2\end{pmatrix}$$

先求 n=4 situation，再进行猜想 n阶情形

再用数学归纳法证明猜想成立

7、求下列矩阵的逆　$A=\begin{pmatrix}1&b&b^2&\cdots&b^{n-1}\\0&1&b&\cdots&b^{n-2}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&b\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$

令 $H=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$　$A=I+bH+b^2H^2+\cdots+b^{n-1}H^{n-1}$　$H^n=0$

$A(I-bH)=I-b^nH^n=I$　$A^{-1}=I-bH$

8、方阵A若满足 $A^2=I$，称A为对合矩阵

设A、B均为数域K上的n级矩阵，证明：1) A、B均为对合矩阵，且 $|A|+|B|=0$，则A+B，I+AB 不可逆

$A^2=I$，$|A^2|=1$，$|A|=\pm1$，不妨设 $|A|=1$　$|B|=-1$

$|A|\,|A+B|=|A(A+B)|=|A^2+AB|=|I+AB|=|(A+B)B|$

⋮

$|A+B|=|A|\,|A+B|=|A+B|\,|B|=-|A+B|=0$

9、任何方阵都可被表示成一些下三角矩阵与上三角矩阵乘积

任一n级矩阵A都可经一系列初等变化成阶梯型矩阵G，

G为上三角矩阵，2型（互换）可由1、3型（倍加，倍乘）

替代，1、3型均为上/下三角矩阵　$A=P_t\cdots P_1G$

矩阵的分块

分类

设A是$s\times n$矩阵，B是$n\times m$矩阵，B的列向量为$\beta_1,\beta_2\cdots\beta_m$

则 $AB=A(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)=(A\beta_1,A\beta_2,\cdots,A\beta_m)$

$AB=0 \Longleftrightarrow \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$都是齐次线性方程组$Ax=0$的解

$C_{s\times m}$的列向量组为$c_1,c_2,\cdots,c_m$

$AB=C \Longleftrightarrow \beta_i$是线性方程组$Ax=c_i$的一个解

$(A\beta_1,A\beta_2,\cdots,A\beta_m)=0.$

典型例题：

1、A.B分别为$s\times n$, $n\times m$矩阵，证明：计$AB=0$，则$r(A)+r(B)\le n$

计$A=0$，结论显然成立（$r(A)=0$ $r(B)\le\min\{n,m\}$ $r(A)+r(B)\le n$ 显然成立）

下证$A\ne0$情况：设B向量组为$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 由于$AB=0$，β_i为$Ax=0$的解空间(基础解系)W

$r(B)=\dim(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)\le\dim W=n-r(A) \Rightarrow r(A)+r(B)\le n$

2、prove sylvester 秩不等式，设A.B分别为$s\times n$, $n\times m$矩阵，则 $n+r(AB)\ge r(A)+r(B)$

$n+r(AB)=r\begin{pmatrix} I_n & 0\\ 0 & AB\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{series of step}}\begin{pmatrix} B & I_n\\ 0 & A\end{pmatrix}$ $r\begin{pmatrix} I_n & 0\\ 0 & AB\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} B & I_n\\ 0 & A\end{pmatrix}\ge r(B)+r(A)$

3、计数域K上n级矩阵A满足$A^2=A$，那么A为幂等矩阵

，prove：A为K上n级幂等矩阵$\Longleftrightarrow r(A)+r(I-A)=n$

A为幂等矩阵，$A^2=A$，$A^2-A=0$ $r(A^2-A)=0$ $\begin{pmatrix} A & 0\\ 0 & I-A\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} A-A^2 & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}$

$r(A)+r(I-A)=r(A^2-A)+n$ $r\begin{pmatrix} A & 0\\ 0 & I-A\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} A-A^2 & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}$

4、计A为实数域上$s\times n$矩阵，prove：$\forall\beta\in R$，线性方程组$A^TAx=A^T\beta$ 一定有解

计增广矩阵$(A^TA,A^T\beta)$与系数矩阵秩相同即可，$r(A^TA)=r(A^T)$

$r(A^TA,A^T\beta)=r(A^T(A,\beta))\le r(A^T)=r(A^TA)$，by $r(A^TA)\le r(A^TA,A^T\beta)$，st. $r(A^TA,A^T\beta)=r(A^TA)$

5、A为n级矩阵($n\ge2$)，prove $r(A^*)=\begin{cases} n & r(A)=n\\ 1 & r(A)=n-1\\ 0 & r(A)<n-1\end{cases}$

① $r(A)=n$，则$|A|\ne0$，$|A^*|\ne0$，$r(A^*)=n$

② $r(A)=n-1$，则$|A|=0$，$A\cdot A^*=0$，by 例1 $r(A)+r(A^*)\le n$ $r(A^*)\le1$

$r(A)=n-1$ 有不为0的$n-1$阶子式，A有不为0代数余子式，$|A^*|\ne0$，$r(A^*)>0$，$r(A^*)=1$

③ $r(A)<n-1$，all $n-1$阶子式$=0$，$r(A^*)=0$

6、$A_{s\times n}$，$B_{s\times m}$ prove：$AX=B$有解$\Longleftrightarrow r(A)=r(A,B)$