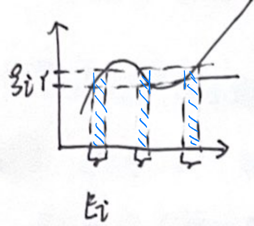
2月26日笔记

勒贝格积分：$\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} mE_i\cdot \xi_i = \int_{[a,b]} f(x)\,dx$　　$E_i=\{x \mid y_{i-1}\le f(x)\le y_i\}$



交集为空，测度论（内外测度）.

待处理与具体补充.

2月27日笔记

定积分的应用　　平面图形的面积

1.直角坐标系情形：略　　2.极坐标情形：$r=r(\theta)$

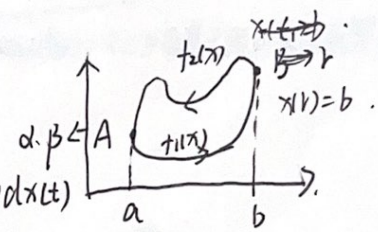
$$S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}\theta r^2$$
$$ds=\frac{1}{2}r^2d\theta$$
$$S=\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}r^2(\theta)\,d\theta$$

3.参数方程情形：Γ为简单闭曲线，正向，图形在左边.

Γ：$x=x(t)$　$y=y(t)$　$t\in[\alpha,\beta]$

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (x\,dy-y\,dx).$$ proof

$$S=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]\,dx$$
$$=\int_\beta^\gamma y(t)\,dx(t)-\int_\alpha^\gamma y(t)\,dx(t)$$
$$=-\int_\alpha^\beta y(t)\,dx(t)=\int_\alpha^\beta x(t)\,d\,y(t).$$



注：椭圆周长原函数为超越数，不可通过积分积出.

特殊立体图形的体积

1、平行截面间立体的 $\boxed{\text{体积}}$.

椭球面所围成椭球的体积 V

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a,b,c>0)$$

① first step：先求出二维平面的面积

② second step：二维面 · dz 再积分.

2、旋转体的 $\boxed{\text{体积}}$ 用 dx

$$dV=\pi[f(x)]^2dx$$

$$V=\pi\int_a^b[f(x)]^2dx$$

旋转体.

平面图形绕平面内一直线旋转一周所成的立体 is called

(用 dx 比用 ds 误差更小，为高阶无穷小量).

圆台 true 体积：$\frac{1}{3}\pi h[r_1^2+r_1r_2+r_2^2]=\pi y^2dx+y\pi dxdy+\frac{1}{3}\pi dx\,d^2y$

①用 dx：πy^2dx 　差：$y\pi dxdy+\frac{1}{3}\pi dx\,d^2y$ 　$dx\to 0$ 为高阶无穷小

②用 ds：πy^2ds 　差：$\pi y^2dx(\sqrt{1+y'^2}-1)-y\pi dxdy-\frac{1}{3}\pi dx\,d^2y$

平面曲线与空间曲线的弧长.

可求长的 $\Leftrightarrow$ 光滑曲线 　设光滑曲线 T：$(x,y)=(x(t),y(t))$ 　$t\in(\alpha,\beta)$

$\forall$ 取 $[t,t+\Delta t]\subseteq[\alpha,\beta]$，设区间 $[t,t+\Delta t]$ 端点对应 T 上 2 点. $A(x(t),y(t))$ 　$B(x(t+\Delta t),y(t+\Delta t))$

$$AB=\sqrt{[x(t+\Delta t)-x(t)]^2+[y(t+\Delta t)-y(t)]^2}\xrightarrow{\text{lagrange 中值}}=\sqrt{[x'(\xi_1)]^2+[y'(\xi_2)]^2}\,\Delta t \quad \xi_1,\xi_2\in(t,\Delta t)$$

$$\approx\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\Delta t$$

$$\Delta s=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\Delta t$$

$$ds=\text{— —}\quad dt$$

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$$

直角坐标系情形：$\begin{cases}x=x\\y=f(x)\end{cases}$ $x\in[a,b]$ 　$s=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$

$\sqrt{\ }$ 化简后记得加绝对值.

极坐标情形：$(x,y)=(r(\theta)\cos\theta,r(\theta)\sin\theta)$ 　$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{(x'\theta)^2+(y'\theta)^2}\,d\theta=\int_\alpha^\beta\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}\,d\theta$

$$\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\eta_i)]^2}-\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\xi_i)]^2}<\sqrt{[y'(\eta_i)]^2-[y'(\xi_i)]^2}<|y'(\eta_i)-y'(\xi_i)|<\varepsilon$$

$$\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}<\sqrt{b^2-c^2}$$

不等式

$a^2+b^2+a^2+c^2 < b^2-c^2$

$-2\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}$

$2a^2+b^2+c^2-2(a^2+b^2)$

c^2-b^2

calculus

数学作业纸

2.27 班级：　　　　姓名：　　　　编号：　　　　科目 math　　第 3 页

旋转曲面的侧面积　用 ds.

圆台 true 侧面积：$\pi ds\,[f(x+\Delta x)+f(x)]$

① ds 表示：$2\pi f(x)ds$

差：$\pi dx\,[\sqrt{1+y'^2}\,[f(x+\Delta x)-f(x)]]$

$dx\to 0$ 为高阶无穷小.

② dx 表示：$2\pi f(x)dx$

差：$\pi dx\,[\cancel{\sqrt{1+y'^2}\,f(x+\Delta x)}+\cancel{\sqrt{1+y'^2}\,f(x)}-2f(x)]$

$\pi dx\,[\,2f(x)(\sqrt{1+y'^2}-1)\,]$

set 光滑曲线 C 的参数方程：$x=x(t)$　$y=y(t)$　$t\in[\alpha,\beta]$

圆台侧面积推导：

☆ 用角度推 $1\cdot s\theta$

$S=\pi l(R+r)$

$ds=\pi[y(t)+y(t+dt)]dl$

$dl=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$

$y(t+dt)\approx y(t)$

$\Delta S\approx 2\pi y(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$

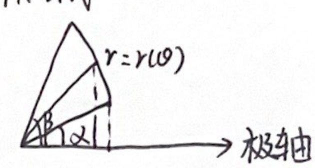
旋转体侧面积的微元为 $dS=2\pi y(t)ds=2\pi y(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$

$$S=\int_\alpha^\beta 2\pi y(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$$

计曲线方程由极坐标 $r=r(\theta)$，$\alpha\le\theta\le\beta$ 给出，曲线绕 x 轴旋转所得侧面积为

$$S=\int_\alpha^\beta 2\pi y(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt=\int_\alpha^\beta 2\pi r(\theta)\cdot\sin\theta\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}\,d\theta$$

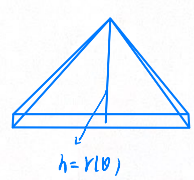
补充：若曲线 C 由极坐标方程 $r=r(\theta)$，$\theta\in[\alpha,\beta]$ 表示，其中 $0<\alpha<\beta<\pi$，试求由曲线 C 和射线 $\theta=\alpha$，$\theta=\beta$ 围成的曲边三角形绕极轴旋转一周所得旋转体的体积公式

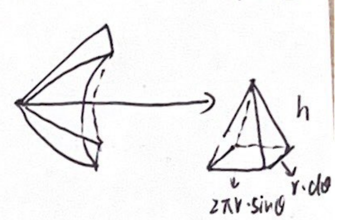


体积微元为一个棱锥：$V=\frac{1}{3}sh$　$V_{大空心圆锥}=V_{小棱锥}$ 求和

$h=r(\theta)$　pay attention

$S=2\pi r\cdot\sin\theta\cdot r\cdot d\theta$





$dV=\frac{2}{3}\pi r^3\sin\theta\,d\theta$

$$V=\int_\alpha^\beta \pi r^3(\theta)\,d(\cos\theta)$$

多重积分

1、矩形区域上的积分

def: 设 $\exists A$, $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$ s.t. $\|T\|<\delta$ 时 有 $\left|\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\sigma(I_i) - A\right| < \varepsilon$, 则称 f 在矩形 I 上可积

将 A 写作 $\iint_I f(x,y)\,dx\,dy$ or $\int_I f\,d\sigma$: f 在 I 上的积分 $\Longleftrightarrow \lim_{\|T\|\to 0} \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\sigma(I_i) = A$

2、Lebesgue定理 (单变量积分).

def: A 为实数的集合, $\forall \varepsilon>0$, $\exists$ 至多可数个开区间 $\{I_n : n\in \mathbb{N}^*\}$ 组成 A 的一个开覆盖, 并且 $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \le \varepsilon$, $|I_n|$ 为开区间长度, 称 A 为零测度集/零测集 (空集为零测集)

性质: 1、至多可数个零测集的并集是零测集

2、set A 为零测集, 设 $B\subset A$, 那么 B 也为零测集

用 $D(f)$ 记 f 在 $[a,b]$ 不连续点的全体

$D(f) = \{x\in[a,b] : f$ 在 x 处不连续$\}$

theorem: set function f 在有限区间 $[a,b]$ 上有界, 那么 f 在 $[a,b]$ 上 Rieman 可积 $\Longleftrightarrow D(f)$ 为零测集

lemma: set w 为有界 function f 在 $[a,b]$ 上的振幅, $w = \sup\{|f(x_1) - f(x_2)| : x_1, x_2 \in [a,b]\}$

lemma: function f 在点 $x\in I$ 处连续 $\Longleftrightarrow w_f(x)=0$. (proof) 确界原理.

lemma: $D(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_{\frac{1}{n}}$ (对 $\delta>0$, 记 $D_\delta = \{x\in[a,b] : w_f(x) \ge \delta\}$.

lemma: set $f:[a,b]\to \mathbb{R}$, 设 $\exists$ 一列区间 (α_j, β_j) $(j=1,2,\dots)$ s.t. $D(f) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (\alpha_j,\beta_j)$, 记 $K=[a,b]\setminus\bigcup_{j=1}^{\infty}(\alpha_j,\beta_j)$

那么 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, while $x\in K$, $y\in[a,b]$ 且 $|x-y|<\delta$ 时有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$

数学作业纸

3.1 科目 Calculus

班级： 姓名： 编号： 第 2 页

2、Lebesgue 定理（二维零测集） 几乎处处有限

def：设 $B\subset R^2$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 可数个闭矩形序列 $\{I_i\}$ $(i=1,2,\cdots)$ s.t. $B\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i$，$\sum_{i=1}^{\infty}\sigma(I_i)<\varepsilon$

则 B is called（二维零测集）

如果上述定义中，要求矩形个数为有限个则有

def：set $B\subset R^2$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 有限个闭矩形 $I_1,I_2,\cdots,I_m$ s.t. $B\subset\bigcup_{i=1}^{m}I_i$，$\sum_{i=1}^{m}\sigma(I_i)<\varepsilon$

则称 B 为零面积集

性质：1. 至多可数集是零测集　　2. 至多可数个零测集的并是零测集

3. 有限个零面积集的并为零面积集　　4. B为零面积集 $\Leftrightarrow$ $\bar{B}$也为零面积集（$\bar{B}$为B的闭包）

5. 计B为有界闭集，则B为零测集 $\Leftrightarrow$ B为零面积集.

（B为零测集，$\bar{B}$不一定为零测集 example B：$[0,1]^2$中$\mathbb{Q}$，$\bar{B}$：$[0,1]^2$ R）.

（集合的聚点）设 $A\subseteq R$，$x_0\in R$，计对 x_0 的$\forall$开邻域 U 均有 $U\cap(A\setminus\{x_0\})\neq\phi$

则称 x_0 为聚点，A中全体聚点记为 A'

集合 $\bar{A}=A\cup A'$ 为A的闭包

Weierstrass原则：R上$\forall$有界无限点集必有聚点.

def：set集合 $B\subset R^2$，$f:B\to R$有界，对 $\forall x\in B$ 及 $r>0$，令 $I_{x,r}=B\cap B(x)$

用 $w_f(x,r)$ 表示函数f在 $I_{x,r}$ 上的振幅，令 $w_f(x)=\lim_{r\to0^+}w_f(x,r)$

称之为函数f在x处的振幅

$w_f(x,r)=\sup\{|f(x_1)-f(x_2)|:x_1,x_2\in I_{x,r}\}$.

lemma：1. set集合 $B\subset R^2$，函数f在点 $x\in B$ 处连续 $\Leftrightarrow$ $w_f(x)=0$　　2. $D(f)=\bigcup_{n=1}^{\infty}D_{\frac{1}{n}}$

3. set f 为定义在有限闭矩形 I 上的函数. 计 $\exists$ series 开矩形 I_j $(j=1,2,\cdots)$ s.t. $D(f)\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}I_j$

记 $K=I\setminus\bigcup_{j=1}^{\infty}I_j$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$x\in K$，$y\in I$ 且 $\|x-y\|<\delta$ 时有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$

Lebesgue定理：set function f 在闭矩形I上有界，f在I上 Rieman 可积 $\Leftrightarrow$ f在I上全体不连续点所组成集 $D(f)$ 为零测集

（Lebesgue 数定理）

3.2

数学作业纸

科目 Calculus

班级:　　姓名:　　编号:　　第 3 页

矩形区域上二重积分计算

theorem：(Minkowski 不等式) set f 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上非负、连续，$p\geq 1$，则

$$\left(\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_c^d\left(\int_a^b f^p(x,y)\,dx\right)^{\frac{1}{p}} dy$$

$p>1$ 时，等式成立 $\Longleftrightarrow f(x,y)=u(x)v(y)$

有界集合上的二重积分

(积分平均值定理) set K 是 R^2 中由有限条光滑曲线围成的有界闭区域，函数 $f,g: K\to R$ 连续且 g 在 K 上不变号，于是 $\exists\,\xi\in K$，满足 $\int_K fg\,d\sigma=f(\xi)\int_K g\,d\sigma$

有界集合上的积分计算

$$\int_B f\,d\sigma=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy \qquad \int_B f\,d\sigma=\int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx$$