九、多变量函数的微分学

9.1 方向导数和偏导数

f为单变量函数，f在x_0处的导数 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

($\mathbb{R}^n$中任何单位向量u，叫作一个方向)

过点x_0且有u方向的直线，即点集 $\{x: x=x_0+tu, t\in\mathbb{R}\}$

def: 设开集$D\subset\mathbb{R}^n$，$f: D\to\mathbb{R}$，u为一个方向，$x_0\in D$

if $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(x_0+tu)-f(x_0)}{t}$ ∃且 limited is called f在x_0沿方向u的方向导数，记为$\dfrac{\partial f}{\partial u}(x_0)$

称函数f在点x_0处沿方向e_i的方向导数为f在x_0处第i个一阶偏导数

记作 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ / $D_i f(x_0)$ $D_i=\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ 为第i个偏微分算子

令 $x_0=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)=D_i f(x_0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+te_i)-f(x_0)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_1,\cdots,x_i+t,\cdots,x_n)-f(x_1,\cdots,x_i,\cdots x_n)}{t}$$

9.2 多变量函数的微分

$Jf(x)=(D_1f(x),D_2f(x),\cdots,D_nf(x))_{1\times n}$

函数f在点x处的 Jacobi 矩阵

(单变量函数的一阶导数)

def: 设$h=(h_1,h_2,\cdots,h_n)$ if 成立 $f(x_0+h)-f(x_0)=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i h_i+o(\|h\|)$ $(\|h\|\to 0)$

if λ_i为常数，称函数f在x_0处可微，$\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i h_i$为$f$在$x_0$处的微分，记作 $df(x_0)(h)=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i h_i$

if f在开集D上每一点都可微，称f为D上的可微函数

$\lambda_i=D_i f(x_0)$ $i=1\sim n$ f在x_0可微时，必有一切一阶偏导数且 $df(x_0)(h)=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}h_i$

令 $Jf(x)=(D_1f(x),D_2f(x),\cdots,D_nf(x))$ 函数f在点x处的 Jacobi Matrix (单变量函数的一阶导数)

$x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ $h=\begin{pmatrix}h_1\\ \vdots\\ h_n\end{pmatrix}$ $df(x_0)(h)=Jf(x_0)h$ $\operatorname{grad} f(x)=Jf(x)$ 称为数量函数的梯度

$df(x_0)h=Jf(x_0)h$

def: 设开集$D\subset\mathbb{R}^n$，$x_0\in D$，包含x_0的任一开集称为x_0的邻域

theorem: f在x_0处可微，则f在x_0处必连续 proof

theorem: 函数f在x_0可微 $\Longleftrightarrow$ $f(x_0+h)-f(x_0)=Jf(x_0)h+\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i(h)h_i$ proof

当$\|h\|\to 0$时 $\beta_i(h)\to 0$ $i=1\sim n$.

theorem: 设开集$D\subset\mathbb{R}^n$，$f: D\to\mathbb{R}$，$x_0\in D$ proof

if $D_i f(x)$ $i=1\sim n$ 在x_0一个邻域中∃且在x_0连续 f在x_0可微

theorem: if f在x_0可微，f在x_0处任意方向$u=(u_1,\cdots,u_n)$的方向导数∃，且

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)u_1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)u_n$$

proof

5-6: 多元函数全微分与偏导数

符号统一

- 多元函数: $f(P)=f(x_1,\cdots,x_n)$
- 向量P_0: $P_0^T=(x_1^\circ,x_2^\circ,\cdots,x_n^\circ)$
- 增向量ΔP: $\Delta P^T=(\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n)$
- 向量P: $P^T=P_0^T+\Delta P^T=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$
- 绝对变化: $\rho=\sqrt{\Delta x_1^2+\cdots+\Delta x_n^2}=\|\Delta P\|$ (自然由一维拓展到多维的 situation).
- 常数向量: $A^T=(A_1,A_2,\cdots,A_n)$

可微定义必考

一、可微性与全微分

def: 函数 $y=f(P)$ 在某邻域 $U(P_0)$ 内有定义, $P=P_0+\Delta P\in U(P_0)$, 若f在P_0的全增量Δy可表示为

$$\Delta y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)-f(x_1^\circ,x_2^\circ,\cdots,x_n^\circ)$$

$$=A_1\Delta x_1+A_2\Delta x_2+\cdots+A_n\Delta x_n+o(\rho)\Rightarrow \Delta y=A_1\Delta x_1+A_2\Delta x_2+\cdots+A_n\Delta x_n+\alpha_1\Delta x_1+\cdots+\alpha_n\Delta x_n$$

$$=f(P_0+\Delta P)-f(P_0)=A^T\Delta P+o(\rho)\Rightarrow f(P)=A^T\Delta P+f(P_0)\qquad \lim_{\Delta P\to 0}\alpha_i=0\ (i=1\sim n)$$

(A为仅与P_0有关的常数, $o(\rho)$为ρ的高阶无穷小量)

称f可微, $A^T\Delta P$为f在P_0的全微分

related 题目:

1. 考察函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在原点可微性

Answer: 在原点处不可微

$$\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)-f_x(x,y)\Delta x-f_y(x,y)\Delta y}{\rho}=\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$

2. $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在(0,0)可微, f_x & f_y 在(0,0)不连续

proof:
- 可微: $\frac{f(P+\Delta P)-f(P)-f_x\Delta x-f_y\Delta y}{o(\rho)}=0$
- 不连续: f_x在(0,0)处不连续

$(0,0)=0$

二、偏导数

set 函数 $y=f(P)=f(x_1,\cdots,x_n)$, $P\in E\subset R^n$, 且 $f(x_1^\circ,\cdots,x_{i-1}^\circ,x_i,x_{i+1}^\circ,\cdots,x_n^\circ)$ 有定义 $x_i=x_i^\circ+\Delta x_i$

$$\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{\Delta_i y}{\Delta x_i}\quad i=1\sim n$$

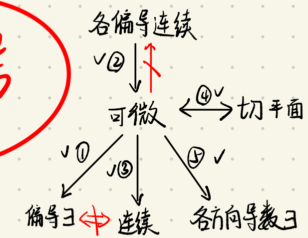
$$=\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{f(x_1^\circ,\cdots,x_i^\circ+\Delta x_i,\cdots,x_n^\circ)-f(x_1^\circ,\cdots,x_i^\circ,\cdots,x_n^\circ)}{\Delta x_i}$$

存在时,称极限为f在P_0关于x_i的偏导数

三、可微性条件

$\Delta y = f(P) - f(P_0) = A^T \Delta P + o(P)$

考试必考



③ 可微 $\Rightarrow$ 连续 use def to proof.

由可微可得：

$\Delta y = f(P) - f(P_0) = A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \cdots + A_n\Delta x_n + o(P)$

要证 $f(P)$ 连续，即证 $\lim\limits_{\Delta P\to 0} |f(P+\Delta P) - f(P)| = 0$

$\lim\limits_{\Delta P\to 0} f(P_0+\Delta P) - f(P_0) = \lim\limits_{\Delta P\to 0}\left(A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \cdots + A_n\Delta x_n + o(|P|)\right) = \lim\limits_{\Delta P\to 0}\left(\frac{A_1\Delta x_1 + \cdots + A_n\Delta x_n}{\Delta P} + \frac{o(|P|)}{\Delta P}\right)\cdot \Delta P$

$\le (A_1 + \cdots + A_n)\Delta P$ 　 $A_1 \sim A_n$ 为常数，故 $\lim\limits_{\Delta P\to 0} f(P_0+\Delta P) - f(P_0) = 0$

① theorem 1：函数 f 在定义域内 P_0 处可微，则 f 在该点关于每个自变量的偏导均存在

（可微 $\Rightarrow$ 偏导∃） 　 $A_i = f_{x_i}(P_0)$ 　 $i=1,2,\cdots,n$ 　 $df(P_0) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_{x_i}(P_0)\Delta x_i \xrightarrow{\Delta x_i = dx_i} df(P_0) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_{x_i}(P_0)\, dx_i$

由可微可知：

$f(P_0+\Delta P) - f(P_0) = A^T\Delta P + o(P)$ 　 $A^T = (A_1, \cdots, A_n)$

$\lim\limits_{\Delta P\to 0}\frac{f(P_0+\Delta P) - f(P_0)}{\Delta P} = A + \frac{o(P)}{\Delta P} = A^T = (A_1 \cdots A_n)$

$= \frac{f(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, \cdots, x_i+\Delta x_i, \cdots, x_n+\Delta x_n) - f(x_1, \cdots, x_n)}{\Delta P}$

取 $\Delta P = (0 \cdots 0, x_i, 0, \cdots 0)$ 　 $A = (0 \cdots A_i \cdots 0)$ 　 得 $\lim\limits_{\Delta x_i\to 0}\frac{f(x_1, \cdots, x_i+\Delta x_i, \cdots, x_n) - f(x_1, \cdots x_i \cdots x_n)}{\Delta x_i}$

即为 $\frac{\partial f}{\partial x_i} = A_i$

⑤ 若 $f(x_1 \cdots x_n)$ 在 $P_0(x_1^0 \cdots x_n^0)$ 可微

则 f 在 P_0 沿任一方向 $\vec{l}$ 的方向导数均∃

$f_{\vec{l}}(P_0) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_{x_i}(P_0)\cos\alpha$

$f(P) - f(P_0) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_{x_i}(P_0)\Delta x + o(P)$

$\frac{f(P) - f(P_0)}{\|P\|} = \sum\limits_{i=1}^{n} f_{x_i}(P_0)\frac{\Delta x}{\|P\|} + \frac{o(P)}{P}$

$= \sum\limits_{i=1}^{n} f_{x_i}(P_0)\cos\alpha_i$

② theorem 2：函数 $z = f(P)$ 在 P_0 邻域内存在偏导数 f_{x_i} $(i=1\sim n)$ 且它们在 P_0 连续，则 f 在 P_0 可微

（偏导连续 $\Rightarrow$ 可微）

$z = f(P)$ 偏导连续 $\xrightarrow{\text{proof}}$ 可微（以二元为例）

由连续 def 得：$\lim\limits_{\Delta P\to 0} f(P+\Delta P) - f(P) = 0$ 　 $\Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta P\to 0}\Delta z = 0$

$\Delta z = f(P+\Delta P) - f(P)$

$= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$

$= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) + f(x+\Delta x, y) - f(x, y)$

$= \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y)}{\Delta y}\cdot\Delta y + \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}\Delta x$

$\xrightarrow{\text{Lagrange 中值}} f_y(x+\Delta x, y+\theta_1\Delta y) + f_x(x+\theta_2\Delta x, y)$, 　 $0<\theta_1, \theta_2<1$

由偏导连续可知 $f_x(x+\theta_2\Delta x, y+\theta_1\Delta y) = f_x(x, y) + \alpha$

$f_y(x+\theta_1\Delta x, y) = f_y(x, y) + \beta$

$\Delta z = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$ 　 $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\alpha = \beta = 0$

theorem：函数 f 在 (x_0, y_0) 的某邻域内∃偏导数，若 (x, y) 属于该邻域，则∃

$$\begin{cases} \xi = x_0 + \theta_1(x - x_0) \\ \eta = y_0 + \theta_2(y - y_0) \end{cases} \quad 0<\theta_1, \theta_2<1 \quad s.t. \quad f(x,y) - f(x_0,y_0) = f_x(\xi, y)(x - x_0) + f_y(x_0, \eta)(y - y_0)$$

（二元中值定理）

一元函数 $y=f(x)$ 可微 $\xrightarrow[\text{reflect}]{\text{几何}}$ 曲线∃不平行于 y 的切线

↓推广

n 元函数 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 可微 $\xrightarrow[\text{reflect}]{\text{几何}}$ 曲面与切平面之间的关系

切平面 def：曲面 S 上一点 P，π 为过 P 点的一个平面，S 上动点 Q 到 P 点与 π 平面的 distance 分别为 d 和 h，while Q 在 S 上从任意方式趋近于 P，恒有 $\frac{h}{d}\to 0$

称 π 为曲面 S 在 P 点的切平面，P 为切点

④ theorem 4：曲面 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在 $P(x_1^0,\cdots,x_n^0,y)$ ∃不平行于 y 轴的切平面 $\Longleftrightarrow$ 函数 f 在 $P_0(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 可微、

（可微 ⟺ 存在切平面）

⇒：由可微得：$y-y_0=\sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(P_0)(x_i-x_i^0)+o(\rho)$

$y_0=f(P_0)$ $\rho=\sqrt{\sum(x_i-x_i^0)^2}$

$y-y_0=\sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(P_0)(x_i-x_i^0)$

f 在 $P_0(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 可微，曲面 $y=f(x_1,\cdots,x_n)$ 在 $P(x_1^0,\cdots,x_n^0,y_0)$ 处

切平面方程为：$y-y_0=\sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(P_0)(x_i-x_i^0)$ 法线方程：$\frac{x_1-x_1^0}{f_{x_1}(P_0)}=\frac{\cdots}{\cdots}=\frac{x_n-x_n^0}{f_{x_n}(P_0)}$

法向量为：$\vec{n}=\pm(f_{x_1}(P_0),f_{x_2}(P_0),\cdots,f_{x_n}(P_0),-1)$

（PPT 题目复习）

特殊函数 $f(x,y)$ example：

特殊 example.

1、$(0,0)$ 连续，!∃ 偏导数：$f(x,y)=|x|+|y|$

2、$(0,0)$!连续，∃偏导数：$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$、

3、$(0,0)$ 连续，∃偏导，!可微：$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$

4、$(0,0)$ 可微，偏导不连续：$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$

5-7：复合函数微分法

PPT 题目可以挑 例4十5 练练手、

复合函数的求导法则：

设函数 $x_i = \varphi_i(s_1, \cdots, s_m)$ $i=1,n$ 定义在 R^m 空间的区域 F 上，(内函数)

函数 $y = f(x_1 \cdots x_n)$ 定义在 R^n 平面 E 上 $\{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_i = \varphi_i(s_1, \cdots, s_m), (s_1, \cdots, s_m) \in F\} \subset E$ (外函数)

可构成复合函数 $y = F(s_1, \cdots, s_m) = f(\varphi_1(s_1 \cdots s_m), \varphi_2(s_1 \cdots s_m), \cdots, \varphi_n(s_1 \cdots s_m))$

链式法则：$\dfrac{\partial y}{\partial s_j} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial y}{\partial x_i} \cdot \dfrac{\partial x_i}{\partial s_j}$ (pay attention : 外函数 f need 可微)

example： $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$

$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不可微

复合函数的全微分：

$dy = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial y}{\partial x_i} dx_i$

$dx_i = \sum_{j=1}^{m} \dfrac{\partial x_i}{\partial s_j} ds_j$

$y = f(g(x))$.

$dy = f'(g)\, \underset{\smile}{dg}$ 常数

$d\,dy = d^2 y = f''(g)\, \overset{(dg)^2}{dg^2} + (dy)'\, d(f'(g))$

$\underbrace{= f''(g)\, dg^2 = f''(g)\, g''(x)\, dx^2}$ = 瞬微分.

$dg^2 = d(dg) = g''\, dx^2$

$d^2 g = d(dg)$

5-8 方向导数和梯度

方向导数 def：函数 $f(x_1,\cdots x_n)$ 在 $P_0(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 的邻域 $U(P_0)\subset R^n$ 内有定义

l 为从 P_0 出发的射线，$\forall\ P(x_1,\cdots,x_n)\in \vec{l}\cap U(P_0)$ $\quad \|P\|=\|P-P_0\|_{R^n}$ $\quad f_{\vec{l}}(P_0)=\sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(P_0)\cos\alpha_i$

若 $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\Delta f}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to 0^+}\dfrac{f(P)-f(P_0)}{\rho}$ 存在，称此极限为函数 f 在 P_0 沿方向 $\vec{l}$ 的方向导数：$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}\Big|_{P_0}$

偏导：多个方向（坐标轴方向）

$=\sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(P_0)\cos\alpha_i$

方向导数：1个方向

思考题 1、先验证 whether 可微

$\lim \dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\rho}$

$\Delta y=k\Delta x$

$\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)}{\rho}=\dfrac{\dfrac{k\Delta x^2}{\sqrt{\Delta x^2+k^2\Delta x^2}}}{\sqrt{\Delta x^2+k^2\Delta x^2}}=\dfrac{k}{1+k^2}$

2、导数 $|x|$ 方向导数

3、导数

梯度 def：若 $f(x_1\cdots x_n)$ 在 $P_0(x_1^0\cdots x_n^0)$ $\exists$ 对所有自变量的偏导数，称 $(f_{x_1}(P_0), f_{x_2}(P_0),\cdots,f_{x_n}(P_0))$ 为 f 在 P_0 的梯度

记作 $\text{grad}\, f(P_0)=(f_{x_1}(P_0)\cdots f_{x_n}(P_0))$

在坐标轴上 $\exists$ $f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$ 的函数（在原点不连续）

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$$

结论：

1、在点可微 $\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial l}=\text{Grad}\, f\cdot \vec{l_1}$

$\vec{l_1}$：单位向量

2、Hesen 矩阵 $f(P)$.

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\end{bmatrix}_P$$

5-9 高阶偏导数

$f(x,y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \lim_{\Delta x\to 0}\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y)}{\Delta x} - \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta x}}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y\to 0}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)\right) - \left(f(x+\Delta x, y) - f(x,y)\right)}{\Delta x\Delta y}$$

$$\xrightarrow{\text{lagrang中值}} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y) - f_x(x+\theta_2\Delta x, y)}{\Delta y}$$

$$\xrightarrow{\text{lagrange中值}} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

若具有二阶偏导数，n元函数的二阶偏导有如下形式：

$$f_{x_i x_i}(x_1\cdots x_n) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)$$

混合偏导数：

theorem: if $f_{x_i x_j}(x_1\cdots x_n)$ 与 $f_{x_j x_i}(x_1\cdots x_n)$ 在 $(x_1^0\cdots x_n^0)$ 连续

则 $f_{x_i x_j}(x_1^0\cdots x_n^0) = f_{x_j x_i}(x_1^0\cdots x_n^0)$

proof:

$F(\Delta x_i, \Delta x_j) = f(\cdots x_i+\Delta x_i \cdots x_j+\Delta x_j \cdots) - f(\cdots x_i+\Delta x_i \cdots x_j) - f(\cdots x_i \cdots x_j+\Delta x_j) + f(\cdots x_i \cdots x_j \cdots)$

$\frac{\partial f}{\partial x} =$

$\frac{\partial f}{\partial x\partial y} =$

$\varphi(x_i) = f(\cdots x_i \cdots x_j+\Delta j \cdots) - f(\cdots x_i \cdots x_j \cdots)$

$F(\Delta x_i, \Delta x_j) = \varphi(x_i+\Delta x_i) - \varphi(x_i) \xrightarrow{\text{微分中值定理}} \exists\, \theta_1 \in (0,1)$ s.t. $\varphi(x_i+\Delta x_i) - \varphi(x_i) = \varphi'(x_i+\theta\Delta x_i)\,\Delta x_i$

$= f_{x_i x_j}(\cdots x_i+\theta\Delta x \cdots x_j+\theta\Delta x_j \cdots)\Delta x_i\Delta x_j = [f_{x_i}(\cdots x_i+\theta\Delta x_i \cdots x_j+\Delta x \cdots) - f_{x_i}(\cdots x_i+\theta\Delta x_i \cdots x_j \cdots)]\Delta x$

$\psi(x_j) = f(\cdots x_i+\Delta x_i \cdots x_j \cdots) - f(\cdots x_i \cdots x_j \cdots)$

$F(\Delta x_i, \Delta x_j) = \psi(x_j+\Delta x) - \psi(x_j)$

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

混合偏导数不相等的特例

5-10 向量映射的微分

def: $E\subset R^n$ 为开集，$P_0\in E$，$f: E\to R^m$，if ∃ 线性变换 A（只依赖 P_0）s.t. $P\in U(P_0)$ 时有

$f(P)-f(P_0) = A(P-P_0)+o(\|P-P_0\|_{R^n})$

$A_{m\times n}$

$$\lim_{P\to P_0}\frac{f(P)-f(P_0)-A(P-P_0)}{\|P-P_0\|_{R^n}} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}_{m\times1}$$ 称为向量映射在 P_0 可微

$$f=\begin{pmatrix}f_1(x_1\cdots x_n)\\ f_2(x_1\cdots x_n)\\ \vdots\\ f_m(x_1\cdots x_n)\end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1^T\\ \vdots\\ A_m^T\end{pmatrix}_{m\times n}$$

$A_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})^T$

A_i 为 f_i 的梯度表示

$f_i(P)-f_i(P_0)=A_i^T(P-P_0)+o(\|P-P_0\|_{R^n})\quad i=1\sim n$

推广至多维空间

theorem: 1、向量映射 f 在 P_0 点某邻域 $U(P_0)$ 内处处 ∃ 一阶偏导数 $\left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{P_0}$ $i=1\sim n$ $j=1\sim m$

且所有这些偏导数在 P_0 连续，f 在 P_0 可微

2、设 $E\subset R^n$ 为开集，$P_0\in E$，$f: E\to R^m$，则 f 在 P_0 点可微 $\Longleftrightarrow$ ∃ 映射 $F_{m\times n}: E\to R^{m\times n}$，它在 P_0 连续

s.t. $f(P)-f(P_0)=F(P)(P-P_0)$，$P\in E$

$$F(P)=\begin{cases} f'(P_0)+\dfrac{\eta(P)}{\|P-P_0\|_{R^n}}(P-P_0)^T & P\neq P_0\\ f'(P_0)\,/\,J_f(P_0) & P=P_0\end{cases}$$

3、同态

4、链式法则

链式法则推导过程

$$H(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & x\neq x_0\\ f'(x_0) & x=x_0\end{cases}$$

$x-x_0=h(t)(t-t_0)$

$\underline{x=h(t)\cdot t}$

$\lim_{x\to x_0}H(x)=f'(x_0)$

$f(x)-f(x_0)=H(x)(x-x_0)$

$=H(x)\,h(t)(t-t_0)$

$$\frac{d\,f(x(t))}{dt}=\lim_{t\to t_0}\frac{f(x(t))-f(x(t_0))}{t-t_0}$$

$$=\lim_{t\to t_0}H(x(t))\cdot h(t) = H(x_0)\,h(t_0)=f'(x_0)\cdot x'(t_0)$$