多项式矩阵

4.1 λ-矩阵

其中元素含有未定元λ，一般地 下列形式矩阵 $A(\lambda)=\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \cdots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \cdots & a_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}(\lambda) & a_{m2}(\lambda) & \cdots & a_{mn}(\lambda) \end{pmatrix}$

$a_{ij}(\lambda)$ 是以λ为未定元数域K上的多项式 （其中，加法/数乘/乘法 与数域上矩阵运算一致）

λ矩阵的逆：若 $A(\lambda)$、$B(\lambda)$ 都为n阶λ-矩阵，且 $A(\lambda)B(\lambda)=B(\lambda)A(\lambda)=I_n$

theorem：一个n×n阶λ矩阵可逆 $\Longleftrightarrow$ $|A(\lambda)|$ 为一个非零的数

proof

$\Longleftrightarrow$ $A(\lambda)=P(\lambda)Q(\lambda)R(\lambda)\cdots$

（初等矩阵的乘积）

λ-矩阵的秩：最高阶非零子式的最高阶数即为矩阵的秩，零矩阵的秩为0

4.2 λ-矩阵在初等变换下的标准型

λ矩阵的初等行变换：

1) 将 $A(\lambda)$ 两行对换
2) 将 $A(\lambda)$ 第i行乘以数域K中非零常数c
3) 将 ··· ··· ··· K上多项式 $f(\lambda)$ 后加到第j行上去

（λ矩阵的相抵关系为一种等价关系）

初等λ矩阵：

1) n阶单位阵 i,j行对换 P_{ij}
2) n阶单位阵乘非0常数c $P_i(c)$
3) n阶单位阵 i行乘以多项式 $f(\lambda)$ 后加至第j行 $T_{ij}(f(\lambda))$

$T_{ij}(f(\lambda))=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & f(\lambda) \cdots & 1 & \\ & & & \ddots \ \ 1 \end{pmatrix}$

等价 def：λ-矩阵 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价 means $A(\lambda)$ 经过 series 初等变换化为 $B(\lambda)$

theorem：$A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价 $\Longleftrightarrow$ 有一系列初等矩阵 $P_1 \sim P_s$ $Q_1 \sim Q_t$ s.t.

trivial

$A(\lambda)=P_1P_2\cdots P_s B(\lambda) Q_1Q_2\cdots Q_t$

theorem：任意非零的 s×n 的λ-矩阵 $A(\lambda)$ 都等价于下列形式矩阵

$\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & & & \\ & d_2(\lambda) & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & d_r(\lambda) & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \ 0 \end{pmatrix}$

其中 $r\geq 1$，$d_i(\lambda)$ $i=1\sim r$ 为首项系数为1的多项式 且 $d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda)$

$A(\lambda)$ 的标准型.

4.3 不变因子

行列式因子 def：设λ-矩阵 rank=r，对于正整数k，$k\in[1,r]$，$A(\lambda)$中必有非零的k级子式

$A(\lambda)$中全部k级子式的首项系数为1的最大公因式 $D_k(\lambda)$ is called $A(\lambda)$ k级行列式因子

行列式因子 theorem：等价的λ-矩阵具有相同的秩与各级行列式因子 (proof)

proof：行列式因子在三类初等变化下不发生改变.

标准型的唯一性

设标准型为：
$$\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & & & \\ & d_2(\lambda) & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & d_r(\lambda) & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$d_i(\lambda)$ 为首项为1的多项式且 $d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)$

k级子式为 $d_{i_1}(\lambda)d_{i_2}(\lambda)\cdots d_{i_k}(\lambda)$

最大公因式为 $\prod_{i=1}^{k} d_i(k)$

theorem：λ-矩阵的标准型是唯一的 (proof)

设左侧为 $A(\lambda)$ 的标准型，由等价 ⇒ 行列式因子 theorem ⇒ k级行列式因子相同

不变因子 def：标准型主对角线上非零元素 $d_1(\lambda)\cdots d_r(\lambda)$ is called λ-矩阵 $A(\lambda)$ 的不变因子

theorem：等价（相抵）的λ-矩阵有相同的行列式因子，从而有相同的不变因子

proof：行列式因子在三类初等变化下不发生改变.

theorem：两个λ-矩阵等价 ⟺ 它们有相同的行列式因子 or 有相同的不变因子 (proof).

⇒：不变因子由行列式因子所决定

⇐：不变因子相同 ⇒ 行列式因子相同 ⇒ 相同标准型.

theorem：矩阵 $A(\lambda)$ 可逆 ⟺ 可表示成一些初等矩阵的乘积

✓ collary：两个 $s\times n$ 的λ-矩阵 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价 ⟺ $\exists$ $P(\lambda)_{s\times s}$ 与 $Q(\lambda)_{n\times n}$ s.t. $B(\lambda)=P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda)$

具有相同的标准型

4.4 矩阵相似的条件

aiming: proof $A \sim B \Leftrightarrow \lambda E-A$ 与 $\lambda E-B$ 等价.

lemma: $\exists$ $n\times n$ 数字 Matix P_0, Q_0 s.t. $\lambda E-A = P_0(\lambda E-B)Q_0$

则 A 与 B 相似　　　proof — trivial

lemma: $\forall$ 不为 0 的 $n\times n$ 数字 matrix A 与 λ-矩阵 $U(\lambda)$ 与 $V(\lambda)$，一定 $\exists$ λ-矩阵 $Q(\lambda)$ 与 $R(\lambda)$，以及数字 matrix U_0. V_0 s.t.

$$\begin{cases} U(\lambda) = (\lambda E-A)Q(\lambda)+U_0 \\ V(\lambda) = R(\lambda)(\lambda E-A)+V_0 \end{cases}$$

proof — trivial

theorem: A.B 为数域 P 上 $n\times n$ matrix，$A \sim B \Longleftrightarrow \lambda E-A$ 与 $\lambda E-B$ 等价

proof

$\Rightarrow$: $A \sim B$，故 $\exists$ 可逆矩阵 P s.t. $P^{-1}AP = B$　$\lambda E-B = \lambda E-P^{-1}AP = P^{-1}(\lambda E-A)P$

故 $(\lambda E-A)$ 与 $(\lambda E-B)$ 等价

$\Leftarrow$: $\lambda E-A$ 与 $\lambda E-B$ 等价　$\exists U(\lambda)$ 与 $V(\lambda)$ s.t. $U(\lambda)(\lambda E-A)V(\lambda) = \lambda E-B$　$P(\lambda)$ 与 $Q_0(\lambda)$ 均为可逆矩阵

由 $U(\lambda) = (\lambda E-B)Q(\lambda)+U_0$

$V(\lambda) = R(\lambda)(\lambda E-B)+V_0$

得

$U(\lambda)(\lambda E-A) = (\lambda E-B)V^{-1}(\lambda)$

$[(\lambda E-B)Q(\lambda)+U_0](\lambda E-A) = (\lambda E-B)V^{-1}(\lambda)$

$(\lambda E-A)\underbrace{U_0}_{\text{数字矩阵}} = (\lambda E-B)\underbrace{[V^{-1}(\lambda)-Q(\lambda)(\lambda E-A)]}_{T}$

T：下证 T 为可逆数字矩阵

$E = V(\lambda)T + V(\lambda)Q(\lambda)(\lambda E-A)$

$= V(\lambda)T + Q(\lambda)U^{-1}(\lambda)(\lambda E-B)$

$= (R(\lambda)(\lambda E-B)+V_0)T +$

$= V_0T + (\lambda E-B)\underbrace{(R(\lambda)T+Q(\lambda)U^{-1}(\lambda))}_{=0}$

V_0, T 均为数字矩阵.

故 T 可逆

$\lambda E-A = T^{-1}(\lambda E-B)V_0$

theorem: 2个 λ-矩阵等价 $\Longleftrightarrow$ 具有相同的不变因子

$$\boxed{\text{推论：矩阵}A \sim \text{矩阵}B \Longleftrightarrow \text{具有相同的不变因子}}$$

4.5 初等因子

def: 将矩阵A的每个次数>0的不变因子分解成互素的一次因式方幂的乘积，所有一次因式方幂 is called 初等因子

行列式因子 $D_1 \sim D_n$

⇕ $d_n = \frac{D_n}{D_{n-1}}$

不变因子 $d_1 \sim d_n$

⇕ 因式分解

初等因子 $\lambda(\lambda)$

(相互决定)

theorem: 1、同级复数矩阵相似 $\Longleftrightarrow$ 它们有相同的初等因子组

2、首先用初等变化，将特征多项式 $\lambda E - A$ 转化为对角形式

其次将对角线上元素分解成互素的一次因式乘积

theorem: 数域K上2个矩阵A、B相似 $\Longleftrightarrow$ 具有相同的初等因子组 (初等因子组为相似关系的全系不变量).

4.6 Jordan 标准型的理论指导

设 若尔当型矩阵为 $J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$，其中 $J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}_{k_i \times k_i}$ $(i = 1 \sim s)$

J_i 的初等因子为 $(\lambda - \lambda_i)^{k_i}$ (proof)

故 J 的全部初等因子为: $(\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdots (\lambda - \lambda_i)^{k_i} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{k_s}$

theorem：每个n级复数矩阵A都与一个若尔当形矩阵相似，若尔当形矩阵除去排列次序外被矩阵A唯一决定

它被称为**A的若尔当标准型**

推论：1、$A \sim \Lambda \iff$ 初等因子均为一次

$\iff$ 不变因子均为一次

$\iff$ $d_n(\lambda)$ 无重根

2、$d_n(\lambda)$ 为A的最小多项式　$[(\lambda-\lambda_1)^{n_1}, \cdots, (\lambda-\lambda_n)^{n_s}] = d_n(\lambda)$

4.7 有理标准型

lemma：设r阶矩阵 $F=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_r & -a_{r-1} & -a_{r-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}$

(1) F的行列式因子为：$\underbrace{1,\cdots,1}_{r-1个}, f(\lambda)$ $f(\lambda)=\lambda^r+a_1\lambda^{r-1}+\cdots+a_r$ proof

(2) F的极小多项式为 $f(\lambda)$

lemma：设λ-矩阵 $A(\lambda)$ 相抵于对角矩阵λ-矩阵 $diag_1\{d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_n(\lambda)\}$，$B(\lambda)$相抵于对角λ-矩阵 $diag_2\{d_1'(\lambda), d_2'(\lambda), \cdots, d_n'(\lambda)\}$

if $diag_1$ 为 $diag_2$ 的一个置换 $A(\lambda)$ 相抵于 $B(\lambda)$

theorem：A为数域K上n阶方阵，A的不变因子组为 $1,\cdots,1,d_1(\lambda),\cdots,d_k(\lambda)$

其中 $\deg d_i(\lambda)=m_i\geq 1$，则 A 相似于下列分块对角阵 F

$$F=\begin{pmatrix} F_1 & & & \\ & F_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & F_k \end{pmatrix}$$

F_i 的阶数 $=m_i$ （F_i为lemma中的矩阵）

↓

theorem：F is called 矩阵A的有理标准型 or Frobenius 标准型

each F_i is called Frobenius 块

def：数域K上n阶矩阵A的不变因子为 $1,\cdots,1,d_1(\lambda),\cdots,d_k(\lambda)$

其中 $d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)$ $i=1\sim k-1$，则 A的极小多项式 $m(\lambda)=d_k(\lambda)$