潘显雨　220502101

数学23-2

考点：1、可约；2、性质与数域变化；3、

高等代数期中练习题

一、判断题（本题共 7 小题，每题 5 分，共 35 分）.

1. （ √ ）多项式 $2x^2+2$ 在实数上为不可约多项式，在复数域上为可约多项式.
2. （ ~~√~~ × ）多项式 x^4+4x^2-4x-3 在有理数域上有重因式. $(f(x), f'(x))=1$
3. （ ~~×~~ √ ）给定的线性空间，存在线性变换再任意基下的矩阵相同. 要变化 与数乘变化 $A=P^{-1}AP$　$PA=AP$
4. （ × ）多项式矩阵可逆当且仅当行列式非零. 常数 n个线性…向量
5. （ √ ）对角线上元素互不相同的上三角矩阵一定相似于对角阵.
6. （ ~~×~~ √ ）若 λ 为可逆线性变换的一个特征值，则 λ 一定不为 0.
7. （ × ）矩阵 A 和 B 相似的充要条件是矩阵 A 和 B 的秩相等.

二、填空题（本题共 4 小题，每 5 分，共 20 分）.

1. 已知三阶矩阵 A 的特征值为 1，2，3，则 $|A^2+2A-E|=$ 196.

A^{-1}. A^*

2. 三维实向量空间上一个线性变换 φ 在某组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$，则该向量空间有 (1) 个一维的 φ 不变子空间.

怎么说. ε_3

3. 矩阵 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ 的初等因子有 $(\lambda-1),(\lambda-2),(\lambda-3)$

4. 在复数域上，矩阵 $\begin{pmatrix}2&3\\3&2\end{pmatrix}$ 的相似若尔当标准型为 $\begin{pmatrix}5&\\&-1\end{pmatrix}$，

$\Rightarrow$ $f(x) = -g(x) + f(x) + g(x)$　　$(f(x)+g(x), g(x)) = f(x)$

$g(x) = -f(x)$　　$(f(x)+g(x), f(x)) = g(x)$

三. （10 分）设 $f(x)$，$g(x)$ 为数域 $\mathbb{F}$ 上的多项式.

$(f(x)+g(x), f(x)g(x)) = 1$.

证明 $\big(f(x), g(x)\big) = 1$ 的充要条件是 $\big(f(x)g(x), f(x)+g(x)\big) = 1$.

$\Leftarrow$: $u(x)f(x)g(x) + v(x)[f(x)+g(x)] = 1$　　$(a(x), b(x)) = d_1(x)$　if $(d_1(x), d_2(x)) = 1$

$f(x)[\cdots] + g(x)[\cdots] = 1$　　$(a(x), c(x)) = d_2(x)$

$(f(x), g(x)) = 1$　　$(a(x), b(x)\cdot c(x)) =$

四.（15 分）设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 5 & -3 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, 对任意的 3 维实向量 α, 定义 $\mathcal{A}(\alpha) = A\alpha$.

$u_1(x)a(x) + u_2(x)b(x) = d_1(x)$

$v_1(x)a(x) + v_2(x)c(x) = d_2(x)$

(1) 证明 $\mathcal{A}$ 是 3 维实向量空间上的线性变换;

(2) 求该线性变换的核与值域并证明他们是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间.

$\ker\mathcal{A} = \{k(\cdots), k\in R\}$

$\mathrm{Im}\,\mathcal{A} = \{k_1(\cdots)+k_2(\cdots), \cdots\}$

五.（10 分）证明矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 与矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 相似.

法一：特征值…，解向量数

法二：具有相同不变因子

六.（10 分）设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$，判断矩阵 A 是否可以对角化，若可以请求出相似变换矩阵 P 和对角矩阵 Λ，使得 $P^{-1}AP = \Lambda$.

七.（10 分）设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$，求矩阵 A 的初等因子，不变因子，行列式因子和若尔当标准型.

复

$D_3(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda^2 \cdots)$

$D_2(\lambda) = 1$

$D_1(\lambda) = 1$

北京林业大学 2020--2021 学年第 二 学期考试试卷（B 卷）

课程名称： 高等代数 课程所在学院： 理学院

考试班级________ 学号________ 姓名________ 成绩________

试卷说明：

1. 本次考试为 闭 卷考试。本试卷共计 4 页，共 7 大部分，请勿漏答；
2. 考试时间为 120 分钟，请掌握好答题时间；
3. 答题之前，请将试卷和答题纸上的考试班级、学号、姓名填写清楚；
4. 本试卷答案写在试卷上；
5. 答题完毕，请将试卷和答题纸交回，不得带出考场；
6. 考试中心提示：请你遵守考场纪律，诚信考试、公平竞争！

得分

一、(3分×10) 判断正误，在括号中写“正确”或者“错误”.

实数域　有理多项式环中∃ ∀次数不可约多项式

1. (√) 有理数域上不存在次数等于 3 的不可约多项式;

2. (√) 如果 $p(x)$ 是一个一次多项式, 那么对任意两个多项式 $f(x), g(x)$, 由 $p(x)|f(x)g(x)$ 可以推出 $p(x)|f(x)$ 或者 $p(x)|g(x)$;

unless $V_1 \oplus V_2$

3. (X) 给定线性空间的两个子空间的并还是该线性空间的子空间;

X　$B\xi=(P^{-1}AP)\xi$

4. (√) 同构映射的逆映射是同构映射;

$P^{-1}AP=B$　$A\xi=\lambda_0\xi$　$A\xi=P^{-1}AP\xi$

5. (√) 相似的矩阵具有相同的~~特征向量~~;

特征多项式/特征值　$PA=AP$ X

6. (√) n 阶方阵如果可以对角化, 则不同特征子空间的维数和等于 n;

7. (√) 如果两个同阶复矩阵具有相同的不变因子, 则这两个矩阵等价;

特征矩阵

8. (√) 给定欧式空间中, 任意正交向量组可以扩充为标准正交基;

9. (X) 欧式空间上正交变换 $\mathcal{A}$ 在任~~意~~基下的矩阵为正交矩阵;

10. (√) 实对称矩阵正定的充要条件是该矩阵的特征值均为正.

$P^T A P = \Lambda$

$|P|\,|A|\,|P| = |A|$

得分

二、（12分）将多项式 x^5-1 在复数域、实数域和有理数域上分解因式

$x=y+1$ $(y+1)^4+(y+1)^3+(y+1)^2+y+1+1$

$=y^4+4y^3+6y^2+4y+1+y^3+3y^2+3y+1+y^2+2y+1+1+y+1$

$=y^4+5y^3+10y^2+10y+5$

$p=5$ $\exists p=5$ s.t. by Eenstein 判别法

$p \mid a_0 \sim a_3$ 且 $p \nmid a_0$ $p \nmid a$

有理数域： $x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$ → 有理数域上的分解.

① $f(x)=x^4+x^3+x^2+1=f_1(x)\cdot f_2(x)$ $\deg f_1=1$ $\deg f_2=3$

作 $x=y+1$ $x^4+x^3+x^2+x+1$

$=(y+1)^4+(y+1)^3+(y+1)^2+y+1+1$

$=y^4-3y^3+2y^2-2y+5$

由 Eisenstein 判别法，∃素数 s.t. $p \mid a_i\ (i=0\sim3)$ 且 $p \nmid a_4$ $p^2 \nmid a_0$

故∃ $f_1\cdot f_2=f(x)$

② $f(x)=h_1(x)\cdot h_2(x)$ $\deg h_1(x)=\deg h_2(x)=2$

$(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$ $bd=1$ $\begin{cases} b=d=1 \\ b=d=-1 \end{cases}$

$=x^4+cx^3+dx^2+ax^3+acx^2+adx+bx^2+bcx+bd$

$=x^4+(a+c)x^3+(ac+d+b)x^2+(ad+bc)x+bd$

$a+c=1$ ① $b=d=1$ ② $b=d=-1$

$ac+b+d=1$ $\begin{cases} a+c=1 \\ ac+2=1 \end{cases}$ $\begin{cases} a+c=1 \\ a+c=-1 \end{cases}$ ×

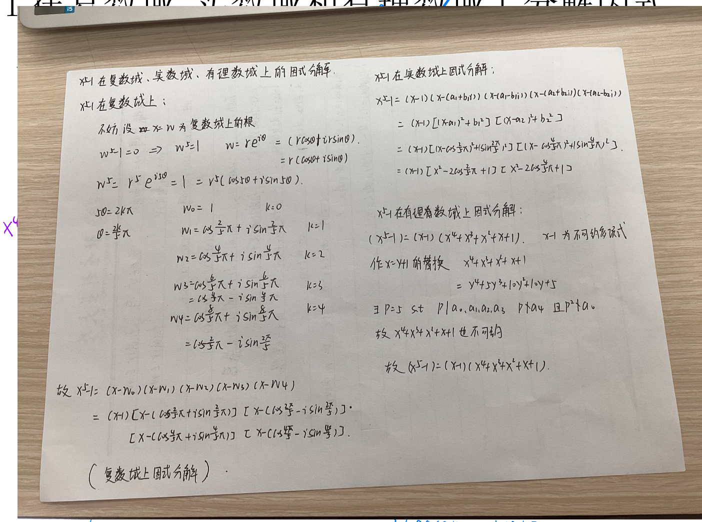
$ad+bc=1$ $ac=-1$

$\begin{cases} c_1=\frac{1+\sqrt5}{2} \\ a_1=\frac{1-\sqrt5}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} c_2=\frac{1-\sqrt5}{2} \\ a_2=\frac{1+\sqrt5}{2} \end{cases}$

故 $(x^2+\frac{1-\sqrt5}{2}x+1)(x^2+\frac{1+\sqrt5}{2}x+1)=h_1(x)h_2(x)$

$\Delta<0$ 故 $h_1(x)$、$h_2(x)$ 为不可约多项式

$x^5-1=(x-1)(x^2+\frac{1-\sqrt5}{2}x+1)(x^2+\frac{1+\sqrt5}{2}x+1)$. → 有理数域上的因式分解.


x^5-1 在复数域、实数域、有理数域上的因式分解.

x^5-1 在复数域上：

不妨设 $x=w$ 为复数域上的根

$w^5-1=0 \Rightarrow w^5=1$ $w=re^{i\theta}=(r\cos\theta+ir\sin\theta)=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$w^5=r^5e^{i5\theta}=1=r^5(\cos5\theta+i\sin5\theta)$.

$5\theta=2k\pi$ $w_0=1$ $k=0$

$\theta=\frac{2k}{5}\pi$ $w_1=\cos\frac25\pi+i\sin\frac25\pi$ $k=1$

$w_2=\cos\frac45\pi+i\sin\frac45\pi$ $k=2$

$w_3=\cos\frac65\pi+i\sin\frac65\pi=\cos\frac45\pi-i\sin\frac45\pi$ $k=3$

$w_4=\cos\frac85\pi+i\sin\frac85\pi=\cos\frac25\pi-i\sin\frac{2\pi}{5}$ $k=4$

故 $x^5-1=(x-w_0)(x-w_1)(x-w_2)(x-w_3)(x-w_4)$

$=(x-1)[x-(\cos\frac25\pi+i\sin\frac25\pi)][x-(\cos\frac{2\pi}{5}-i\sin\frac{2\pi}{5})]\cdot[x-(\cos\frac45\pi+i\sin\frac45\pi)][x-(\cos\frac{4\pi}{5}-i\sin\frac{4\pi}{5})]$.

（复数域上因式分解）.

x^5-1 在实数域上因式分解：

$x^5-1=(x-1)(x-(a_1+b_1i))(x-(a_1-b_1i))(x-(a_2+b_2i))(x-(a_2-b_2i))$

$=(x-1)[(x-a_1)^2+b_1^2][(x-a_2)^2+b_2^2]$

$=(x-1)[(x-\cos\frac25\pi)^2+(\sin\frac25\pi)^2][(x-\cos\frac45\pi)^2+(\sin\frac45\pi)^2]$.

$=(x-1)[x^2-2\cos\frac25\pi+1][x^2-2\cos\frac45\pi+1]$

x^5-1 在有理数域上因式分解：

$(x^5-1)=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$. $x-1$ 为不可约多项式

作 $x=y+1$ 的替换 $x^4+x^3+x^2+x+1$

$=y^4+5y^3+10y^2+10y+5$

$\exists p=5$ s.t. $p \mid a_0,a_1,a_2,a_3$ $p \nmid a_4$ 且 $p^2 \nmid a_0$

故 $x^4+x^3+x^2+x+1$ 也不可约

故 $(x^5-1)=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$.

$2[a_1a_2(a_1+a_2)+a_1b_2+a_2b_1]$

① $=(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

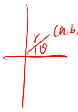
$(a,b)=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$r=\sqrt{a^2+b^2}$

② $a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)=r\cdot e^{i\theta}$

$(a+bi)^2=(r\cdot e^{i\theta})^2=r^2e^{2i\theta}=r^2(\cos2\theta+i\sin2\theta)$.

复平面



$w^5=1 \Rightarrow w=re^{i\theta} \Rightarrow r^5(\cos5\theta+i\sin5\theta)=1+0i$

$w=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$r^5=1$; $\cos5\theta=1$ $\sin5\theta=0$

$5\theta=2k\pi$ $k\in\mathbb{Z}$

$\theta=\frac{2k}{5}\pi$

$w_0=$
$w_1=$
$w_2=$
$w_3=$
$w_4=$
$w_5=$

$w=\cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5}$ $k\in\mathbb{Z}$

得分

三、（12分）证明任意一个 n 维空间可以写成 n 个一维子空间的直和.

基扩张 theorem + 直和分解 + 数学归纳法 proof.

下采用数学归纳法 proof： 1、$n=1$ 时，theorem is trivial

2、不妨设 $n=k-1$ 时结论成立，下证 $n=k$ 时结论也成立.

不妨设 $V=V_1+V_2$ $\dim V_2=k-1$ $\dim V_1=1$ 由前题易得 可将 V_1 与 V_2 分别写成

$V_1=\varepsilon_1$ 为 V_1 的基

$V_2=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_{k-1}$ （η_i 为 W_i 的基）

$=\sum_{i=1}^{k-1}b_i\eta_i$

下证 $V_1\oplus V_2=V$，$\forall\alpha\in V_1\cap V_2$

$\alpha\in V_1\cap W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_n$

故 $\alpha=0$ 即 $V=V_1\oplus V_2=V_1\oplus W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_{k-1}$

即得 ∀n维空间可写成n个一维子空间直和

$P^{-1}AP=\Lambda \Leftrightarrow AP=P\Lambda \Leftrightarrow A(P_1\cdots P_n)=(P_1\cdots P_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$

$AP_i=\lambda_i P_i$ 由于 $P_1 \cdots P_n$ 线无关 $\Leftrightarrow$ A有n个线无关特征向量，

可逆，故 $P_1 \cdots P_n$ 线性无关

得分

四、(12分) 设 A 为 n 阶复矩阵, 如果 $A^2=A$, 证明 A 可以对角化.

$A^2=A$ 得 $A(A-E)=0 \Longleftrightarrow \lambda(\lambda-1)=0$ $\lambda_1=0$ $\lambda_2=1$ 即为特征值

① $\lambda=0$ 时

$|A-\lambda E|x=0$

$Ax=0$

$\dim V=r(A)$

② $\lambda=1$ 时

$|A-\lambda E|x=0$

$(A-E)x=0$

由 $A(A-E)=0$ 得 $r(A)+r(A-E)\leq n$

$r(A)+r(E-A)\geq n$

故 $r(A)+r(A-E)=n$

$r(A-E)=n-r(A)$

故 $\sum \dim(V_i)=n-r(A)+r(A)=n$

A 存在 n个线性无关的特征向量.

故 A 可以对角化

得分

五、(12分) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$, 求矩阵 A 的初等因子, 不变因子, 行列式因子和若当标准型.

$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 8 \\ 3 & -1-\lambda & 6 \\ -2 & 0 & -5-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)^3$ $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$

$=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2 \end{vmatrix}$

不变因子: $d_3=(\lambda+1)^2$ $d_2=\lambda+1$ $d_1=1$

行列式因子: $D_3=(\lambda+1)^3$ $D_2=\lambda+1$ $D_1=1$

初等因子: $(\lambda+1)^2$、$\lambda+1$

Jordan标准型: 3重根 $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

得分

六、(12分) (1) 叙述欧式空间中基的度量矩阵的定义;

(2) 证明欧氏空间中不同基的度量矩阵合同.

(1) 不妨设 $(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)$ 为 V 中一组标准正交基, $\forall \alpha,\beta\in V$ 中有

$$\begin{cases}\alpha=\sum_{i=1}^n x_i\varepsilon_i\\ \beta=\sum_{j=1}^n y_j\varepsilon_j\end{cases} \qquad A_{ij}=\begin{pmatrix}(\varepsilon_1,\varepsilon_1) & \cdots & (\varepsilon_1,\varepsilon_n)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ (\varepsilon_n,\varepsilon_1) & \cdots & (\varepsilon_n,\varepsilon_n)\end{pmatrix} \qquad (\varepsilon_i,\varepsilon_j)=\delta_{ij}\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

$(\alpha,\beta)=(\sum x_i\varepsilon_i,\sum y_j\varepsilon_j)$

$=(x_1\cdots x_n)A(y_1\cdots y_n)^T$ $\quad$ A 即为 $(\varepsilon_1\sim\varepsilon_n)$ 所对应的度量矩阵

$=XAY^T$

(2) $\forall \alpha,\beta\in V$ 在不同标准正交基下的矩阵表示为

$(\varepsilon_1\sim\varepsilon_n)$ 为一组标准正交基

$\alpha=\sum x_i\varepsilon_i=(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)X$

$\beta=\sum y_j\varepsilon_j=(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)Y$

$(\alpha,\beta)=X^TAY$.

A 为 $(\varepsilon_1\sim\varepsilon_n)$ 对应度量矩阵

$(\eta_1\sim\eta_n)$ 为另一组标准正交基

$\alpha=\sum a_i\eta_i=(\eta_1\sim\eta_n)C$

$\beta=\sum b_j\eta_j=(\eta_1\sim\eta_n)D$

$(\alpha,\beta)=C^TBD$

B 为 $(\eta_1\sim\eta_n)$ 对应度量矩阵

不妨设 T 为 $(\eta_1\sim\eta_n)$ 与 $(\varepsilon_1\sim\varepsilon_n)$ 间的过渡矩阵

$(\eta_1\sim\eta_n)=(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)T$

$\alpha=(\eta_1\cdots\eta_n)C=(\varepsilon_1\sim\varepsilon_n)TC$ $\quad$ $TC=X$

$\beta=(\eta_1\sim\eta_n)D=(\varepsilon_1\sim\varepsilon_n)TD$ $\quad$ $TD=Y$

$(\alpha,\beta)=X^TAY=C^TT^TATD$

$=C^TBD$

故 $\exists T$ s.t. $T^TAT=B$, 故 A,B 合同 □

得分

七、(10分) 设 V 为数域 F 上有限维线性空间, $\mathcal{A}$ 为 V 上线性变换. 设 $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ 为数域 F 上多项式, 且有

$$f(x)=f_1(x)f_2(x),\quad (f_1(x),f_2(x))=1.$$

如果 $f(\mathcal{A})=\mathcal{O}$. 令 W_1, W_2 分别为线性变换 $f_1(\mathcal{A})$, $f_2(\mathcal{A})$ 的像. 请证明 $V=W_1\oplus W_2$.

根子空间直和分解

Hamilton-Cayley theorem.

特征多项式.

$V=\ker f(A)$.

要证 $V=W_1\oplus W_2$ 即证 $V=W_1+W_2$ 且 $\forall\alpha\in W_1\cap W_2$ $\alpha=0$.

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

$f(A)=a_nA^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1A+a_0=O$.

$(f_1(x),f_2(x))=1 \Leftrightarrow \exists h(x)\ g(x)$ s.t. $f_1(x)h(x)+f_2(x)g(x)=1$

$f(x)f_1(x)h(x)+f(x)f_2(x)g(x)=f_1(x)f_2(x)$

$=f(x)$

proof:

由题意得 $\begin{cases} W_1 = \mathrm{Im}\, f_1(\mathscr{A}) \\ W_2 = \mathrm{Im}\, f_2(\mathscr{A}) \end{cases}$

由 $(f_1(x), f_2(x))=1$ 得 $\exists\, u(x), v(x)$ s.t.

$u(x)f_1(x) + v(x)f_2(x) = 1$

$u(\mathscr{A})f_1(\mathscr{A}) + v(\mathscr{A})f_2(\mathscr{A}) = \mathscr{E}$

$\forall \alpha \in V \quad u(\mathscr{A})f_1(\mathscr{A})\alpha + v(\mathscr{A})f_2(\mathscr{A})\alpha = \alpha$

不妨设 $\begin{cases} \alpha_1 = f_2(\mathscr{A})v(\mathscr{A})\alpha \\ \alpha_2 = f_1(\mathscr{A})u(\mathscr{A})\alpha \end{cases}$

$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$

$\begin{cases} f_1(\mathscr{A})\alpha_1 = f_1 f_2 v \alpha = f(\mathscr{A})v(\mathscr{A})\alpha = 0 \\ f_2(\mathscr{A})\alpha_2 = f_1 f_2 u \alpha = f(\mathscr{A})u(\mathscr{A})\alpha = 0 \end{cases}$

$\alpha_1 \in \ker f_1 \quad \alpha_2 \in \ker f_2$

由α任意性得 $V = \ker f_1 + \ker f_2$

且$\alpha=0$时 $\alpha_1=\alpha_2=0$ 故 $V = \ker f_1 \oplus \ker f_2$

$V = \ker f_1 \oplus \ker f_2$

$\dim V = \dim \ker f_1 + \dim \ker f_2$

$= \dim \ker f_1 + \dim \mathrm{Im}\, f_1$

$= \dim \ker f_2 + \dim \mathrm{Im}\, f_2$

故 $\mathrm{Im}\, f_1 = \ker f_2 \quad \mathrm{Im}\, f_2 = \ker f_1$

故 $V = \mathrm{Im}\, f_1 \oplus \mathrm{Im}\, f_2 = W_1 \oplus W_2$

$\mathrm{Im}\, f_1(\mathscr{A}) \oplus \mathrm{Im}\, f_2(\mathscr{A})$

$V = \mathrm{Im}\, f_1 + \mathrm{Im}\, f_2$

$0 = \beta_1 + \beta_2 \Longleftrightarrow \beta_1 = \beta_2 = 0$ (下证)

$f(\mathscr{A}) = 0 \qquad f_1(\mathscr{A})f_2(\mathscr{A}) = \theta \Rightarrow f_1(\mathscr{A})\underline{f_2(\mathscr{A})\alpha} = 0$

$\Rightarrow f_1(\mathscr{A})\beta_2 = 0$

同理 $f_2(\mathscr{A})\beta_1 = 0$

题目

设 $f(x)$ 为数域 F 上的多项式，且有

$$f(x) = f_1(x)f_2(x), \quad (f_1(x), f_2(x)) = 1.$$

又设 V 为 F 上 n 维线性空间，T 为 V 的一个线性变换，K 为 $f(T)$ 的核，W_1 为 $f_1(T)$ 的核，W_2 为 $f_2(T)$ 的核．证明：

$$K = W_1 \oplus W_2.$$

$0 = f_2(\mathscr{A})0 = f_2(\mathscr{A})(\beta_1+\beta_2)$

$= \underbrace{f_2(\mathscr{A})\beta_1}_{0} + f_2(\mathscr{A})\beta_2$ 故 $f_2(\mathscr{A})\beta_2 = 0$

同理 $f_1(\mathscr{A})\beta_1 = 0$

题目 **答案**

证 任取 $\beta_1 \in W_1$，则 $f(T)\beta_1 = f_2(T)f_1(T)\beta_1 = \theta$，即 $\beta_1 \in K$，$W_1 \subseteq K$．同理 $W_2 \subseteq K$．

由于 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 互素，故存在 $u_1(x)$ 和 $u_2(x)$，使

$$f_1(x)u_1(x) + f_2(x)u_2(x) = 1.$$

用 T 代 x，得

$$f_1(T)u_1(T) + f_2(T)u_2(T) = I.$$

任取 $\alpha \in K$，则

$$f_1(T)u_1(T)\alpha + f_2(T)u_2(T)\alpha = \alpha. \qquad (1)$$

令 $\alpha_1 = f_2(T)u_2(T)\alpha$，$\alpha_2 = f_1(T)u_1(T)\alpha$，则

$$f_1(T)\alpha_1 = f_1(T)f_2(T)u_2(T)\alpha = u_2(T)f(T)\alpha = \theta.$$

同理，$f_2(T)\alpha_2 = \theta$．即 $\alpha_1 \in W_1$，$\alpha_2 \in W_2$．故由(1)知

$$K = W_1 + W_2.$$

又假如 $\alpha_0 \in W_1 \cap W_2$，则

$$f_1(T)\alpha_0 = f_2(T)\alpha_0 = \theta.$$

代入(1)式，知 $\alpha_0 = \theta$，$W_1 \cap W_2 = \theta$．因此

$$K = W_1 \oplus W_2.$$

$\beta_1 = u(\mathscr{A})\underbrace{f_1(\mathscr{A})\beta_1}_{0} + v(\mathscr{A})\underbrace{f_2(\mathscr{A})\beta_1}_{0} = 0+0$

同理 $\beta_2 = 0+0 = 0$

北京林业大学 2020 --20 21 学年第 二 学期考试试卷(A)

课程名称：　　高等代数　　　　课程所在学院：　理学院

考试班级______________学号__________姓名__________成绩

试卷说明：

1. 考试时间为 120 分钟，闭卷，请掌握好答题时间；
2. 试卷共计 4 页，共 7 大部分，请勿漏答；
3. 答题之前，请将试卷和答题纸上的考试班级、学号、姓名填写清楚；
4. 本试卷所有试题答案写在 试卷 上；（特殊要求请详细说明）
5. 答题完毕，请将试卷正面向外交回，不得带出考场；
6. 考试中心提示：请你遵守考场纪律，诚信考试、公平竞争；

题目	一	二	三	四	五	六	七
得分							

一、判断题（本题共 10 小题，每题 4 分，共 40 分）．

1. （ √ ）多项式 x^2+2 在实数上为不可约多项式，在复数域上为可约多项式.

2. （ X ）多项式 x^3+2x^2-x+1 在有理数域上~~有~~有理根.

3. （ X ）线性空间的线性子空间的补空间是唯一存在的. 正交

4. （ √ ）数域 $\Re$ 上两个有限维线性空间同构的充要条件是它们具有相同的维数.

5. （ √ ）2 维实向量线性空间 $\Re^2$ 上的旋转变换是可逆的. det =1

6. （ √ ）设 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 为线性空间 V 上两个线性变换，满足 $\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B}\mathscr{A}$ ，

   则 $\mathscr{A}$ 的值域，$\mathscr{A}$ 的核空间，以及 $\mathscr{A}$ 的特征子空间均是 $\mathscr{B}$ - 子空间.

7. （ X ）n 维线性空间上的线性变换在某一组基下的矩阵成对角形的充要条件线性变换有 n 个互~~异~~的特征~~值~~. 向量

   线无

8. （ X ）设 V 为一个欧氏空间，则对任意的向量 $\alpha\in V$，任意的实数 k，有 $|k\alpha|=|k||\alpha|$.

9. （ X ）若两个~~数字~~矩阵具有相同的初等因子，则这两个矩阵相似.

10. （ X ）欧式空间 V 上的对称变换在 V 的任意一组基下的矩阵均为实对称矩阵.

    标准正交

二、（10 分）求 $f(x)=x^7-1$ 在复数域和实数域上的标准分解式.

复数域：不妨设 w 为根 $w=re^{i\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $w^7=1=r^7e^{i7\theta}=r^7(\cos7\theta+i\sin7\theta)$ $7\theta=2k\pi$

$\theta=\frac{2k}{7}\pi$

$k=0$： $w_0=1$

$k=1$： $w_1=\cos\frac{2}{7}\pi+i\sin\frac{2}{7}\pi$

$k=2$： $w_2=\cos\frac{4}{7}\pi+i\sin\frac{4}{7}\pi$

$k=3$： $w_3=\cos\frac{6}{7}\pi+i\sin\frac{6}{7}\pi$

$k=4$： $w_4=\cos\frac{6}{7}\pi-i\sin\frac{6}{7}\pi=\overline{w_3}$

$k=5$： $w_5=\overline{w_2}$

$k=6$： $w_6=\overline{w_1}$

$f(x)=x^7-1=(x-w_0)(x-w_1)(x-\overline{w_1})(x-w_2)(x-\overline{w_2})(x-w_3)(x-\overline{w_3})$ 复数域上标准分解式

$\Rightarrow$ 代入 $w_0\sim w_6$ 即可

$f(x)=x^7-1=(x-w_0)[(x-w_1)(x-\overline{w_1})][(x-w_2)(x-\overline{w_2})][(x-w_3)(x-\overline{w_3})]$

$\Rightarrow$ 合并共轭的复根即可.

三.（10 分）设 V 为复数域上的 n 维线性空间，线性变换 $\mathcal{A}$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵是一若尔

当块 $\begin{pmatrix}\lambda & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda\end{pmatrix}$. 证明：$V$ 不能分解为两个非平凡的 $\mathcal{A}$ 不变子空间的直和.

$\mathcal{A}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}\lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \lambda\end{pmatrix}$ $\begin{cases}\mathcal{A}\alpha_1=\lambda\alpha_1+\alpha_2\\ \mathcal{A}\alpha_2=\lambda\alpha_2+\alpha_3\\ \vdots\\ \mathcal{A}\alpha_{n-1}=\lambda\alpha_{n-1}+\alpha_n\\ \mathcal{A}\alpha_n=\lambda\alpha_n\end{cases}$

下用反证法证明：presume V can be divided into 2 non-trivial $\mathcal{A}$-子空间直和

$V=V_1\oplus V_2$ 且 $\forall\alpha\in V_1$ $\mathcal{A}\alpha\in V_1$ $\forall\beta\in V_2$ $\mathcal{B}(\beta)\in V_2$ $L(V_1)=\{\alpha_1\sim\alpha_m\}$ $L(V_2)=\{\alpha_m\sim\alpha_n\}$

$\forall\gamma\in V_1$ $\gamma=\sum_{i=1}^{m}k_i\alpha_i$ $(m<n)$ $\forall\gamma\in V_2$ $\gamma=\sum_{j=m}^{n}k_j\alpha_j$

$\mathcal{A}(\gamma)=\mathcal{A}(\sum k_i\alpha_i)=\sum k_i\mathcal{A}(\alpha_i)$

V_1 为 $\mathcal{A}$-子空间

故 $\forall\gamma\in V_1$ $\mathcal{A}(\gamma)\in V_1$

$\mathcal{A}(\gamma)=\sum k_i\mathcal{A}(\alpha_i)=L(\alpha_1\sim\alpha_m,\alpha_{m+1})$

V_1 不是 $\mathcal{A}$-子空间

$\mathcal{B}(\gamma)=\mathcal{B}(\sum k_j\alpha_j)=\sum k_j\alpha_j$

V_2 为 $\mathcal{B}$-子空间

$\forall\gamma\in V_2$ $\mathcal{B}(\gamma)\in V_2$

$\mathcal{B}(\gamma)=\sum_{j=m+1}^{n}k_j\mathcal{B}(\alpha_j)=L(\alpha_{m+1}\cdots\alpha_n)$

故 V_2 为 $\mathcal{B}$-子空间

课后题原题

故与条件矛盾，故 presume 不成立 □

四.（8 分）设 V_1 与 V_2 分别是齐次方程组 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ 与 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 的解空间，证明 $\mathfrak{R}^n=V_1\oplus V_2$.

$x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ 的解空间为 V_1

$x_1=x_2=\cdots=x_n$ 解空间为 V_2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}=0$$

$A\xi=0$

$\dim(V_1)=n-1$

$\dim V_2=1$

故 $\dim V_1+\dim V_2=n$

$n=\dim V_1+\dim V_2$

$R^n=V_1\oplus V_2$.

$\square$

$(t_1, t_n)=(t_1-\frac{1}{n}\sum t_i, t_2-\frac{1}{n}\sum t_i, \cdots, t_n-\frac{1}{n}\sum t_i)+$

$(\frac{1}{n}\sum t_i, \frac{1}{n}\sum t_i, \cdots, \frac{1}{n}\sum t_i)$

五.（10 分）求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的若尔当标准型.

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & (\lambda-1)^3 \end{vmatrix}$$

$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$

Jordan：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

六.（12 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，求正交矩阵 T 使得 $T^{-1}AT$ 为对角阵.

$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda&-1&1\\-1&-\lambda&1\\1&1&-\lambda\end{vmatrix}$

$=(1-\lambda)^2(\lambda+2)$ $\lambda_1=\lambda_2=1$ $\lambda_3=-2$

① $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时

$|A-\lambda E|=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\-1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$

$(A-\lambda E)\xi=0$

$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

② $\lambda_3=-2$ 时

$|A-\lambda E|=\begin{pmatrix}2&-1&1\\-1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$

$(A-\lambda E)\xi=0$

$\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

$W_1=\xi_1=(1,0,1)$

$W_2=\xi_2-k_1\xi_1=(-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})$

$k_1=\frac{(\xi_2,W_1)}{(W_1,W_1)}=-\frac{1}{2}$

$V_1=\frac{W_1}{\|W_1\|}=(\frac{1}{\sqrt2},0,\frac{1}{\sqrt2})$

$V_2=\frac{W_2}{\|W_2\|}=(-\frac{1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6})$

$V_3=(\frac{-1}{\sqrt3},\frac{-1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3})$

$T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{-1}{\sqrt6}&\frac{-1}{\sqrt3}\\0&\frac{2}{\sqrt6}&\frac{-1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$

$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-2\end{pmatrix}$

七.（10 分）设 $\mathcal{A}$ 为欧氏空间 V 上一个线性变换，并且满足对于任意的 $\alpha,\beta\in V$，$(\mathcal{A}(\alpha),\beta)=-(\alpha,\mathcal{A}(\beta))$，请证明 $\mathcal{A}$ 在标准正交基下的矩阵为反对称矩阵（$A=-A'$）.

不妨设 $(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)$ 为线性变换 $\mathcal{A}$ 的一组标准正交基 $\mathcal{A}(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)=(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)A$ $A=(a_{ij})_{n\times n}$

$\forall\alpha,\beta\in V$ 有 $\alpha=\sum_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i$ $\beta=\sum_{j=1}^{n}y_j\varepsilon_j$ $\mathcal{A}\alpha=\sum a_i\mathcal{A}(\varepsilon_i)$ $\mathcal{A}\beta=\sum b_j\mathcal{A}(\varepsilon_j)$

$=(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)X$ $=(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)Y$

$\mathcal{A}\varepsilon_i=(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)\begin{pmatrix}a_{1i}\\\vdots\\a_{ni}\end{pmatrix}$

$\begin{cases}(\mathcal{A}\varepsilon_i,\varepsilon_j)=a_{ij}\\(\varepsilon_i,\mathcal{A}\varepsilon_j)=a_{ji}\end{cases}$

$(\mathcal{A}\alpha,\beta)=(\sum x_i\mathcal{A}(\varepsilon_i),\sum y_j\varepsilon_j)$

$=a_{ij}x_iy_j$

$(\alpha,\mathcal{A}\beta)=(\sum x_i\varepsilon_i,\sum\mathcal{A}(\varepsilon_j)y_j)$

$=a_{ji}x_iy_j$

由 $(\mathcal{A}\alpha,\beta)=-(\alpha,\mathcal{A}\beta)$ 得 $a_{ij}x_iy_j=-a_{ji}x_iy_j$

故 $a_{ij}=-a_{ji}$ $\Rightarrow$ A 为反对称矩阵

六.（12 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，求正交矩阵 T 使得 $T^{-1}AT$ 为对角阵.

七.（10 分）设 $\mathcal{A}$ 为欧氏空间 V 上一个线性变换，并且满足对于任意的 $\alpha,\ \beta\in V$，$(\mathcal{A}(\alpha),\beta)=-(\alpha,\mathcal{A}(\beta))$，请证明 $\mathcal{A}$ 在标准正交基下的矩阵为反对称矩阵（$A=-A'$）.