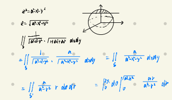
第一型曲面积分

def： S为空间中可求面积的曲面，$f(x,y,z)$ 为 def 在 S 上的函数

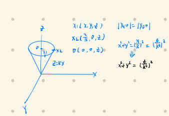
若 ∃ $\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i = I$，称此极限为 $f(x,y,z)$ 在 S 上的第一型曲面积分 $I=\iint_S f(x,y,z)\,dS$

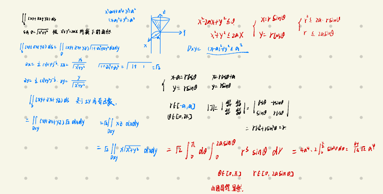
$$I=\iint_S f(x,y,z)\,dS=\iint_S f(x,y,z(x,y))$$

PPT题目：① 计算 $\iint_S \frac{1}{z}\,dS$，S为 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被 $z=h$ $(0<h<a)$ 所截的顶部



② $\iint_S (xy+yz+xz)\,dS$，S为圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被 $x^2+y^2=2ax$ 所截部分





第一型曲面积分的计算：

1、若 ∃ 光滑曲面 S: $z=z(x,y)$ $(x,y)\in D$ $f(x,y,z)$ 为 S 上的连续 function 则 essential

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS=\iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy$$

S曲面映射至D曲面

proof: $z=f(x,y)$ $F(x,y,z)=z-f(x,y)$

切向量

$\vec{n}(-f_x,-f_y,1)$

$\vec{z}(0,0,1)$

$$\iint_D f(x,y,z)\,dS=\iint_D f(x,y,z)\frac{1}{\cos\theta}\,dx\,dy$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{n}\cdot\vec{z}}{|\vec{n}|\,|\vec{z}|}=\frac{1}{\sqrt{z_x^2+z_y^2+1}}\qquad \frac{1}{\cos\theta}=\sqrt{z_x^2+z_y^2+1}$$

$$\iint_D f(x,y,z)\,dS=\iint_D f(x,y,z)\sqrt{z_x^2+z_y^2+1}\,dx\,dy$$

2、含参量形式表示的光滑曲面

$$S=\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\\ z=z(u,v)\end{cases}\qquad \begin{cases}E=x_u^2+y_u^2+z_u^2\\ F=x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v\\ G=x_v^2+y_v^2+z_v^2\end{cases}$$

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS=\iint_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\underbrace{\sqrt{EG-F^2}}\,du\,dv$$

↓

为 Jacobi 行列式 加和后的另一种形式

期末总结中值定理

（导出2个内容）

具体的推导过程：

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \lim_{\|T\|\to 0} \sum f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\,|\Delta S_i|$$

$$= \lim_{\|T\|\to 0} \sum f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i) \iint_{\sigma_i} \sqrt{1+z_x(x,y)^2+z_y(x,y)^2}\,dx\,dy$$

$$= \lim_{\|T\|\to 0} \sum f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\sqrt{1+z_x(\xi_i',\eta_i')^2+z_y(\xi_i',\eta_i')^2}\,dx\,dy$$

$$= \lim \iint f(x,y,z)\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy$$

复习思考题：

1、曲面S方程为：$z=z(x,y)$，质量分布密度函数 $\rho(x,y,z)$，导出曲面块S的重心和转动惯量公式

2、第一型曲面积分的轮换对称性

3、给出第一型曲面积分的中值定理并给出 proof

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_S f(x,y,z)\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy \xrightarrow{\text{积分第中值定理}} \underset{\in[m,M]}{\underline{f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)}}\cdot|\sigma S|$$

$$\exists\,(x_i,y_i,z_i)\in S \xrightarrow{\text{第一积分中值定理}} f(x_i,y_i,z_i)\iint_S \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy$$

$$= f(x_i,y_i,z_i)\cdot|\sigma S|$$

$f(x,y,z)$ 连续

$$m \le f(x,y,z) \le M$$

$$\iint_S m\,dS \le \iint_S f(x,y,z)\,dS \le \iint_S M\,dS$$

$$m \le f(x_i,y_i,z_i) \le M$$

$$\frac{\iint_S x\,\rho(x,y,z)\,dS}{\iint_S \rho(x,y,z)\,dS};\quad \frac{\iint_S (x^2+y^2+z^2)\,f(x,y,z)\,dS}{\iint_S f(x,y,z)\,dS}$$

绕原点旋转

$$\frac{\iint_S \frac{|Ax+By+Cz+D|^2}{A^2+B^2+C^2}\,f(x,y,z)\,dS}{\iint_S f(x,y,z)\,dS}$$

绕某平面

曲线和曲面积分

的轮换性

第二型曲面积分

一、曲面的侧

双侧曲面：通常用 $z=z(x,y)$ 所表示的曲面为双侧曲面 $\begin{cases} \text{上侧：法线与 z 轴正向夹角为锐角一侧 \quad 下侧：} \\ \text{外侧：法线方向朝外} \end{cases}$

单侧曲面：Möbins 带

二、第二型曲面积分的概念

def：P、Q、R 为 def 在双侧曲面 S 上的函数

$\Delta S_{i(yz)}$，$\Delta S_{i(zx)}$，$\Delta S_{i(xy)}$ 分别表示 S_i 在三个坐标面上投影面积

$\Delta S_{i(xy)} = \begin{cases} \geq 0 & S_i \text{为上侧} \\ \leq 0 & \text{下} \end{cases}$ $\quad \Delta S_{i(yz)} \begin{cases} \geq 0 & \text{前} \\ \leq 0 & \text{后} \end{cases}$ $\quad \Delta S_{i(xz)} \begin{cases} \geq 0 & \text{右} \\ \leq 0 & \text{左} \end{cases}$

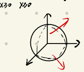
$$\iint_S P(x,y,z)\,dydz + Q(x,y,z)\,dzdx + R(x,y,z)\,dxdy = I$$

$\iint_S xyz\,dx\,dy$

$S:\ x^2+y^2+z^2=1$ 在 $x\geq 0\ \ y\geq 0$

$S_1:\ z=\sqrt{1-x^2-y^2}$

$S_2:\ z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$



$$\iint_S xyz\,dxdy = \underbrace{\iint_{S_1} xyz\,dxdy}_{\text{正方向}} + \underbrace{\iint_{S_2} xyz\,dxdy}_{\text{负方向}}$$

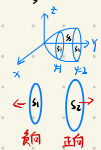
$$= \iint_{D_1} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy - \iint_{S_2} -xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$$

$$= 2\iint_D xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^2\sin\theta\cos\theta\sqrt{1-r^2}\cdot r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^3\sqrt{1-r^2}\cdot\sin 2\theta\,dr\,d\theta$$

$\begin{cases} x=r\cos\theta & \theta\in[0,\frac{\pi}{2}] \\ y=r\sin\theta & r\in[0,a] \end{cases}$

$\iint_S \frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{x^2+z^2}}\,dxdz$，其中 S 为曲面 $y=x^2+z^2$ 与 $y=1$ $y=2$ 所围立体表面的外侧



$S=S_1\cup S_2\cup S_3$ $\quad \iint_S \frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{x^2+z^2}}\,dxdy = \iint_{S_1}\alpha\,dxdy + \iint_{S_2}\alpha\,dxdy + \iint_{S_3}\alpha\,dxdy$

$S_1:\ \begin{cases} y=1 \\ \underline{x^2+z^2\leq 1}\ D_1 \end{cases}$ $\quad \begin{matrix} x=r\cos\theta \\ z=r\sin\theta \end{matrix}$ $\quad \iint_{S_1} \frac{e}{\sqrt{x^2+z^2}}\,dxdz = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 \frac{e}{r}\cdot r\,dr = \underline{2\pi e}$ $\ -2e\pi$ 负方向

$\qquad D_1$

$S_2:\ \begin{cases} y=2 \\ \underline{x^2+z^2\leq 2}\ D_2 \end{cases}$ $\quad \begin{matrix} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{matrix}$ $\quad \iint_{S_2} \frac{e^{\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2+z^2}}\,dxdz = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}} \frac{e^{\sqrt{2}}}{r}r\,dr = 2\sqrt{2}\pi e^{\sqrt{2}}$ 正方向

$\qquad D_2$

$S_3:\ \begin{cases} x^2+z^2=y \\ y\in[1,2] \end{cases}$ $\quad \iint_{S_3} \frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{y}}\,dxdz = \iint_{S_3} \frac{e^{\sqrt{x^2+z^2}}}{\sqrt{x^2+z^2}}\,dx\,dz = -\iint_{D_3}\frac{e^r}{r}r\,dr = -2(e^{\sqrt{2}}-e)\pi$ 负方向

$\underline{1\leq x^2+z^2\leq 2}\ D_3 \qquad D_3 \qquad D_3$

三、第二型曲面积分的计算

theorem 1：设 $R(x,y,z)$ 为 def 在光滑曲面 $S:\ z=z(x,y)$ 上的连续函数，以 S 上侧为正侧

（S 的法线方向与 z 轴正向成锐角）

$x=x(y,z)$，S 取法线与 x 轴正向成锐角一侧

$y=y(x,z)$，S 取法线与 y 轴正向成锐角一侧

$$\iint_S R(x,y,z)\,dxdy = \iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,dxdy$$

光滑曲面 S 由参数方程 $S:\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \quad (u,v)\in D \\ z=z(u,v) \end{cases}$

$$\iint_S P\,dydz = \pm\iint_S P[x(u,v),y(u,v),z(u,v)]\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\,du\,dv$$

$$\iint_S Q\,dzdx = \pm\iint_S Q[x(u,v),y(u,v),z(u,v)]\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\,du\,dv$$

$$\iint_S R\,dxdy = \pm\iint_S R[x(u,v),y(u,v),z(u,v)]\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,du\,dv$$

两类曲面积分的联系

S为光滑曲面，并以上侧为正侧，R为S上连续函数，曲面积分在S正侧进行

$$\iint_S R(x,y,z)\,dxdy = \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\,\Delta S_i(xy)$$

由 $\Delta S_i = \iint_{S_i(xy)} \frac{1}{\cos r}\,dxdy \xrightarrow{\text{中值定理}} \exists\ \frac{1}{\cos r_i}\cdot \Delta S_i(xy) = \Delta S_i \quad \Delta S_i(xy) = \cos r_i \cdot \Delta S_i$

$$R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\,\Delta S_i(xy) = R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos r_i\,\Delta S_i$$

$$\iint_S R(x,y,z)\,dxdy = \iint_S R(x,y,z)\cos r\cdot ds \Longleftarrow \iint_{\Delta S_i} R\,ds = \iint_{\Delta S_i(xy)} R\,\frac{1}{\cos r_i}\,dxdy$$

故
$$\begin{cases}\iint_S R(x,y,z)\,\underbrace{dxdy}_{\text{带方向}} = \iint_S R(x,y,z)\cos r\,ds & \cos r：与z轴夹角\\ \iint_S P(x,y,z)\,\underbrace{dydz}_{\text{带方向}} = \iint_S P(x,y,z)\cos\alpha\,ds & \cos\alpha：与x轴夹角\\ \iint_S Q(x,y,z)\,dxdz = \iint_S Q(x,y,z)\cos\beta\,ds & \cos\beta：与y轴夹角\end{cases}$$

$dzdx$ 不能换

$$\iint_S P(x,y,z)\,dydz + Q(x,y,z)\,dzdx + R(x,y,z)\,dxdy = \iint_S [P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos r]\,ds$$

$$= \pm\iint_S [P(x,y,z(x,y))\overset{\frac{\cos\alpha}{\cos r}}{(-z_x)} \pm Q(x,y,z(x,y))\overset{\frac{\cos\beta}{\cos r}}{(-z_y)} \pm R(x,y,z(x,y))\cdot \overset{\frac{\cos r}{\cos r}}{1}]\,\underbrace{\cos r(x,y,z)\,ds}_{dxdy}$$

将3个投影转化为1个xy上的投影

while $z=z(x,y)$ 时 $F(x,y,z) = z - z(x,y)$
$$\begin{cases}\cos\alpha = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{-z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\\ \cos\beta = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{-z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\\ \cos r = \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\end{cases}$$

$$ds = \frac{1}{\cos r}\,dxdy = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

Gauss 公式与 Stokes 公式

三重积分 ~ 第二型曲面积分　　　第二型曲面积分 ~ 第二型曲线积分

$\int_a^b \frac{dF}{dx} dx = F(b) - F(a)$　　N-L

$\oint_L P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$　　Green.　　平面曲域二重积分与边界曲线上第二型曲线积分

Gauss公式 def：Ω 为 R^3 中光滑曲面围成的有界闭域，它可同时拆分为有限个区域的并，设函数 $P、Q、R$ 都在 Ω 上连续可微

$$\oiint_S P dydz + Q dzdx + R dxdy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz$$

$$\Delta V = \iiint_V dxdydz = \frac{1}{3} \oiint_S x dydz + y dzdx + z dxdy$$

$$\parallel$$

$$\iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) d\sigma$$

$$\oiint_{\partial\Omega} P\cos\alpha \cdot dS = \oiint_{\partial\Omega} P dydz = \iiint_\Omega \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz$$

Stokes 公式 def：Σ 由有限片连续可微双侧曲面拼接，设 $P、Q、R$ 为 def 在 Σ 连续可微函数

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

proof：下证 $\oint_{\partial\Sigma} P dx = \iint_\Sigma \frac{\partial P}{\partial z} dzdx - \iint_\Sigma \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$　　由法向量坐标得 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(\frac{-z_x}{\sqrt{\cdots}}, \frac{-z_y}{\sqrt{\cdots}}, \frac{1}{\sqrt{\cdots}}\right)$　　$z_y = -\cos\beta \cdot \sqrt{\cdots} = -\cos\beta \cdot \frac{1}{\cos\gamma}$

$$\oint_{\partial\Sigma} P(x,y,z(x,y)) dx = \iint_\Sigma -\left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}\right) dxdy = \iint_\Sigma \frac{\partial P}{\partial z} dzdx - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$$

$$\oint_{\partial\Sigma} P dx = \iint_\Sigma \frac{\partial 0}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \iint_\Sigma -\frac{\partial P}{\partial y} dxdy$$　（Green公式得）

$$\iint_\Sigma \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cdot z_y\right) dxdy = \iint_\Sigma \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cdot -\cos\beta \cdot \sqrt{\cdots}\right) dxdy = \iint_\Sigma \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cdot -\cos\beta\right) \frac{1}{\cos\gamma} dxdy = \iint_\Sigma \frac{\partial P}{\partial z} \cdot -\cos\beta \cdot dS = \iint_\Sigma -\frac{\partial P}{\partial z} dzdx$$

设 $\Omega \in R^3$ 为空间单连通区域，若函数 P、Q、R 在 Ω 上连续，且有一阶连续偏导数，以下4个条件等价

(1) Ω 内 $\forall$ 光滑封闭曲线有：$\oint Pdx+Qdy+Rdz=0$

(2) Ω 内 $\forall$ ------ 有曲线积分 $\int_L Pdx+Qdy+Rdz$ 与路线无关

(3) $Pdx+Qdy+Rdz$ 为 Ω 内某一函数 u 的全微分： $du=Pdx+Qdy+Rdz$

(4) $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，$\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}$，$\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}$，在 Ω 内处处成立

外微分形式

① $\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=\oint_{L_1+L_2} Pdx+Qdy+Rdz$

$$\int_{L_1} Pdx+Qdy+Rdz=\int_{L_2^{-1}} Pdx+Qdy+Rdz$$

x	y	z
P	Q	R

② 由①得显然

③ $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\int_{x_0}^{x+\Delta x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z}\overset{PQR}{}\,dzdydx-\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z}\overset{PQR}{}\,dzdydx}{\Delta x}=\frac{\int_x^{x+\Delta x}Pdx}{\Delta x}\xrightarrow{\text{中值定理}}=P$$

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y,z)\\ \frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y,z)\\ \frac{\partial u}{\partial z}=R(x,y,z)\end{cases}$$

$du=Pdx+Qdy+Rdz$

④ $$\oint_{\partial\Sigma} Pdx+Qdy+Rdz=\iint_\Sigma\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

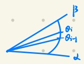
$$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}$$

7.1 积分学在几何学中的应用

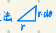
7.1.1 平面图形的面积

笛卡尔坐标系：$S=\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$

极坐标系：$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\,d\theta$



微元法



$ds=\frac{1}{2}r^2 d\theta$

7.1.2 空间曲线的弧长

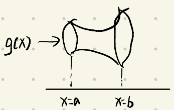
$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有连续的导函数

笛卡尔坐标系：$S(T)=\int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,dt$ n维勾股定理

极坐标系：$\begin{cases} x=r(\theta)\cos\theta \\ y=r(\theta)\sin\theta \end{cases}$

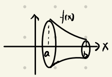
7.1.3 空间区域的体积

1、Ω 为介于平面 $x=a$ 和 $x=b$ 之间一个空间区域，用坐标为 x 的平面去截取 Ω，所得截面面积为 $g(x)$，计算 Ω 的体积 V



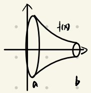
$V=\int_a^b g(x)\,dx$

2、$y=f(x)\geq 0$ 为区间 $[a,b]$ 上一条连续曲线，让此条曲线绕 x 轴旋转一周，得一旋转体



$V=\int_a^b \pi f^2(x)\,dx$

7.1.4 旋转曲面的面积



$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$

$S=2\pi\int_a^b y(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt$

十、多重积分

10.3 矩形区域上二重积分

$\int_I f\,d\sigma=\int_a^b\int_c^d f(x)\,dx\,dy$

整理总结

十一、曲线积分

11.1 第一型曲线积分

平面曲线Γ有显式表达式 $y=\varphi(x)$ $(a\le x\le b)$ 其中φ 在$[a,b]$上连续

$$\int_\Gamma f\,ds=\int_a^b f(x,\varphi(x))\sqrt{1+[\varphi'(x)]^2}\,dx$$

Γ：曲线弧长

f：Γ上的密度函数

几何意义理解：

(1) 二维平面上曲线的质量

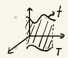
$\int_\Gamma f\,ds$

f—密度函数

$\int_\Gamma ds$ — 曲线长度

(2) 三维空间中"篱笆墙"面积

$\int_\Gamma f\,ds$



f为曲线对应空间中高度

11.2 第二型曲线积分

Γ为R^3中有向曲线，连续映射$F:\Gamma\to R^3$

$$\int_\Gamma F(r)\cdot dr=\int_\Gamma P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

$$=\int_\alpha^\beta\left[P(x(t),y(t),z(t))\,x'(t)+Q(x(t),y(t),z(t))\,y'(t)+R(x(t),y(t),z(t))\,z'(t)\right]dt$$

十二、曲面积分

12.2 第一型曲面积分

曲面Σ可用显式方程：$z=\varphi(x,y)$表示，D为有面积的平面闭区域

$$\int_\Sigma f\,d\sigma=\iint_D f(x,y,\varphi(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

曲面面积、 曲面上密度函数

$d\sigma$为面积微元：$d\sigma=\sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$

12.3 第二型曲面积分

设Σ为R^3中定向的光滑曲面，Σ上单位向量记为n，F为向量值函数

$d\sigma=n\,d\sigma$ 是Σ上的面积元素，称 $\int_\Sigma F\,d\sigma=\int_\Sigma F\cdot n\,d\sigma=\int_\Sigma(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,d\sigma$

$F=(P,Q,R)$ $n=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ $\alpha、\beta、\gamma$为n的方向角 $\underline{=\iint_\Sigma P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy}$

$$=\iint\left(P\cdot r\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}+Q\cdot r\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}+R\cdot r\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)dudv$$

整理总结