第六章：线性空间

映射与集合

$\sigma: M \longrightarrow N$　　N：陪域
$a \longrightarrow \sigma(a)$　　M：定义域
σ：对应法则

Injection：$\forall a,b\in M$，$a\neq b$，则 $\sigma(a)\neq\sigma(b)$
单射

Surjection：$\forall b\in N$，$\exists a\in M$，s.t. $\sigma(a)=b$
满射

Bijection：$\forall b\in N$，$\exists!\, a\in M$，s.t. $\sigma(a)=b$
双射

$\sigma^{-1}: M_2\to M_1$
$b\to a$

则 $\sigma\sigma^{-1}=1_{M_2}$　$\sigma^{-1}\sigma=1_{M_1}$　称 σ^{-1} 为 σ 的逆映射.

Def　1_{M_1}：$M_1\to M_1$
$a\to a$.

乘积映射

Def、$\sigma: M_1\to M_2$
$\tau: M_2\to M_3$

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dr, dashed, "\tau\sigma"'] & M_2 \arrow[d, "\tau"] \\ & M_3 \end{tikzcd}$$

交换图

$\tau\sigma: M_1\to M_3$
$a\to \sigma(\tau(a))$

1. $M_3\to M_4$：$\varphi(\tau\sigma)=(\varphi\tau)\sigma$
2. 映射的乘积不具有交换性

检验所指运算是否为线性空间

(1) R^+：$a\oplus b=ab$　$\forall a,b\in R^+$　　负元 $\frac{1}{a}$、零元 1.
$k\circ a=a^k$　$\forall a\in R^+$　$k\in R$

(2) V为ℂ上线性空间，+ 加法 contain，数乘 change into
$k\cdot a=\bar{k}a$　$\forall k\in\mathbb{C}$，$a\in V$（k的共轭复数）　改变后是否仍为线性空间

线性空间

"+"：$V\times V\longrightarrow V$　　"·"：$\mathbb{R}\times V\to V$
加法　$(\alpha,\beta)\to\alpha+\beta$　　数乘　$(k,\alpha)\to k\alpha$

n维向量空间：$V=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_i\in K\}=K^n$

V-非空集合，P-数域，if 满足加法4条，数乘4条规则
称 $(V,+,\cdot)$ 为数域P上的线性空间

1. $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ ✓　　5. $1\alpha=\alpha$ ✓
2. $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$ ✓　　6. $k(l\alpha)=(kl)\alpha$ ✓
3. $0+\alpha=\alpha$　　7. $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$ ✓
4. $\forall\alpha$，$\exists\beta$ s.t. $\alpha+\beta=0$　　8. $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$ ✓

"V"是线性空间的子集时无需验证.

简单性质：1. 零元素是唯一　proof：反证法
2. 负元是唯一
3. $0\cdot\alpha=\vec{0}$，$k\vec{0}=\vec{0}$，$(-1)\alpha=-\alpha$

8条性质：1. 加法：结合、分配、交换　　2. 数乘：结合，分配.　3. ±1. 0：1乘，负元，0元

设V是域F上的线性空间，则

1. 向量组 $\alpha_1\sim\alpha_s$ { 线性相关：有不全为0 $k_1\sim k_s$，s.t. $\sum_{i=1}^{s}k_i\alpha_i=0$
　　　　　　　　　　　　线性无关：只有全为0的 $k_1\sim k_s$，s.t. $\sum_{i=1}^{s}k_i\alpha_i=0$.

2. V的非空有限子集 { 线性相关：给该子集元素的一种编号，所得向量组线性相关
　　　　　　　　　　线性无关：编号所得向量组线性无关

3. V的无限子集 W { 线性相关：有一个有限子集线性相关
　　　　　　　　　线性无关：任一有限子集线性无关

向量相关的秩、极大线性无关组等概念，同样适用于向量组

维数·基·坐标

V是 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，V中向量集S满足下述2个条件
1) 向量集S为线性无关
2) V中 ∀ 向量可以由向量集S中有限多个向量线性表出
称S为V的一个基
只含有零向量的线性空间的基规定为空集

example：
$\mathbb{P}[x]=\{f\mid\partial f<n\}$　$f=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$　$a_i\in P$
基：$\{1,x,x^2,\cdots,x^n\}$ or $\{1,x-1,(x-1)^2,\cdots,(x-1)^n\}$

$$\underbrace{(1,x-1,(x-1)^2,\cdots,(x-1)^n)}_{\eta}=\underbrace{(1,x,\cdots,x^n)}_{\varepsilon}\begin{pmatrix}1&-1&1&\cdots&0\\0&1&-2&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$$

过渡矩阵 A

$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)B$　　$\varepsilon_i=\sum_{k=1}^{n}\eta_k b_{ki}$
$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A$

proof：$(\eta_1\cdots\eta_n)=(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)A=(\eta_1,\cdots\eta_n)BA$　　$BA=E$

$\eta_1=a_{11}\varepsilon_1+a_{21}\varepsilon_2+\cdots+a_{n1}\varepsilon_n=\sum_{i=1}^{n}a_{i1}\varepsilon_i=\sum_{i=1}^{n}a_{i1}\sum_{j=1}^{n}\eta_j b_{ji}=\sum_{j=1}\sum_{i=1}(a_{i1}b_{ji})\eta_j$

$\xi=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=BX$
$=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}x_1'\\\vdots\\x_n'\end{pmatrix}=B'X'$
$(\eta_1,\cdots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)A\Rightarrow$　$B=B'A$，$X'=AX$
$\xi=BX=B'X'$
$B'AX=B'X'$
$AX=X'$

命题1　$\overset{新}{(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)}=\overset{旧}{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)}A$

命题2　$\overset{旧}{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}}=A\overset{新}{\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{pmatrix}}$

线性子空间

定理：设U是域F上线性空间V的一个非空子集，则U是V的一个子空间
$\Longleftrightarrow$ U对V的加法和数乘封闭

（判断V的子集U的3个条件：1. 非空集　2. 加法封闭　3. 数乘封闭）

1、零子空间 + 线性空间本身 —— 平凡子空间
其它线性空间 —— 非平凡子空间

2、线性张成：
$\alpha_1\sim\alpha_r\in V$，$k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r$ 非空，"+·"封闭
因而是一个V的子空间，称为由 $S=\{\alpha_1\cdots\alpha_r\}$ 生成子空间

3、线性子空间性质：
1) W为V的子空间，if $\dim W=s$，则 $\exists\,\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_s$，s.t. $W=L(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_s)$
2) $L(\alpha_1\cdots\alpha_s)=L(\beta_1\cdots\beta_s)\Longleftrightarrow\{\alpha_1\cdots\alpha_s\}\sim\{\beta_1\cdots\beta_s\}$
3) $\dim(L(\alpha_1\cdots\alpha_s))=\mathrm{rank}(\alpha_1\cdots\alpha_s)$

4、基扩充定理：
W是P上n维V一个m维子空间，$\alpha_1\sim\alpha_m$ 是W的一组基
在V中可找到n-m个向量补充后，$\alpha_1\sim\alpha_n$ 为V的一组基

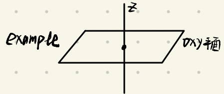
1.（proof：对n-m维做数学归纳法 { n-m=0 成立；n-m=k-1 成立 → n-m=k成立 ）
2.（proof：m=n时显然成立　n-m=k≥1 时 必有 α_k 不能被线性表出 till k=0 ）

n-m=k-1 成立　$\alpha_1\sim\alpha_m$ — W一组基.

$\underbrace{\alpha_1\sim\alpha_m\ \alpha_{m+1}\sim\alpha_{n-1}}_{由\alpha_1\sim\alpha_{n-1}表出}\ \alpha_n$　　α_n 不能

$\exists\alpha$ s.t. $\alpha_1\sim\alpha_{n-1}.\alpha\to\alpha\in V$

子空间的交与合



定理：V_1, V_2 都是域F上线性空间V的子空间，则 $V_1 \cap V_2$ 也是V的子空间

子空间的交：$V_1, V_2 \subset V$，$V_1 \cap V_2 = \{x \mid x \in V_1 且 x \in V_2\}$

子空间的和：$V_1 + V_2 = \{\alpha_1 + \alpha_2 \mid \alpha_i \in V_i\}$

$V_1 \cap V_2$，$V_1 + V_2$ 仍为子空间

$V_1 \cup V_2$ 不是线性子空间

定理：设 V_1, V_2 都为域F上线性空间V的子空间，则 $V_1 + V_2$ 为V的子空间，$V_1 + V_2$ 为包含了 $V_1 \cup V_2$ 的最小子空间

子空间维数公式：设 V_1, V_2 都是域F上线性空间V的有限子空间，则 $\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2)$

$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$

$K^n = K\varepsilon_1 + K\varepsilon_2 + \cdots + K\varepsilon_n$；$\varepsilon_1 \sim \varepsilon_n$ 为基向量组.

$V_1 \cap V_2 \subseteq \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \end{matrix} \subseteq V_1 + V_2$

设 $\dim V_1 \cap V_2 = t$　$V_1 = m$　$V_2 = n$　$t \le \min\{m, n\}$

$V_1 \cap V_2 = \{\xi_1 \sim \xi_t\}$　基

V_1　$\xi_1 \sim \xi_t$　$\eta_1 \sim \eta_{m-t}$ 基

V_2　$\xi_1 \sim \xi_t$　$\gamma_1 \sim \gamma_{n-t}$ 基.

$V_1 + V_2 = L(\underline{\xi_1 \sim \xi_t, \eta_1 \sim \eta_{m-t}, \gamma_1 \sim \gamma_{n-t}})$　证是否线无

$\sum k_i \xi_i + \sum l_i \eta_i + \sum q_i \gamma_i = 0$

$\alpha = (\underbrace{\sum k \xi_i + \sum l \eta_i}_{\in V_1}) = \underbrace{\sum q_i \gamma_i}_{\in V_2}$

α的2种表述形式

$\alpha \in V_1$　$\alpha \in V_2$，s.t. $\alpha \in V_1 \cap V_2$

$\downarrow$　$\downarrow$

$l_i = 0$　$q_i = 0$

$V_1 + V_2 = \sum_{i=1}^{t} k_i \xi_i + \sum 0 \eta_i + \sum 0 \gamma_i = 0$　ξ_i 为基底　$k_1 \sim k_t = 0$

所以 $V_1 + V_2$ 为线性无关　$\dim(V_1 + V_2) = m + n - t = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$

$\mathrm{span}(V_1 \cup V_2) = V_1 + V_2$

子空间的直和

定义：V_1, V_2 是F上V的子空间，if $V_1 + V_2$ 中每个α分解式

$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$　$\alpha_1 \in V_1$　$\alpha_2 \in V_2$

是唯一的，这个和就称为直和，记为 $V_1 \oplus V_2$

判定方法：1、$V_1 \oplus V_2$

TFAE

2、$\alpha_1 + \alpha_2 = 0$，则 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0 \rightleftharpoons$ 0分解是唯一（反证法）

3、$V_1 \cap V_2 = \{0\} \iff \dim\{V_1 + V_2\} = \dim V_1 + \dim V_2$（有限维）

4、V_1 一个基 + V_2 一个基 = $V_1 + V_2$ 一个基（有限维）

定义：V_1, V_2，F上V的子空间，if 1) $V_1 + V_2 = V$　2) $V_1 + V_2$ 是直和

称 V_1 是 V_2 一个补空间，V_2 也是 V_1 一个补空间

定理：1、V是F上n维线性空间，V的每个子空间U都有补空间（补空间不唯一）

prove：基扩充定理 + 直和判定④

2、设 $V_1 \sim V_s$ 为F上线性空间V的子空间，if $V_1 + \cdots + V_s$ 为直和，记作 $\bigoplus_{i=1}^{s} V_i$

1) 和 $\sum_{i=1}^{s} V_i$ 是直和

(3) $V_i \cap (\sum_{j \ne i} V_j) = 0$

2) 0向量表法唯一

4) $\dim W = \dim(\sum_{i=1}^{s} V_i)$（有限维）

5) $V_1 \sim V_s$ 的基合起来为 $V_1 + \cdots + V_s$ 的一个基（有限维）

$\sigma^{-1}(W_1) = \{\alpha \mid \sigma(\alpha) \in W_1\}$

$\forall \beta \in \sigma^{-1}(W_1)$，$k \cdot \beta \in \sigma^{-1}(W_1)$

$\sigma(k\beta) = k\sigma(\beta)$　$\sigma(\beta) \in W_1$　$k\sigma(\beta) \in W_1$

域F线性空间上的同构

定义：设V与V'都为域F上的线性空间，if ∃ V到V'的一个双射σ

并且σ保持加法和数乘，s.t. $\forall \alpha, \beta \in V$，$k \in F$ 有

V中加法　$\sigma(\alpha + \beta) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta)$　V'中加法

V中数乘　$\sigma(k\alpha) = k\sigma(\alpha)$　V'中数乘

称σ为V到V'的一个同构映射，V与V'同构，记作 $V \cong V'$

$V \to V'$，$\alpha \mapsto \sigma(\alpha)$

1、$\sigma(0)$ 是V'的零元 $0'$

$\sigma(0) = \sigma(0 \cdot \alpha) = 0 \cdot \sigma(\alpha) = 0'$

2、$\forall \alpha \in V$，s.t. $\sigma(-\alpha) = -\sigma(\alpha)$

3、对于V中V一组向量组 $\alpha_1 \sim \alpha_s$，F中V一组元素 $k_1 \sim k_s$，s.t.

$\sigma(k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s) = k_1\sigma(\alpha_1) + \cdots + k_s\sigma(\alpha_s)$

4、V中向量组 $\alpha_1 \sim \alpha_s$ 线性相关 $\rightleftharpoons$ V'中向量组 $\sigma(\alpha_1) \sim \sigma(\alpha_s)$ 线性相关

$\sum_{i=1}^{s} k_i\alpha_i = 0$　$\sigma(\sum_{i=1}^{s} k_i\alpha_i) = \sigma(0) = 0'$　$\sum_{i=1}^{s} k_i\sigma(\alpha_i) = 0$

5、if $\alpha_1 \sim \alpha_s$ 为V的一组基，则 $\sigma(\alpha_1) \sim \sigma(\alpha_s)$ 为V'的一组基

$\alpha_1 \sim \alpha_s$ 线无关 $\iff \sigma(\alpha_1) \sim \sigma(\alpha_s)$ 线无关

$\tilde{\alpha_1} \sim \tilde{\alpha}_{s+1}$ 线有关 $\iff$ - - - - 有关.

6、F上两个有限维线性空间同构 $\rightleftharpoons \dim(V_1) = \dim(V_2)$

7、σ为域F上线性空间V到V'同构映射，W为V的子空间 $\rightleftharpoons$ σ(W)为V'子空间

if W为有限维，σ(W)也为有限维，且 $\dim W = \dim \sigma(W)$

$\sigma(W) = \{\sigma(\alpha) \mid \alpha \in W\}$　"$W < V$"（W为V的子空间）

$0 \in W$，$\sigma(0) \in \sigma(W)$　$\sigma(0) = 0' \in \sigma(W) \Rightarrow \sigma(W) \ne \emptyset$　要证 $\dim W = \dim \sigma(W)$

$\forall \alpha, \beta \in W$ 有 $\sigma(\alpha) = \gamma$　$\sigma(\beta) = \delta$

$\gamma + \delta = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta) = \sigma(\alpha + \beta) \in \sigma(W)$

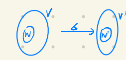
$k\gamma = k\sigma(\alpha) = \sigma(k\alpha)$　$k \in F$　σ(W)为V'的子空间

构造 $\sigma|_W : W \to \sigma(W)$　则 $\sigma|_W$ 为W到σ(W)同构

$\alpha \mapsto \sigma(\alpha)$

由 6) $\dim W = \dim \sigma(W)$

（$\sigma|_W$ 为σ在W上限制）



$\sigma: V \to V'$

$\sigma: W \to W'$

双射的逆和复合均为双射

$\sigma: \quad M \to N = \sigma(M)$

$\quad a \mapsto \sigma(a)$

$a \mapsto \sigma(a)$

$M \underset{\sigma^{-1}}{\overset{\sigma}{\rightleftarrows}} N$

$\sigma^{-1}(b) \longmapsfrom b$

$\sigma^{-1}(b) = a$

$\sigma(\sigma^{-1}(b)) = \sigma(a) = b$

逆

σ^{-1}为单：$\sigma^{-1}: N \to M$

$\sigma(a) \to a$

$\forall\, \sigma(a) \neq \sigma(b)$ 下证 $a \neq b$

反证法 proof. □

σ^{-1}为满射：$\forall\, a \in M$, $\exists\, \sigma^{-1}(\sigma(a)) = a$ □

σ^{-1} 为双射

复合

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dr, dashed, "\tau\sigma"'] & N \arrow[d, "\tau"] \\ & S \end{tikzcd}$$

同构映射的逆映射为同构映射 ✓

设 $\sigma: V_1 \to V_2$ 为一同构映射，则 σ^{-1}为双射，下证 σ^{-1}为同构

$\sigma: V_1 \to V_2 \quad \sigma^{-1}: V_2 \to V_1$

证 σ^{-1}为同构：1、$\sigma^{-1}(\alpha+\beta) = \sigma^{-1}(\alpha) + \sigma^{-1}(\beta)$

2、$\sigma^{-1}(k\alpha) = k\sigma^{-1}(\alpha)$

proof：$\sigma(\sigma^{-1}(\alpha_2) + \sigma^{-1}(\beta_2)) = \alpha_2 + \beta_2$

同构映射的乘积也为同构映射

σ, τ 为同构映射

$\sigma(a+b) = \sigma(a) + \sigma(b)$

$a, b \in V_1$

$\sigma(a), \sigma(b) \in V_1'$

$\sigma: V_1 \to V_1'$

$\tau: V_2 \to V_2'$

$\sigma(ka) = k\sigma(a)$

$V_2' \in V_1$

$\sigma\cdot\tau(a+b) = \sigma(\tau(a) + \tau(b)) = \sigma[\tau(a)] + \sigma[\tau(b)]$ $\quad \tau(a) + \tau(b) \in V_1$

$\sigma\tau(ka) = \sigma(k\tau(a)) = k\,\sigma[\tau(a)]$ $\quad k\cdot\tau(a) \in V_1$

dim　　　r　r, p

同构为等价关系（矩阵相抵、合同）

$S = \bar{V}_1 \cup \bar{V}_2 \cup \bar{V}_3 \cdots \cup \bar{V}_s$ $\quad (V_i \ncong V_j)$ 是同构类

数域 P 上 2 个有限维线性空间同构 $\Longleftrightarrow$ 它们有相同的维数