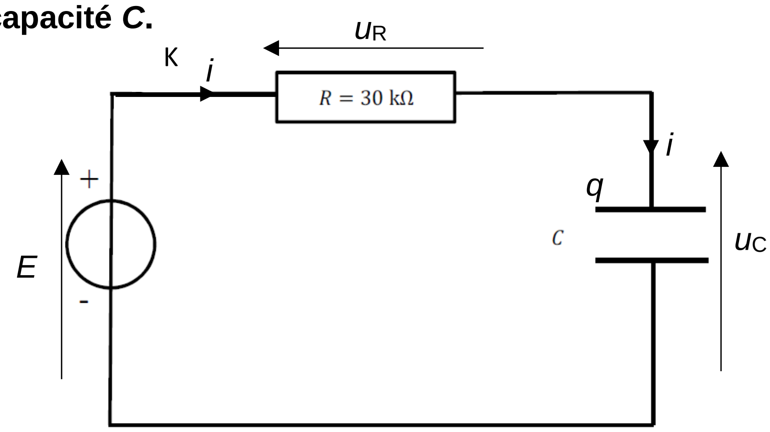
EXERCICE C – Anatomie d'un condensateur (5 points)

A.1. Recopier le schéma du circuit sur la copie, puis indiquer le sens du courant électrique, d'intensité *i*, circulant dans le circuit durant le régime transitoire, ainsi que les tensions *E*, u_R et u_C prises respectivement aux bornes du générateur, du conducteur ohmique de résistance *R* et du condensateur de capacité *C*.

Le sens conventionnel du courant électrique d'intensité *i* est orienté de la borne positive + vers la borne négative – du générateur de tension.
Les tensions u_R et u_C sont représentées en convention récepteur.
La tension *E* est représentée en convention générateur.



A.2. Établir la relation entre les tensions électriques dans ce circuit.

Loi des mailles : $u_R(t) + u_C(t) = E$.

A.3. Exprimer la charge *q* du condensateur en fonction de la tension à ses bornes.

$q(t) = C \times u_C(t)$

A.4. Montrer que l'équation différentielle, dont la tension u_C aux bornes du condensateur est une solution, s'écrit sous la forme :

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{E}{\tau}$$

avec τ une constante dont on précisera l'expression.

Loi d'Ohm : $u_R(t) = R \cdot i(t)$

Relation intensité- tension : $i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{d(C \cdot u_C)}{dt} = C\frac{du_C}{dt}$ car *C* est une constante.

Donc : $u_R(t) = RC\frac{du_C}{dt}$

En reportant dans la loi des mailles : $RC\frac{du_C}{dt} + u_C(t) = E$

Finalement, en divisant par *RC*, il vient : $\boxed{\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{RC} = \frac{E}{RC}}$.

Équation identique à $\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{E}{\tau}$ si $\boxed{\tau = RC}$

A.5. Proposer une dénomination pour la constante τ. Montrer que cette constante a la dimension d'une durée.

τ est le temps caractéristique du dipôle RC ou encore la constante de temps.

L'équation $\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{E}{\tau}$ montre que le terme $\frac{du_C}{dt}$ représente une tension divisée par un temps : il s'exprime donc en $V \cdot s^{-1}$. Les deux autres termes $\frac{u_C}{\tau}$ et $\frac{E}{\tau}$ représentent aussi une tension divisée par un temps : ils s'expriment donc en $V \cdot s^{-1}$. Comme u_C et *E* s'expriment en V, alors τ s'exprime en seconde. La constante τ a la dimension d'une durée.

A.6.1. Déterminer graphiquement la valeur de τ. Faire apparaître soigneusement les traits de construction utiles sur le graphe de l'ANNEXE 2 À RENDRE AVEC LA COPIE.

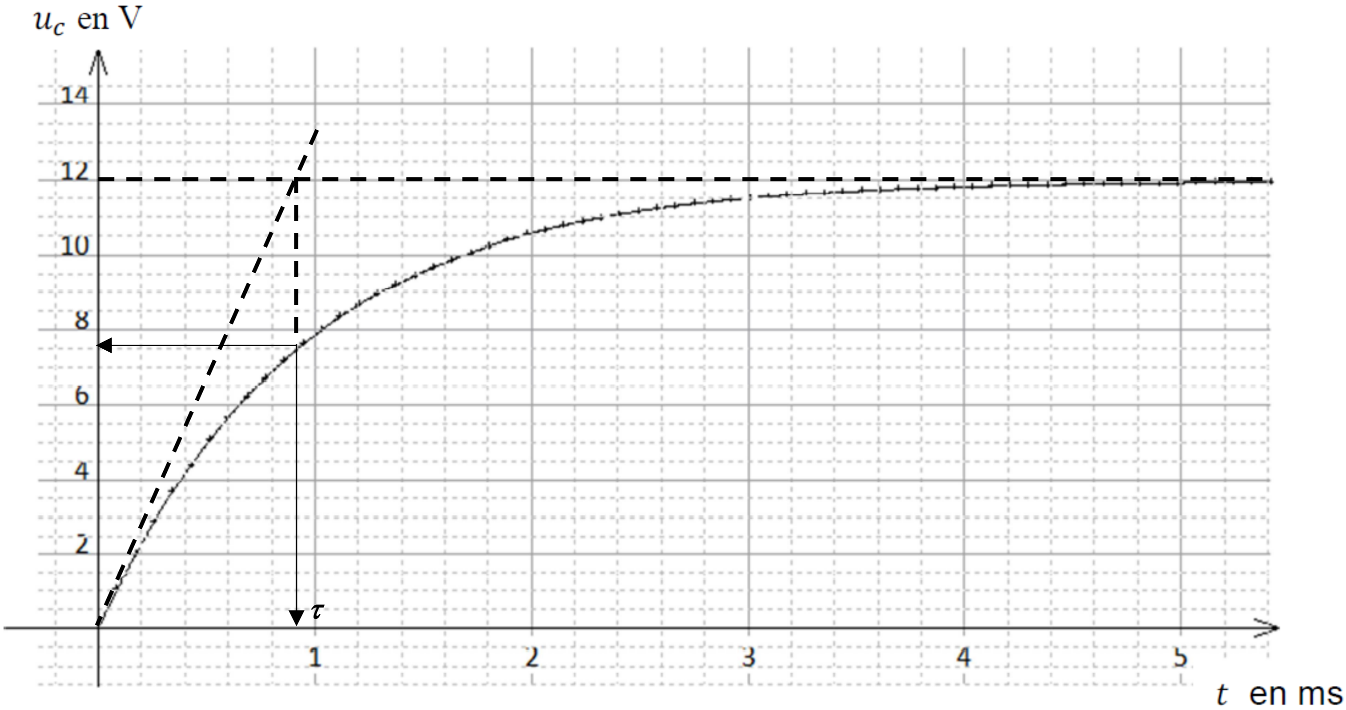
Le graphique montre la charge du condensateur.

Pour $t = \tau$, le condensateur est chargé à 63 % de sa tension maximale qui vaut 12 V.

0,63 × 12 V = 7,56 V ≈ 7,6 V.

On trace la droite horizontale d'ordonnée 7,6 V : cette droite coupe la courbe en un point d'abscisse égale à τ.

Graphiquement, on lit : **$\tau \approx$ 0,90 ms**.



Remarque : on peut aussi utiliser la méthode de la tangente à l'origine.

A.6.2. En déduire la valeur de la capacité *C* du condensateur, déterminée par cette méthode dans le cadre du modèle du circuit RC.

$\tau = RC$ donc $C = \dfrac{\tau}{R}$

soit $C = \dfrac{0{,}90 \times 10^{-3}}{30 \times 10^{3}}$ F = **$3{,}0\times10^{-8}$ F = 30×10^{-9} F = 30 nF.**

Partie B : Anatomie d'un condensateur au polycarbonate

B.1. Décrire l'influence des caractéristiques géométriques du condensateur plan sur la valeur de sa capacité.

$C = \dfrac{\varepsilon \times S}{a}$, pour ε fixée, la valeur de la capacité C du condensateur plan est proportionnelle à la surface S des armartures et inversement proportionnelle à l'épaisseur a de l'isolant.

B.2.1. À l'aide des informations et schémas fournis, établir l'expression de la capacité *C* du condensateur en fonction des caractéristiques géométriques (*h*, *L* et *e*, ainsi que du nombre *n* de condensateurs empilés.

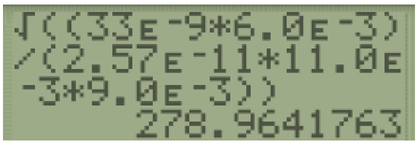
$C = n \times C_0$ avec $C_0 = \dfrac{\varepsilon \times S}{a}$ et $S = L \times h$.

On a aussi : $e = n \times a$ donc $a = \dfrac{e}{n}$.

Donc, en reportant dans C : $\boxed{C = \dfrac{n^2 \times \varepsilon \times L \times h}{e}}$

B.2.2. La capacité du condensateur au polycarbonate valant *C* = 33 nF, en déduire le nombre de condensateurs élémentaires *n* constituant ce condensateur.

$C = \dfrac{n^2 \times \varepsilon \times L \times h}{e}$ donc $n^2 = \dfrac{C \times e}{\varepsilon \times L \times h}$ soit $n = \sqrt{\dfrac{C \times e}{\varepsilon \times L \times h}}$ en ne gardant que la solution positive.



$$n = \sqrt{\dfrac{33 \times 10^{-9} \times 6{,}0 \times 10^{-3}}{2{,}57 \times 10^{-11} \times 11{,}0 \times 10^{-3} \times 9{,}0 \times 10^{-3}}}$$ = 279 condensateurs élémentaires.

B.2.3. Le fabriquant indique que le condensateur au polycarbonate étudié dans le circuit RC est, en fait, constitué de 300 armatures métalliques. Commenter.

L'écart entre la valeur 300 condensateurs indiquée par le fabricant et la valeur 279 condensateurs calculée peut s'expliquer par :

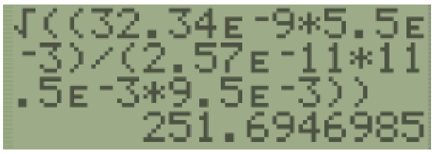
– les incertitudes sur les valeurs de *L*, *h* et *e* : $L \pm 0{,}5$ mm, $h \pm 0{,}5$ mm, et $e \pm 0{,}5$ mm

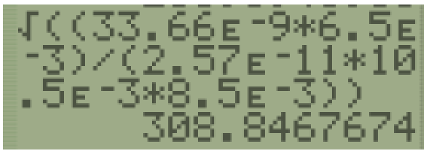
– l'incertitude sur la valeur de *C* : $C \pm 2$ %.

Calculons les deux valeurs extrémales de *n* en prenant les valeurs minimales et / ou maximales pour *L*, *h*, *e* et *C* :

Pour minimiser *n*, on choisit les valeurs minimales de *C* et *e* et les valeurs maximales de *L* et *h* soit : *C* = 33 × (1 – 0,02) nF = 32,34 nF, *e* = 5,5 mm, *L* = 11,5 mm, *h* = 9,5 mm :

$$n_{min} = \sqrt{\dfrac{32{,}34 \times 10^{-9} \times 5{,}5 \times 10^{-3}}{2{,}57 \times 10^{-11} \times 11{,}5 \times 10^{-3} \times 9{,}5 \times 10^{-3}}}$$ = 252 condensateurs élémentaires.





Pour maximiser *n*, on choisit les valeurs maximales de *C* et *e* et les valeurs minimales de *L* et *h* soit : *C* = 33 × (1 + 0,02) nF = 33,66 nF, *e* = 6,5 mm, *L* = 10,5 mm, *h* = 8,5 mm :

$$n_{max} = \sqrt{\dfrac{33{,}66 \times 10^{-9} \times 6{,}5 \times 10^{-3}}{2{,}57 \times 10^{-11} \times 10{,}5 \times 10^{-3} \times 8{,}5 \times 10^{-3}}}$$ = 309 condensateurs élémentaires.

La valeur 300 condensateurs est bien comprise entre 252 et 309 condensateurs.

La valeur annoncée par le fabricant est donc correcte.

Remarque : Il semble qu'il y ait une confusion dans cette question entre condensateur et armature. En effet un condensateur comporte deux armatures métalliques, ainsi avec 300 armatures il y aurait 150 condensateurs ce qui est très éloigné de la valeur trouvée de 279 condensateurs.

Merci de signaler une erreur à labolycee@labolycee.org