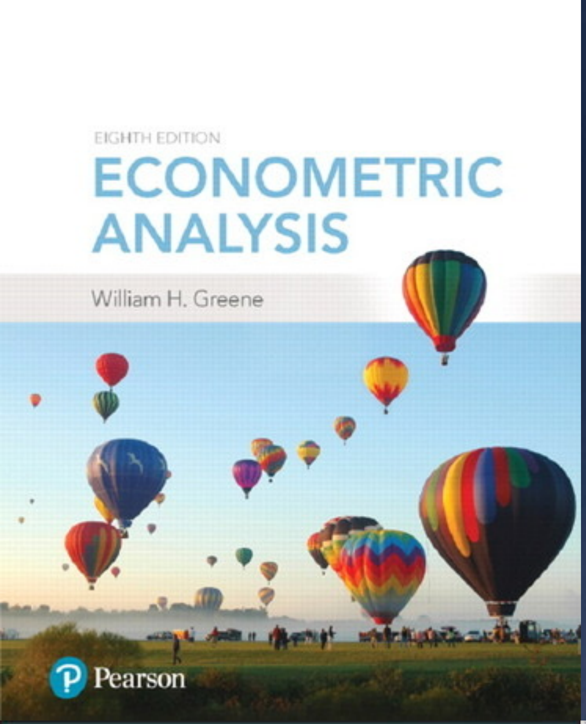
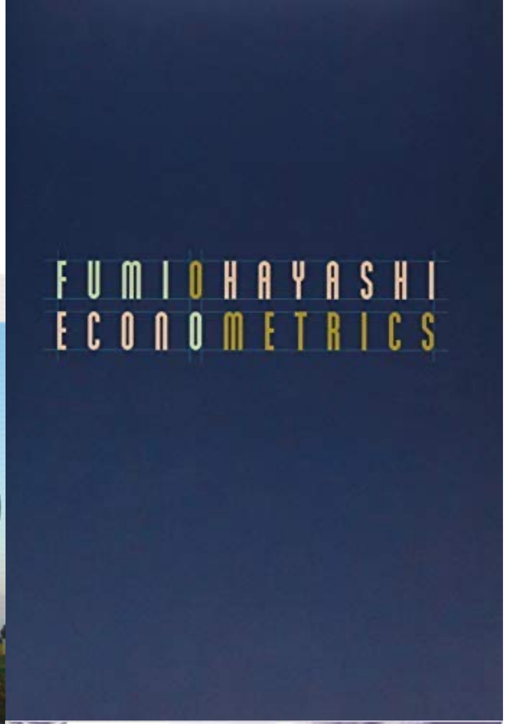
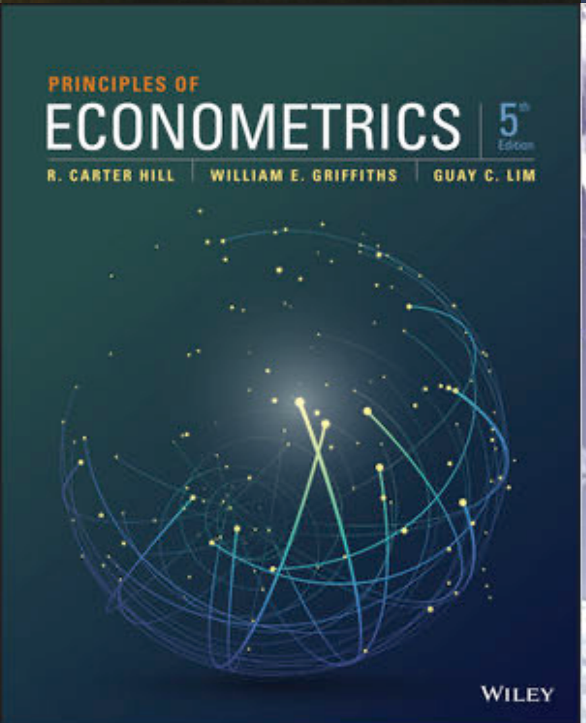
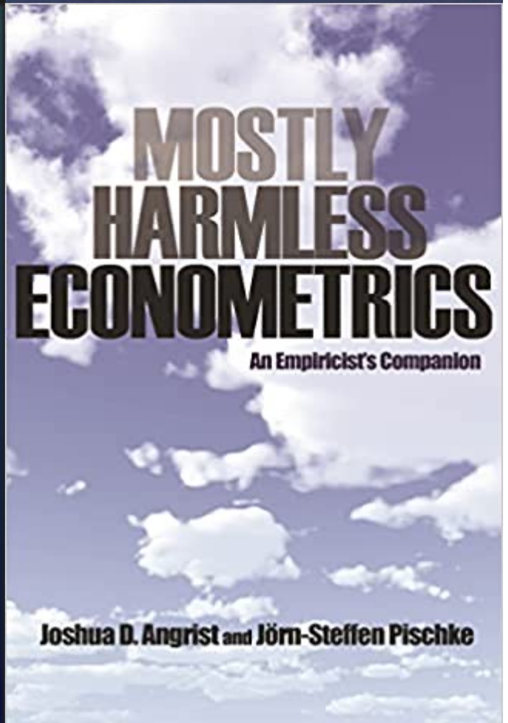
PUCP









MAESTRÍA EN ECONOMÍA
ECONOMETRÍA INTERMEDIA
ECO743 – MÓDULO 2

Sesión 2
Heterocedasticidad

Docente: Juan Palomino

PUCP

Índice

1. Naturaleza del Problema

Naturaleza de la Heterocedasticidad

❖ Hipótesis de homocedasticidad

$$var(\varepsilon_i) = \sigma^2, \forall i = 1, \dots, n$$

❖ Hipótesis de heterocedasticidad

$$var(\varepsilon_i) = \sigma_i^2, \forall i = 1, \dots, n$$

Caso especial de perturbaciones esféricas que se presenta cuando la varianza de los términos de perturbación no es la misma para cada individuo o unidad de análisis:

$$Var(\varepsilon|X) = \begin{pmatrix} \sigma_0^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_0^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_0^2 \end{pmatrix}$$

Los términos de pertubación siguen siendo independientes.

Naturaleza de la Heterocedasticidad

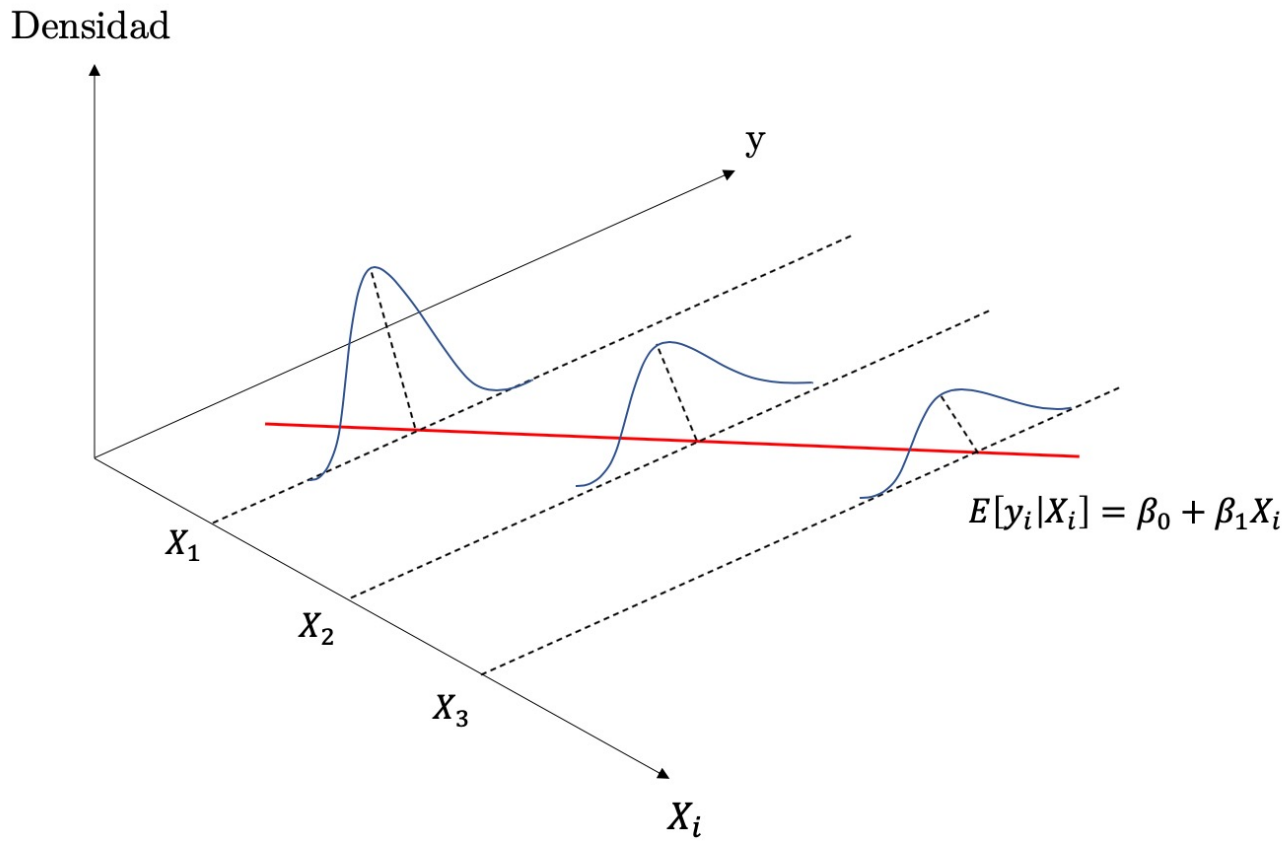
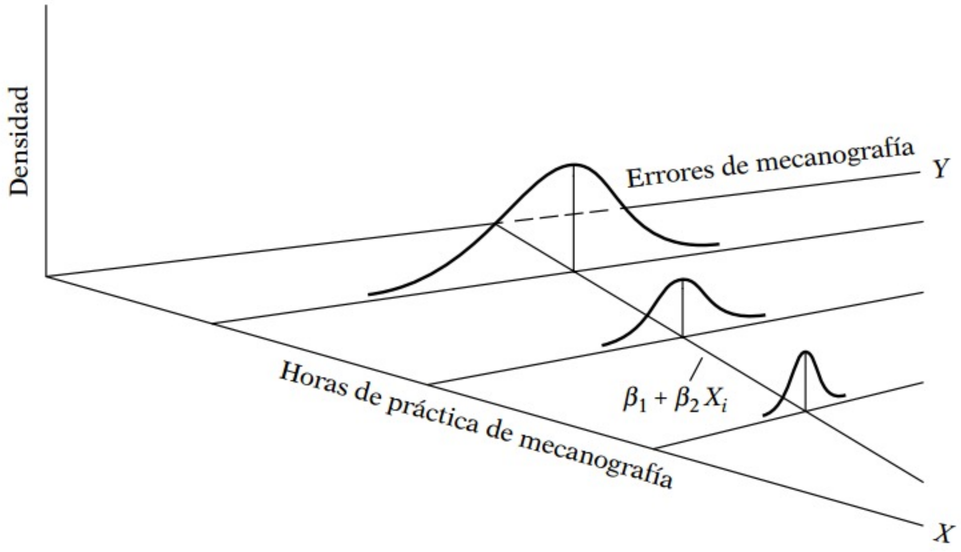


Figura 1. Heterocedasticidad

2. Causas y Consecuencias de la Heterocedasticidad

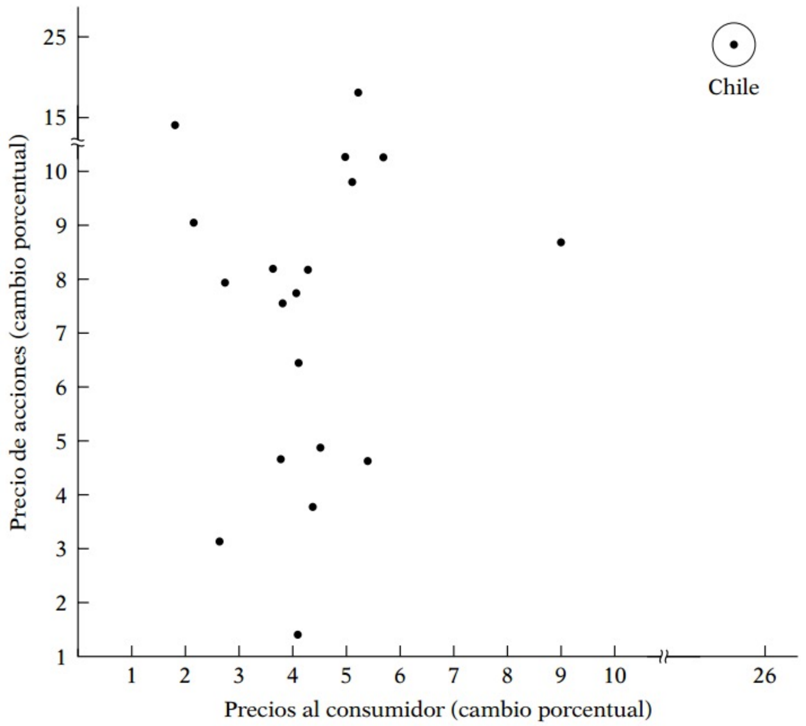
Causas de la Heterocedasticidad

1. Con base en los modelos de aprendizaje de los errores, a medida que las personas aprenden, disminuyen sus errores de comportamiento con el tiempo.



Ejemplo. Prueba de mecanografía

2. La presencia de datos atípicos provoca una mayor variabilidad del error.



Ejemplo. Relación entre precios de acciones y precios al consumidor

Causas de la Heterocedasticidad

3. A medida que mejoran las técnicas de recolección de datos, es probable que σ_i^2 se reduza. **Ejemplo:** bancos con equipos complejos de procesamiento de información cometan menos errores en los informes mensuales.

4. Otra fuente de la heterocedasticidad es la asimetría en la distribución de uno o más regresores incluidos en el modelo. **Ejemplo:** variables económicas como riqueza, ingreso y escolaridad. La riqueza le corresponde a uno o cuantos individuos pertenecientes a los estratos superiores.

5. Surge debido a i) la incorrecta transformación de los datos (transformaciónes de razón o de primeras diferencias) y ii) una forma funcional incorrecta (modelos lineales frente a modelos log-lineales)

6. Omisión de variables importantes en el modelo.

Nota: La heterocedasticidad es un problema típico de modelos que utilizan datos de corte transversal.

Consecuencias de la Heterocedasticidad

- Estimación sesgada de la varianza, σ^2
- Los estimadores MCO son insesgados, pero menos eficientes que los MCG (es decir, no tienen varianza mínima).
- Los intervalos de confianza y los estadísticos utilizados para resolver contrastes de hipótesis ya no son fiables. Por tanto, existe la posibilidad de extraer conclusiones erróneas.

3. Detección de Heterocedasticidad

Detección de heterocedasticidad

- No es fácil detectar la heterocedasticidad en una situación concreta, ya que σ_i^2 solo se puede conocer si tenemos toda la población de Y correspondiente al valor X_i.
- En algunas ocasiones la propia naturaleza del problema sugiere si es probable que exista heterocedasticidad.
- Disponemos de varias herramientas de diagnóstico que nos pueden ayudar a detectar la heterocedasticidad.
- Se clasifican en:
  - Procedimientos informales o subjetivos
  - Procedimientos formales u objetivos

3. Detección de Heterocedasticidad

3.1 Procedimientos Informales

Procedimientos Informales

Son subjetivos y se basan en la representación gráfica de los residuos:

- Se calculan los residuos estimados del modelo por MCO.
- Se representan los $\hat{\varepsilon}_i^2$ o los $\hat{\varepsilon}_i$ frente a los $\hat{Y}_i$, o bien frente a la variable que se cree que provoca la heterocedasticidad.
- Si los puntos se disponen en el gráfico de forma aleatoria, no hay evidencia de que se incumpla la hipótesis de homocedasticidad.
- Si el gráfico muestra un patrón de comportamiento (lineal, cuadrático, exponencial, etc.) es probable que haya heterocedasticidad.

Procedimientos Informales

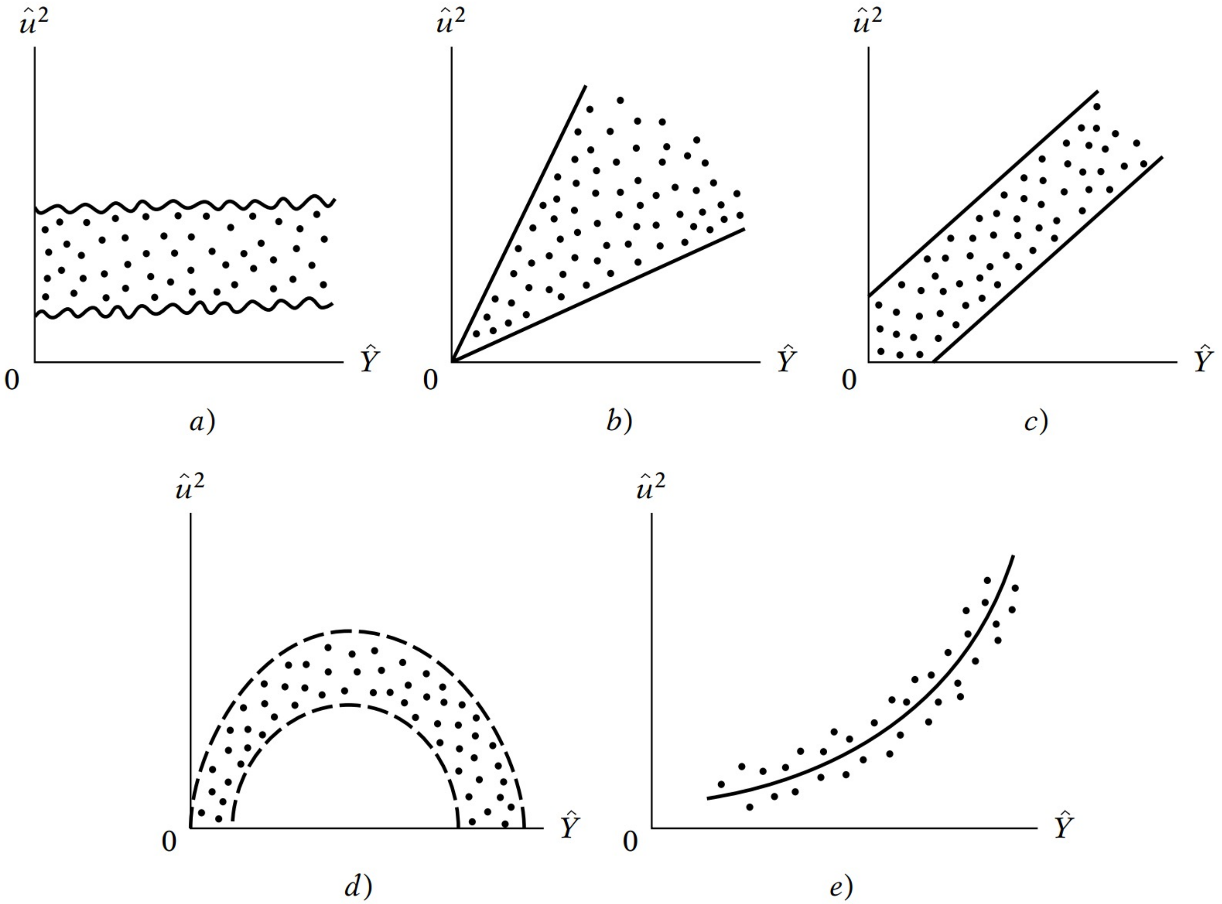


Figura 2. Procedimiento Informal

3. Detección de Heterocedasticidad

3.2 Procedimientos Formales

Procedimientos Formales

Son objetivos ya que se trata de contrastes de hipótesis.

- Existe diversos test de heterocedasticidad, cada uno de los cuáles parte de un determinado supuesto acerca del posible patrón de heterocedasticidad:
    - Test de Goldfeld-Quant
    - Test de Breusch-Pagan (1979)
    - Test de Glesjer
    - Test de White (1980)
- Cada uno de estos test plantea como hipótesis nula la ausencia de heterocedasticidad pero se diferencian entre sí en la forma de plantear la hipótesis alternativa.

Test de Goldfeld-Quant

- Este test supone que la varianza de las perturbaciones (heterocedasticidad) está relacionada, normalmente, con una de las variables explicativas del modelo.
- Bajo el supuesto de que dicha dependencia sea, por ejemplo, positiva (los menores/mayores valores de la varianza se producen cuando los valores de la variable son menores/mayores).

Test de Goldfeld-Quant

❖ **Pasos:**

1. Ordenar de menor a mayor los valores respecto a X_i, donde se supone que ésta es la variable explicativa causante de la heterocedasticidad.
2. Se omiten las c observaciones centrales.
3. Realizar dos estimaciones por MCO utilizando las $\frac{N-c}{2}$ primeras observaciones y las $\frac{N-c}{2}$ últimas observaciones.
4. Calcular la suma de los cuadrados de los residuos asociados a las dos estimaciones (SCR_1, SCR_2)
5. Bajo el supuesto de homocedasticidad se verifica que:

$$\frac{SCR_2}{SCR_1} \sim F_{\frac{N-c}{2}-k}$$

Con lo cual, fijado un nivel de significancia α, rechazaremos la homocedasticidad si:

$$\frac{SCR_2}{SCR_1} > F_{\frac{N-c}{2}-k;1-\alpha}$$

Test de Goldfeld-Quant

❖ **Incovenientes:**

- ¿Cómo elegir c? → $c \approx \frac{N}{3}$
- ¿Y si desconocemos cuál es la variable X_i causante de la heterocedasticidad o se sospecha de varias variables a la vez?

Test de Breusch Pagan/Godfrey

- **Supuesto**: La heterocedasticidad está provocada por una o más variables, no necesariamente presentes en el modelo lineal inicial.
- Se supone que la varianza del término de error depende de un vector de p variables Z, del siguiente modo:

$$\sigma_i^2 = f(\alpha_0 + \alpha_1 Z_{1i} + \cdots + \alpha_p Z_{pi})$$

- Donde f es una forma funcional cualquiera, α_j, $j = 0, \ldots, p$, parámetros y $Z_1, \ldots, Z_p$ las variables presumiblemente causantes de la heterocedasticidad.
- En consecuencia, contrastar la heterocedasticidad equivale a probar la hipótesis:

$$H_0\colon \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0$$

$$H_0\colon Algunos\ de\ ellos\ es\ no\ nulo$$

Test Breusch Pagan/Godfrey

❖ Pasos:

1. Estimar la ecuación principal $y = X\beta + \varepsilon$ por MCO y calcular los residuos y los residuos al cuadrado.
2. Calcular el estimador de σ^2: $\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}}{n}$
3. Generar un nueva variable $g_i = \frac{\hat{\varepsilon}_i^2}{\hat{\sigma}^2}$, $i = 1, \dots, n$
4. Regresionar g_i contra $Z_1, Z_2, \dots, Z_p$:

$$g_i = \alpha_0 + \alpha_1 Z_{1i} + \cdots + \alpha_p Z_{pi} + v_i$$

5. Estimar $\alpha_0, \dots, \alpha_p$ por MCO y calcular la SCE de la regresión auxiliar.
6. Bajo la hipótesis nula de homocedasticidad y normalidad del término de error; se sabe que:

$$\frac{1}{2} SCE \sim \chi^2_{(p-1)}$$

7. Por tanto, se rechaza la hipótesis nula de homocedasticidad cuando:

$$Q_{exp} > \chi^2_{(p-1);1-\alpha}$$

Test de White

- **Supuesto**: La heterocedasticidad está provocada por una o más variables del modelo:

$$\sigma_i^2 = f(X_2, X_3, \dots, X_k)$$

Donde $f(\cdot)$ es una función polinómica.

Test de White

❖ **Pasos:**

1. Estimar por MCO el modelo $y = X\beta + \varepsilon$ y obtener los residuos $\hat{\varepsilon}_i$ y $\hat{\varepsilon}_i^2$.

2. Hacer la regresión de los residuos al cuadrado con respecto a todas las variables explicativas, sus cuadrados y todos sus productos cruzados. Por ejemplo, para un modelo con dos variables explicativas:

$$\hat{\varepsilon}_i^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{1i} + \alpha_2 X_{2i} + \alpha_3 X_{1i}^2 + \alpha_4 X_{2i}^2 + \alpha_5 X_{1i} X_{2i} + \upsilon_i$$

3. La hipótesis nula de homocedasticidad es: H_0: $\alpha_i = 0$

4. Bajo esta hipótesis, el estadístico:

$$n \times R_{aux}^2 \sim \chi_p^2$$

   Donde p es el número de variables explicativas en dicha regresión.

5. Así, se rechaza la hipótesis de homocedasticidad si:

$$n \times R_{aux}^2 > \chi_{p,1-\alpha}^2$$

4. Estimación bajo Heterocedasticidad

4.1 Matriz Ω conocida

1. Mínimos Cuadrados Ponderados (MCP)

- En presencia de heterocedasticidad, MCO ya no es el mejor estimador lineal insesgado.
- Si se conoce la forma de la heterocedasticidad puede usarse la estimación por Mínimos Cuadrados Ponderados (MCP) para obtener estimadores más eficientes que los de MCO.
- Los estimadores MCP nos conducen a nuevos estadísticos t y F que tienen distribuciones t y F, respectivamente.
- La idea básica del procedimiento de Mínimos Cuadrados Ponderados se basa en transformar el modelo verdadero para que el término de error sea homocedástico.

1. Mínimos Cuadrados Ponderados (MCP)

Siendo el modelo a estimar:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + \varepsilon_i$$

No sabemos a ciencia cierta de qué depende la varianza del error ε_i, y, por lo tanto, no sabemos cómo construir la matriz $\Omega(X)$.

Empezamos haciendo una conjetura acerca de esta estructura de heterocedasticidad, asumiendo que:

$$Var(\varepsilon_i | x_1, \dots, x_n) = \sigma_i^2 = \sigma_0^2 \exp(x_i' \alpha)$$

Donde $\exp(\cdot)$ asegura que $Var(\varepsilon_i | x_1, \dots, x_n) > 0$. Asumimos que Ω es diagonal. Sea $h_i(X)$ los elementos diagonal de $\Omega(X)$. Por lo tanto,

$$Var(\varepsilon_i | X) = \sigma_i^2 = \sigma_0^2 \mathrm{h_i}(X)$$

Donde $h_i(X)$ son conocidos y positivos. Asimismo, $h_i(X)$ determina la heterocedasticidad.

1. Mínimos Cuadrados Ponderados (MCP)

- ¿Qué modelo estimamos? El modelo transformado es:

$$Cy = CX\beta_0 + C\varepsilon$$

Recordar que el estimador MCG es:

$$\hat{\beta}_{MCG} = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}y$$

Donde:

$$\Omega^{-1} = \begin{pmatrix} 1/h_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/h_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/h_i \end{pmatrix} = C'C$$

- Entonces, en este caso particular, Ω^{-1} es matriz diagonal cuyo elemento es $1/h_i$. Es decir:

$$C = \begin{pmatrix} \sqrt{h_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{h_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{h_n} \end{pmatrix} \qquad \Omega = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & h_n \end{pmatrix}$$

1. Mínimos Cuadrados Ponderados (MCP)

Si dividimos el modelo por $\sqrt{h_i}$ obtenemos un modelo transformado de la forma:

$$\tilde{y}_i = \beta_0 + \beta_1 \tilde{X}_{1i} + \beta_2 \tilde{X}_{2i} + \cdots + \beta_k \tilde{X}_{ki} + \tilde{\varepsilon}_i$$

Donde:

$$\tilde{y}_i = \frac{y_i}{\sqrt{h_i}} \qquad \tilde{X}_{ji} = \frac{X_{ji}}{\sqrt{h_i}} \qquad \tilde{\varepsilon}_i = \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{h_i}}$$

El estimador MCG se obtiene regresionando:

$$Cy = \begin{pmatrix} \frac{y_1}{\sqrt{h_1}} \\ \frac{y_2}{\sqrt{h_2}} \\ \vdots \\ \frac{y_n}{\sqrt{h_n}} \end{pmatrix} \qquad Cx = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{h_1}} \\ \frac{x_2}{\sqrt{h_2}} \\ \vdots \\ \frac{x_n}{\sqrt{h_n}} \end{pmatrix}$$

1. Mínimos Cuadrados Ponderados (MCP)

Aplicando MCO al modelo transformado, se obtiene el estimador WLS (mínimos cuadrados ponderados):

$$\hat{\beta}_{WLS} = [\sum_{i=1}^{n} w_i x_i x_i']^{-1}[\sum_{i=1}^{n} w_i x_i y_i]$$

Donde $w_i = 1/h_i$.

Los errores de este modelo son homocedásticos dado que:

$$E(\tilde{\varepsilon}_i|X) = E\left(\frac{\varepsilon_i}{\sqrt{h_i}}\middle|X\right) = \frac{E(\varepsilon_i|X)}{\sqrt{h_i}} = 0$$

$$Var(\tilde{\varepsilon}_i|X) = E\left(\frac{E(\varepsilon_i^2|X)}{h_i}\middle|X\right) = \frac{\sigma^2 \mathrm{h_i}}{h_i} = \sigma^2$$

4. Estimación bajo Heterocedasticidad

4.2 Matriz Ω desconocida

Usando varianzas corregidas de White

El problema con el enfoque anterior es que depende de la forma inicial de la estructura de la varianza del error

- Asumir que β de MCO es insesgado y consistente.
- Si n es muy grande, el estimador de la matriz de $var - cov$ de MCO consistentes con heterocedasticidad de White es:

$$Var(\hat{\beta}_{MCO}) = (X'X)^{-1}X'\widehat{\Omega}X(X'X)^{-1}$$

- Estimar la matriz Ω mediante los cuadrados de los residuos, como si fueran estimadores de las varianzas:

$$\widehat{\Omega} = \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{\varepsilon}_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{\varepsilon}_n^2 \end{bmatrix}$$

PUCP