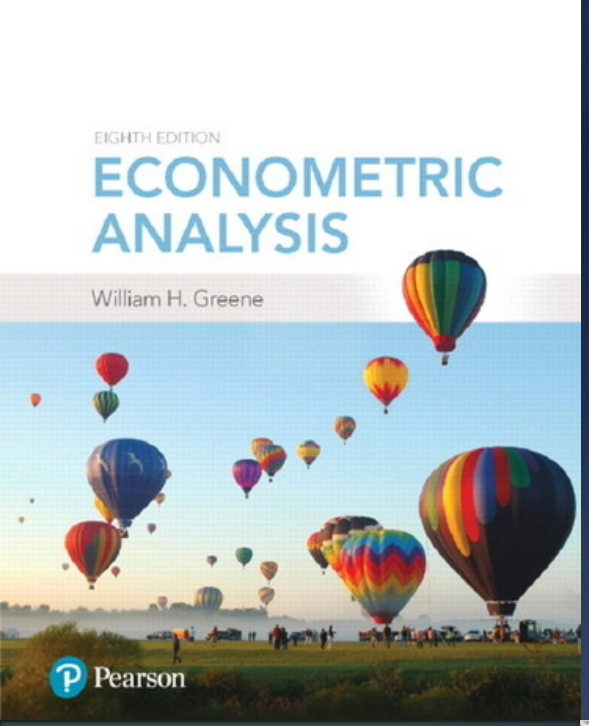
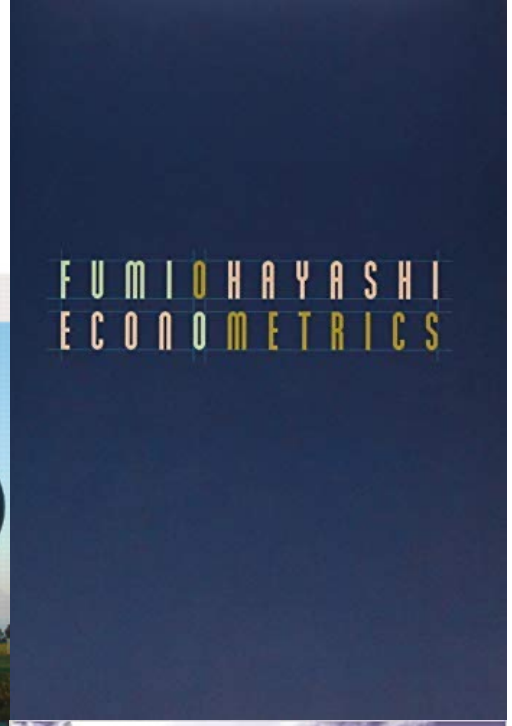
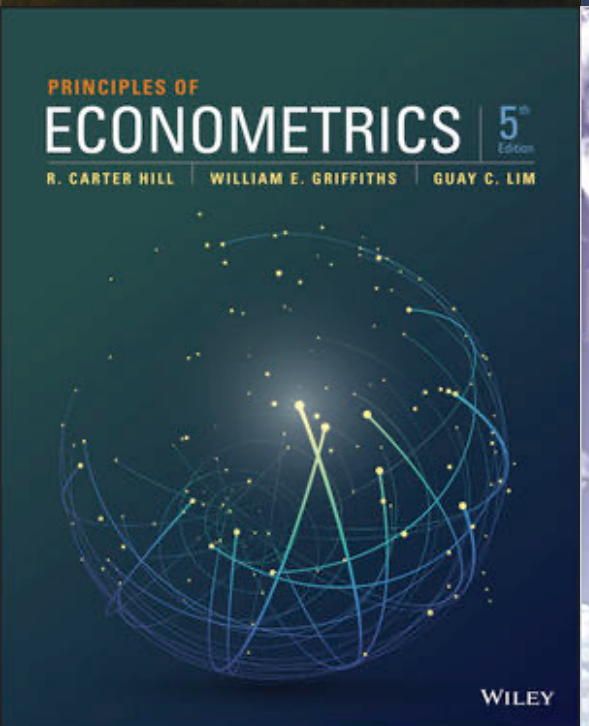
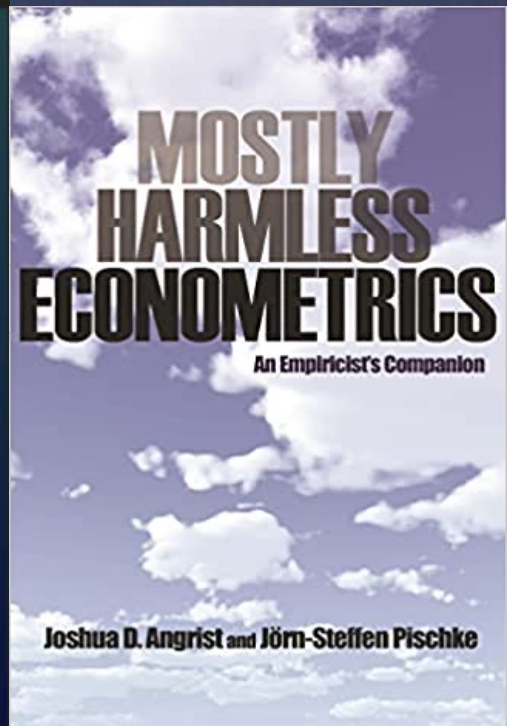

PUCP









MAESTRÍA EN ECONOMÍA
ECONOMETRÍA INTERMEDIA
ECO743 – MÓDULO 2

Sesión 4
Endogeneidad

Docente: Juan Palomino

PUCP

Índice

1 Definición de Endogeneidad

2 ¿Cómo surge la endogeneidad?

3 ¿Qué es un instrumento?

4 Supuestos

5 Estimador de Variables Instrumentales

6 Estimación por Mínimo Cuadrado en Dos Etapas

7 Verificando Condiciones

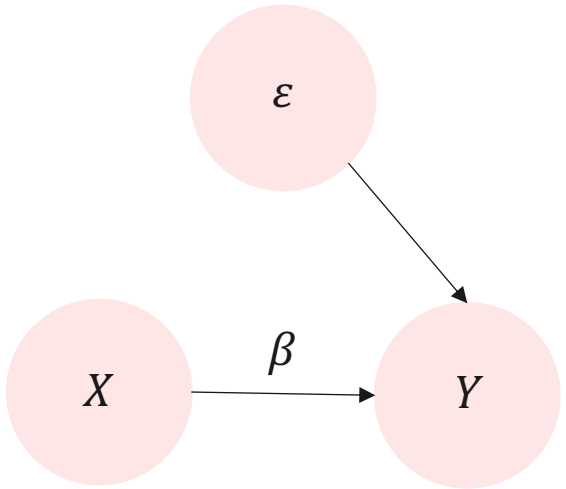
8 Test de Endogeneidad

1. Definición de Endogeneidad

Exogeneidad

- Queremos estimar el efecto causal de un cambio en X sobre Y. Tenemos la siguiente regresión:

$$Y = \beta X + \varepsilon$$

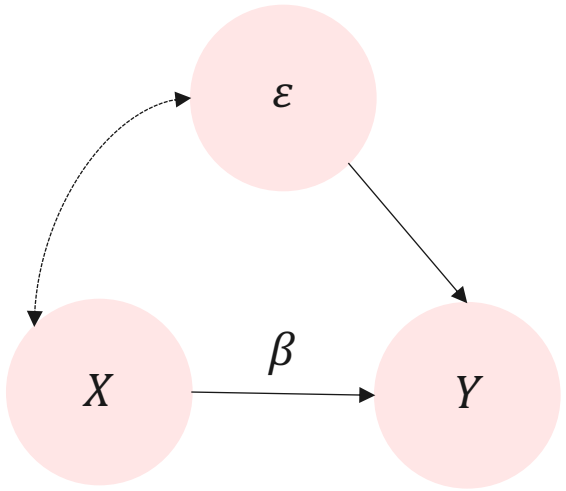


- Si ε no está correlacionado con X, tenemos que el único efecto directo que existe es de X sobre Y vía βX porque no hay asociación entre X y ε

Endogeneidad

- Tenemos $Y = \beta X + \varepsilon$ con la siguiente derivada total:

$$\frac{dY}{dX} = \beta + \frac{d\varepsilon}{dX}$$



- Un efecto directo vía βX y un efecto indirecto vía ε afectando X, el cual afecta también a Y.

Endogeneidad

- En el modelo MCO de regresión múltiple:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + \varepsilon_i$$

- Si $E(\varepsilon_i | x_i) \neq 0 \; \forall i = 1,2,\ldots,k$ se dice las variables explicativas son endógenas, lo que invalida los estimadores MCO, volviéndolos inconsistentes.

Endogeneidad: $cov(x_i, \varepsilon) \neq 0$

Exogeneidad: $cov(x_i, \varepsilon) = 0$

- Por tanto, se dice que una variable x_j es **endógena** si está correlacionada con ε_i.

2. ¿Cómo surge la endogeneidad?

Endogeneidad

- Endogeneidad se debe a 3 problemas:
    - Simultaneidad
    - Sesgo por variable omitida
    - Error de medición
- Si uno de estos problemas están presentes, los parámetros podrían ser inconsistentes y no podrían medir la magnitud y dirección de la causa, sino solo una simple correlación.

2. ¿Cómo surge la endogeneidad?

2.1 Sesgo por Variable Omitida

Sesgo por Variable Omitida

Un caso común es sospechar que hay una variable omitida q que está correlacionada con x y que explica y:

$$y_i = x_i'\beta_0 + \delta q_i + \varepsilon_i$$

Como no observamos q, no podemos incluirla como control y se encuentra en el término de error, lo que implica $E[\varepsilon_i|x_i] \neq 0$

Sesgo por Variable Omitida

El verdadero modelo $y_i = x_i'\beta_0 + \delta q_i + \varepsilon_i$, pero estimamos $y_i = x_i'\beta_0 + v_i$ donde $v_i = \delta q_i + \varepsilon_i$.

Entonces:

$$\hat{\beta} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i x_i'\right)^{-1} x_i y_i$$

$$\hat{\beta} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i x_i'\right)^{-1} x_i (x_i'\beta_0 + \delta q_i + \varepsilon_i)$$

$$\hat{\beta} = \beta_0 + \delta \left(\sum_{i=1}^{n} x_i x_i'\right)^{-1} x_i q_i + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i x_i'\right)^{-1} x_i \varepsilon_i$$

Sesgo por Variable Omitida

Por lo tanto:

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i x_i'\right)^{-1} \frac{1}{n} x_i q_i \xrightarrow{p} Q_{xx}^{-1} E(x_i q_i)$$

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i x_i'\right)^{-1} \frac{1}{n} x_i \varepsilon_i \xrightarrow{p} Q_{xx}^{-1} E(x_i \varepsilon_i) = 0$$

Asimismo:

$$\beta_n \xrightarrow{p} \beta_0 + \delta Q_{xx}^{-1} E(x_i q_i)$$

Por lo tanto, el estimador es inconsistente.

2. ¿Cómo surge la endogeneidad?

2.2 Error de medición

Medición de Error

El verdadero modelo: $y_i = x_i'\beta_0 + \varepsilon_i$, pero x_i es medido con errores. Es decir, nosotros observamos $\tilde{x}_i = x_i + v_i$, en vez de x_i.

Asumir que v_i no está correlacionado con x_i, es decir, $E(x_i \cdot v_i) = 0$. Entonces:

$$y_i = x_i'\beta_0 + \varepsilon_i$$

$$y_i = (\tilde{x}_i - v_i)'\,\beta_0 + \varepsilon_i$$

$$y_i = \tilde{x}_i\beta_0 + u_i$$

Donde $u_i = \varepsilon_i - v_i' \cdot \beta_0$

Medición de Error

El problema es que:

$$E[\tilde{x} \cdot u_i] = E[(x_i + v_i)(\varepsilon_i - v_i'\beta_0)]$$

$$= E[x_i\varepsilon_i] - E[x_i v_i'\beta_0] + E[v_i\varepsilon_i] - E[v_i v_i'\beta_0]$$

$$= -E[v_i v_i'\beta_0]$$

$$\neq 0$$

Entonces, para el estimador OLS nosotros tenemos que:

$$plim\hat{\beta}_n = \beta_0 + E(\tilde{x}_i\tilde{x}_i')^{-1}E(\tilde{x}_i u_i)\beta_0 \neq \beta_0$$

Esto es llamado el sesgo por error de medida.

2. ¿Cómo surge la endogeneidad?

2.3 Sesgo por simultaneidad

Sesgo por simultaneidad

Ésta surge cuando una o más de las variables explicativas se determina conjuntamente con la variable dependiente.

Suponga el modelo de regresión:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$$

Pero $x_i = f(y)$. Entonces x afecta a y, pero también ocurre que y afecta a x. ¿Qué debería suceder con β?

3. ¿Qué es un instrumento?

Definición de un Instrumento

- Consideremos el modelo lineal de k variables

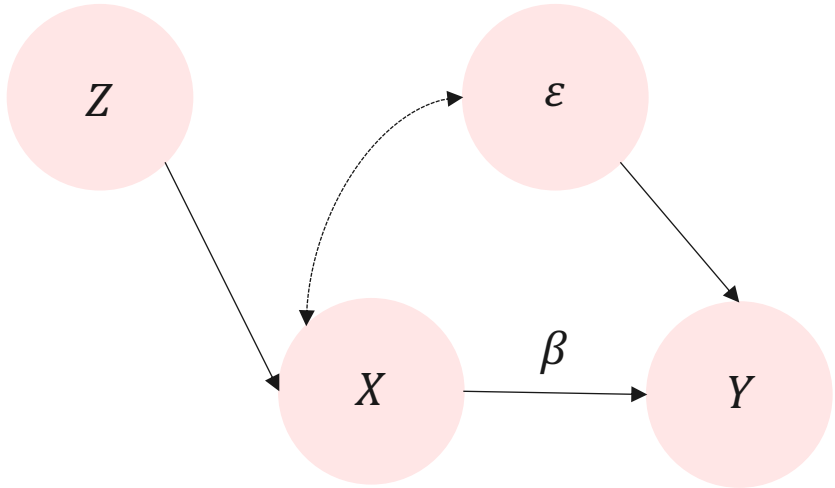
$$y = X\beta + \varepsilon$$

en donde algunos de los regresores están correlacionados con ε (regresores endógenos), mientras que otros no lo están (regresores estrictamente exógenos).

- La idea de las estimaciones con variables instrumentales es detectar los movimientos en x no correlacionados con el error.
- Debemos definir un instrumento. Supongamos que contamos con l variables instrumentales $Z = [Z_1, Z_2, \dots, Z_l]$, donde algunas de las variables en Z podrían ser las mismas que los regresores exógenos. Esta matriz Z es de dimensiones $n \times l$.

Definición de un Instrumento

Un instrumento debe cumplir dos propiedades:



1. **Condición de Exogeneidad o Exclusión**: Z no este correlacionado con el error ε. Tenemos que preguntarnos si Z tiene una asociación con Y, independientemente de su asociación con Y a través de X.

2. **Condición de Relevancia**: Z está correlacionado con el regresor X.

Ejemplo de un Instrumento

Tenemos:

$$health = \beta_0 + \beta_1 age + \beta_2 weight + \beta_3 height + \beta_4 male + \beta_5 work + \beta_6 exercise + \varepsilon$$

donde:

- $health$ es una medida del estatus de salud de los individuos,
- $work$ son las horas trabajadas semanalmente, y
- $exercise$ son las horas de ejercicio por semana.

¿Por qué exercise puede ser una variable endógena?

Instrumentos: distancia desde casa ($dhome$) y distancia desde el trabajo ($dwork$) al gimnasio o al club de salud más cercano.

4. Supuestos

Supuestos

Supuesto 1: Linealidad

La ecuación a ser estimada es lineal:

$$y_i = x_i'\beta_0 + \varepsilon_i, \qquad i = 1, \dots, n$$

Donde x_i es un vector de regresores de dimensión K, β_0 es un vector de coeficientes de dimensión K, y ε_i son términos de errores no observables.

Supuestos

Supuesto 2: Muestra Aleatoria

Sea z_i un vector de instrumentos de dimensión L, y sea w_i el elemento no constante y único de $(y_i, \mathrm{x_i}, \mathrm{z_i})$. $\{w_i\}$ es i.i.d.

Supuestos

Supuesto 3: Condiciones de Ortogonalidad

Instrumentos no están correlacionados con el término de error. Todas las L variables en z_i son predeterminadas en el sentido que ellos son ortogonales al término de error: $E(z_{il}\varepsilon_i) = 0$ para todo i y l $(l = 1,2,\dots,\mathrm{L})$.

$$\mathrm{E}[z_i \cdot (y - x_i'\beta_0)] = 0$$

Se denota también como:

$$\mathrm{E}(g_i) = 0$$

Donde $g_i = z_i \cdot \varepsilon_i$ y $\varepsilon_i = y_i - x_i'\beta_0$

Supuestos

Ejemplo: Salarios

Considerar

$$\text{wage}_i = \beta_1 + \beta_2 sch_i + \beta_3 exper_i + \varepsilon_i$$

Nuestro instrumento es $prox_i$. Por lo tanto:

$$y_i = \text{wage}_i, \qquad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}, \qquad z_i = \begin{pmatrix} 1 \\ exper_i \\ prox_i \end{pmatrix} \quad K = 3, L = 3$$

De tal manera que:

$$E\begin{pmatrix} (\text{wage}_i - \beta_1 - \beta_2 sch_i - \beta_3 exper_i) \\ \text{exper}_i(\text{wage}_i - \beta_1 - \beta_2 sch_i - \beta_3 exper_i) \\ \text{prox}_i(\text{wage}_i - \beta_1 - \beta_2 sch_i - \beta_3 exper_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Supuestos

Supuesto 4: Condición Rango para identificación

La matriz $E(z_i x_i') = Q_{zx}$ de dimensión $L \times K$ es de rango completo columna (es decir, su rango igual K).

Identificación

Como un ejemplo, considerar un modelo con solo una covariable y un instrumento: $z_i = (1, z_i)'$ y $x_i = (1, x_i)'$. Entonces:

$$Q_{zx} = \begin{pmatrix} 1 & E(z_i) \\ E(z_i) & E(z_i x_i) \end{pmatrix}$$

El determinante de Q_{zx} no es cero (es rango columna completo) si y solo si $cov(z_i, x_i) = E(z_i x_i) - E(x_i) \cdot E(z_i) \neq 0$

Identificación

Escribimos la condición de momentos de ortogonalidad como:

$$E[g(w_i, \beta)] = 0 \text{ donde } g_i = g(w_i; \beta) \equiv z_i \cdot (y_i - x_i'\beta)$$

Considerar un estimador $\hat{\beta}_{K\times 1}$ de β_0. Entonces, tenemos un sistema de L ecuaciones simultáneas en K incógnitas:

$$E\left[g\left(w_i, \hat{\beta}\right)\right] = 0$$

Identificación

Ya que el modelo es lineal se puede escribir como:

$$E[g(w_i, \beta)] = E[z_i \cdot (y_i - x_i'\beta)] = E(z_i \cdot y_i) - E(z_i x_i')\hat{\beta} = 0$$

o

$$\underset{(L\times K)}{Q_{zx}} \quad \underset{(K\times 1)}{\hat{\beta}} = \underset{(L\times 1)}{q_{zy}}$$

La única solución es que $\hat{\beta} = \beta_0$ si y solo si Q_{zx} es de rango completo.

Condición de Orden para Identificación

- Ya que el rango $(Q_{zx}) < K$ si $L < K$, una condición necesaria para identificación es que $L \geq K$.
- En otras palabras, el número de variables predeterminados debe ser mayor o igual al número de variables exógenas.
- El número de instrumentos debe ser mayor o igual al número de variables endógenas.

1. La ecuación es **sobreidentificada** si la condición de rango se cumple y $L > K$
2. La ecuación es **identificada** exactamente si la condición de rango se cumple y $L = K$
3. La ecuación es **subidentificada** (o no identificada) si la condición de orden no se cumple, es decir, $L < K$.

5. Estimador de Variable Instrumental

Estimador Variable Instrumental

El método de variables instrumentales (VI) permite obtener estimadores consistentes de los parámetros en situaciones en que el estimador MCO es inconsistente (omisión de variables relevantes, errores de medida o simultaneidad).

Estimador Variable Instrumental

Si reemplazamos las condiciones de momento por los momentos muestrales, tenemos:

$$g_n(\hat{\beta}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(w_i;\hat{\beta})$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i(y_i - x_i'\hat{\beta})$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i y_i - (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i x_i')\,\hat{\beta}$$

$$= \frac{1}{n}(\mathrm{Z}'y - Z'X\hat{\beta})$$

$$g_n(\hat{\beta}) = s_{zy} - S_{zx}\,\hat{\beta}$$

Estimador Variable Instrumental

Entonces, la muestra analógica $g_n(\hat{\beta}) = 0$ es un sistema de ecuación lineal L en K incógnitas:

$$S_{zx}\hat{\beta} = s_{zy}$$

Si $K = L$ (la ecuación es exactamente identificada), entonces Q_{zx} es cuadrada e invertible y el sistema de ecuaciones simultaneas tiene una solución única dada por:

$$\hat{\beta}_{IV} = S_{zx}^{-1} s_{zy}$$

$$\hat{\beta}_{IV} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i x_i'\right)^{-1} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i y_i$$

$$\hat{\beta}_{IV} = (Z'X)^{-1}\mathrm{Z}'y$$

Se llama el estimador de variables instrumentales.

Si $z_i = x_i$, es decir, los regresores son ortogonales al término de error, entonces $\hat{\beta}_{IV}$ se reduce al estimador MCO.

Estimador VI en modelo simple

La idea del método de VI es que dado el modelo:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$$

Donde x es una variable endógena $(corr(x_i, \varepsilon_i) \neq 0)$ que hace inconsistente el estimador MCO.

En consecuencia, necesitamos un instrumento (z) para aislar la parte de x no correlacionada con ε. Por lo que, este instrumento debe cumplir las condiciones de exogeneidad y relevancia.

Estimador VI en modelo simple

Dada la exogeneidad del instrumento $Cov(Z_i, \varepsilon_i) = 0$, utilizando el método de los momentos:

$$E(\varepsilon) = E(y - \beta_0 - \beta_1 x) = 0$$
$$E(\varepsilon z) = Cov(Z_i, y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1}) = 0$$

De la primera ecuación se obtiene la constante:

$$\frac{1}{N}\sum(y - \beta_0 - \beta_1 x) = 0$$
$$\tilde{\beta}_0^{IV} = \bar{y} - \tilde{\beta}_1^{IV}\bar{x}$$

El estimador de VI se puede obtener (si $z = x, \tilde{\beta}_i^{IV} = \tilde{\beta}_i^{MCO}$):

$$\tilde{\beta}_i^{IV} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})(x_i - \bar{x})}$$

Estimador VI en modelo simple

Por tanto, cuando el $corr(Z_i, \varepsilon_i) \neq 0$ el estimador de VI es inconsistente (sesgo de consistencia):

$$\tilde{\beta}_i^{IV} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})(x_i - \bar{x})} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})Y_i}{\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})X_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})(\beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i)}{\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})X_i}$$

$$\tilde{\beta}_i^{IV} = \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})(\varepsilon_i)}{\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})X_i} \quad \xrightarrow{p} \quad \beta_1 + \frac{cov(z_i, \varepsilon_i)}{cov(z_i, x_i)} = \beta_1$$

Varianza del estimador VI

En general, el estimador de VI tendrá una varianza mayor que el de MCO. Wooldridge (2009) muestra que la varianza asintótica del estimador es:

$$var(\tilde{\beta}_i^{IV}) = \frac{\hat{\sigma}^2}{n\sigma_x^2\rho_{xz}^2}$$

Siendo $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum \tilde{\varepsilon}^2}{n-k}$, estimado con el residuo del modelo de VI; ρ_{xz}^2 es el cuadrado de la correlación poblacional entre x y z (solo en el caso de regresión simple); σ_x^2 es la varianza poblacional de x.

Varianza del estimador VI

$$var(\tilde{\beta}_i^{IV}) = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 R_{xz}^2}$$

Por tanto, si x es exógena, realizar VI en vez de MCO tiene un coste en término de eficiencia, en tal sentido, a menor correlación, mayor varianza de VI respecto a MCO (recordar que la varianza muestral de x, $\sigma_x^2 = \frac{STC_x}{n}$).

Dado que esta estimación difiere de la de MCO $\left(var(\tilde{\beta}_i^{MCO}) = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\right)$ por R_{xz}^2, que al ser siempre menor que 1, $var(\tilde{\beta}_i^{IV}) > var(\tilde{\beta}_i^{MCO})$

Varianza del estimador VI

La desviación estándar del coeficiente se puede utilizar para obtener los estadísticos t y realizar inferencia de la forma habitual.

$$t_{\hat{\beta}_j}^{IV} = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_{ho}}{de(\tilde{\beta}_i^{VI})}$$

6. Estimación por Mínimos Cuadrados en Dos Etapas

Estimación por MC2E

El método permite emplear más de una variable explicativa exógena como instrumento (Wooldridge, 2009).

Este estimador se presenta como un procedimiento en dos etapas.

En una primera etapa se elimina la correlación entre la endógena y el error, mediante instrumentos (variables exógenas) que están altamente correlacionadas con la variable explicativa de interés.

Dado dos instrumentos válidos (z_1 y z_2), se podría utilizar cualquiera de estos para obtener VI, utilizar una combinación de ambos será siempre más eficiente.

Estimación por MC2E

Un caso sencillo con $k = 3$ variables explicativas (incluyendo a la constante de unos), en donde la última variable presenta correlación con el error.

$$Y_i = \underbrace{\beta_1 + \beta_2 X_{2i}}_{\text{(No correlacionados con } \varepsilon_i)} + \underbrace{\beta_3 X_{3i}}_{\text{(Correlacionados con } \varepsilon_i)} + \varepsilon_i$$

Matricialmente:

$$y = X_2\beta_2 + X_3\beta_3 + \varepsilon$$

En donde X_2 es una matriz $n\times 2$ y X_3 es una matriz $n\times 1$ que contiene al regresor endógeno, donde $Cov(X_2, \varepsilon) = 0$ y $Cov(X_3, \varepsilon) \neq 0$.

Estimación por MC2E

Supongamos que contamos con m variables $W_{1i}, W_{2i}, \dots, W_{mi}$, que cumple las condiciones de relevancia y exogeneidad de las variables instrumentales. Agrupamos a estas variables en una matriz W de dimensión $n \times m$.

Procedimientos (Primera Etapa)

1. Regresionar por MCO al regresor endógeno X_{3i} contra la constante, la variable X_{2i} y todas las variables en la matriz W. Explícitamente se estima la regresión:

$$X_{3i} = \gamma_1 + \gamma_2 X_{2i} + \gamma_k W_{1i} + \gamma_{k+1} W_{2i} + \cdots + \gamma_{k-1+m} W_{mi} + \xi_{1i}$$

2. Luego se calcula la predicción $\hat{X}_{3i}$. Matricialmente, la regresión se escribe como:

$$X_3 = X_2\gamma_1 + W\gamma_2 + \xi = \mathrm{Z}\gamma + \xi$$

3. El estimador MCO es $\hat{\gamma} = (Z'Z)^{-1}Z'X_3$ y las predicciones son:

$$\hat{X}_3 = Z(Z'Z)^{-1}Z'X_3 = P_Z X_3$$

donde $P_Z = Z(Z'Z)^{-1}Z'$ es la matriz de proyección.

Procedimientos (Segunda Etapa)

4. Utilizar a la predicción $\hat{X}_3$ en lugar de X_3 en la ecuación (1) y estimar por MCO la ecuación:

$$y = X_2\beta_2 + \hat{X}_3\beta_3 + \eta$$

5. En términos matriciales:

$$\hat{\beta}_{MC2E} = (X'P_Z X)^{-1}X'P_Z y$$

$$= (X'Z(Z'Z)^{-1}Z'X)^{-1}X'Z(Z'Z)^{-1}Z'y$$

El estimador MCO de esta ecuación es el estimador de MC2E, el cual es consistente de los parámetros poblacionales.

Procedimientos (Segunda Etapa)

6. La estimación por MCO de la segunda etapa no entrega las desviaciones estándar correctas del estimador MC2E.

   La matriz de varianzas y covarianzas correcta es:

$$Var(\hat{\beta}_{MC2E}|X) = \hat{\sigma}^2(X'Z(Z'Z)^{-1}Z'X)^{-1}$$
$$= \hat{\sigma}^2(X'PX)^{-1}$$

   Donde σ^2 puede ser estimado mediante:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}}{n}$$

$$\hat{\varepsilon} = y - X\hat{\beta}_{MC2E}$$

Consistencia

1. Reemplazando $y = X\beta + \varepsilon$ en el estimador $\hat{\beta}_{MC2E}$ y multiplicando y dividiendo por n, se obtiene:

$$\hat{\beta}_{MC2E} = (X'P_Z X)^{-1} X'P_Z (X\beta + \varepsilon)$$

$$= \beta + (X'P_Z X)^{-1} X'P_Z \varepsilon$$

$$= \beta + \underbrace{\left(\frac{1}{n} X'P_Z X\right)^{-1}}_{(a)} \underbrace{\left(\frac{1}{n} X'P_Z \varepsilon\right)}_{(b)}$$

Consistencia

2. Tomando plim al argumento entre paréntesis del término (a):

$$plim\left(\frac{1}{n}X'P_ZX\right) = plim(\frac{1}{n}X'Z(Z'Z)^{-1}Z'X)$$

$$= plim\left(\frac{1}{n}X'Z\right)plim\left(\frac{1}{n}Z'Z\right)^{-1}plim(\frac{1}{n}Z'X)$$

$$= Q_{XZ}Q_{ZZ}^{-1}Q'_{XZ} \neq 0$$

Consistencia

3. Tomando plim al argumento entre paréntesis del término (b):

$$plim\left(\frac{1}{n}X'P_Z\varepsilon\right) = plim(\frac{1}{n}X'Z(Z'Z)^{-1}Z'\varepsilon)$$

$$= plim\left(\frac{1}{n}X'Z\right)plim\left(\frac{1}{n}Z'Z\right)^{-1}plim(\frac{1}{n}Z'\varepsilon)$$

$$= Q_{XZ}Q_{ZZ}^{-1}0 = 0$$

4. Reemplazando estos dos argumentos, se obtiene:

$$plim(\hat{\beta}_{MC2E}) = \beta$$

7. Verificando Condiciones

7.1 El problema de los instrumentos débiles

Instrumentos Débiles

Propiedades del estimador IV pueden ser pobres y el estimador puede ser severamente sesgado, si el instrumento exhibe solamente correlación con los regresores endógenos.

Considerar el siguiente modelo $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \varepsilon$ donde z_1 como instrumento para x_1. El estimador IV es:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})y_i}{\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})(x_i - \bar{x})}$$

Entonces, si $cov(z, x) \neq 0$, el plim del estimador IV es:

$$plim\hat{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{cov(z, \varepsilon)}{cov(z, x)}$$

Cuando $cov(z, \varepsilon) = 0$ obtenemos resultados consistentes. Sin embargo, si z tiene alguna correlación con ε, el estimador es inconsistente.

Instrumentos Débiles

Reescribimos:

$$plim\hat{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{\sigma_\varepsilon corr(z,\varepsilon)}{\sigma_x corr(z,x)}$$

De aquí vemos:

- Si z y ε están correlacionados, la inconsistencia en el estimador IV se vuelve grande a medida que $corr(z,x)$ se acerca a cero.
- Una correlación pequeña entre z y ε puede causar inconsistencia severa y un sesgo de muestra finito severo, si z solo está debilmente correlacionado con x.

Instrumentos Débiles

En tales casos, puede ser mejor usar MCO, incluso si solo nos enfocamos en la inconsistencia en los estimadores: tenga en cuenta que el límite del estimador MCO es:

$$plim\hat{\beta}_{MCO,1} = \beta_1 + \frac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_x} corr(x, \varepsilon)$$

La comparación de estas fórmulas muestra que se prefiere IV a MCO en el terreno de sesgo asintótico cuando:

$$\frac{corr(z, \varepsilon)}{corr(z, x)} < corr(x, \varepsilon)$$

Además:

$$\frac{plim\hat{\beta}_{IV} - \beta}{plim\hat{\beta}_{MCO} - \beta} = \frac{corr(z, \varepsilon)}{corr(x, \varepsilon)} < \frac{1}{corr(z, x)}$$

Por lo tanto, con un instrumento invalido y una baja correlación entre el instrumento y el regresor, el estimador IV puede ser aún más inconsistente que MCO.

Aplicación Monte Carlo

El proceso generador de datos:

$$y_i = \theta + \beta x_i + u_i$$

$$x_i = \alpha + \gamma z_i + p u_i + \varepsilon_i$$

Donde $u_i \sim N(0, \sigma_u^2), \varepsilon_i \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ y el vector de innovación (u_i, ε_i) es independientemente distribuido.

El intercepto es $\theta = 0.5$. El γ controla la fuerza de los instrumentos z_i, ρ controla el monto de la correlación entre x_i y u_i, σ_ε^2 puede ser usado para controlar la variabilidad relativa de x_i y u_i es un problema de error en variables.

Aplicación Monte Carlo

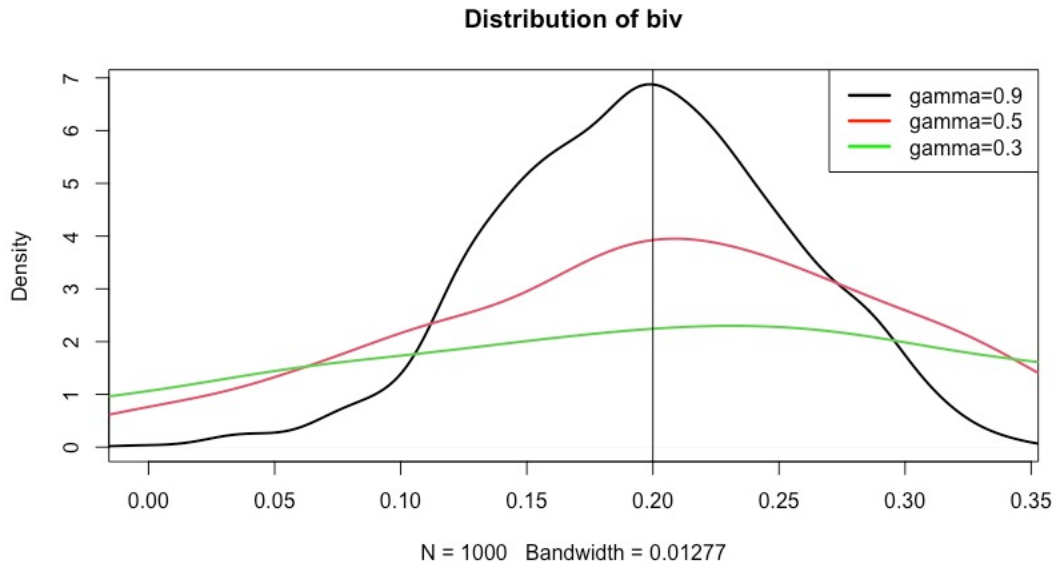


Figura 1. Distribución de β_{IV}

Instrumentos Débiles

Una forma de ver si los instrumentos están correlacionados con el regresor endógeno es a través de la prueba F en la primera etapa del procedimiento de dos etapas (Staiger y Stock, 1997).

La regla de oro aplicable para el caso de un solo regresor endógeno dice que:

> Si el estadístico F de significancia conjunta que prueba la hipótesis H_0: $\gamma = 0$ es mayor a 10, entonces los instrumentos son relevantes.

7. Verificando Condiciones

7.2 Validez de la exogeneidad de los instrumentos

Validez de la exogeneidad de los instrumentos

Test de la validez de la exclusión de W de la ecuación principal asignándoles un valor de cero a sus hipotéticos parámetros (restricción de exclusión).

Test de Sargan y su generalización para errores robustos en el test J de Hansen (Hansen, 1982), puede aplicarse al caso en que el número de instrumentos excluidos es mayor al número de regresores endógenos, o caso sobreidentificado.

La única diferencia entre ambos tests es que el de Sargan asumen homocedasticidad condicional.

Validez de la exogeneidad de los instrumentos

Los pasos del test de Sargan son:

1. Estimar los parámetros de la ecuación (1) por MC2E utilizando los instrumentos propuestos. Calcular $\hat{Y}_1 = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta}_3 X_{3i}$
2. Calcular $\hat{\varepsilon}_i = Y_i - \hat{Y}_i$
3. Regresionar $\hat{\varepsilon}_i$ sobre todos los instrumentos $X_{2i}, W_{1i}, \dots, W_{mi}$
4. Hallar el estadístico F que contrasta la hipótesis que los coeficientes de $W_{1i}, \dots, W_{mi}$ son iguales a cero.
5. Bajo la hipótesis nula de instrumentos exógenos, el valor $J = mF$ se distribuye asintóticamente como un χ^2_{m-1}
6. Si J supera al valor crítico respectivo, se rechaza la hipótesis nula de instrumentos exógenos; si es inferior, se acepta la nula.

8. Test de Endogeneidad

Test de Endogeneidad

Se puede hacer una prueba estadística que confirme o rechace la hipótesis que un regresor sea endógeno.

Test de Hausman: comparar estimadores MCO y MC2E.

- Si todos los regresores son exógenos (H_0), entonces tanto MCO como MC2E son consistentes, pero MCO es más eficiente.
- Si hay regresores endógenos (hipótesis alternativa), solo MC2E es consistente.

Test de Endogeneidad

El test de Hausman:

$$H = n(\hat{\beta}_{IV} - \hat{\beta}_{MCO})'[Var(\hat{\beta}_{IV}) - Var(\hat{\beta}_{MCO})]^{-1}(\hat{\beta}_{IV} - \hat{\beta}_{MCO})$$

Bajo la H_0, H se distribuye asintóticamente como una chi-cuadrado con un grado de libertad (el número de regresores endógenos).

9. Aplicación en RStudio

Aplicación en RStudio

Card (1993) usa los datos de salario y educación para una muestra de individuos en 1976 para estimar los retornos de educación:

$$lnw_i = \beta_1 + \beta_2 S_i + \beta_3 E_i + \beta_4 E_i^2 + h_i'\delta + \varepsilon_i$$

Donde lnw_i denota el logaritmo de los salarios individuales, S_i denota años de escolaridad, E_i denota años de experiencia y variables adicionales explicatorias h_i (regional, sexo, y dummies raciales).

Sesgo de variable omitida:

$$lnw_i = \alpha + \beta S_i + \gamma A_i + h_i'\delta + \varepsilon_i$$

Donde A_i es una medida de habilidad, y h ahora incluye experiencia y experiencia al cuadrado.

¿Qué consecuencias existen por omitir A?

Si A_i es omitida de la ecuación, entonces el estimador MCO de β:

$$\hat{\beta}_{MCO} \rightarrow \underbrace{\beta}_{\text{Efecto Directo}} + \underbrace{\gamma \frac{Cov(S_i, A_i)}{Var(S_i)}}_{\text{Efecto Indirecto}}$$

Si la correlación entre S y A es positivo, $\frac{Cov(S_i,A_i)}{Var(S_i)} > 0$, entonces $\hat{\beta}_{MCO}$ es asintóticamente sesgado hacia arriba.

Aplicación en RStudio

- Usamos datos de 3010 individuos del NLS-Y (Card, 1999)
- Características de la encuesta:
  - Grupo de individuos es encuestado desde 1966
  - Edad 14-24 años
  - Un número de años consecutivos

Aplicación en RStudio

- El estimador del coeficiente de escolaridad cuando habilidad es ignorado es reproducido en modelo 1 de la Tabla 1.

- Los controles son:
  - $experience$: experiencia potencial en años
  - $experience^2$: experiencia potencial al cuadrado
  - $black$: dummy para raza negra (1 si el individuo es de raza negra)
  - $south$: dummy si el individuo vive en el sur
  - $smsa$: dummy para residencia en área metropolitana
  - $smsa66$: dummy para residencia en área metropolitana en 1966
  - $reg662 - reg668$: set de variables dummy regionales

Aplicación en RStudio

El NLS-Y cuenta con dos medidas de habilidad:

- KWW: score del test Knowledge of the World of Work
- IQ: el score IQ

Estimadores MCO de β y γ cuando IQ es incluido en la ecuación es reportado en la ecuación es reportado en columna 2 de la Tabla 1.

Aplicación en RStudio

- Card (1993) usa una variable dummy para determinar si alguien creció cerca de una universidad como una variable instrumental para la educación, $nearc4$.
- Para que $nearc4$ sea un instrumento válido, no debe estar correlacionado con el término de error en la ecuación salarial, y debe estar parcialmente correlacionado con la educación.
- La idea es que los estudiantes que crecen en un área sin universidad enfrentan un costo más alto de educación universitaria, ya que la opción de vivir en una casa está excluida.
- Entonces, uno esperaría que este costo más alto reduzca la inversión en educación superior, al menos entre los hijos de familias de ingresos relativamente bajos.

Aplicación en RStudio

Si usamos $nearc4$ como un instrumento para $educ$, entonces:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ educ \\ exper \\ exper^2 \\ black \\ south \\ smsa \\ smsa66 \\ region \end{pmatrix} \qquad \mathrm{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ nearc4 \\ exper \\ exper^2 \\ black \\ south \\ smsa \\ smsa66 \\ region \end{pmatrix} \qquad L = K$$

Aplicación en RStudio

Y las condiciones de momentos son:

$$\mathrm{E}\big(\mathrm{z}\cdot(y-x_i'\beta_0)\big)=\begin{pmatrix} E[y_i-x_i'\beta_0] \\ E[nearc4(y_i-x_i'\beta_0)] \\ E[exper(y_i-x_i'\beta_0)] \\ E[exper^2(y_i-x_i'\beta_0)] \\ E[black(y_i-x_i'\beta_0)] \\ E[south(y_i-x_i'\beta_0)] \\ E[smsa(y_i-x_i'\beta_0)] \\ E[smsa66(y_i-x_i'\beta_0)] \\ E[region(y_i-x_i'\beta_0)] \end{pmatrix}=0$$

El modelo es identificado y debe ser estimado usando el estimador IV. Columna 3 de la tabla 1 presenta los resultados.

Aplicación en RStudio

- Curiosamente, la estimación IV del retorno a la educación es casi dos veces $(\frac{0.132}{0.075} \approx 2)$ tan grande como la estimación MCO de la columna 2, pero el error estándar de la estimación IV es más de 18 veces $(\frac{0.055}{0.003} \approx 18)$ mayor que el error estándar de MCO.
- El intervalo de confianza del 95% de la estimación IV tiene un rango muy amplio.
- Los intervalos de confianza más grandes son un precio que debemos pagar para obtener un estimador consistente del retorno a la educación cuando pensamos que la educación es endógena.

Aplicación en RStudio

Pero ¿**es $nearc4$ un instrumento válido**?

Recordar que uno de los requisitos es que **el instrumento este parcialmente correlacionado con la educación** una vez que se hayan eliminado otras variables exógenas ($south, smsa$, etc).

Para verificar este requisito, regresionamos $educ$ en $nearc4$ y todas las variables exógenas que aparecen en la ecuación. Es decir, estimamos la forma reducida de $educ$.

Aplicación en RStudio

- Los resultados para la forma reducida se presentan en la columna 4 de la Tabla 1.
- En igualdad de condiciones, las personas que vivían cerca de una universidad en 1966 tenían, en promedio, aproximadamente un tercio (el coeficiente es 0.32) de un año más de educación que las que no crecieron cerca de una universidad.

¿Existe un problema con el instrumento?

1. Recuerde que el estadístico F para la significancia (conjunta) de los instrumentos en la primera etapa debe exceder 10.
2. En este caso, dado que tenemos solo un instrumento, el estadístico F es $\left(\frac{0.320}{0.088}\right)^2 = 13.22$, que es mayor que 10.
3. Entonces, nuestro instrumento es lo suficiente fuerte.

Aplicación en RStudio

El segundo requisito es que el **instrumento no esté correlacionado con el término de error** en la ecuación salarial.

- Sin embargo, esto no puede ser probado. La validez de los instrumentos solo puede probarse, hasta cierto punto, si el modelo está sobreidentificado.
- Por lo tanto, para que la proximidad a la universidad sirva como un instrumento legítimo para la educación completa, debe afectar las decisiones individuales de escolarización, pero no tiene un efecto directo en los ingresos.
- Sin embargo, **hay al menos tres razones** por las cuales los individuos que crecieron cerca de una universidad pueden tener mayores ganancias que otros individuos, controlando la educación, la información geográfica y los antecedentes de los padres.

Aplicación en RStudio

1. Las familias que ponen un fuerte énfasis en la educación pueden optar por vivir cerca de una universidad. Los niños de estas familias pueden tener una mayor capacidad o pueden estar más motivados para lograr el éxito en el mercado laboral. En cualquier caso, podríamos tener una correlación positiva entre la proximidad a la universidad y ε.

2. La presencia de una universidad puede estar asociada con una mayor calidad escolar en las escuelas primarias y secundarias cercanas.

3. Si los individuos que crecieron en áreas con una universidad cercana tienden a vivir en áreas con salarios más altos, entonces la proximidad a la universidad puede estar correlacionada con primas salariales geográficas no observadas.

Aplicación en RStudio

- Recuerde que no estamos controlando la habilidad, por lo que esta variable va al término de error.
- Sin embargo, como explicamos anteriormente, podría darse al caso de que las familias elijan vivir cerca de una universidad y que sus hijos tengan una mayor capacidad.
- Entonces una pregunta interesantes es ¿**podría $nearc4$ estar correlacionado con cosas en el término error, como la habilidad no observada**?
- Se sabe que los puntajes de IQ varían según la región geográfica, y también lo hace la disponibilidad de la universidad. Podría ser que, por una variedad de razones, las personas con habilidades superiores crecen en áreas con universidades cercanas.

Aplicación en RStudio

- La columna 5 de la Tabla 1 muestra el resultado de la regresión de iq sobre $nearc4$.
- El puntaje predicho de IQ es aproximadamente 2.6 puntos más alto para un hombre que creció cerca de una universidad. La diferencia es estadísticamente significativa. En otras palabras, el instrumento está correlacionado con alguna variable que sabemos que afecta las ganancias y está en el término de error. Por lo tanto, la condición $E(z_i \varepsilon_i)$ no se cumple.
- Pero ¿**qué sucede si controlamos por otras dummies regionales**? La columna 6 de la Tabla 1 es la misma regresión que en la columna 5, pero ahora controlamos para $smsa, smsa66$ y variables dummies regionales.
- Ahora, la relación entre iq y $nearc4$ es mucho más débil y estadísticamente insignificante. En otras palabras, una vez que controlamos la región y el medio ambiente mientras crecemos, no hay un vínculo aparente entre el puntaje de IQ y vivir cerca de una universidad. Esto implica que es importante incluir estas variables en la ecuación salarial para controlar las diferencias en el acceso a las universidades que también podrían estar correlacionadas con la habilidad.

Aplicación en RStudio

	Dependent variable:					
	log(wage)	log(wage)	log(wage)	educ	IQ	IQ
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
Educ	0.075***	0.070***	0.132**			
	(0.003)	(0.005)	(0.055)			
Nearc4				0.320***	2.596***	0.348
				(0.088)	(0.745)	(0.814)
Experience	0.085***	0.095***	0.108***	−0.413***		
	(0.007)	(0.009)	(0.024)	(0.034)		
Experience2	−0.002***	−0.003***	−0.002***	0.001		
	(0.0003)	(0.0005)	(0.0003)	(0.002)		
Black	−0.199***	−0.148***	−0.147***	−0.936***		
	(0.018)	(0.027)	(0.054)	(0.094)		
South	−0.148***	−0.100***	−0.145***	−0.052		
	(0.026)	(0.032)	(0.027)	(0.135)		
SMSA	0.136***	0.123***	0.112***	0.402***		
	(0.020)	(0.024)	(0.032)	(0.105)		
reg661	−0.119***	−0.122***	−0.108***	−0.210		2.892
	(0.039)	(0.044)	(0.042)	(0.202)		(1.797)
reg662	−0.022	−0.019	−0.007	−0.289**		3.991***
	(0.028)	(0.032)	(0.033)	(0.147)		(1.294)
reg663	0.026	0.004	0.040	−0.238*		1.333
	(0.027)	(0.031)	(0.032)	(0.143)		(1.259)
reg664	−0.063*	−0.073*	−0.058	−0.093		2.349
	(0.036)	(0.040)	(0.038)	(0.186)		(1.635)
reg665	0.009	0.002	0.038	−0.483**		−5.584***
	(0.036)	(0.043)	(0.047)	(0.188)		(1.322)
reg666	0.022	0.037	0.055	−0.513**		−4.529***
	(0.040)	(0.051)	(0.053)	(0.210)		(1.698)
reg667	−0.001	−0.031	0.027	−0.427**		−5.502***
	(0.039)	(0.047)	(0.049)	(0.206)		(1.520)
reg668	−0.175***	−0.170***	−0.191***	0.314		−0.033
	(0.046)	(0.052)	(0.051)	(0.242)		(2.111)
smsa66	0.026	0.036	0.019	0.025		1.089
	(0.019)	(0.023)	(0.022)	(0.106)		(0.809)
IQ		0.002***				
		(0.001)				
Constant	4.739***	4.501***	3.774***	16.849***	100.611***	101.882***
	(0.072)	(0.106)	(0.935)	(0.211)	(0.627)	(1.292)
Observations	3,010	2,061	3,010	3,010	2,061	2,061
R^2	0.300	0.237	0.238	0.477	0.006	0.063
Adjusted R^2	0.296	0.231	0.234	0.474	0.005	0.058
Note:	*p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01					

Aplicación en RStudio

- Sin embargo, una advertencia es que si la escolarización se mide con error, la experiencia también se mide mal, lo que sugiere posibles sesgos en la forma reducida. Del mismo modo, si la educación es verdaderamente endógena en la ecuación de ingresos, también lo es la experiencia, ¡ya que la experiencia está relacionada mecánicamente con la educación! Dado que la edad no es una variable de elección y, por lo tanto, es exógena sin ambigüedades. Por lo tanto, podemos usar age y age^2 como instrumentos de $experiencia$ y $experiencia^2$.

- Ahora estimamos el modelo que instrumenta la experiencia y la experiencia al cuadrado con la edad y la edad al cuadrado. La columna 1 de la Tabla 2 presenta los resultados para el modelo MC2E. Ahora el coeficiente es más bajo que el de la columna 3 de la Tabla 1.

Aplicación en RStudio

	Dependent variable:		
	log(wage)	log(wage)	educ
	(1)	(2)	(3)
educ	0.122***	0.157***	
	(0.046)	(0.053)	
exper	0.064***	0.119***	−0.412***
	(0.024)	(0.023)	(0.034)
expersq	−0.001	−0.002***	0.001
	(0.001)	(0.0003)	(0.002)
black	−0.133**	−0.123**	−0.945***
	(0.066)	(0.052)	(0.094)
south	−0.144***	−0.143***	−0.042
	(0.028)	(0.028)	(0.136)
smsa	0.091*	0.101***	0.401***
	(0.049)	(0.032)	(0.105)
reg661	−0.092*	−0.103**	−0.169
	(0.048)	(0.043)	(0.204)
reg662	−0.015	−0.0002	−0.269*
	(0.031)	(0.034)	(0.148)
reg663	0.035	0.047	−0.190
	(0.030)	(0.033)	(0.146)
reg664	−0.062*	−0.055	−0.038
	(0.038)	(0.039)	(0.189)
reg665	0.040	0.052	−0.437**
	(0.049)	(0.048)	(0.190)
reg666	0.053	0.070	−0.502**
	(0.052)	(0.053)	(0.210)
reg667	0.024	0.039	−0.378*
	(0.048)	(0.050)	(0.208)
reg668	−0.190***	−0.198***	0.382
	(0.051)	(0.053)	(0.245)
smsa66	0.030	0.015	0.0001
	(0.021)	(0.022)	(0.107)
nearc2			0.123
			(0.077)
nearc4			0.321***
			(0.088)
Constant	4.183***	3.340***	16.773***
	(0.562)	(0.895)	(0.216)
Observations	3,010	3,010	3,010
R^2	0.226	0.170	0.478
Adjusted R^2	0.222	0.166	0.475
Note:	*p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01		

Aplicación en RStudio

- Ahora usamos otro instrumento, $nearc2 = 1$ si el individuo creció en un área con una universidad de 2 años, junto con $nearc4$. La columna 2 de la Tabla 2 presenta los resultados para el modelo MC2E, mientras que la columna 3 muestra la ecuación de forma reducida.
- ¿Tenemos un problema de instrumento débil?


PUCP