Теория вероятностей

Мордовкиной Надежды
ЭП-11-1

Литература:

1. Венсель Е.С. „Теория вероятностей"
2. Гмурманн В.Е. „Теор. вер. и мат. статистика"
3. Гнеденко Б.В. „Курс теории вероятностей"
4. Феллер „Введение в теор. вер."
5.

Учебные пособия и сборники:

5. Гмурманн „Руководство к решению задач по теор. вер. и мат. статистике"
6. Венсель, Овчаров „Задачи и упражнения по теор. вер."
7. Бондаренко, Гацков „Сборник задач по теор. вер. и мат. стат."

Лекция №1. Основные понятия теории вероятностей. Статистическое, классическое, геометрич. понятие т.в. Алгебра событий. | 5.02

Основные понятия.

Мерой случайности явл. вероятность случайного события.

Случайное событие — событие, кот. может произойти, а может не произойти при выполн. одних и тех же условий.

A, B, C, A1, A2 ... — события

Т.в. изуч. случайные события, которые явл. массовыми, воспроизводимыми

Случайные события бывают совместными и не совместными.
Случ. соб. назыв. несовместными, если они одновременно произойти не могут. События, кот. могут происходить одновременно, назыв. совместными.

События бывают зависимые и независимые.
События A и B явл. зависимыми, если вероятность наступления одного из них зависит от того, наступило другое событие или нет.

События A1, A2, ... An образуют полную группу событий, если какое-то из этих событий обязательно происходит.
2 события, обр. полную группу, назыв. противоположными.

$A, \bar{A}$ - противоположные

Событие назыв. достоверным, если оно наступает в обязат. порядке. Его вероятность $P(A) = 1$.
Событие назыв. невозможным, если оно никогда не происх.
$P(B) = 0$.

Классическое определение т. в.

Вероятностью $P(A)$ наступления случ. события A назыв. отношение благоприятствующих исходов к числу всех возможных.

$$\boxed{P(A) = \frac{m}{n}}, \quad 0 \le m \le n \Rightarrow 0 \le P(A) \le 1$$

Задача: Монету подбрасывают 2 раза. Какова вероятность, что хотя бы один раз выпадет орёл?

Возможные исходы: ОР, РО, РР, ОО. $n = 4$
Благоприятствующие: ОР, РО, ОО. $m = 3$

$$P(A) = \frac{3}{4} = 0,75$$

Относительная частота (частность) - отношение благоприятств. исходов k к общему числу проведённых испытаний.

$$P(A) \approx \frac{k}{n}$$

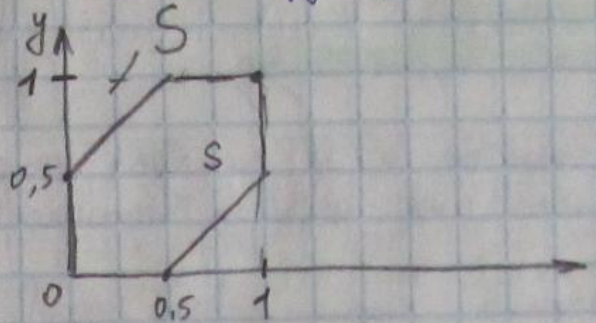
При увеличении числа экспериментов, относ. частота стремится к вероятности.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{k}{n} = P(A)$$

Геометрическая вероятность.

$$P(A) = \frac{S_g}{S_G}$$

Задача. Определить, какова вероятность встречи 2х агентов, которые встреч. в условленном месте с часа до двух и ждут ровно полчаса.



(время, в кот. приходит 1й агент)

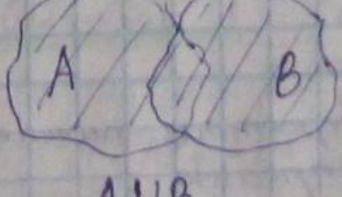
$$|y-x| = 0{,}5$$

$$y \le x + 0{,}5 \ ; \quad y \ge x - 0{,}5$$

$$P(A) = \frac{s}{S} = \frac{3/4}{1} = 0{,}75$$

Алгебра событий.

Пусть даны 2 события A и B. Их суммой назыв. событие, при котором наступает хотя бы одно из этих событий.



$A \cup B$

Произведением 2х событий назыв. такое событие, которое состоит в наступлении как события A, так и события B.

$A \cap B$

Операции сложения и умножения событий обладают следующими свойствами:

1) $A+B=B+A$ (коммутативность отн. сложения)

2) $(A+B)+C=A+(B+C)$ (ассоциативность)

3) $A\cdot B=B\cdot A$ (-"- отн. умнож.)

4) $(A+B)\cdot C=AC+BC$ (дистрибутивность)

5) $(A\cdot B)\cdot C=A(B\cdot C)$ (-"-)

Правило де Моргана.

$$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$$

$$\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$$

~~Когда~~ Так как противоположные события образуют полную группу, следоват., вероятность события $P(A+\overline{A})\overset{\Omega}{=}1$.

$P(\Omega)=1$ Ω - полная группа.

$P(A)+P(\overline{A})=1$; $P(A)=1-P(\overline{A})$

Если A - сложное событие, то $\overline{A}$ - простое. Вероятность сложного события проще находить через вероятность простого.

Лекция № 2. Теоремы о сумме.

Теоремы о произведении.

Формула полной вероятности.

Формула Байеса.

Теорема о вероятности суммы двух несовместных событий.

Пусть событие A и событие B яв. несовместными. Тогда вероятность суммы этих событий равна сумме их вероятностей.

Пусть всевдможных благоприятствующих событий – n.

$P(A+B) = P(A) + P(B)$;

$A \sim m_1$, $B \sim m_2$, $\underbrace{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}_{n}$

$P(A) = \frac{m_1}{n}$; $P(B) = \frac{m_2}{n}$

$$P(A+B) = \frac{m_1+m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A) + P(B)$$

Следствие 1. Если есть n несовместных событий, кот. обр. полную группу. Тогда:

$$P(A1 + A2 + \ldots An) = 1$$

Следствие 2. Противоположные события обр. полную группу.

$P(A+\bar{A}) = 1$; $P(A+\bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1$

$P(A) = 1 - P(\bar{A})$

Замечание: по правилу Моргана: $\overline{A1 + A_2 + \ldots A_n} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \ldots \cdot \bar{A}_n$

$$P(A_1+A_2+\dots+A_n) = 1 - P(\overline{A_1+A_2+\dots A_n})$$
$$P(A_1+A_2+\dots+A_n) = 1 - P(\bar{A}_1\cdot\bar{A}_2\cdot\dots\cdot\bar{A}_n)$$

Вероятность наступления хотя бы одного n проще искать через противоположное событие.

Следствие 3.

$A_i, \quad i=\overline{1,n}$

$$P\left(\sum_1^n A_i\right) = \sum_1^n P(A_i)$$

Пример: В ящике имеется 10 деталей, среди которых 4 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает 3 детали. Какова вероятность, что среди них хотя бы одна окрашена?

Дано:
$n=10$ – всего деталей
$k=4$ – окрашенных
B – хотя бы 1 окрашена из 3х

$P(B) = ?$

Решение:

окрашена 1, 2, 3

$$B = A_1 + A_2 + A_3$$

Теорема вероятности суммы:

$$P(B) = P(A_1+A_2+A_3) = P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$$

$$P(A_1) = \frac{m_1}{n_1}$$

$$n_1 = C_{10}^3 = \frac{10\cdot9\cdot8}{3!} = 120$$

$$m_1 = C_4^1 \cdot C_6^2 = 4\cdot\frac{6\cdot5}{2!} = 60$$

$$P(A_2) = \frac{m_2}{n_1}; \quad m_2 = C_4^2\cdot C_6^1 = \frac{3\cdot4}{2!}\cdot6 = 36$$

$$P(A_3) = \frac{m_3}{n_1}; \quad m_3 = C_4^3 = \frac{4\cdot3\cdot2}{3!} = 4$$

$$P(B) = \frac{60}{120} + \frac{36}{120} + \frac{4}{120} = \frac{100}{120} = \frac{5}{6}$$

Теорема о вероятности суммы совместных событий.

Пусть события A и B явл. совместными событиями. Тогда вероятность суммы совм. соб. равна сумме вероятностей без вероятности произведения.

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$$

$A + B = A\bar{B} + \bar{A}B + AB.$ ← события несовместны.

$$P(A+B) = P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) + P(AB)$$

$$A = A\bar{B} + AB$$

$$P(A) = P(A\bar{B}) + P(AB), \quad P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB)$$

$$B = \bar{A}B + AB$$

$$P(B) = P(\bar{A}B) + P(AB); \quad P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB)$$

$$P(A+B) = P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB) + P(AB)$$

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Условная вероятность.

Пусть есть 2 события – A и B. Условной вероятностью назыв. вероятность наступления события A, при условии, что событие B уже произошло.

$$P_B(A) \; ; \quad P_A(B)$$

Если события явл. независимыми, то условная вероятность события A:

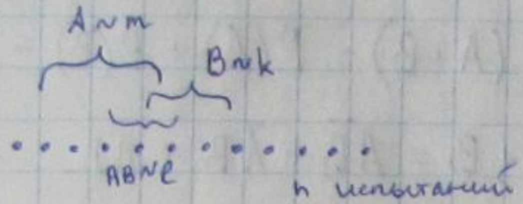
$$P_B(A) = P(A)$$

$$P_A(B) = P(B)$$

Теорема о вероятности произведения событий.

Пусть есть 2 события, яв. независимыми. И пусть они могут произойти в n испытаниях.

A: благоприятств. события $- m$



B: $-\text{"}- \; - k$

AB: $-\text{"}- \; l$

$P(A)=\frac{m}{n}$; $P(AB)=\frac{l}{n}$; $P_A(B)=\frac{l}{m}=\frac{l/n}{m/n}=\frac{P(AB)}{P(A)}$

$$\boxed{P(A)\cdot P_A(B)=P(AB)}$$

Замечание: $P(AB)=P(B)\cdot P_B(A)$

Следствие 1. Вероятность произв. независимых событий равна произведению их вероятностей.

$$P(A\cdot B)=P(B)\cdot P_B(A)=P(B)\cdot P(A)$$

Следствие 2. Если A не зависит от B, то B не зависит от A.

$P(B)\cdot P_B(A)=P(A)\cdot P_A(B)$; $P_B(A)=P(A)$

$P(B)\cdot P(A)=P(A)\cdot P_A(B)$; $P(B)=P_A(B)$

Пример: Студент знает 15 вопросов из 20 вопросов программы. В билет входит 3 вопроса. Считается, что студент сдаст экзамен, если он ответит на все 3 вопроса. Опред. вероятность, что студент сдаст экзамен.

Дано:

$n = 20$ - вопросов

$k = 15$ - знает

B - ответ. на 3 вопр. из 3х.

$P(B) = ?$

Решение:

1-й вопрос, 2-й, 3-й

$$B = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \quad ; \quad P(B) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) =$$

$$= P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2 A_3) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) =$$

$$= \frac{15}{20} \cdot \frac{14}{19} \cdot \frac{13}{18} = \frac{91}{228} = 0,40$$

Пример 2: Установлены 2 сигнализатора. Вероятность того, что сработает 1й - 0,9, а того, что сработает 2й - 0,8. Какова вероятность:

A) При аварии сработает хотя бы 1?

B) только 1?

C) только первый?

D) оба?

Дано:

A_1 - раб. 1й.

$P(A_1) = 0,9$

A_2 - раб. 2й

$P(A_2) = 0,8$

A - хотя бы 1

B - только 1

C - только 1й

D - оба

$P(A) = ?$

$P(B) = ?$

$P(C) = ?$

$P(D) = ?$

Решение:

$A = A_1 + A_2$ (независимы, совместны)

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cdot A_2) = 0,9 + 0,8 - 0,9 \cdot 0,8 = 0,98$$

$B = A_1 \cdot \bar{A}_2 + \bar{A}_1 \cdot A_2$ (несовместные)

$$P(B) = P(A_1 \cdot \bar{A}_2) + P(\bar{A}_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2) + P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2) =$$

$$= P(A_1)(1 - P(A_2)) + (1 - P(A_1)) \cdot P(A_2) = 0,9 \cdot 0,2 +$$

$$+ 0,1 \cdot 0,8 = 0,26$$

$C = A_1 \cdot \bar{A}_2$

$$P(C) = P(A_1 \cdot \bar{A}_2) = P(A_1)(1 - P(A_2)) = 0,9 \cdot 0,2 = 0,18$$

$$D = A_1 \cdot A_2 \ ; \ P(D) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0,9 \cdot 0,8 = 0,72$$

Формула полной вероятности.

Пусть сущ. события H_i $\}_{i=\overline{1,n}}$, кот. обр. полную группу событий. Пусть событие A происх. с одним из событий H_i.
гипотеза

Тогда:

$$A = H_1 A + H_2 A + \ldots + H_n A$$

События H_i явл. несовместными, поэтому:

$$P(A) = P(H_1 A) + P(H_2 A) + \ldots + P(H_n A)$$

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + \ldots + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A)$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)$$

Пример: В магазине есть телевизоры, произведённые на 3х заводах. 45% телевизоров, им. в магазине, производ. на 1 заводе, 15% – на 2ом, остальные – на 3м. Вероятности, что они не потреб. ремонта: 0,96; 0,84; 0,9 соответственно. Какова вероятность, что тел. не потр. ремонта?

Дано:

H_1 – произвед. на 1ом зав.

$P(H_1) = 0,45$

H_2 – на 2ом заводе

$P(H_2) = 0,15$

H_3 – на 3ем заводе

$P(H_3) = 0,4$

$P_{H_1}(A) = 0,96$

$P_{H_2}(A) = 0,84$

$P_{H_3}(A) = 0,9$

$P(A) = ?$

Решение:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + P(H_3) \cdot P_{H_3}(A) =$$

$$= 0,45 \cdot 0,96 + 0,15 \cdot 0,84 + 0,4 \cdot 0,9 =$$

$$= 0,918$$

Формула Байеса

19.02.

Пусть есть событие A, кот. происх. с одним из H_i. $i=\overline{1,n}$

$$P(A)\cdot P_A(H_i) = P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)$$

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}{P(A)} \quad ; \quad \boxed{P_A(H_i) = \frac{P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}}$$

Если известна вероятность наступления до опыта (априорная), то ф. Б. позв. найти вероятность ~~события~~ наступления этой гипотезы после наступл. события (апостериорная). вероятность

Пример: Число груз. машин проезж. по шоссе с бензоколон. отн. к числу легк. машин, как 3 : 2. Вероятн. того, что будет заправл. груз. машина – 0,1; легковая – 0,2. К бензокол. подъехала машина. Найти вероятн., что это ~~груз.~~ легк. машина.

Дано:

3 : 2 – груз : легк.

A – машина запр.

H_1 – груз. машина

H_2 – легк. машина

$P_{H_1}(A) = 0,1$

$P_{H_2}(A) = 0,2$

$P_A(H_2)$ – ?

Решение:

$$P(H_1) = \frac{3}{5}; \quad P(H_2) = \frac{2}{5}$$

$$P_A(H_2) = \frac{P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)}{P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A)} = \frac{0,4\cdot 0,2}{0,6\cdot 0,1 + 0,4\cdot 0,2} =$$

$$= \frac{0,08}{0,14} = \frac{4}{7}.$$

Лекция №3. Схема и формула Бернулли. Локальная и интегральная теорема Лапласа. Формула Пуассона.

Схема событий Бернулли.

Пусть произв. n испытаний. В каждом какое-то событие наступает с одной и той же вероятностью P. Какова вероятность того, что в n испытаний событие наступит ровно k раз?

$$q = 1 - P$$

$$\boxed{P_n(k) = C_n^k \cdot P^k \cdot q^{n-k}}$$ – ф-ла Бернулли.

Пример: В семье 5 детей. Найти вероятность, что среди детей 2 мальчика. Вероятность рождения мальчика $= 0,51$.

Дано:
$n = 5$
$k = 2$
$P = 0,51$
A - 2 мал. из 5

$P(A)$ - ?

Решение:

$$P(A) = P_5(2) = C_5^2 \cdot P^2 \cdot q^{5-2} = \frac{5 \cdot 4}{2}(0,51)^2 \cdot (0,49)^3 = $$
$$= 0,31.$$

Замечание: когда требуется найти наступл. событие менее k раз из n, то ф-ла:

$$P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(k-1)$$

Более k раз: $P_n(k+1) + P_n(k+2) + \dots + P_n(n)$

Не менее k: $P_n(k) + P_n(k+1) + \ldots + P_n(n)$

Не более k: $P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(k)$

Пример: * тот же * ... среди детей не более 2 мальчиков.

B – не более 2 из 5.

$P(B) = P_5(0) + P_5(1) + P_5(2) = C_5^0 P^0 q^5 + C_5^1 P^1 q^4 + C_5^2 P^2 q^3 =$

$= 1 \cdot (0{,}51)(0{,}49)^5 + \frac{5}{1} \cdot 0{,}51 \cdot (0{,}49)^4 + \frac{5}{2} \cdot (0{,}51)^2 \cdot (0{,}49)^3 = 0{,}48$

Замечание: если при вычисл. по ф. Б. n и k велико, то пользоваться ф-лой затруднительно.

Формула Лапласа.

Локальная и интегральная теорема.

$n \gg 1, \quad k \gg 1; \quad P \neq 0, \quad P \neq 1.$

$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x); \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}; \quad \varphi(-x) = \varphi(x)$

Ф-ия затабулирована.

$x \geq 4; \quad \varphi(x) \approx 0$

$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$

Пример: Вероятность поражения мишени при 1 выстреле – 0,8. Найти вероятность, что при 100 выстрелах мишень будет поражена 75 раз.

Дано:
$n=100$
$k=75$
$P=0{,}8$
A = 75 из 100

$P(A)-?$

Решение:

$$P(A)=P_{100}(75)=\frac{1}{4}\varphi(1,25)\approx 0,04565.$$

$$x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{75-100\cdot 0,8}{\sqrt{100\cdot 0,8\cdot 0,2}}=1,25$$

Формула Пуассона

Ф.П. примен. для редких, но массовых событий.

$0<P\ll 1,\quad n\gg 1.$

$$P_n(k)=C_n^k\cdot P^k(1-p)^{n-k}=\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\cdot\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}=$$

$$=\frac{\lambda^k}{k!}1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

$np=\lambda;\quad p=\frac{\lambda}{n}$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}P_n(k)=\frac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{k!}}$$ – ф-ла Пуассона

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n=(1^\infty)=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-\frac{n}{\lambda}}\right)^{-\frac{n}{\lambda}}\right]^{-\frac{\lambda}{n}\cdot n}=e^{-\lambda}$$

Пример: Устройство сост. из 1000 элем., работ. независимо. Вероятность отказа элемента в течение T равно 0,002. Найти вер., что за T откажет 3 элемента.

Дано:
$n=1000$
$k=3$
$P=0{,}002$
A – 3 из 1000

$P(A)-?$

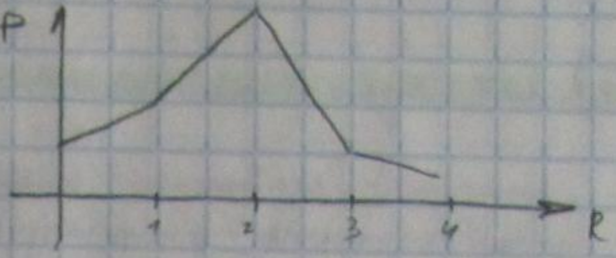
Решение:

$$P(A)=P_{1000}(3)\approx\frac{2^3}{3!}e^{-2}\approx\frac{4}{3}\,0,13534\approx 0,1804$$

$$\lambda=np=1000\cdot 0,002=2$$

Наивероятнейшее число наступлений событий

Если изобразить графически вер. наступл. событий для каждого из т испытаний, то график всегда будет содерж. экстремум.



k_0 - наивероятнейшее

$$\begin{cases} P_n(k_0) \geq P_n(k+1) \\ P_n(k_0) \geq P_n(k-1) \end{cases} \Rightarrow np - q \leq k_0 \leq np + p$$

Если $np+p$ - целое число, то $k_{0_1} = np+p$

$$k_{0_2} = np-p$$

Пример: Испытываются 15 элементов устройства. Вероятн., что элем. выдержит - 0,9. Найти наивероятнейшее число элем., кот. выдерж. испытание.

Дано:
$n = 15$
$p = 0{,}9$
$q = 0{,}1$

k_0 - ?

Решение:

$$13{,}5 - 0{,}1 \leq k_0 \leq 13{,}5 + 0{,}9$$

$$13{,}4 \leq k_0 \leq 14{,}4$$

$$k_0 = 14.$$

Интегральная теорема Лапласа.

Если в задаче есть схема Бернулли и треб. найти событие в пределах от k_1 до k_2

$$P(k_1 < k < k_2) \approx \varphi(x_2) - \varphi(x_1)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$\varphi(-x) = -\varphi(x)$$

$$x >> 5 \quad \varphi(x) = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{np - k_2}{\sqrt{npq}} \qquad x_1 = \frac{np - k_1}{\sqrt{nqp}}$$