سوال ۴

الف) باید نشان دهیم که اگر شرط‌های $e_i \geq 0$ را حذف کنیم، در جواب بهینه‌ی مسأله‌ی حاصل e_iها حتماً نامنفی خواهند شد.

استفاده از برهان خلف: فرض کنیم e^*, b^*, w^* جواب مسأله حاصل باشد، به طوری که مثلاً $e_i^* < 0$ باشد. حال می‌توان این e_i^* را با صفر جایگزین نمود. در این صورت مقدار تابع هدف با این e_i جدید کوچکتر خواهد شد و قیدها همچنان برقرار هستند. چون مقدار تابع هدف کوچکتر می‌شود، این با بهینه بودن e^* در تناقض است.

ب) بله، زیرا تابع هدف به صورت معادله درجه ۲ (Quadratic) است و قیدها خطی هستند.

ج)

$$L(w,b,e,\lambda) = \frac{1}{2}\|w\|_2^2 + C\sum_{i=1}^{n} e_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(1 - e_i - y_i(w^T x_i + b)\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial w} = w - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i x_i = 0 \Rightarrow w = \sum_i \lambda_i y_i x_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial e_i} = 2Ce_i - \lambda_i = 0 \Rightarrow e_i = \frac{\lambda_i}{2C}$$

$$\frac{\partial L}{\partial b} = -\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i = 0$$

$$g(\lambda) = \min_{\omega, b, e} L(\omega, e, b, \lambda)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j y_i y_j x_i^T x_j + \frac{1}{4C} \sum_i \lambda_i^2 + \sum_i \lambda_i$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i^2}{2C} - \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j y_i y_j x_i^T x_j \underbrace{- \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i b}$$

$$\Rightarrow g(\lambda) = \frac{-1}{2} \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j y_i y_j x_i^T x_j - \frac{1}{4C} \sum_i \lambda_i^2 + \sum_i \lambda_i$$

مسأله دوگان :

$$\max_{\lambda} \; g(\lambda)$$

$$\text{s.t.} \quad \lambda_i \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i = 0$$

سوال ۴

$$F_T(x) = \sum_{t=1}^{T} \alpha_t h_t(x) = F_{T-1}(x) + \alpha_T h_T(x)$$

$$E = \sum_{i=1}^{n} \left(F_T(x_i) - y_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(F_{T-1}(x_i) + \alpha_T h_T(x_i) - y_i\right)^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha_T} = 2\sum_{i=1}^{n} h_T(x_i)\left(F_{T-1}(x_i) + \alpha_T h_T(x_i) - y_i\right) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} -h_T(x_i) F_{T-1}(x_i) + h_T(x_i) y_i}{\sum_{i=1}^{n} h_T^2(x_i)}$$

$$\xrightarrow{h_T^2(x_i)=1} \boxed{\alpha_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} h_T(x_i)\left(y_i - F_{T-1}(x_i)\right)}{n}}$$