

	امتحان میانترم درس یادگیری ماشین دانشکده برق و کامپیوتر نهم آذرماه ۱۴۰۲	
مدت زمان در نظر گرفته شده برای امتحان ۳ ساعت است. آوردن برگه فرمول و ماشین حساب در جلسه مجاز نیست. موفق باشید.		
سوال یک (۲۰ نمره)	<p>مسئله طبقه‌بندی بهینه بیزی را برای حالت کمینه کردن ریسک در حالت کلی که n ویژگی و c کلاس داریم، در نظر بگیرید. λ_{ij} که عددی بین صفر و یک است ضریب ریسک حالتی است که کلاس حقیقی i و تصمیم طبقه بند کلاس j باشد.</p> <p>(الف) رابطه بسته تصمیم بهینه بیزی را در این حالت به دست آورید. مراحل اثبات را بنویسید.</p> <p>(ب) نشان دهید در حالت خاص که</p> $\lambda_{ij} = \begin{cases} 0 & , i = j \\ 1 & , i \neq j \end{cases}$ <p>باشد، حداقل کردن ریسک هم ارز با حداقل کردن احتمال خطا می‌شود این امر را هم در تابع هزینه و هم در روابط نهایی حالت بهینه نشان دهید.</p>	
سوال دو (۱۵ نمره)	<p>ماتریس کانفیوژن را در سه حالت سطری ستونی و کلی نرمالیزه کنید.</p> <p>(الف) راجع به معنی اعداد پس از نرمالیزه کردن در هر یک از این سه حالت توضیح دهید.</p> <p>(ب) به علاوه توضیح دهید که معمولاً از کدام یک از این سه روش نرمالیزه کردن استفاده می‌کنید و چرا؟</p>	
سوال سه (۱۵ نمره)	<p>فرض کنید داده‌های $\{x_1, \dots, x_n\}$ به صورت i.i.d. با توزیع احتمال زیر باشند:</p> $P(x) = \frac{2x}{\theta^2} \quad 0 \leq x \leq \theta$ <p>تخمین گر بیشینه درست‌نمایی (Maximum Likelihood) را برای پارامتر θ بدست آورید.</p>	
سوال چهار (۱۵ نمره)	<p>با ایجاد دو مثال در دو حالت مختلف:</p> <p>(۱) نشان دهید که طبقه بند K نزدیک‌ترین همسایه وقتی تعداد نمونه‌ها در کلاس‌ها بالانس نباشد دچار نوعی بایاس در تصمیم‌گیری می‌شود.</p> <p>(۲) وقتی راجع به بالانس بودن نمونه‌ها صحبت می‌کنیم آیا منظور آن است که تعداد نمونه‌ها در کلاس‌ها با هم برابر باشد؟ بحث کنید.</p> <p>(۳) راه حلی برای رفع این مشکل پیشنهاد دهید.</p>	
سوال پنج (۱۰ نمره)	<p>روشی برای تعیین window size در روش تخمین چگالی پارزن ارائه دهید. می‌توانید از فلوچارت استفاده کنید یا الگوریتم را با مراحل شفاف بنویسید (مانند شبه کد).</p>	

سوال شش
(۲۵ نمره)

روابط گام Maximization در الگوریتم Expectation Maximization (EM) برای چگالی مخلوط گوسی، وقتی بردار میانگین و ماتریس کواریانس داریم را به دست آورید (به بیان دیگر نمونه‌ها چندبعدی یا دارای چند ویژگی هستند). باید روابط بسته برای محاسبه بازگشتی را برای میانگین‌ها، کواریانس‌ها و p_i ‌ها بدست آورید.

رابطه‌ی توزیع نرمال در فضای d بعدی به صورت زیر است:

$$P(x; \mu, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu)^T \Sigma^{-1}(x - \mu)\right)$$

راهنمایی: در محاسبات ممکن است به مشتق‌های زیر نیاز باشد:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} x^T A x &= 2Ax \\ \frac{\partial}{\partial x} a^T x &= \frac{\partial}{\partial x} x^T a = a \\ \frac{\partial}{\partial \Sigma} \log|\Sigma| &= \Sigma^{-1}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial \Sigma} x^T \Sigma^{-1} x = -\Sigma^{-1} x x^T \Sigma^{-1}$$