فصل سوم: نظریه اطلاعات

در این فصل مرور مختصر بر مفاهیم تئوری اطلاعات خواهیم داشت.

انتقال داده

ابوالفضل دیانت

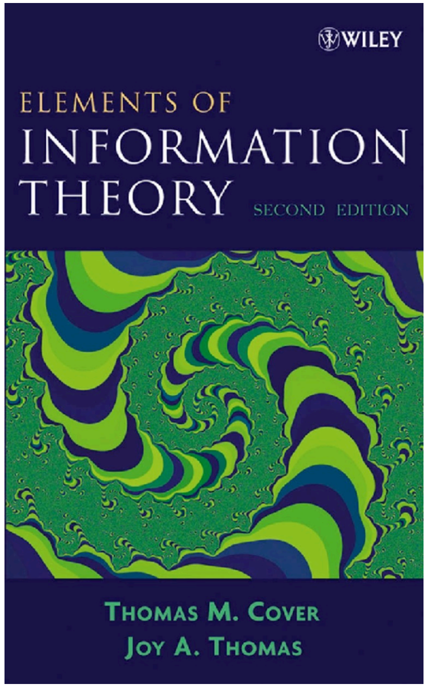
آخرین ویرایش: ۲۵ آبان ۱۴۰۰ در ساعت ۱۰ و ۳۵ دقیقه

فهرست مطالب

مرجع مناسب

✍ فصل اول و دوم

[1] T. M. Cover and J. A. Thomas, *Elements of Information Theory*. Wiley, 2012.



مفهوم اطلاعات

مقالات شانون

Shannon ریاضی‌دان، مهندس الکترونیک و رمزنگار معروف آمریکایی است که به عنوان پدر نظریه اطلاعات شناخته می‌شود. او در مقاله ۱۹۴۸ خود علم نظریه اطلاعات را پایه‌گذاری می‌کند و در مقاله ۱۹۴۹ خود علم رمزنگاری را بنیان‌گذاری می‌کند. شانون در هر دو مقاله به مبحث ارسال پیام در یک سامانه مخابراتی می‌پردازد، اما با دو دیدگاه مختلف.

Shannon, Claude Elwood. "A mathematical theory of communication." *Bell system technical journal* 27, no. 3 (1948): 379-423.

Shannon, Claude Elwood. "Communication theory of secrecy systems." *Bell system technical journal* 28, no. 4 (1949): 656-715.

اطلاعات و ابهام دو روی یک سکه

✍ گاهی به جای واژه اطلاعات (Information) از واژه مقابل آن یعنی ابهام (Ambiguity) استفاده می‌شود. اما این دو واقعا دو روی یک سکه و معادل همدیگر هستند.

✍ تاقبل از مشاهده یک پیام و یا وقوع یک حادثه، در مورد چیستی آن، ابهام وجود دارد، و بعد از رخداد آن به همان اندازه مقدار ابهام، اطلاعات بدست خواهیم آورد.

✍ هر پدیده هرقدر اطلاعات بیشتری داشته‌باشد، در صورت ندانستن آن، ابهام ما نیز بیشتر است.

توجه داشته باشید که "**ابهام**" و "**اطلاعات**" معادل یکدیگرند. در این رابطه به نقل قولی از شانون توجه کنید:

"My greatest concern was what to call it. I thought of calling it '**information**,' but the word was overly used, so I decided to call it '**uncertainty**.' ... Von Neumann told me, 'You should call it **entropy**'".

اطلاعات چیست؟

یک حادثه به مانند A را در نظر بگیرید، مقدار اطلاعات موجود و یا ابهام باقیمانده این حادثه را با $\mathrm{I}(A)$ نمایش می‌دهیم.

- هوای قطب شمال سرد است. میزان اطلاعات $\mathrm{I}(A) \in \mathbb{R}^+$.
- امروز در تهران زلزله شدیدی می‌آید. میزان اطلاعات $\mathrm{I}(B) \in \mathbb{R}^+$.

به طور حسی می‌دانیم که $\mathrm{I}(A) < \mathrm{I}(B)$.

$\mathrm{I}(A)$ به چه پارامتری بستگی دارد؟ چه ویژگی‌هایی دارد؟

✍ ویژگی‌های تابعی که قرار است اطلاعات را به صورت یک کمیت ریاضی نشان دهد:

- تابعی نامنفی است، یعنی $\mathrm{I}(A) \in \mathbb{R}^+$.
- $\mathrm{I}(A)$ تابعی است که وابسته به احتمال رخداد یک پدیده است. برای تاکید $\mathrm{I}(p_A)$.
- هر چقدر امکان وقوع یک رخداد بیشتر باشد، مقدار اطلاعات یا ابهام باقیمانده کمتر خواهد بود. یعنی تابعی است غیرافزایشی:

$$p_A \geq p_B \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{I}(p_A) \leq \mathrm{I}(p_B) \qquad (۱)$$

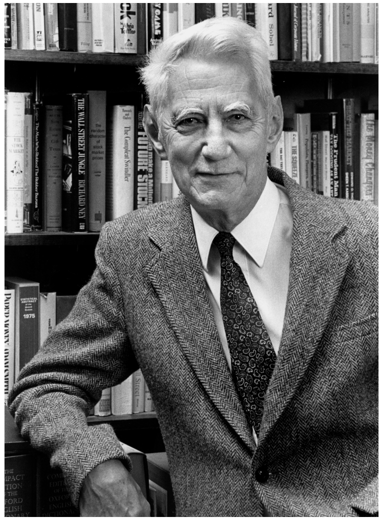
- اتفاقی که همیشه رخ می‌دهد $(p_A = 1)$، برای ما اطلاعاتی ندارد یعنی $I(p_A) = 0$.
- مقدار اطلاعات دو پدیده مستقل برابر با حاصل‌جمع آن‌ها خواهد بود:

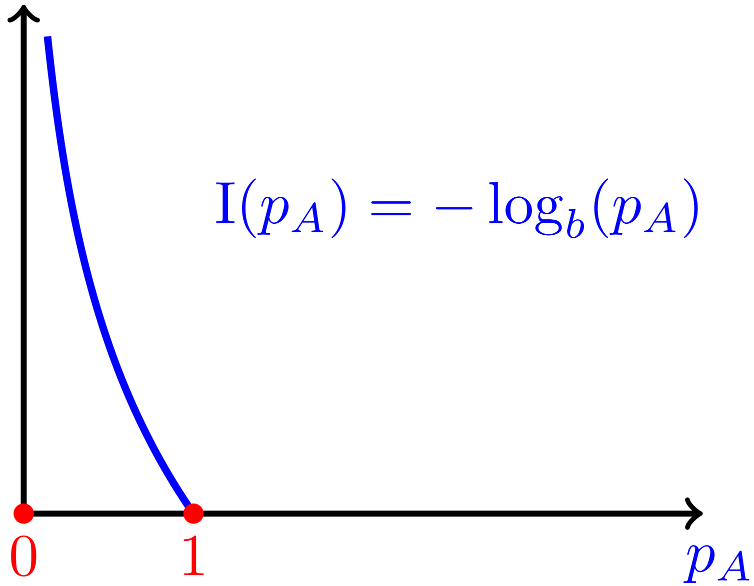
$$A \perp\!\!\!\perp B, \quad \mathrm{I}(p_{A\cap B}) = \mathrm{I}(p_A \times p_B) = \mathrm{I}(p_A) + \mathrm{I}(p_B) \qquad (۲)$$

اطلاعات چیست؟ (ادامه.)

تنها تابعی که همه‌ی ویژگی‌های یاد شده را دارد تابع لگاریتمی است.

مبنای log؟





اطلاعات (مثال)

✍ فرض کنید حادثه A پرتاب یک سکه سالم باشد. نتیجه پرتاب یا شیر است یا خط. صرف‌نظر از علم نظریه اطلاعات، نتیجه پرتاب را می‌توان با یک بیت بیان کرد. از سوی دیگر داریم:

$$\mathrm{I}(p_A) = -\log_b(\frac{1}{2}) = \log_b(2).$$

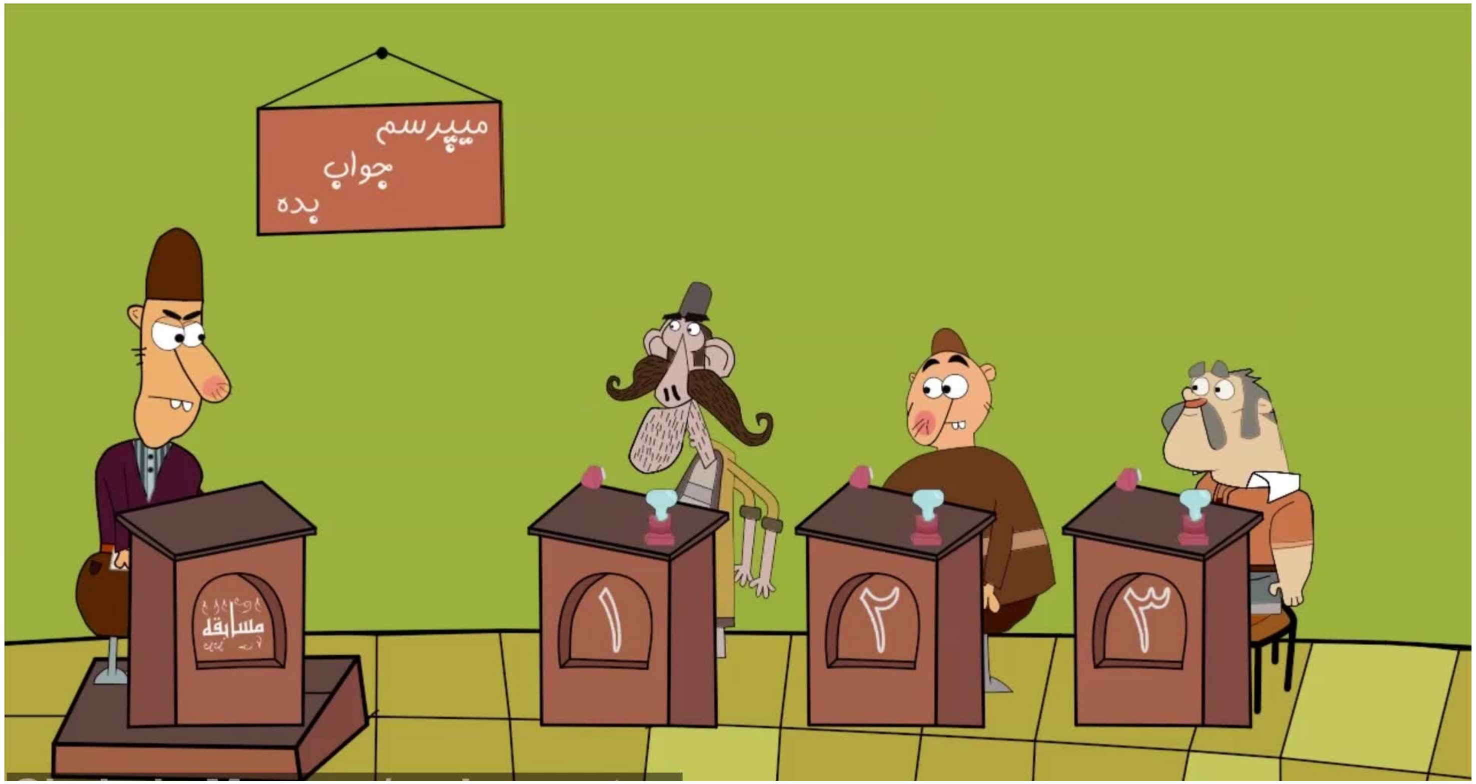
✍ اگر مبنای لگاریتم را 2 در نظر بگیریم، می‌توان یک قرابت بین مفهوم بیت و نظریه اطلاعات ایجاد کرد.

$$\mathrm{I}(p_A) = \log_2(2) = 1 \text{ bit}.$$

اطلاعات - مثال مسابقه ۲۰ سوالی

در یک مسابقه ۲۰ سوالی، مجری به صورت تصادفی از یک فرهنگ لغت با 100000 واژه انتخاب می‌کند.

چه تعداد سوال نیاز است تا بتوان مطمئن شد که شرکت‌کننده در مسابقه حتما پیروز می‌شود؟



✍ برطبق تعریف شانون از اطلاعات، داریم:

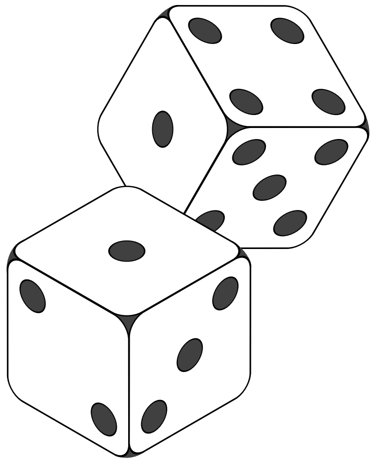
$$\mathrm{I}(p_A) = -\log_2 \frac{1}{100000} \approx 16.6 \text{ [bit]}$$

✍ شانون ادعا می‌کند روشی وجود دارد که شرکت‌کننده می‌تواند با پرسیدن ۱۷ سوال حتما در مسابقه به پیروزی برسد. اما چگونه؟

نکته ۱ نظریه اطلاعات فقط مرزها را مشخص می‌کند، ولی در برابر روش رسیدن به مرزهای یاد شده، سکوت می‌کند.

دو تاس را همزمان و به صورت مستقل از هم پرتاب می‌کنیم. اگر شخصی نتیجه پرتاب را به ما خبر دهد، چه مقدار اطلاعات به ما منتقل کرده است؟ و یا چه مقدار از ابهام ما را برطرف کرده است؟

برطبق تعریف اطلاعات داریم:



$$\mathrm{I}(p_A) = -\log_2(\frac{1}{6\times 6}) = \log_2(6\times 6) = 5.17\ [\mathrm{bit}]$$

به یاد آورید که میزان اطلاعات دو رخداد مستقل از یکدیگر ($A1 \perp\!\!\!\perp A2$)، برابر با حاصل‌جمع اطلاعات هر یک از رخدادها است:

$$\mathrm{I}(p_A) = \mathrm{I}(p_{A1}) + \mathrm{I}(p_{A2}) = -\log_2(\frac{1}{6}) - \log_2(\frac{1}{6}) = 5.17\ [\mathrm{bit}]$$

مثال ۱ یک سکه را ۱۰ بار پرتاب می‌کنیم. اگر به ما گفته شود که در این ۱۰ پرتاب حداکثر سه بار سکه شیر آمده است، چه مقدار اطلاعات منتقل شده است؟ یا به عبارت دیگر چه میزان از ابهام ما برطرف شده است؟

پاسخ: دقت کنید که مساله بدست‌آوردن مقدار اطلاعات به مساله بدست‌آوردن احتمال پیشامد موردنظر منتج خواهد شد. پس در مرحله نخست باید احتمال پیشامد مذکور را محاسبه کنیم.

برتعریف احتمال می‌بایست تعداد رخدادهای مطوب را بر کل رخدادها تقسیم کنیم. در ۱۰ بار پرتاب یک سکه، تعداد کل حالات ممکنه برابر با 2^{10} خواهد بود.

از سوی دیگر منظور از این‌که حداکثر سه بار شیر بیاید، یعنی یا هیچ بار شیر نیاید، یا یک بار، یا دو بار و در نهایت یا سه بار. در این‌جا کافی است که تعداد حالت را برای هر یک از چهار حالت بیان شده، محاسبه کنیم،

پس خواهیم داشت:

$$p_A = \frac{\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3}}{2^{10}}$$

در گام بعدی برای محاسبه میزان اطلاعات خواهیم داشت:

$$\mathrm{I}(p_A) = -\log_2 p_A = \log_2 \frac{2^{10}}{\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3}}$$

$$= 10 - \log_2(1 + 10 + 45 + 120) = 10 - \log_2(176)$$

مثال ۲ در یک کلاس ۲۵ نفری به ما گفته شده است که حداقل دو نفر تاریخ تولد یکسانی دارند. چه میزان اطلاعات به ما منتقل شده است؟

پاسخ: دقت کنید که با پیشامدی به نام A مواجه هستیم که در آن قرار است حداقل دو نفر تاریخ تولد یکسانی داشته‌باشند. برای بدست‌آوردن اطلاعات این پیشامد، می‌بایست در ابتدا احتمال رخداد آن را محاسبه کنیم. می‌دانیم که این پیشامد متمم حالتی است که هیچ دو نفری تاریخ تولد یکسانی نداشته‌باشند. پس خواهیم داشت:

$$p'_A = \frac{P_{25}^{365}}{365^{25}} = \frac{365 \times 364 \times \ldots \times (365 - 25 + 1)}{365^{25}}$$

برای محاسبه اطلاعات نیز بسادگی خواهیم داشت.

$$\mathrm{I}(p_A) = -\log_2(1 - p'_A)$$

مثال ۳ فرض کنید که یک شبکه‌کامپیوتری با تعداد N کاربر داریم. هر کاربر در ۱۰ درصد موارد فعال است و در ۹۰ درصد موارد در مُد بیکار قرار دارد. به ما خبر داده شده است که در این شبکه در هر بازه زمانی بیش از ۱۰ (۱۱ یا بیشتر) کاربرفعال نیستند. چه میزان اطلاعات به ما منتقل شده است.

پاسخ: به مانند قبل، برای محاسبه اطلاعات نخست باید احتمال پیشامد موردنظر را محاسبه کنیم. می‌دانیم که احتمال این‌که در هر بازه زمانی دقیقا m کاربر فعال باشد، برابر است با

$$\binom{N}{m}(0.1)^m(0.9)^{N-m}$$

این همان توزیع دوجمله‌ای است که پیش‌تر در درس آمار و احتمال در مورد آن خوانده‌اید. آن‌جا خواندید که احتمال این‌که در N بار اجرای یک آزمایش برنولی با احتمال پیروزی p، دقیقا M بار پیروز شویم چقدر است؟

$$\binom{N}{M}p^M(1-p)^{N-M} \qquad (۳)$$

پس احتمال موردنظر برابر با احتمال فعال نبودن تمام کاربران، احتمال این که یک کاربرفعال باشد، احتمال فعال بودن ۲ کاربر تا احتمال فعال بودن 10 کاربر. پس خواهیم داشت:

$$p_A = \sum_{i=0}^{10} \binom{N}{i} (0.1)^i (0.9)^{N-i}$$

در نهایت نیز خواهیم داشت:

$$\mathrm{I}(p_A) = \log_2 \frac{1}{p_A} = -\log_2 \sum_{i=0}^{10} \binom{N}{i} (0.1)^i (0.9)^{N-i}$$

مثال ۴ پادشاهی دو فرزند دارد. اگر به ما گفته شود که ولیعهد (فرزند پسر)، خواهر دارد، چند بیت اطلاعات منتقل شده است؟

پاسخ: اگر پادشاه دو فرزند داشته باشد چیدمان پسر یا دختر بودن آن‌ها در مجموعه $\{bb, gg, bg, gb\}$ خلاصه می‌شود. می خواهیم احتمال داشتن فرزند دختر برای شاه را با شرط داشتن فرزند پسر بیابیم. پس اگر پیشامد B بیانگر داشتن فرزند پسر باشد، خواهیم داشت:

$$\mathrm{P}(G|B) = \frac{\mathrm{P}(G \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\frac{2}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

در نهایت نیز با این احتمال می‌توان به سادگی میزان اطلاعات را محاسبه کرد.

اِنتروپی

اِنتروپی (Entropy) (مثال)

✍ یک سکه اریب را در نظر بگیرید، به طوری که احتمال شیر آمدن $p_H = 0.8$ باشد.

- اگر به ما این خبر داده شود که سکه شیر آمده، به مقدار $\mathrm{I}(p_H)$ اطلاعات منتقل می‌شود.

$$\mathrm{I}(p_H) = -\log_2(0.8) = 0.32 \ [\mathrm{bit}]$$

- اگر به ما این خبر داده شود که سکه خط آمده، به مقدار $\mathrm{I}(p_T)$ اطلاعات منتقل می‌شود.

$$\mathrm{I}(p_T) = -\log_2(0.2) = 2.32 \ [\mathrm{bit}]$$

✍ در صورتی‌که نتیجه پرتاب گفته شود، به صورت میانگین H بیت اطلاعات منتقل می‌شود.

$$\mathrm{H} = p_H \log_2 \frac{1}{p_H} + p_T \log_2 \frac{1}{p_T} = 0.8 \times 0.32 + 0.2 \times 2.32 = 0.72 \ \left[\frac{\mathrm{bit}}{\mathrm{symbol}}\right]$$

مفهوم اِنتروپی

✍ فرض کنید که یک منبع اطلاعات (Information Source) شروع به تولید پیام بکند.

✍ هر پیام از اجزایی (حروف، ارقام و به طور کلی سمبل) تشکیل شده است، که ما آن‌ها را الفبای منبع می‌نامیم.

مثلا در یک نوشتار انگلیسی $\{A, B, C, \ldots, Z\}$، یا در یک تصویر خاکستری (Gray Scale Image) هشت بیتی

رنگ یک پیکسل $\{s | s \in \mathbb{N},\ 0 \leq s \leq 255\}$ و ... .

✍ به طور کلی خروجی یک منبع اطلاعات، ماهیت تصادفی دارد. یعنی هر سمبل منبع با یک احتمال معین

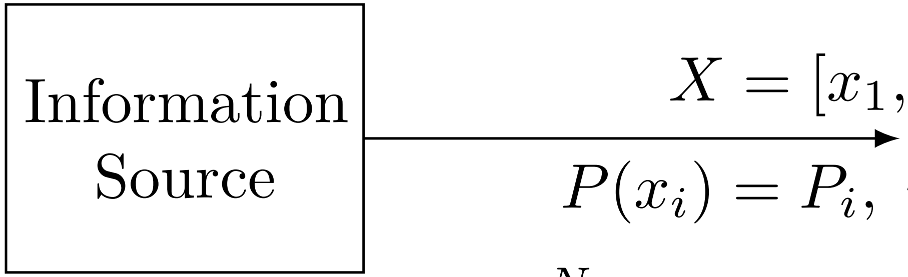
رخ می‌دهد.

Information Source

$$X = [x_1, \ldots, x_N]$$

$$P(x_i) = P_i,\ i = 1, \ldots, N$$

$$\sum_{i=1}^{N} P_i = 1$$



$$X = [x_1, \ldots, x_N]$$

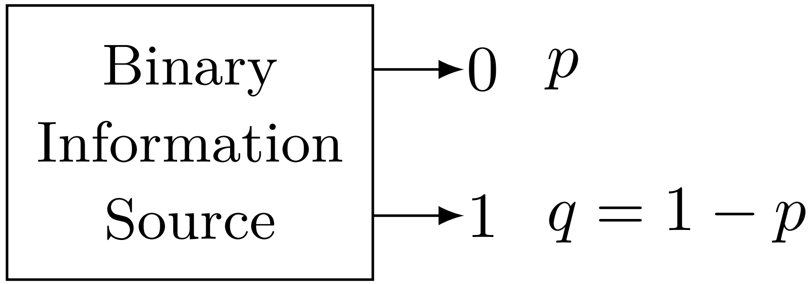
$$P(x_i) = P_i, \; i = 1, \ldots, N$$

$$\sum_{i=1}^{N} P_i = 1$$

تعریف ۱ اگر $\mathrm{I}(x_i)$ بیانگر میزان اطلاعات برای پیشامد x_i بود. اِنتروپی (Entropy)، بیانگر متوسط اطلاعات یا ابهام مربوط به کل پیشامدهای خروجی منبع اطلاعات است.

$$\mathrm{H}(X) = \sum_{i=1}^{N} p_i \mathrm{I}(p_i) = \sum_{i=1}^{N} p_i \log_2 \frac{1}{p_i} = -\sum_{i=1}^{N} p_i \log_2(p_i) \quad \left[\frac{\text{bit}}{\text{symbol}}\right] \qquad (۴)$$

اِنتروپی (مثال)

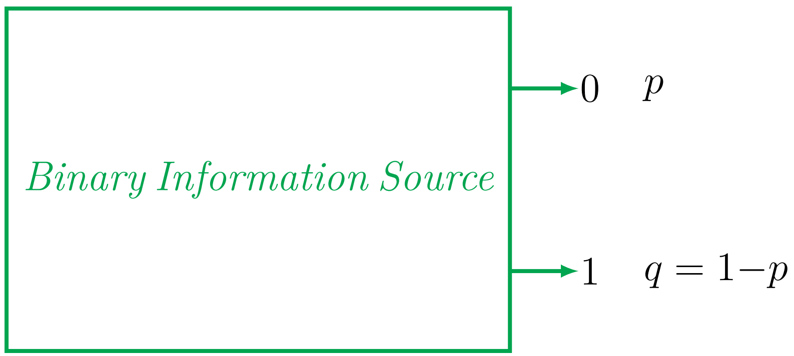


✍ یک منبع اطلاعات دودویی را در نظر بگیرید. الفبای این منبع مجموعه $\{0, 1\}$ است. صفر با احتمال p رخ می‌دهد و 1 با احتمال $q = 1 - p$.

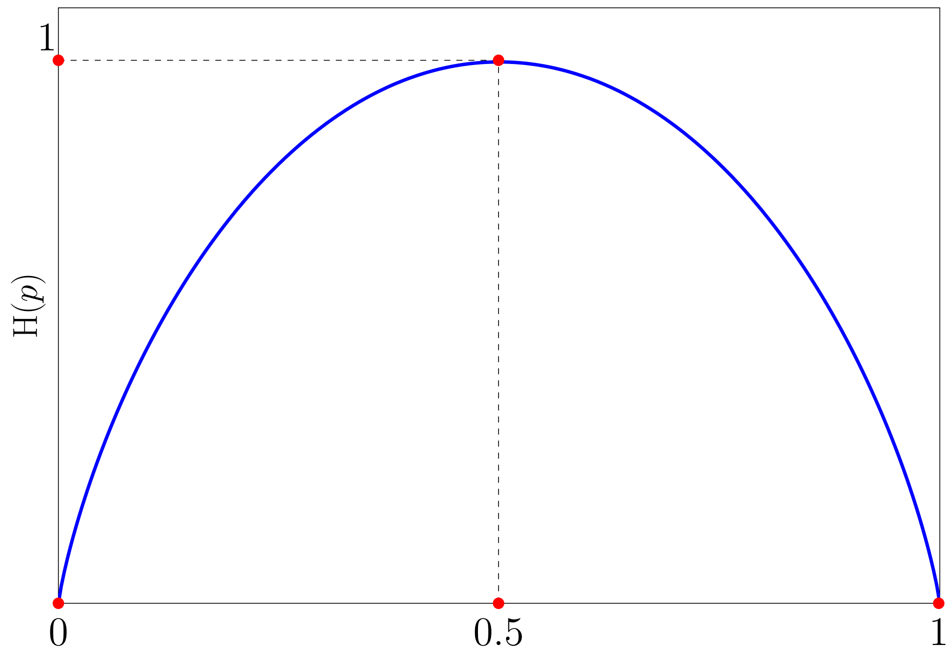
$$\mathrm{H}(X) = \sum_{i=1}^{2} p_i I(p_i) = -\sum_{i=1}^{2} p_i \log_2(p_i) = -p\log_2 p - (1-p)\log_2(1-p) \tag{۵}$$

به مقدار $\mathrm{H}(X)$ در رابطه فوق، اصطلاحا تابع اِنتروپی دودویی (Binary Entropy Function) گفته می‌شود و آن را با نماد $\mathrm{H}_b(p)$ نشان می‌دهیم. واضح است که $\mathrm{H}_b(p) = \mathrm{H}_b(1-p)$ خواهد بود.

✍ نمودار اِنتروپی یک منبع دودویی ($\mathrm{H}_b(p)$) برحسب احتمال p.



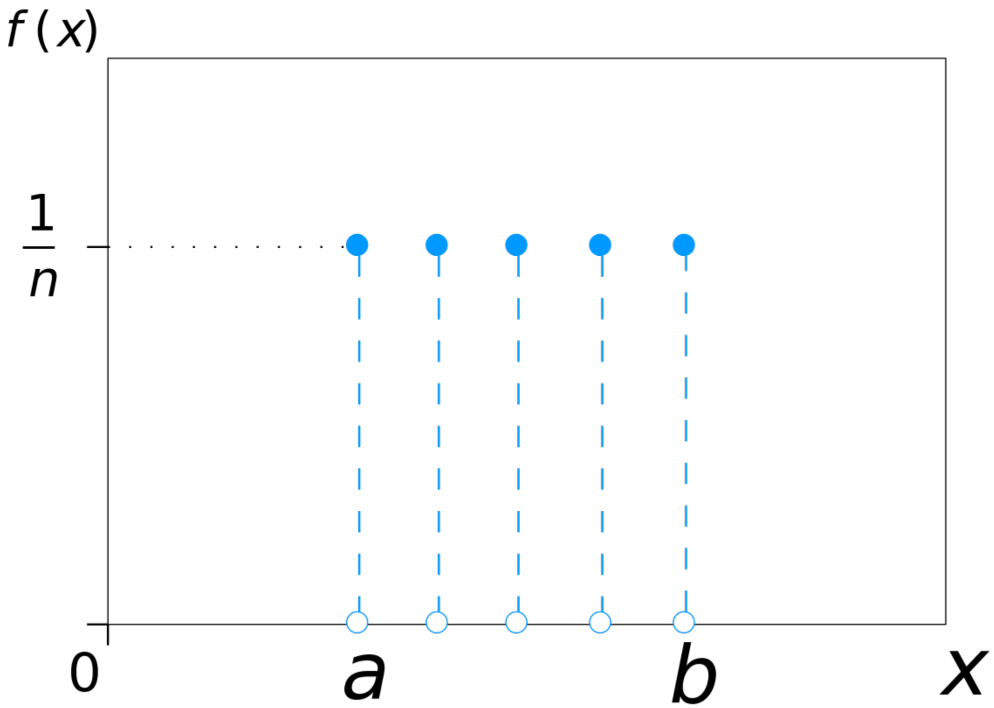
$$\mathrm{H}_b(p) = -p\log_2 p - (1-p)\log_2(1-p)$$



بیشینه مقدار اِنتروپی

✍ بیشینه مقدار اِنتروپی چه زمانی رخ می‌دهد؟ بیشینه مقدار اِنتروپی زمانی رخ می‌دهد که تمامی سمبل‌ها هم‌احتمال باشد. یعنی $p_i = \frac{1}{n}$.

$$\mathrm{H}(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2(p_i) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \log_2(\frac{1}{n}) = \log_2(n)$$



مثال ۵ Alice دو تاس را پرتاب می‌کند. او سپس مجموع نتایج را طی پیامی به اطلاع Bob می‌رساند. چه مقدار اِنتروپی در این پیام مبادله شده است؟

پاسخ: می‌دانیم که مجموع دو تاس عددی است بین 2 تا 12. از سوی‌دیگر می‌دانیم احتمال این‌که مجموع دو تاس عدد 2 شود برابر با $\frac{1}{36} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$ است. به همین‌روش احتمال این‌که مجموع دو تاس 3 شود نیز برابر است با

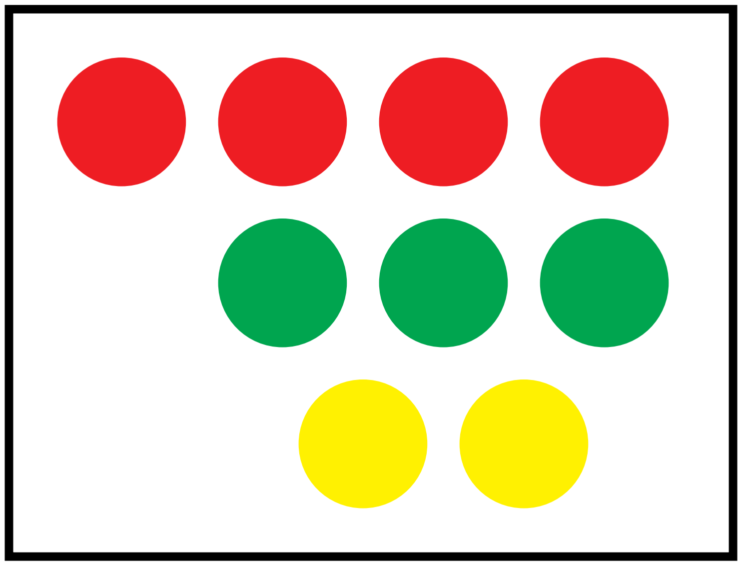
$$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{2}{36}$$

چرا؟ به این علت که موقعی مجموع دو تاس برابر با 3 خواهد شد که تاس اول برابر با 2 و تاس دوم برابر با 1 شود، و برعکس. همین‌طور می‌توان ادامه داد. مثلا در صورتی‌که دو تاس یکی از اعضای مجموعه $\{(1,3), (3,1), (2,2)\}$ شود مجموع دو تاس برابر با خواهد شد. با کمی دقت می‌توان دریافت که احتمال این‌که مجموع دو تاس برابر با 4 شود برابر با $\frac{3}{36}$ است، و همین‌طور الی‌آخر.

از سوی‌دیگر می‌دانیم که هر اِنتروپی برابر است با میانگین اطلاعات هر یک از پیشامدهای ذکر شده. پس خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\mathrm{H}(X) = &-\frac{1}{36}\log_2\frac{1}{36}-\frac{2}{36}\log_2\frac{2}{36}-\frac{3}{36}\log_2\frac{3}{36}-\frac{4}{36}\log_2\frac{4}{36}-\ldots\\ &-\frac{6}{36}\log_2\frac{6}{36}-\frac{5}{36}\log_2\frac{5}{36}-\frac{4}{36}\log_2\frac{4}{36}-\ldots-\frac{1}{36}\log_2\frac{1}{36}\\ =&3.274402\end{aligned}$$

مثال ۶ یک جعبه حاوی چهار مهره قرمز، سه مهره سبز و دو مهره زرد همسان را در نظر بگیرید. اگر به تصادف یک مهره از این جعبه خارج کنیم، و رنگ مهره حاصل شده را به شما اطلاع دهیم، به صورت میانگین چه میزان اطلاعات به شما منتقل کردیم؟



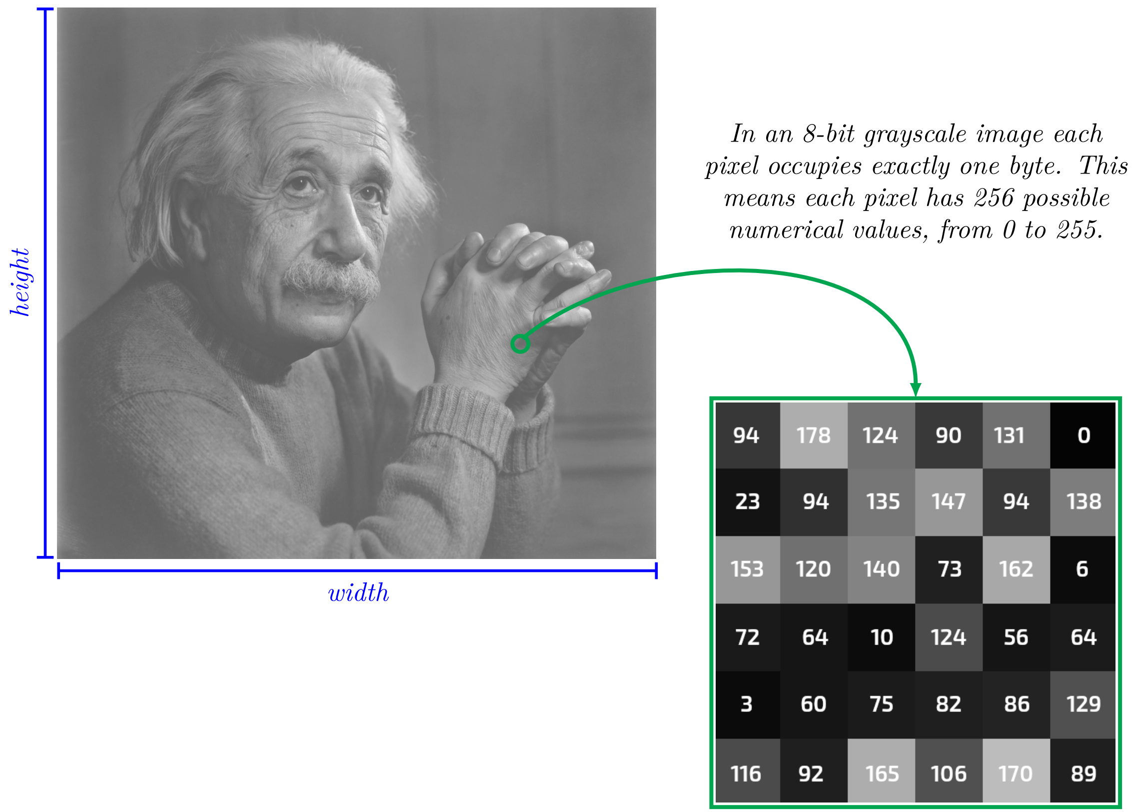
پاسخ: رنگ مهره بیرون آمده قرمز، سبز یا زرد است. ابتدا باید احتمال انتخاب هر یک از رنگ‌های یاد شده را محاسبه کنیم. سپس میانگین اطلاعات هر یک از پیشامدهای یاد شده را به عنوان H محاسبه می‌کنیم. براحتی خواهیم داشت:

$$p_R = \frac{4}{9} \Longrightarrow \mathrm{I}(p_R) = \log_2 \frac{9}{4}$$
$$p_G = \frac{3}{9} \Longrightarrow \mathrm{I}(p_R) = \log_2 \frac{9}{3}$$
$$p_R = \frac{2}{9} \Longrightarrow \mathrm{I}(p_R) = \log_2 \frac{9}{2}$$

می‌دانیم که اِنتروپی میانگین اطلاعات پیشامدهای ذکر شده است.

$$\mathrm{H}(X) = \frac{4}{9}\log_2\frac{9}{4} + \frac{3}{9}\log_2\frac{9}{3} + \frac{2}{9}\log_2\frac{9}{2}$$

مثال ۷ هر پیکسل موجود در یک تصویر خاکستری (Gray Scale Image) هشت بیتی با ابعاد 600×600 دارای سطح روشنایی مشخصی است. میزان روشنایی هر پیکسل چه میزان اطلاعات دارد؟

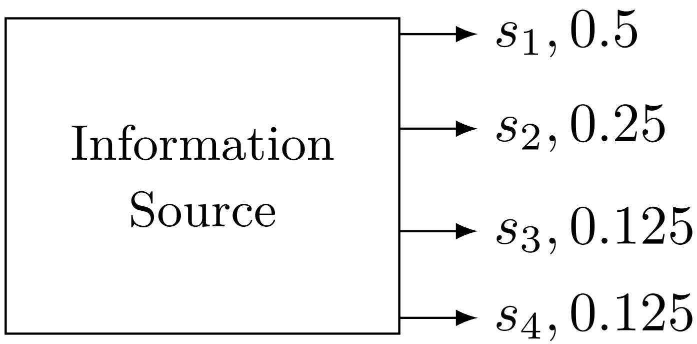


پاسخ: رنگ یک پیکسل از تصویر در طیف خاکستری رنگ دارای 256 حالت ممکن است که از سیاه تا سفید و در 256 سطح تغییر می‌کند. لذا می‌توانیم آن‌را یک متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت روی ۲۵۶ مقدار ممکن در نظر بگیریم. به این‌ترتیب اندازه اطلاعاتی که با دانستن سطح روشنایی یک پیکسل از تصویر به‌دست می‌آید عبارت است از

$$\mathrm{H}(X) = -\log_2(\frac{1}{256}) = 26.45\ [\mathrm{bit}]$$

قضیه اول شانون

مثالی از اِنتروپی



$$\sum_{i=1}^{4} p_{s_i} = 1$$

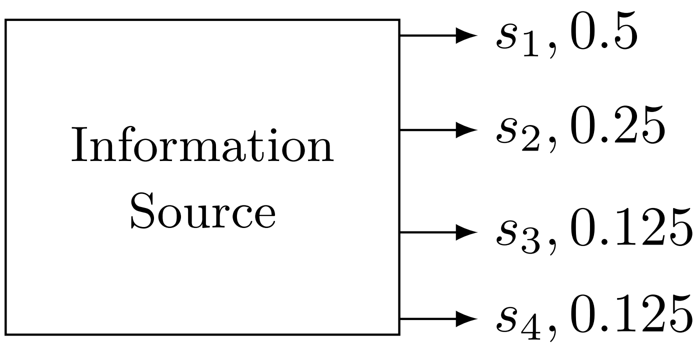
- یک منبع اطلاعات با الفبای $\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ را در نظر بگیرید. در ساده‌ترین روش برای ارسال هر سمبل این منبع مجبور هستیم تا 2 بیت تخصیص دهیم.

$$s_1 : 00 \quad s_2 : 10 \quad s_3 : 01 \quad s_4 : 11$$

- برای ذخیره‌سازی 1000 سمبل، باید 2000 بیت مصرف شود.
- به عنوان مثال، فرض کنید که منبع می‌خواهد دنباله زیر را ارسال کند.

$$s_1 s_1 s_4 s_3 s_1 s_2 s_1 s_2 \Longrightarrow 00\ 00\ 11\ 01\ 00\ 10\ 00\ 10$$

مثالی از اِنتروپی (ادامه.)



$\sum_{i=1}^{4} p_{s_i} = 1$

در ادامه مثال قبل اجازه دهید مقدار اِنتروپی منبع یاد شده را محاسبه کنیم:

$$\mathrm{H}(X) = -\sum_{i=1}^{4} p_i \log_2 p_i$$

$$= \frac{1}{2}\log_2 2 + \frac{1}{4}\log_2 4 + \frac{1}{8}\log_2 8 + \frac{1}{8}\log_2 8 = 1.75 \quad \left[\frac{\text{bit}}{\text{Symbol}}\right]$$

آیا مقدار اِنتروپی یعنی 1.75 ایده‌ای به ما می‌دهد؟!

قضیه اول شانون

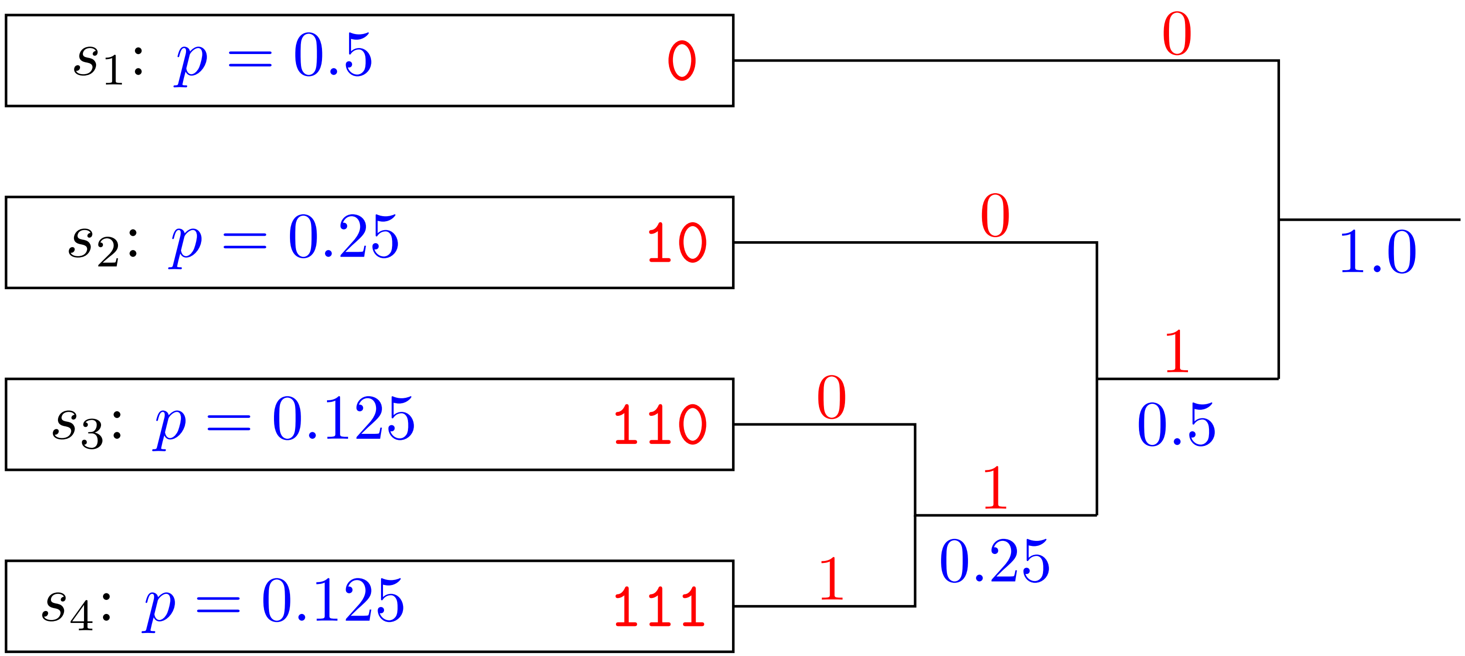
✍ در علم نظریه اطلاعات، قضیه اول شانون و یا قضیه موسوم به قضیه کدگذاری منبع (Shannon's source coding theorem)، محدودیت حداکثر فشرده سازی داده‌ها را مشخص می‌کند.

قضیه ۱ کدگذاری منبع

N متغیر تصادفی با اِنتروپی $\mathrm{H}(X)$ به $N\mathrm{H}(X)$ بیت بدون از دست دادن اطلاعات فشرده ساخت. اما اگر بیشتر فشرده‌سازی صورت پذیرد، تقریباً مسلم است که اطلاعات از دست خواهد رفت.

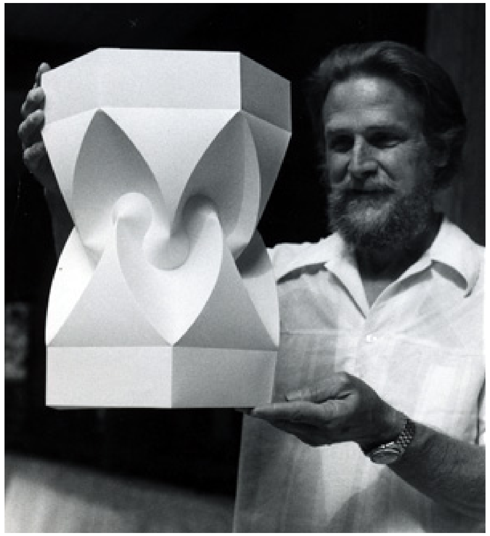
✍ برطبق قضیه کدگذار منبع (Source Coding) در همان مثال قبلی، حتما روش فشرده‌سازی وجود دارد که می‌توان توسط آن 1000 سمبل را بدون از دست دادن هیچ‌گونه اطلاعاتی در 1750 بیت ذخیره نمود.

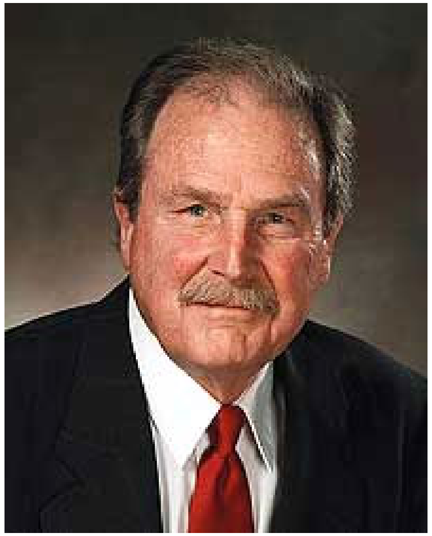
✍ اما چگونه؟ نظریه اطلاعات به این سوال پاسخ نمی‌دهد؟! روش کدگذاری هافمن.



$$\mathbb{E}[L] = (0.5 \times 1) + (0.25 \times 2) + 2 \times (0.125 \times 3) = 1.75$$

کد هافمن (Huffman Code) نوع خاصی از روش‌های کدگذاری (Encoding) است که معمولا برای فشرده‌سازی بی‌اتلاف اطلاعات مورد استفاده قرار می‌گیرد. این روش برای نخستین بار توسط David Albert Huffman در سال ۱۹۵۲ کشف شد.





قضیه اول شانون (مثال فشرده‌سازی متن)

- یک کتاب تقریبا ۳۴۰ صفحه ای داریم که حاوی یک میلیون حرف از الفبای زبان انگلیسی و کاراکتر فاصله است. این کتاب حاوی چه مقدار اطلاعات است؟

$$\mathrm{H}(X) = -\sum_{i=1}^{27} \frac{1}{27}\log_2 \frac{1}{27} = \log_2 27 \approx 4.75 \quad \left[\frac{\text{bits}}{\text{character}}\right]$$

- برای یک میلیون کاراکتر خواهیم داشت:

$$N\mathrm{H}(X) = 1000000 \times 4.75 \approx 573 \text{ kB} ☹☹☹$$

اما ما امروزه براحتی می‌توانیم یک متن یک میلیون کاراکتری را بسیار بیشتر از مقدار بدست آمده فشرده کنیم. اشکال محاسبه ما کجاست؟

✍ شاید اولین اشکال ما در این بود که فکر کردیم همه حروف انگلیسی با فرکانس یکسان در متن ظاهر می‌شوند.

اما این‌طور نیست:

$$p_a = 0.08167,\ p_b = 0.12702,\ p_i = 0.06966,\ p_m = 0.02406,\ p_z = 0.00074$$

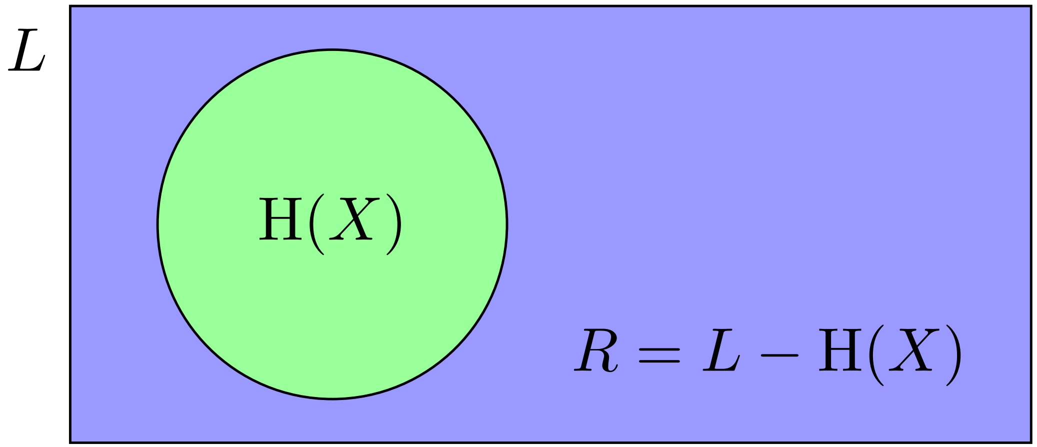
✍ با احتساب عدم یکنواختی احتمال واقع شدن حرف در متن، $\mathrm{H}(X) = 4.219$ خواهد شد.

✍ اما این همه ماجرا نیست، پشت‌سرهم قرار گرفتن حروف yx، gh و th، کلمات، جملات، مفهوم متن و ... .

✍ در واقع اشتباه در این بود که ما برای اِنتروپی بیشینه مقدار آن را در نظر گرفتید.

$$\mathrm{H} = \sum_{i=1}^{27} \frac{1}{27} \log_2 \frac{1}{27} = \log_2 27 \approx 4.75 \quad \left[\frac{\text{bits}}{\text{character}}\right]$$

✍ شانون نشان داد که $\mathrm{H}(X)$ برای زبان انگلیسی مقداری است بین 0.6 تا 1.3 بیت بر کاراکتر است.



✍ یک تصویر خاکستری (Gray Scale Image) هشت بیتی با ابعاد 800×600 را در نظر بگیرید، برای انتقال این تصویربه چند بیت اطلاعات نیاز داریم؟

$$\mathrm{H} = \log_2 256 = 8 \quad \frac{\text{bit}}{\text{pixel}}$$

✍ کل اطلاعاتی که برای انتقال این تصویر نیاز هست:

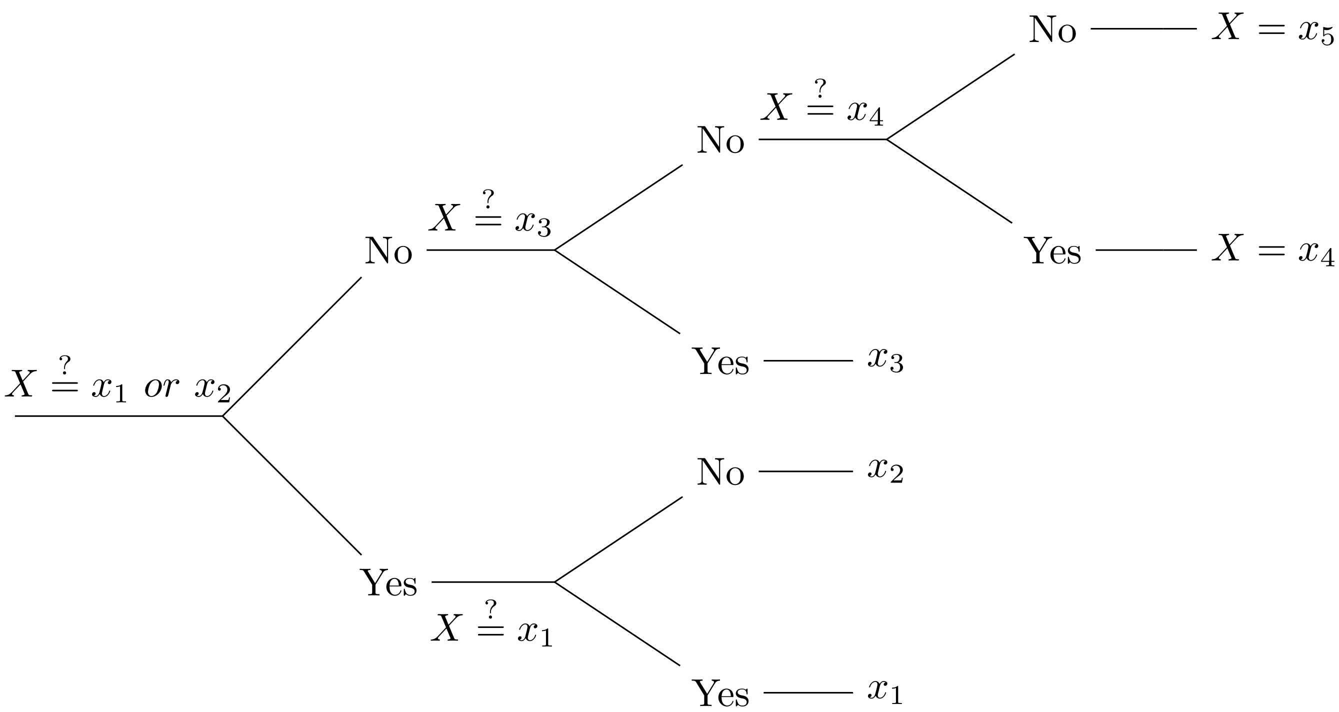
$$600 \times 800 \times 8 = 3840000 \text{ bit} \approx 480 \text{ kB} ☹☹☹$$

✍ اما در فشرده‌سازی می‌توانیم اندازه چنین تصویری را بدون از دست دادن اطلاعات حتی تا 40 kB نیز پایین آورد؟!

مثال ۸ X یک متغیر تصادفی (Random Variable) باشد که مقادیر آن از مجموعه $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_5\}$ و با احتمال‌های

$$p_1 = 0.3, p_2 = 0.2, p_3 = 0.2, p_4 = 0.15, p_5 = 0.15,$$

انتخاب می‌شوند. در ضمن فرض کنید تنها راه اطلاع از مقدار انتخاب شده برای متغیر تصادفی X پرسیدن سؤال‌هایی که پاسخ آن «بله» یا «خیر» است، باشد. برای مثال شما می‌توانید سؤال «آیا مقدار X برابر x_1 یا x_2 است؟» را مطرح کنید و در پاسخ فقط «بله» یا «خیر» را دریافت خواهید کرد. یک روش طرح سؤال برای فهمیدن مقدار انتخاب شده در شکل ۳ نمایش داده شده است و روشن است که این تنها روش موجود نیست و شما می‌توانید روش دیگری را انتخاب کنید.



شکل ۳: روشی برای طرح سؤال‌های «بله» یا «خیر» برای فهمیدن مقدار یک متغیر تصادفی

فرض کنید مقدار صحیح X برابر x_4 باشد، در این‌صورت با طرح سؤال $X \stackrel{?}{=} x_1$ یا x_2 پاسخ «خیر» را دریافت می‌کنیم. سپس با طرح سؤال $X \stackrel{?}{=} x_3$ بازهم پاسخ «خیر» را دریافت می‌کنیم تا این‌که در آخر با طرح سؤال $X \stackrel{?}{=} x_4$ پاسخ «بله» را دریافت می‌کنیم و مقدار صحیح پس از 3 پرسش به‌دست می‌آید. تعداد پرسش‌های

مطرح شده برای رسیدن به جواب خود یک متغیر تصادفی‌است که اگر X برابر x_3یا x_2یا x_1 باشد، مقدار آن 2 و اگر X برابر x_5 یا x_4 باشد، مقدار آن برابر 3 است. بنابراین متوسط تعداد سؤال‌های طرح شده در این روش عبارت‌است از

$$(0.3 + 0.2 + 0.2)2 + (0.15 + 0.15)3 = 2.3$$

این مثال ارتباط نزدیکی با کدگذاری منبع دارد، در واقع در بحث کدگذاری منبع نشان می‌دهیم که نه تنها در روش نشان داده شده در شکل ۳ بلکه با هر روش طرح سؤال دیگر نیز، متوسط تعداد پرسش‌های مطرح شده نمی‌تواند از انتروپی متغیر تصادفی X کمتر باشد. در این مثال انتروپی X برابر است با

$$\mathrm{H}(X) = -0.3\log 0.3 - 0.4\log 0.2 - 0.3\log 0.15 = 2.27,$$

بنابراین به هر طریقی که سؤال‌ها را مطرح کنیم متوسط تعداد سؤال‌ها برای رسیدن به جواب صحیح از 2.27 کم‌تر نخواهد بود.

مثال فوق یک نمونه کامل‌تر از مثال مسابقه بیست سوالی است که پیش‌تر ذکر شد. همان‌طور که در مثال قبل ذکر شد، نظریه اطلاعات فقط به ما می‌گوید که به‌طور متوسط حداقل به چند سؤال از نوع «بله» یا «خیر»، برای رسیدن به پاسخ نیاز داریم، اما روش طرح سؤال‌ها را به ما نمی‌گوید. در واقع روش طرح سؤال موضوعی است که در نظریه کدگذاری مطالعه می‌شود.

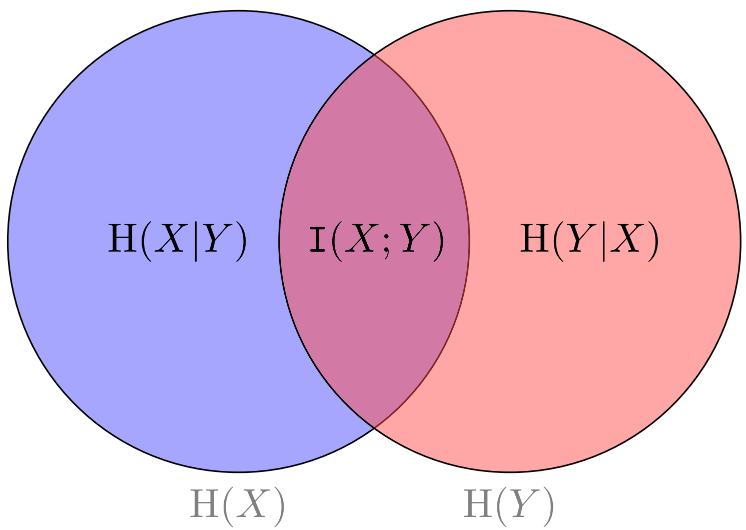
قضیه دوم شانون

انتروپی توام (Joint Entropy)

✍ فرض کنید $(X,Y) \sim \mathrm{P}(X,Y)$، در این‌صورت انتروپی توام یا توأم زوج متغیر تصادفی (X,Y) به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathrm{H}(X,Y) = -\sum_{x\in\mathcal{X}}\sum_{y\in\mathcal{Y}} \mathrm{P}(x,y)\log_2 \mathrm{P}(x,y)$$

✍ با کمی دقت به این رابطه می‌رسیم: $\mathrm{H}(X,Y) \le \mathrm{H}(X) + \mathrm{H}(Y)$.



$$\mathrm{I}(X;Y) = \mathrm{H}(X) - \mathrm{H}(X|Y)$$

$$\mathrm{I}(X;Y) = \mathrm{H}(Y) - \mathrm{H}(Y|X)$$

مثال ۹ احتمال توام دو متغیرتصادفی X و Y در جدول زیر ارایه شده است. مطلوب است محاسبه $\mathrm{H}(X,Y)$؟

$\mathrm{P}(X,Y)$	$y=0$	$y=1$
$x=0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$x=1$	0	$\frac{1}{4}$

پاسخ: باتوجه به روابط مربوط به انتروپی توام براحتی داریم:

$$\mathrm{H}(X,Y)=-\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4}-0\log_2 0-\frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4}=1.5\ [\mathrm{bit}]$$

مثالی از انتروپی توام (ادامه)

✍ در ادامه همین مثال مطلوب است، محاسبه $\mathrm{H}(X)$ و $\mathrm{H}(Y)$. برای محاسبه این دو نیز براحتی کافی است که با استفاده از توزیع حاشیه‌ای، توزیع هر یک از متغیرهای X و Y را محاسبه کنیم.

$\mathrm{P}(X,Y)$	$y=0$	$y=1$	$\mathrm{P}(X)$
$x=0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$x=1$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\mathrm{P}(Y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

باتوجه به جدول فوق، براحتی خواهیم داشت:

$$\mathrm{H}(X) = -\sum_{x\in X} \mathrm{P}(x)\log_2 \mathrm{P}(x) = -\frac{3}{4}\log_2\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4} = 0.8 \text{ [bit]}$$

$$\mathrm{H}(Y) = -\sum_{y\in Y} \mathrm{P}(y)\log_2 \mathrm{P}(y) = -\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} = 1 \text{ [bit]}$$

همان‌طور که در این مثال مشاهده می‌کنید:

$$\mathrm{H}(X,Y) \leq \mathrm{H}(X) + \mathrm{H}(Y) \quad \Longrightarrow \quad 1.5 \leq 1.0 + 0.8 = 1.8$$

در ضمن براحتی می‌توانید مشاهده کنید که در این مثال X و Y از یکدیگر مستقل نیستند.

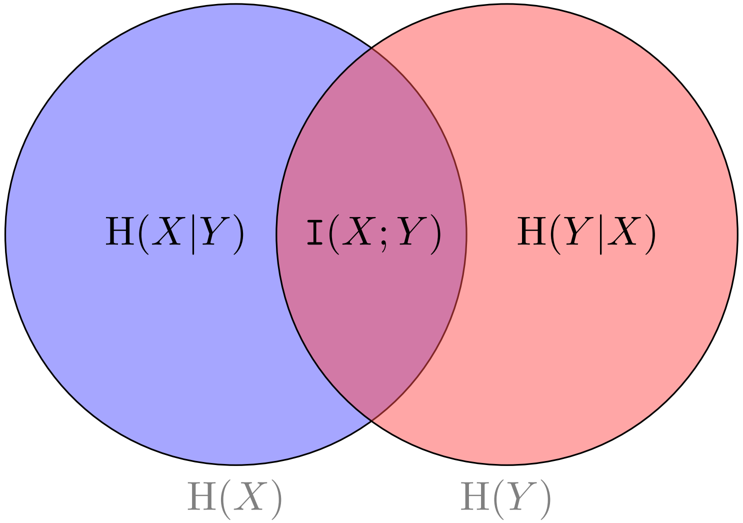
انتروپی شرطی

✍ فرض کنید $(X,Y) \sim \mathrm{P}(X,Y)$، در این‌صورت اِنتروپی شرطی $\mathrm{H}(Y|X)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{H}(Y|X) &= \sum_{x\in\mathcal{X}} \mathrm{P}(x)\mathrm{H}(Y|X=x) \\
&= -\sum_{x\in\mathcal{X}} \mathrm{P}(x) \sum_{y\in\mathcal{Y}} \mathrm{P}(y|x)\log \mathrm{P}(y|x) \\
&= -\sum_{x\in\mathcal{X}} \sum_{y\in\mathcal{Y}} \mathrm{P}(x,y)\log \mathrm{P}(y|x). \qquad (۶)
\end{aligned}
$$

✍ بنابراین $\mathrm{H}(Y|X)$ بیان‌گر اندازه متوسط ابهام در مورد متغیر تصادفی Y به‌شرط معلوم بودن X است.

ویژگی‌های انتروپی شرطی



$$\mathrm{I}(X;Y) = \mathrm{H}(X) - \mathrm{H}(X|Y)$$

$$\mathrm{I}(X;Y) = \mathrm{H}(Y) - \mathrm{H}(Y|X)$$

$$\mathrm{H}(X|Y) \leq \mathrm{H}(X)$$

$$\mathrm{H}(X,Y) = \mathrm{H}(X) + \mathrm{H}(Y|X) = \mathrm{H}(Y) + \mathrm{H}(X|Y)$$

$$\mathrm{I}(X;Y) = \mathrm{H}(X) - \mathrm{H}(X|Y) = \mathrm{H}(X) - (\mathrm{H}(X,Y) - \mathrm{H}(Y))$$

$$\mathrm{I}(Y;X) = \mathrm{H}(Y) + \mathrm{H}(X) - \mathrm{H}(X,Y) = \mathrm{H}(Y) - \mathrm{H}(Y|X)$$

مثال ۱۰

باتوجه به همان مثالی که پیشتر بیان شد، مطلوب محاسبه $\mathrm{H}(Y|X)$؟

$\mathrm{P}(X,Y)$	$y=0$	$y=1$
$x=0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$x=1$	0	$\frac{1}{4}$

پاسخ: در نخستین گام باید جدول زیر را تشکیل دهیم.

$\mathrm{P}(Y|X)$	$y=0$	$y=1$	$\mathrm{H}(Y|X=x)$	$\mathrm{P}(X)$
$x=0$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\mathrm{H}(\frac{1}{3})$	$\frac{3}{4}$
$x=1$	0	1	$\mathrm{H}(0)$	$\frac{1}{4}$

مثالی از انتروپی شرطی (ادامه)

$\mathrm{P}(Y\|X)$	$y=0$	$y=1$	$\mathrm{H}(Y\|X=x)$	$\mathrm{P}(X)$
$x=0$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\mathrm{H}_b(\frac{1}{3})$	$\frac{3}{4}$
$x=1$	0	1	$\mathrm{H}_b(0)$	$\frac{1}{4}$

✍ این سوال را به دو روش می‌توان حل نمود.

- روش اول:

$$\mathrm{H}(Y|X) = -\frac{1}{2}\log_2\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\log_2\frac{1}{3} - 0\log_2 0 - \frac{1}{4}\log_2 1 = 0.689\ [\mathrm{bit}]$$

- روش دوم:

$$\mathrm{H}(Y|X) = \frac{3}{4}\mathrm{H}(Y|X=0) + \frac{1}{4}\mathrm{H}(Y|X=1) = 0.689\ [\mathrm{bit}]$$

در توضیح روش دوم باید گفت، که برطبق (۶) می‌توانیم رابطه انتروپی شرطی را به صورت زیر نیز بدست آوریم:

$$\mathrm{H}(Y|X) = -\sum_{x\in\mathcal{X}} p(x)\mathrm{H}(Y|X=x) = -\mathrm{P}(X=0)\mathrm{H}(Y|X=0) - \mathrm{P}(X=1)\mathrm{H}(Y|X=1) \quad (۷)$$

به عنوان مثال برای محاسبه $\mathrm{H}(Y|X=0)$ می‌توان به صورت زیر عمل کرد:

$$\begin{aligned}\mathrm{H}(Y|X=0) &= -\sum_{y\in\mathcal{Y}} \mathrm{P}(y|X=0)\log \mathrm{P}(y|X=0) \\ &= -\mathrm{P}(Y=0|X=0)\log \mathrm{P}(Y=0|X=0) - \mathrm{P}(Y=1|X=0)\log \mathrm{P}(Y=1|X=0)\end{aligned}$$

اگر مقادیر را در رابطه فوق جایگذاری کنیم، خواهیم داشت:

$$\mathrm{H}(Y|X=0) = -\sum_{y\in\mathcal{Y}} \mathrm{P}(y|X=0)\log \mathrm{P}(y|X=0) = -\frac{2}{3}\log\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\log\frac{1}{3} = \mathrm{H}_b\left(\frac{2}{3}\right)$$

برطبق (۵)، می‌دانیم که مقدار فوق برابر با $\mathrm{H}_b\left(\frac{2}{3}\right)$ است. روند مشابه روند بیان شده را برای $\mathrm{H}(Y|X=1)$ نیز می‌توان طی کرد و به $\mathrm{H}_b\left(0\right)$ رسید. در نهایت نیز کافی است $\mathrm{H}_b\left(\frac{2}{3}\right)$ و $\mathrm{H}_b\left(0\right)$ را در (۷) قرار داد.

تمرین خانگی

✍ فرض کنید دو متغیر تصادفی A و B بیانگر گلوله‌های رنگی خارج شده از یک جعبه باشد. اگر توزیع توام این دو متغیر به صورت زیر باشد:

جدول شماره یک، جدول توزیع توام دو متغیر تصادفی

$\mathrm{P}(A,B)$	$A = Red$	$A = Blue$
$B = Red$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$
$B = Blue$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

تعریف ۲ **ظرفیت اطلاعاتی** اگر ورودی کانال را با متغیر تصادفی X و خروجی آن‌را با متغیر تصادفی Y نمایش دهیم در این‌صورت ظرفیت کانال عبارت است از بیشینه متوسط اطلاعات انتقال داده شده از طریق کانال بر حسب $\frac{bits}{symbol}$ که به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$C = \max_{p_X(x)} \mathrm{I}(X;Y)$$

قضیه ۲ کدگذاری کانال

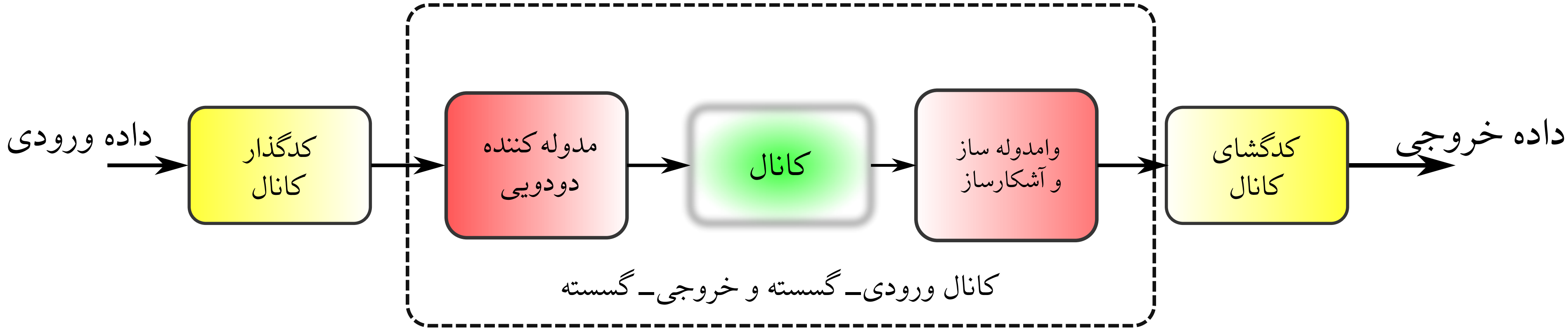
برای یک کانال گسسته بدون حافظه، بیشینه نرخ اطلاعاتی که در یک کانال می‌تواند با خطای به مقدار دلخواه کوچک ارسال شود، برابر با ظرفیت کانال C است.

در علم مخابرات خروجی منبع اطلاعات (Information Source) یک فرایند تصادفی (Stochastic Process) است، چرا که در غیر این‌صورت، خروجی آن با احتمال 1 قابل پیش‌بینی بوده و دیگر به مخابره و انتقال آن نیازی نبود. در عمل داده‌ها را می‌توان با استفاده از سیگنال‌های الکتریکی و از طریق کابل هم‌محور یا زوج‌سیم، یا امواج الکترومغناطیسی که در هوا منتشر می‌شوند، منتقل نمود، یا از طریق پالس‌های نوری که در فیبرهای نوری منتشر می‌شوند داده‌ها را انتقال داد. این روش‌ها در سرعت و امنیت انتقال تفاوت‌هایی با هم دارند اما وجه مشترک همه روش‌های انتقال داده این است که محیط انتقال آن‌ها دارای نویز است، عاملی که سبب می‌شود پیام دریافتی در مقصد، چیزی غیر از پیام ارسالی در مبدأ باشد. در واقع نویز یک عامل ناخواسته است که در همه کانال‌های مخابراتی وجود دارد و سبب تغییر تصادفی سیگنال دریافتی نسبت به سیگنال ارسالی می‌شود.

یک کانال مخابراتی به‌صورت کلی بر اساس مجموعه ورودی‌های ممکن X، مجموعه خروجی‌های ممکن Y، مدل می‌شود. کانال را بی‌حافظگی گوییم، هرگاه خروجی کانال در هر لحظه فقط به ورودی کانال در همان لحظه وابسته باشد و از ورودی‌ها در لحظات قبل مستقل باشد. خطا زمانی رخ می‌دهد که $X \neq Y$ باشد. در ادامه می‌خواهیم به سوال زیر پاسخ دهیم

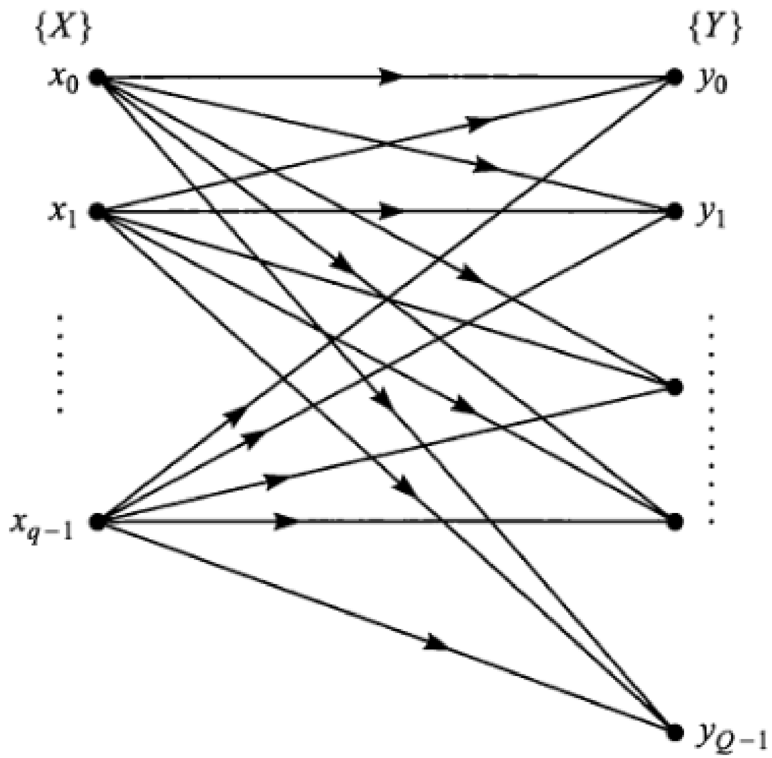
فرض کنید می‌خواهیم پیام‌هایی را از طریق یک کانال (که در آن بعضی از نمادها ممکن است تحریف شوند) برای گیرنده‌ای بفرستیم. آهنگ ماکسیمال انتقال پیام به‌نحوی‌که گیرنده بتواند پیام اصلی را با احتمال خطای به‌اندازه دلخواه کوچک، بازیابی کند چقدر است؟

کانال گسسته بدون حافظه (Discrete Memoryless Channel) که به‌اختصار آن‌را با DMC (Discrete Memoryless Channel) نمایش می‌دهیم، کانالی است بدون حافظه که الفبای ورودی و خروجی آن یعنی به‌ترتیب $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ مجموعه‌هایی شمارا (یا گسسته) باشند. کانال شکل زیر مرکب از مدوله‌کننده و وامدوله ساز را در نظر بگیرید.



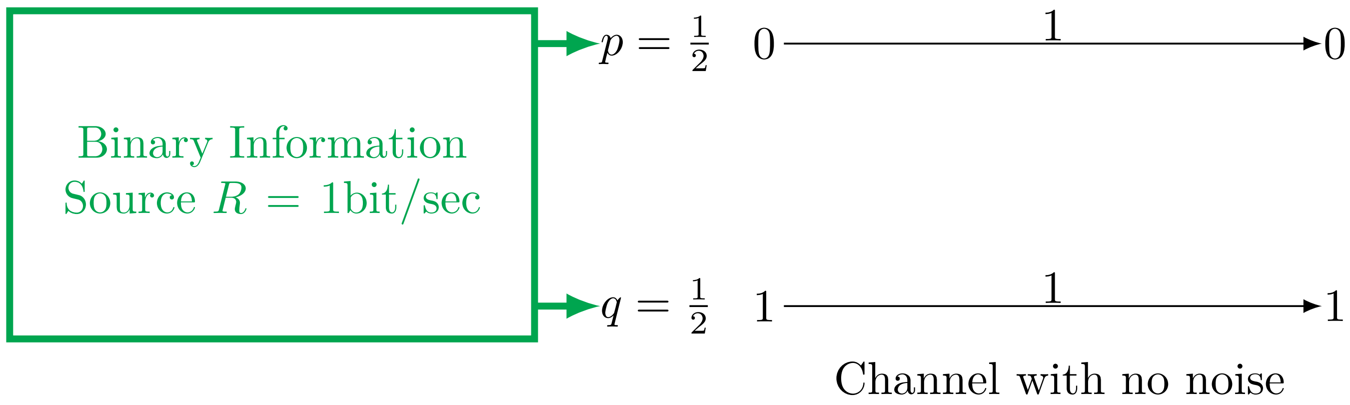
فرض کنید در این کانال از مجموعه شکل موج‌های تولیدی توسط مدولاتور یک مجموعه M عضوی و مجموعه الفبای دریافتی در آشکارساز یک مجموعه Q عضوی باشد و برای مدولاسیون از یک روش بدون حافظه استفاده کنیم، یعنی شکل موج نسبت داده شده به هر سمبل ورودی مدوله‌کننده تنها به سمبل ورودی در آن لحظه

بستگی داشته و مستقل از سمبل‌های ورودی در سایر لحظات باشد. شکل زیر، یک نمایش بصری از این DMC است.



شکل ۴: مدل نظریه اطلاعاتی یک کانال گسسته بدون حافظه

کانال دودویی بدون نویز



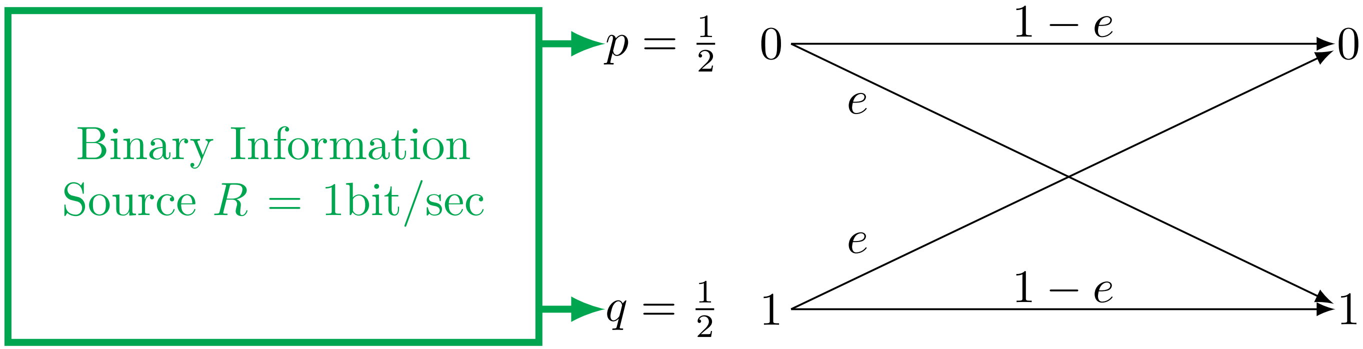
✍ کانالی را در نظر بگیرید که ورودی‌های دودیی آن دقیقاً در خروجی بازتولید شوند، هیچ‌گونه خطایی (نویزی) در انتقال رخ ندهد.

✍ با توجه به این‌که در این‌حالت $Y = X$ لذا $\mathrm{H}(X|Y) = 0$ است.

$$\mathrm{I}(X;Y) = \mathrm{H}(X) - \mathrm{H}(X|Y) = \mathrm{H}(X)$$

✍ بنابراین بیشینه $\mathrm{I}(X;Y)$ برابر $\log_2 2 = 1(\frac{bits}{symbol})$ است که به‌ازای $\mathrm{P}(X) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ به‌دست می‌آید.

محاسبه ظرفیت برای کانال مخابراتی ساده



Channel with error probability e

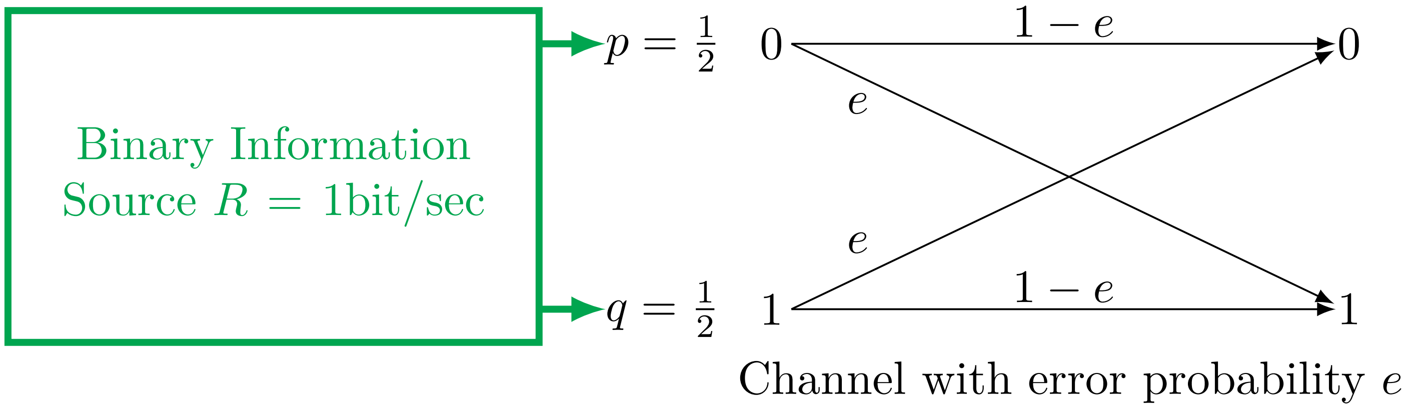
✍ برای محاسبه ظرفیت کانال داریم:

$$C = \max_{p_X(x)} \mathrm{I}(X;Y)$$

✍ از سوی دیگر می‌دانیم که $\mathrm{I}(Y;X)$ برابر با مقدار ابهام باقیمانده قبل و بعد از دریافت Y است (Leakage).

$$\mathrm{I}(Y;X) = \mathrm{H}(Y) + \mathrm{H}(X) - \mathrm{H}(X,Y) = \mathrm{H}(Y) - \mathrm{H}(Y|X)$$

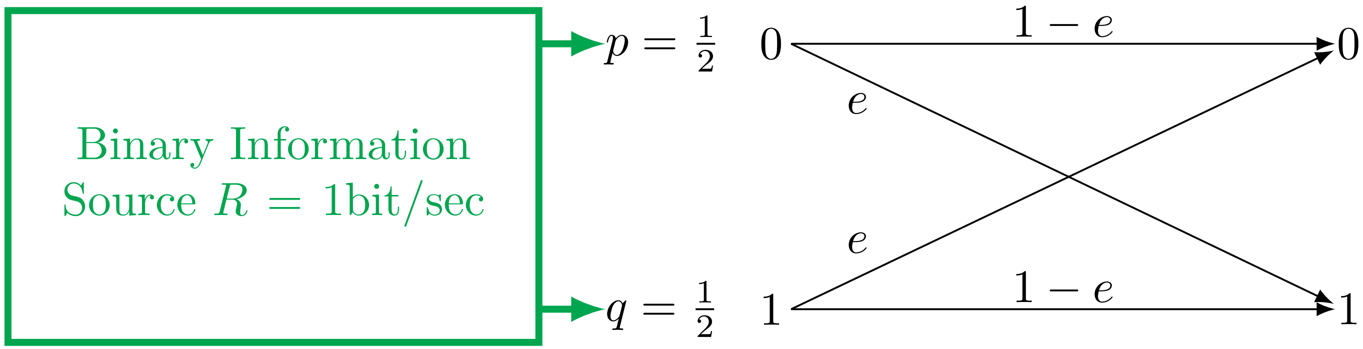
محاسبه ظرفیت برای کانال دودویی نویزدار (ادامه)



✍ محاسبه مقدار $\mathrm{H}(X)$:

$$\begin{aligned}\mathrm{H}(X) &= -\mathrm{P}(X=0)\log_2 \mathrm{P}(X=0) - \mathrm{P}(X=1)\log_2 \mathrm{P}(X=1)\\ &= -\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} = 1 \text{ [bit]}\end{aligned}$$

محاسبه ظرفیت برای کانال دودویی نویزدار (ادامه)



Channel with error probability e

✍ برای محاسبه $\mathrm{H}(Y)$ ابتدا باید $\mathrm{P}(Y)$ را محاسبه کرد. در نهایت $\mathrm{H}(Y) = 1$ [bit].

$$\mathrm{P}(Y=0) = \mathrm{P}(X=0)\mathrm{P}(Y=0|X=0) + \mathrm{P}(X=1)\mathrm{P}(Y=0|X=1)$$

$$= \frac{1}{2} \times (1-e) + \frac{1}{2}e = \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{P}(Y=1) = \mathrm{P}(X=0)\mathrm{P}(Y=1|X=0) + \mathrm{P}(X=1)\mathrm{P}(Y=1|X=1)$$

$$= \frac{1}{2}e + \frac{1}{2} \times (1-e) = \frac{1}{2}$$

✍ محاسبه اطلاعات متقابل (Mutual Information):

$\mathrm{P}(X,Y)$	$y=0$	$y=1$	$\mathrm{P}(X)$
$x=0$	$\frac{1-e}{2}$	$\frac{e}{2}$	$\frac{1}{2}$
$x=1$	$\frac{e}{2}$	$\frac{1-e}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\mathrm{P}(Y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

$$\mathrm{H}(X,Y) = -\sum_{x\in\mathcal{X}}\sum_{y\in\mathcal{Y}} \mathrm{P}(x,y)\log_2 \mathrm{P}(x,y)$$

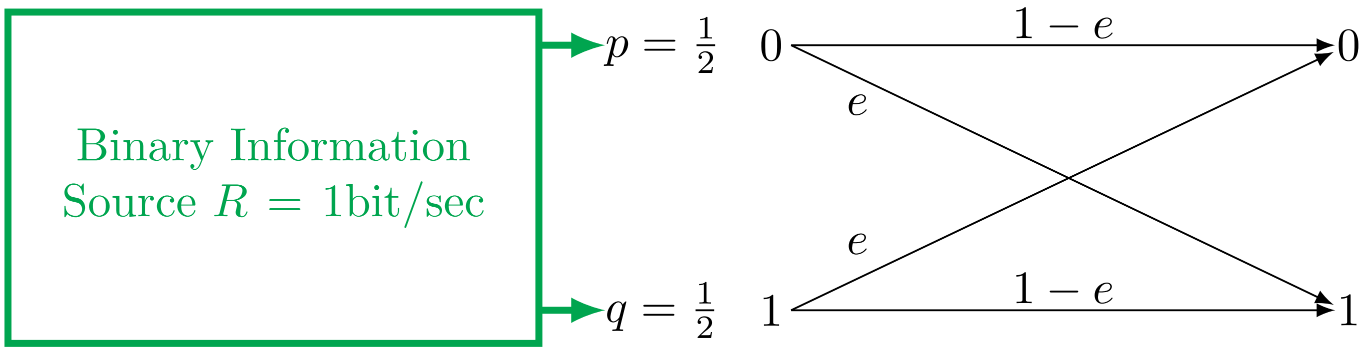
$$= 1-(1-e)\log_2(1-e) - e\log_2 e = 1+\mathrm{H}_b(e)$$

یادآوری

تابع اِنتروپی دودویی (Binary Entropy Function) را هم به یاد آورید:

$$\mathrm{H}_b(p) = -p\log_2 p - (1-p)\log_2(1-p)$$

محاسبه ظرفیت برای کانال دودویی نویزدار (ادامه)



Channel with error probability e

✍ در نهایت براحتی خواهیم داشت:

$$\mathrm{I}(Y;X) = \mathrm{H}(Y) + \mathrm{H}(X) - \mathrm{H}(X,Y) = 1 + 1 - 1 - \mathrm{H}_b(e) = 1 - \mathrm{H}_b(e)$$

$$C = 1 - \mathrm{H}_b(e) = 1 + e\log_2 e + (1-e)\log_2(1-e)$$

✍ چند حالت حدی

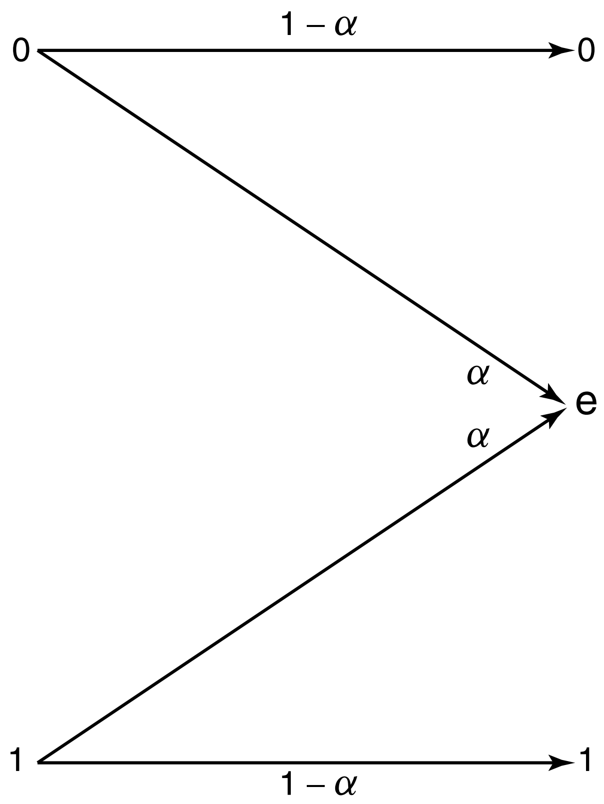
- $e=0$ یا $e=1$: ظرفیت کانال برابر با 1 بیت است.
- $e=\frac{1}{2}$: ظرفیت کانال برابر با صفر است.
- اگر $e=\frac{1}{4}$ باشد، آن‌گاه $C=0.188$ خواهد شد.

✍ از این‌که $C=0.188=\frac{k}{n}$، آیا منظور این است که هر بیت را شش بار تکرار کنیم، احتمال خطا $\mathrm{P}_e \to 0$؟

$$1 \Longrightarrow 1111111$$

- خیر، قطعا روش‌هایی وجود دارد که به این نرخ دست‌یابد، اما نه به این سادگی.

مثال ۱۱ نوع دیگری از کانال دودویی متقارن که در آن برخی از بیت‌ها بجای خطا در انتقال اصلاً به مقصد نمی‌رسند، کانال دودویی همراه با محوشدگی است که در شکل ۵ نمایش داده شده است.



شکل ۵: کانال دودویی همراه با محوشدگی

در این کانال بیت ارسالی با احتمال α به مقصد نرسیده و محو می‌شود و با احتمال $1-\alpha$، با صحت کامل به مقصد می‌رسد. البته گیرنده می‌داند کدام بیت‌ها به مقصد نمی‌رسند، یعنی از شماره بیتی که به دست وی نرسیده است اطلاع دارد ولی از مقدار آن بی‌اطلاع خواهد بود. ظرفیت کانال دودویی همراه با محوشدگی را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم.

$$
\begin{aligned}
C &= \max_{p(x)} I(X;Y) \\
&= \max_{p(x)} (H(Y) - H(Y|X)) \\
&= \max_{p(x)} H(Y) - H(\alpha).
\end{aligned}
$$

مجموعه الفبای ورودی کانال برابر $\{0,1\}$ و مجموعه الفبای خروجی کانال برابر $\{0,e,1\}$ است. فرض کنید $\Pr(X=1)=\pi$، در این‌صورت رابطه زیر برقرار است.

$$
H(Y) = H((1-\pi)(1-\alpha), \alpha, \pi(1-\alpha)) = H(\alpha) + (1-\alpha)H(\pi).
$$

در نتیجه داریم

$$
\begin{aligned}
C &= \max_{p(x)} H(Y) - H(\alpha) \\
&= \max_{\pi} (1-\alpha) H(\pi) + H(\alpha) - H(\alpha) \\
&= \max_{\pi} (1-\alpha) H(\pi) \\
&= 1 - \alpha,
\end{aligned}
$$

و ظرفیت به‌ازای $\pi = \frac{1}{2}$ به‌دست می‌آید.

شهود ما از ظرفیت در کانال دودویی همراه با محوشدگی بیان‌گر این است که اگر n بیت روی این کانال ارسال شود، αn بیت محو و $(1-\alpha)n$ بیت با صحت به مقصد می‌رسند، بنابراین حداکثر تعداد بیت‌هایی که می‌توانیم بازیابی کنیم برابر $(1-\alpha)n$ بیت، و در نتیجه ظرفیت کانال، حداکثر برابر با $(1-\alpha)$ است. امکان دست‌یابی به این نرخ انتقال، بدیهی نیست، ولی قضیه دوم شانون دست‌یابی به این نرخ انتقال را تضمین می‌کند.

در بسیاری از کانال‌های عملی، فرستنده، بازخوردهایی از گیرنده دریافت می‌کند و انتقال داده صرفاً یک‌طرفه نیست. در کانال دودویی همراه با محوشدگی دارای بازخورد، اگر گیرنده یک بیت را دریافت نکند، درخواست ارسال مجدد آن بیت را به فرستنده، به‌عنوان بازخورد ارسال می‌کند، و فرستنده مادامی که بیت ارسالی با صحت به دست گیرنده نرسیده باشد آن‌را روی کانال ارسال می‌کند. در این‌صورت با توجه به این‌که احتمال انتقال با صحت کامل برابر $1-\alpha$ است، نرخ مؤثر انتقال برابر $1-\alpha$ است. به این ترتیب با استفاده از بازخورد قادریم به‌راحتی به ظرفیت $1-\alpha$ دست‌یابیم. ثابت می‌شود که چه با بازخورد و چه بدون آن، بیشینه نرخی که می‌توانیم به آن دست‌یابیم برابر $1-\alpha$ است. در حقیقت بازخورد، ظرفیت یک کانال را افزایش نمی‌دهد.

اِنتروپی پیوسته

✍ مفهوم اِنتروپی برای توابع پیوسته نیز تعریف می‌گردد.

$$X\ f_X(x), \qquad f_X(x) \geq 0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\mathrm{d}x = 1$$

$$F(x) = \mathrm{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{H}(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\log_2 f_X(x)\mathrm{d}x$$

✍ در نتیجه این تلاش ظرفیت برای کانال پیوسته با نویز AWGN (قضیه Shannon-Hartley):

$$C = B\log_2\left(1+\mathrm{SNR}\right)$$

- می‌دانیم که:

$$\mathrm{SNR}_{\mathrm{dB}} = 10\log_{10}\frac{\text{Signal Power}}{\text{Noise power}} = 10\log_{10}\mathrm{SNR}$$

- $\mathrm{SNR}=0\ \mathrm{dB}$: یعنی قدرت سیگنال برابر با قدرت نویز است. یعنی سیگنال در نویز غرق شده است.

ظرفیت کانال پیوسته AWGN-مثال

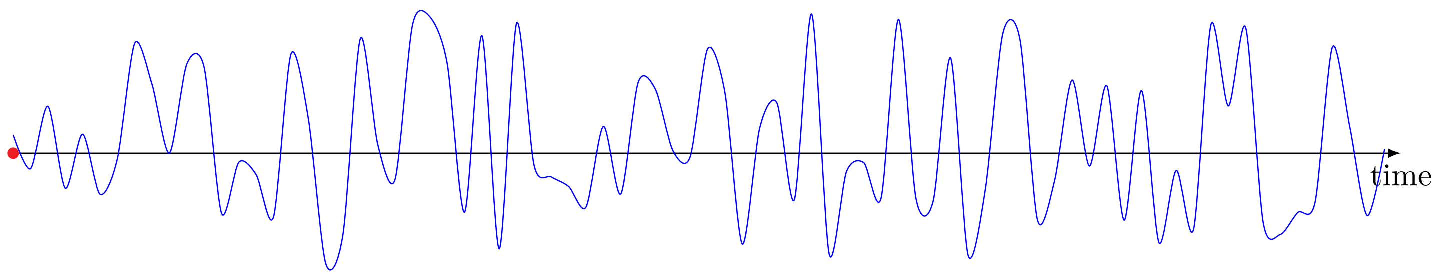
✍ در شبکه LTE بیشینه پهنای‌باند (Bandwidth) مورد استفاده برابر با 20 MHz است. معمولا بهترین SNR (Signal Noise Ratio) در LTE برابر با 12 dB است. پس خواهیم داشت:

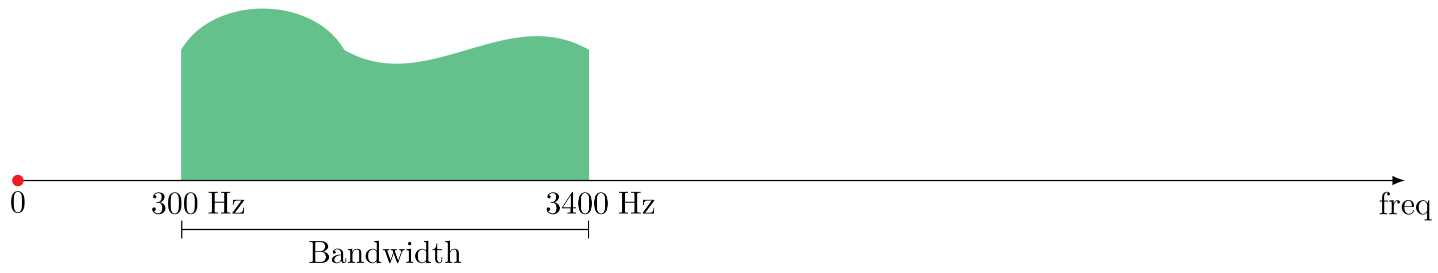
$$\text{SNR [dB]} = 10\log_{10}\text{SNR} \Longrightarrow \text{SNR} = 10^{1.2} = 16$$

$$C = 20\log_2(1+16) \approx 81.49 \text{ Mb☹☹☹}$$

✍ ولی LTE تا حداکثر نرخ 300 مگابیت را می‌تواند پشتیبانی کند؟!

ظرفیت کانال پیوسته AWGN-مثال





✍ می‌دانیم که پهنای‌باند صدای انسان برای انتقال در شبکه PSTN (Public Switched Telephone Network) برابر با 4 kHz است. در صورتی‌که در خطوط تلفنی میزان SNR حدودا برابر با 35 dB است. از دیدگاه شانون ظرفیت به صورت زیر محاسبه می‌شود.

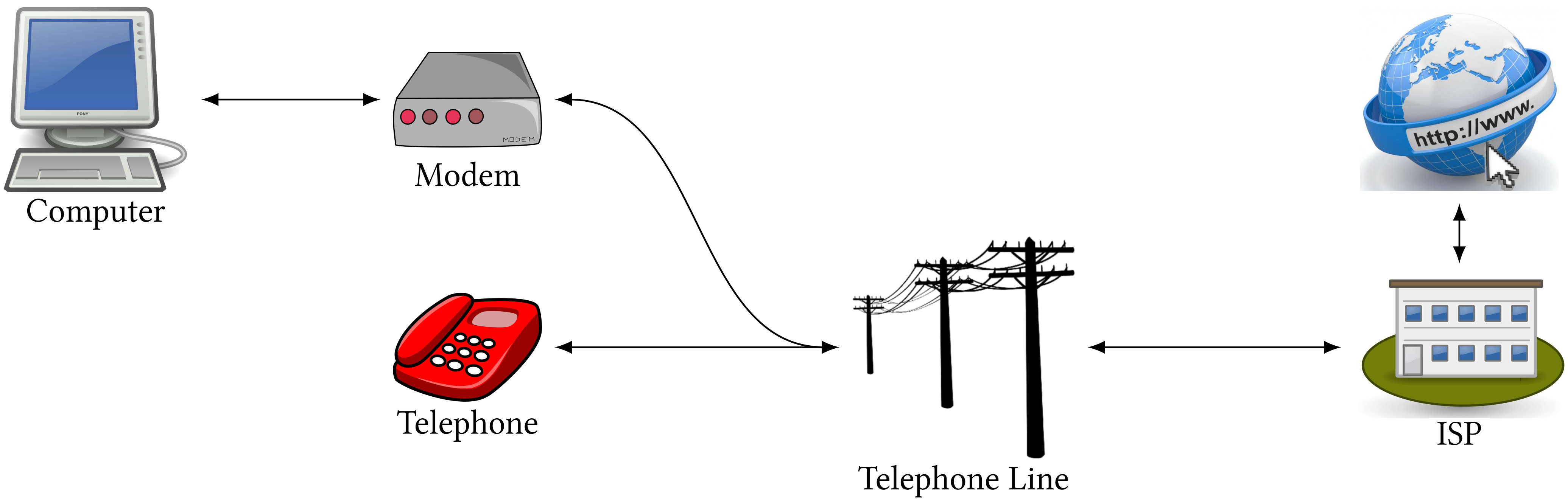
$$C = 4000 \log_2(1 + 10^{3.5}) \approx ?\ \text{Kb}$$

شبکه دسترسی Dial-up

✍ استفاده از بستر PSTN برای انتقال اینترنت از دهه ۱۹۸۰ میلادی.

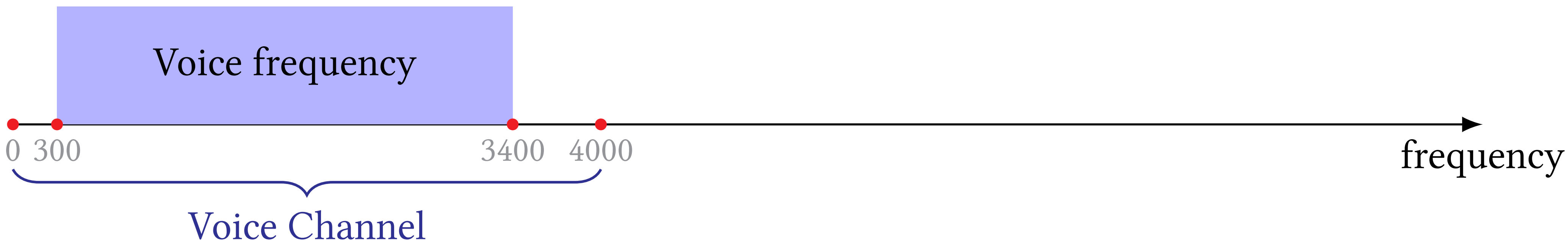
✔ مزیت: فراگیر بودن و بدون نیاز به بستر خاص.

✘ سرعت بسیار پایین حداکثر 56 کیلوبیت بر ثانیه و اشغال شدن خط تلفن.



✍ حداکثر نرخ Dial-up به صورت تئوری برابر با $56\ \frac{kb}{s}$ بود؟!

✍ خطوط تلفن به مانند یک هواپیمای ۲۰۰ نفره است که ما در Dial-up و تلفن فقط از دو ظرفیت آن استفاده کرده ایم.



✍ DSL (Digital subscriber line) خانواده‌ای از فناوری‌ها است برای انتقال داده از طریق خط تلفن، به مانند ADSL (Asymmetric Digital Subscriber Line)، HDSL (High bit-rate Digital Subscriber Line) و VDSL (Very-high-bit-rate Digital Subscriber Line)

✍ در ADSL (Asymmetric Digital Subscriber Line) از پهنای‌باند باقی‌مانده استفاده می‌شود.

✍ تفاوت ADSL و ADSL2+ در تفاوت پهنای‌باند DownStream است.

✍ واژه Asymmetric در ADSL ناظر به عدم تقارن بین UpStream و DownStream است.

ADSL

✍ حداکثر سرعت ADSL2+ به صورت تئوری:

- $25Mb/s$ در فاصله $0/3km$
- $23Mb/s$ در فاصله $0/9km$
- $21Mb/s$ در فاصله $1/2km$
- $16Mb/s$ در فاصله $2/1km$
- $8Mb/s$ در فاصله $3km$
- $1/5Mb/s$ در فاصله $5/2km$

مثال ۱۲ اگر یک سیگنال در بازه بین سه تا چهار مگاهرتز به ارسال داده بپردازد، با در نظر گرفتن SNR برابر با 24dB، مقدار ظرفیت کانال چقدر خواهد شد؟

پاسخ: نخست در نظر بگیرید که وقتی گفته می‌شود سیگنال در بازه بین سه تا چهار مگاهرتز به ارسال اطلاعات می‌پردازد، یعنی پهنای‌باند (Bandwidth) برابر با یک مگاهرتز است. در ضمن باید 24dB را نیز به واحد مطلق تبدیل کنید. بدین‌سان داریم:

$$C = B\log_2(1 + SNR) = 1\log_2(1 + 10^{2.4}) = 7.97 \text{ Mbps}$$

تمرینات

سوال اول اگر X منبعی با خروجی های (a,b,c,d) با احتمالات به ترتیب $(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{8})$ باشد،

الف آنتروپی X را بیابید.

ب اگر این احتمالات متناظر برای خروجی های (b,a,d,c) بود جواب چه تغییری می کرد؟

ج از این تمرین چه نتیجه ای می گیریم؟

سوال دوم اگر (X, Y) دارای توزیع مشترک زیر باشند:

$Y \backslash X$	1	2	3	4	$\mathrm{P}(Y)$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$	
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$	
3	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	
4	$\frac{1}{4}$	0	0	0	
$\mathrm{P}(X)$					

الف $\mathrm{H}(X|Y)$ و $\mathrm{H}(Y|X)$ را حساب کنید.

ب اگر اِنتروپی، میزان ابهام باشد، نتیجه خود را از بند الف به صورت شهودی در دو سطر بیان کنید؟

ج $\mathrm{H}(Y), \mathrm{H}(X)$ و $\mathrm{H}(X, Y)$ را حساب کنید.

د با توجه با نتیجه محاسبات بند الف و ج، رابطه آنتروپی مشترک را به صورت شهودی در دو سطر بیان کنید؟

ه صحت رابطه زیر را در مورد این مساله نشان دهید.

$$\mathrm{H}(X_1, X_2, ..., X_n) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathrm{H}(X_i)$$

و اطلاعات متقابل را حساب کنید.

ز اگر X و Y را مولفه های ورودی و خروجی کانالی ارتباطی در نظر بگیریم، ظرفیت این کانال چقدر است؟

ح اگر بخواهیم اطلاعات متقابل حداقل شود(معادل اینکه ظرفیت کمینه شود)، جدول توزیع مشترک را به شرط داشتن احتمالات حاشیه ای مشابه جدول قبل، مجددا پر کنید.

$Y\backslash X$	1	2	3	4	$\mathrm{P}(Y)$
1					$\frac{1}{4}$
2					$\frac{1}{4}$
3					$\frac{1}{4}$
4					$\frac{1}{4}$
$\mathrm{P}(X)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	

ط اگر هدف بیشینه کردن آنتروپی مشترک بود، جواب قسمت قبل به چه صورت تغییر می کرد؟

ی نتیجه خود از دو قسمت قبل را با توجه به یکی از تعاریف اطلاعات متقابل که به صورت فاصله دو توزیع $\mathrm{P}(x, y)$ و $\mathrm{P}(x)\mathrm{P}(y)$ بیان می شود در حداکثر دو سطر بیان کنید.

$$\mathrm{I}(X, Y) = \mathrm{D}(\mathrm{P}(x, y)||\mathrm{P}(x)\mathrm{P}(y)) = \sum_{x,y} \mathrm{P}(x, y) \log \frac{\mathrm{P}(x, y)}{\mathrm{P}(x)\mathrm{P}(y)}$$

ک اگر بخواهیم هم آنتروپی X و هم آنتروپی مشترک حداکثر شود، جدول توزیع مشترک را به شرط داشتن احتمال حاشیه ای مشابه برای Y ، جدول را مجددا پر کنید.

$Y \backslash X$	1	2	3	4	$\mathrm{P}(Y)$
1					$\frac{1}{4}$
2					$\frac{1}{4}$
3					$\frac{1}{4}$
4					$\frac{1}{4}$
$\mathrm{P}(X)$					

ل برای جدول پر شده قسمت قبل $\mathrm{H}(X), \mathrm{H}(Y)$ و $\mathrm{H}(X, Y)$ را محاسبه کنید و با مقدار اولیه محاسبه شده در بند ج مقایسه کنید.

سوال سوم یک تاس را پرتاب می کنیم. اگر خروجی جزء پیشامد $A = \{1,2,3,4\}$ باشد، یک سکه سالم را یک بار می اندازیم. اگر جزء پیشامد $B = \{5,6\}$ باشد، سکه سالمی را دو بار می اندازیم. اطلاعات متقابل عدد خوانده شده از پرتاب تاس و تعداد خط آمدن سکه را بدست آورید.

سوال چهارم

الف ظرفیت کانالی با پهنای باند ۱۰ مگاهرتز و $SNR = 5\text{dB}$ چقدر است؟

ب اگر بخواهیم به ظرفیت 50Mbps برسیم چه مقدار SNR نیاز است؟

پروژه اول

در این پروژه از شما خواسته شده است که یک فایل صوتی را وارد نرم‌افزار MATLAB کرده، و سپس اِنتروپی آن را محاسبه کنید. بدین‌سان گام‌های زیر را برای اجرای این پروژه بردارید:

✍ **گام اول**: نرم‌افزار MATLAB را نصب بر روی سیستم‌عامل خود نصب کنید. دقت کنید که این نرم‌افزار را براحتی می‌توانید در انواع سیستم‌عامل‌ها از Windows گرفته تا Linux و macOS نصب کنید. سعی کنید نسخه جدید این نرم‌افزار را نصب کنید و یا حداقل نسخه MATLAB 2018b.

✍ **گام دوم**: یک فایل Wav. را با این نرم‌افزار بخوانید. دقت کنید که Help این نرم‌افزار واقعا کامل و جامع است. اما برای استفاده از Help آن به صورت برخط (Online) باید فیلترشکن نصب کنید و یا از شکن استفاده کنید. به عنوان مثال این صفحه را نگاه کنید. من به صورت نمونه در کد زیر این کار را انجام داده‌ام:

```
% Initialization
clc
clear

% Create WAV file in current folder .
load handel.mat
audiowrite('handel.wav',y,Fs)
clear y Fs

% Read the data back into MATLAB , and listen to audio .
[y, Fs] = audioread('handel.wav');

% Play wav file
player = audioplayer(y,Fs);
play(player);
```

✍ **گام سوم**: به سوالات زیر پاسخ دهید:

- الفبای منبع در حالت ذکر شده چیست؟ و چه تعداد است؟ راهنمایی: شما باید بگویید سمبل‌های تولید شده (y) چگونه هستند، یعنی مثلا عددهستند، صحیح هستند یا اعشاری، اگر صحیح هستند چند بیتی هستند اگر اعشاری هستند با چه دقتی (۷ ر قم اعشار یا ۱۵ رقم اعشار).
- سرعت تولید سمبل در منبع ذکرشده چه مقدار است؟ سپس توسط آن کل زمان (کل زمانی که شما صدا را می شنوید) را محاسبه بکنید. راهنمایی: خروجی Fs نشان‌دهنده مقدار سرعت منبع اطلاعات است. با داشتن تعداد سمبل‌ها و همچنین مقدار Fs به سادگی می‌توانید مقدار زمان را بدست آورید.

بیان شد که تمام سیگنال‌هایی که در طبیعت وجود دارند سیگنال‌های آنالوگ می‌باشند. به نظر شما سرچشمه همین فایل handel که در بالا آن را فراخوانی کردیم، از کجا است؟ احتمالا در ارکسری این موسیقی تولید شده و مثلا فردی به نام X آن را با یک mp3 player ضبط می‌نماید. سیگنال‌های آنالوگ تولید شده توسط ادوات ارکسر به صفحه میکروفن mp3 player آقای X برخورد می‌کند. این برخورد موجب ایجاد ارتعاشاتی می‌شود و

این ارتعاشات نیز خود تبدیل به تغیرات ولتاژ می‌شود. تغییر ولتاژ را می‌توان به صورت یک سیگنال در نظر گرفت. تا اینجا احتمالا قبول می‌کنید که با یک سیگنال آنالوگ مواجه هستم.

اگر من این سیگنال آنالوگ را توسط دستگاه ضبط صدا بر روی یک نوار کاست ضبط کنم، یک سیگنال آنالوگ را به صورت آنالوگ ذخیره نمودم. اگر نوار کاست را درون یک دستگاه پخش نوار کاست بگذارم، می‌توانم آن را پخش کنم. پس دستگاه پخش نوار کاست یک منبع اطلاعات آنالوگ هست. اما در مورد mp3 player این قضایا برقرار نیست. من نمی‌توانم مانند نوار کاست اطلاعات را به طور پیوسته ضبط کنم. چرا که در هنگام ضبط صدا در نوار کاست، نوار به صورت پیوسته می‌چرخد و اطلاعات در آن ذخیره می‌شود. پس راه کار چیست؟ راه‌کار این است که mp3 player تنها نمونه‌هایی از سیگنال آنالوگ را در حافظه خود ذخیره کند. در هنگام پخش صدا در mp3 player، در هر زمان‌های مشخصی نمونه‌های ذخیره شده به سمت بلندگو ارسال می‌شوند و صفحه بلندگو را تحریک می‌کنند.

با توجه به مطالب بیان شده، احتمالا این سوال بوجود می‌آید که به نظر می‌رسد که mp3 player در زمان‌های

مشخصی اقدام به ارسال یک نمونه به سمت بلندگو برای پخش می‌کند. به نظر باید گوش ما یک لحظه صدا را بشنود و تا زمانی که نمونه بعدی می‌آید هیچ چیز نشنود. اما اگر به همان فایل handel گوش کنید شما چنین قطعی در صدا نمی یابید. چرا؟ چرا در هنگام تماشای یک فایل ویدئویی با این که تنها ۲۰ تا ۳۰ فریم در ثانیه پخش می‌شود، ولی شما هیچ‌گونه گسستگی در فیلم مشاهده نمی‌کنید؟

✍ **گام چهارم**: فرض کنید که سمبل‌های منبع از یکدیگر مستقل هستند. هیستوگرام فایل صوتی handel را رسم کنید.

- هیستوگرام نشان‌دهنده این است که هر سمبل با چه احتمالی در فایل رخ داده است.
- در ضمن با استفاده از روابط بیان شده اِنتروپی این منبع را بدست آورید.
- با استفاده از قضیه اول شانون بگویید که این فایل را حداکثر تا چه میزان می‌توان فشرده کرد؟
- به نظر شما نتیجه بدست‌آمده معقول است؟ اگر نیست چرا؟ تحقیق کنید و ببینید آیا می‌توان به مرزهای واقعی‌تری برای فشرده‌سازی دست یافت.

✍ **گام پنجم**: کدکننده هافمن یکی انواع کدکننده‌های منبع بدون اتلاف است. در این قسمت می‌خواهیم توسط نرم‌افزار MATLAB یک کدهافمن به خروجی منبع اطلاعات خود اعمال کنیم. این کار را بر روی فایل صوتی اعمال کنید. راهنمایی: MATLAB ابزارهای مفیدی برای این کار در اختیار شما قرار داده است.

- محاسبه کنید که چه مقدار فضا برای ذخیره فایل صوتی نیاز است؟ (لطفا محاسبه کنید و با مقدار size اصلی سیگنال مقایسه کنید.)
- محاسبه کنید که برای انتقال این فایل در یک لینک مخابراتی با سرعت $64kbit/s$ چه مقدار زمان لازم است؟

نکته ۲ ما برای انتقال اطلاعات معمولا نیازمند فشرده‌سازی بیشتری می‌باشیم. لذا مجبور هستیم که به سراغ کدکننده‌های با اتلاف برویم.

✍ چند نکته تکمیلی:

- محتوای فایل‌های پروژه:

الف فایل صوتی اصلی به همراه فایل صوتی فشرده شده.

ب کدهای MATLAB

ج یک گزارش تفصیلی که در آن به تمامی سوالات مطرح شده پاسخ داده شده باشد.

- به کسانی که گزارش تحویلی آن‌ها با LaTeX باشد نمره اضافی تعلق می‌گیرد.
- حتما فایل صوای انتخابی دانشجویان با یکدیگر متفاوت باشد. حداکثر طول فایل صوتی سی ثانیه باشد.
- محل بارگذاری تمرین نیز در سایت `quera.ir` است که پیوند ارتباطی آن در گروه قرار داده خواهد شد.
- تقریبا یک هفته بعد از تحویل، از برخی از دانشجویان خواسته خواهد شد که به صورت Skype پروژه را تحویل برخط (Online) نیز دهند.

مراجع

[1] T. M. Cover and J. A. Thomas. *Elements of Information Theory*. John Wiley & Sons, 2 ed. , 2012.

فهرست اختصارات

A

ADSL . . . . Asymmetric Digital Subscriber Line

AWGN . . . . Additive white Gaussian noise

D

DMC . . . . Discrete Memoryless Channel

DSL . . . . Digital subscriber line

H

HDSL . . . . High bit-rate Digital Subscriber Line

L

LTE . . . . Long Term Evolution

P

PSTN . . . . Public Switched Telephone Network

S

SNR . . . . Signal Noise Ratio

V

VDSL . . . . Very-high-bit-rate Digital Subscriber Line

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

B

Bandwidth . . . . پهنای‌باند

Binary Entropy Function . . . تابع اِنتروپی دودویی

Binary Erasure Channel . کانال دودویی همراه با محوشدگی

Binomial Distribution . . . . توزیع دوجمله‌ای

C

Conditional Entropy . . . . انتروپی شرطی

Cryptography . . . . رمزنگاری

D

Demodulator . . . . وامدوله ساز

Detector . . . . آشکارساز

کانال گسسته بدون حافظه . Discrete Memoryless Channel

E

پیشامد . . . . Event

کدگذاری . . . . Encoding

اِنتروپی . . . . Entropy

G

تصویر خاکستری . . . . Gray Scale Image

I

مُد بیکار . . . . Idle Mode

منبع اطلاعات . . . . Information Source

نظریه اطلاعات . . . . Information Theory

J

انتروپی توام . . . . Joint Entropy

R

Random Variable . . . . متغیر تصادفی

S

Source Coding . . . . کدگذار منبع

Stochastic Process . . . . فرایند تصادفی

U

User . . . . کاربر

M

Memoryless . . . . بی‌حافظگی

Mutual Information . . . . اطلاعات متقابل

Modulation . . . . مدولاسیون

Modulator . . . . مدوله‌کننده

O

Online . . . . برخط

Operating System . . . . سیستم‌عامل

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

ا

آشکارساز .... Detector

اطلاعات متقابل .... Mutual Information

اِنتروپی .... Entropy

انتروپی توام .... Joint Entropy

انتروپی شرطی .... Conditional Entropy

ب

برخط .... Online

بی‌حافظگی .... Memoryless

پ

پهنای‌باند .... Bandwidth

پیشامد .... Event

ت

تابع اِنتروپی دودویی . . . Binary Entropy Function

تصویر خاکستری . . . . Gray Scale Image

توزیع دوجمله‌ای . . . . Binomial Distribution

ر

رمزنگاری . . . . Cryptography

س

سیستم‌عامل . . . . Operating System

ف

فرایند تصادفی . . . . Stochastic Process

ک

کاربر . . . . User

کانال دودویی همراه با محوشدگی . Binary Erasure Channel

کانال گسسته بدون حافظه . Discrete Memoryless Channel

کدگذار منبع . . . . Source Coding

کدگذاری . . . . Encoding

م

متغیر تصادفی . . . . Random Variable

مُد بیکار . . . . Idle Mode

مدولاسیون . . . . Modulation

مدوله‌کننده . . . . Modulator

منبع اطلاعات . . . . Information Source

ن

نظریه اطلاعات . . . . Information Theory

و

وامدوله ساز . . . . Demodulator