

Ley de Titius-Bode en exoplanetas

Introducción

La Ley de Titius-Bode (a veces conocida como ley de Bode) surgió hace dos siglos cuando algunos astrónomos se dieron cuenta de que la distancia de los planetas al sol se podía relacionar con su posición mediante la expresión:

$$d = (3 \cdot n + 4) / 10$$

Donde d es la distancia del planeta al sol expresada en unidades astronómicas¹ y n es 0,1,2,4,8,16... 0 para Mercurio, 1 para Venus, etc.

Planeta	Posición (n)	Distancia Bode(d)	Distancia real
Mercurio	0	0,4	0,387
Venus	1	0,7	0,723
Tierra	2	1	1
Marte	4	1,6	1,523

Como se puede comprobar aplicando esta fórmula se puede aproximar con sorprendente precisión el radio orbital medio de un planeta. Si esta ley es una casualidad o tiene algún significado sigue siendo objeto de debate.

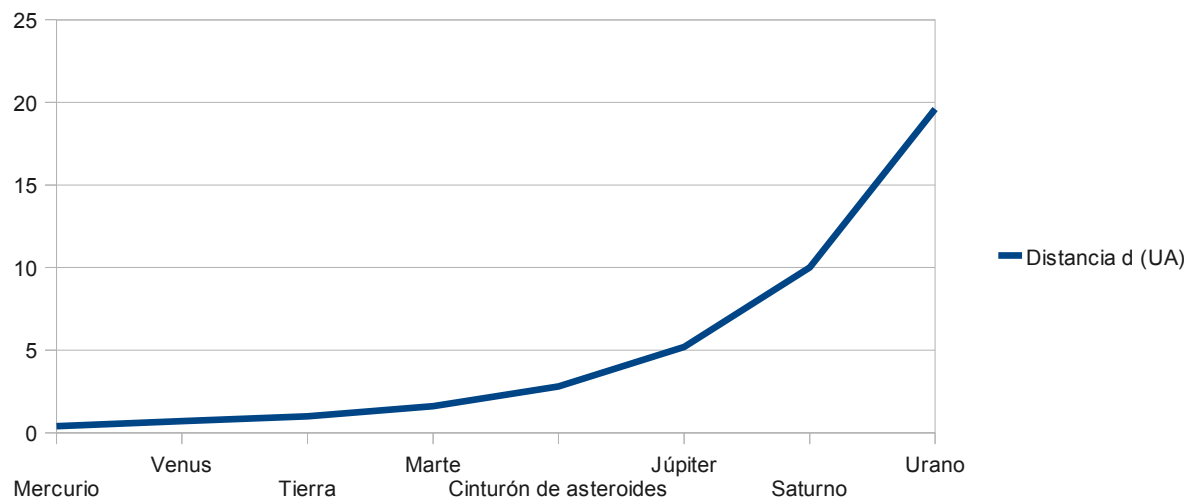
Cuando la ley se descubrió se sabía de la existencia de Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno, cuando más tarde se descubrió Urano muy cerca de la posición que predecía la ley esta tomó importancia y se empezó a buscar un hipotético planeta entre Marte y Júpiter que la ley predecía pero no se conocía.

Planeta	Posición (n)	Distancia Bode(d)	Distancia real
Mercurio	0	0,4	0,387
Venus	1	0,7	0,723
Tierra	2	1	1
Marte	4	1,6	1,523
?	8	2,8	2,767
Júpiter	16	5,2	5,203
Saturno	32	10	9,539
Urano	64	19,6	19,184

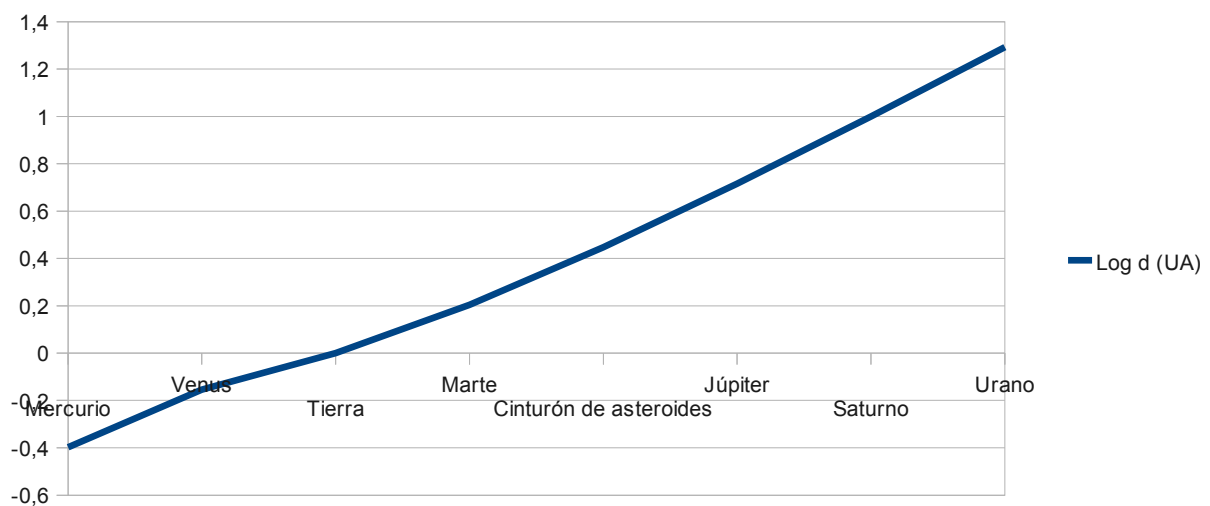
Fue así como se descubrió Ceres, el objeto principal del cinturón de asteroides, que se encuentra justo en esa posición.

Como se puede demostrar matemáticamente, esta ley implica que la posición de los planetas sigue una función exponencial.

¹ Una Unidad Astronómica (UA) es la distancia media entre la tierra y sol, equivale a unos 150 millones de kilómetros



Podemos por tanto expresar la posición de los planetas en una recta donde la y es logaritmo de la distancia.



De esta forma tenemos:

$$\log d = mx + n$$

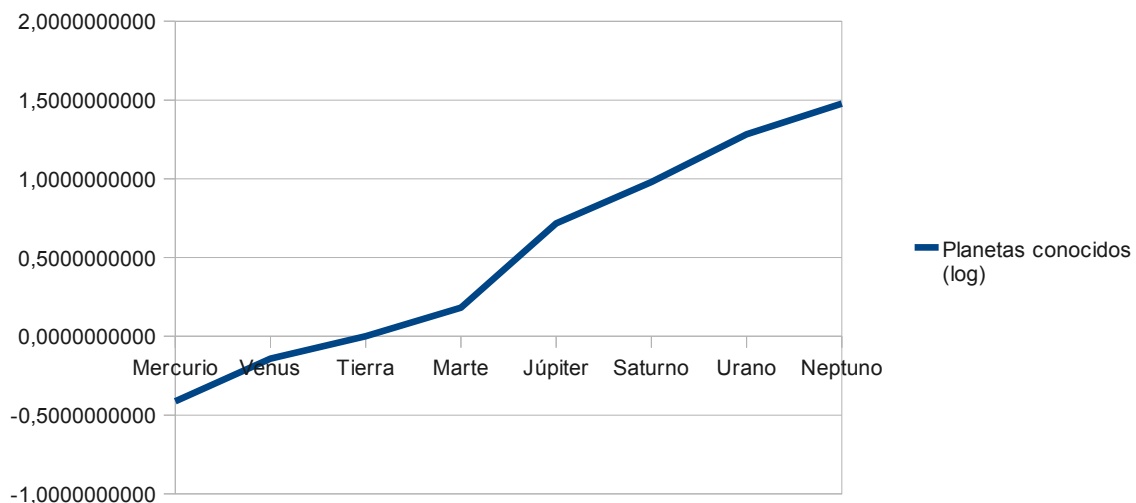
Una formulación más avanzada y manejable de la ley de Titius-Bode donde x es la posición del planeta (1,2,3...). Las variables m y n adoptan valores concretos para cada sistema de planetas.

En este trabajo analizo otros sistemas estelares de los que se conocen varios exoplanetas (planetas orbitando otra estrella) para comprobar si cumplen esta ley e incluso si es posible predecir exoplanetas que no conocemos igual que en el sistema solar se pudo predecir la posición del cinturón de asteroides.

Metodología

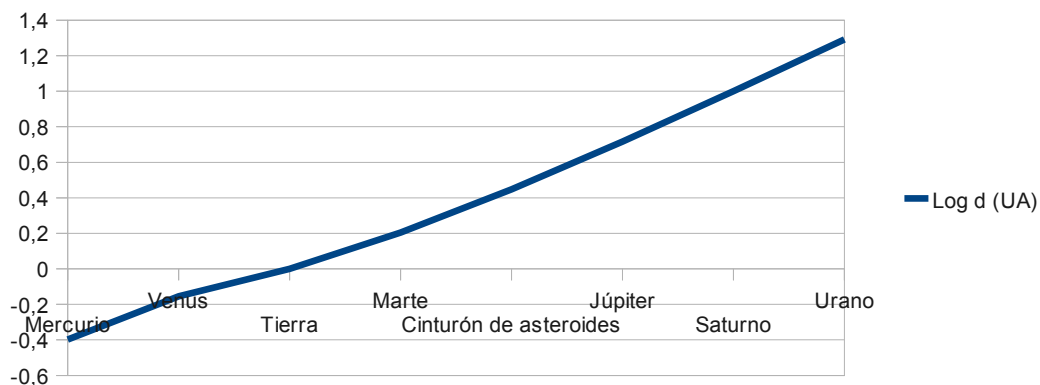
Para facilitar el análisis de los sistemas planetarios se crea un programa en sage, un sistema de cómputo de código libre basado en python. Este programa toma un sistema planetario dado por la posición de sus planetas y calcula el mejor valor para las variables m y n . Hecho esto el programa calcula el error medio para poder saber cómo de significativo es el resultado. Si se sospecha de la existencia de un planeta desconocido se le puede indicar al algoritmo para que calcule esa posibilidad aunque no se sepa la posición del planeta. El código fuente del programa está en el apéndice.

También se dibuja la gráfica de $y=mx+n$ para ver si el resultado se acerca a una recta (en cuyo caso cumple la ley de Titius-Bode) o no. Puede ocurrir que el sistema planetario se adapte a la ley de Titius-Bode pero se desconozca un planeta (Como ocurrió con el cinturón de asteroides). Este caso se reconoce no sólo porque el error medio dado por el programa es alto, sino porque la gráfica presenta un salto en la posición donde debería estar el hipotético planeta.



Este gráfico muestra el sistema solar cuando no se tiene en cuenta el cinturón de asteroides. Vemos un salto entre Marte y Júpiter, lo que indica que ahí debe haber un planeta para que se cumpla la ley. Por otro lado, el programa de análisis muestra un error medio del 17%.

Si ponemos un supuesto planeta entre Marte y Júpiter el programa da un error de 9,5% y la gráfica es casi una recta.

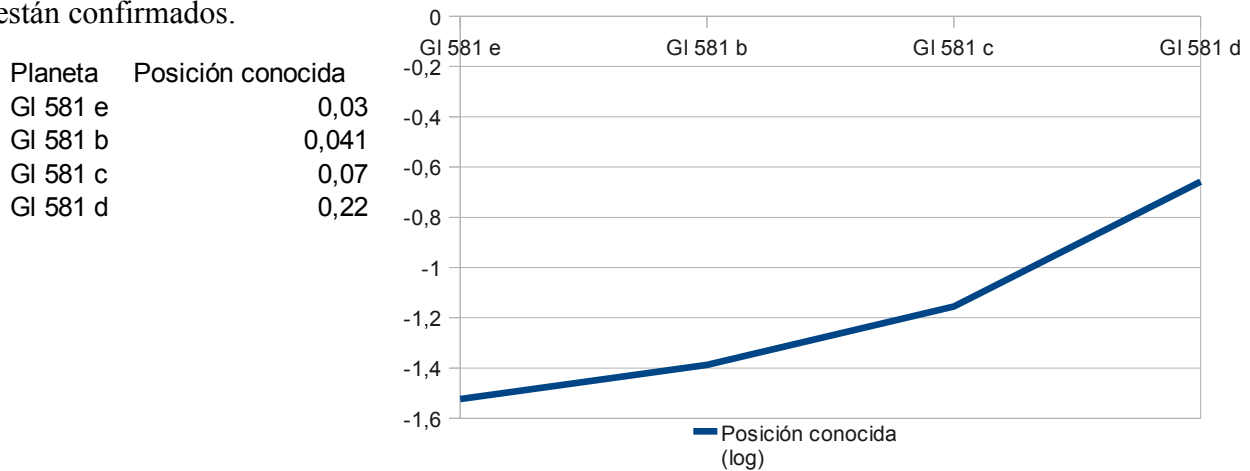


La información sobre los exoplanetas usada en los cálculos ha sido tomada de la enciclopedia de los planetas extrasolares, de Jean Schneider (<http://exoplanet.eu/catalog-all.php>)

Análisis

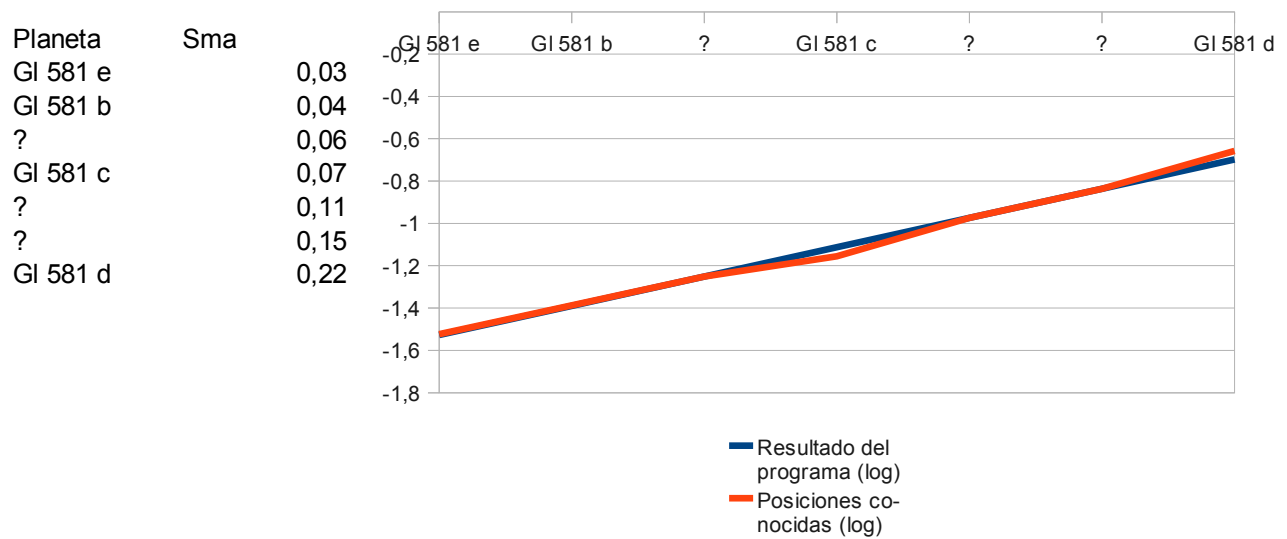
Gliese 581

Es una estrella enana roja de clase espectral M que se encuentra a unos 20 años luz en la constelación de Libra. Sus 4 planetas conocidos forman uno de los sistemas planetarios más grandes que conocemos actualmente. En Septiembre del año pasado se anunció el descubrimiento de dos nuevos planetas e Gliese 581 que han sido muy discutidos, se considera que estos dos planetas no están confirmados.



En la gráfica vemos que este sistema no se ajusta a la ley de Titius-Bode y el error es mayor del 18%.

Añadiendo 3 planetas el error desciende hasta el 5% y la gráfica se ajusta bien a la ley.



Con esta configuración los valores de m y n son:

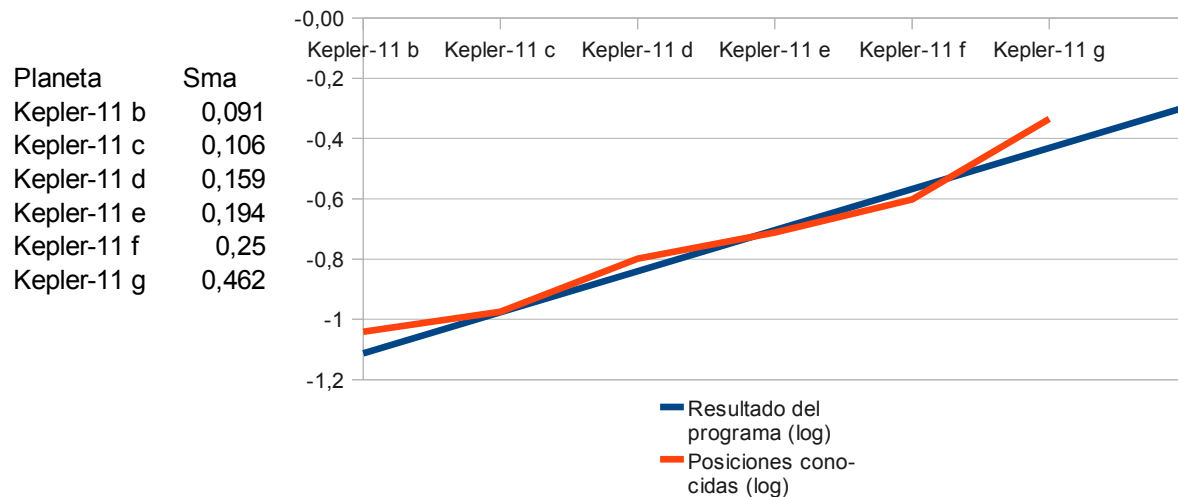
$$m=0,138$$

$$n=-1,666$$

Los 4 planetas confirmados de Gliese 581 no cumplen la ley de Bode, pero basta con colocar 3 planetas que podrían no haberse descubierto para que el sistema cumpla la ley muy bien. En cuanto a los dos planetas no confirmados, se supone que Gliese 581 g está a 0,146 UA, por lo que podría perfectamente ser el que aquí se predice que estaría en el sexto puesto. Por su parte, Gliese 581 f se supone que está a 0,758 UA, lo que encajaría con un error del 6% en el puesto once.

Kepler 11

Se convirtió el pasado 2 de Febrero en una de las estrellas con más planetas conocidos a su alrededor cuando se anunciaron los descubrimientos del telescopio Kepler de la NASA, dedicado a buscar planetas extrasolares por el método del tránsito.



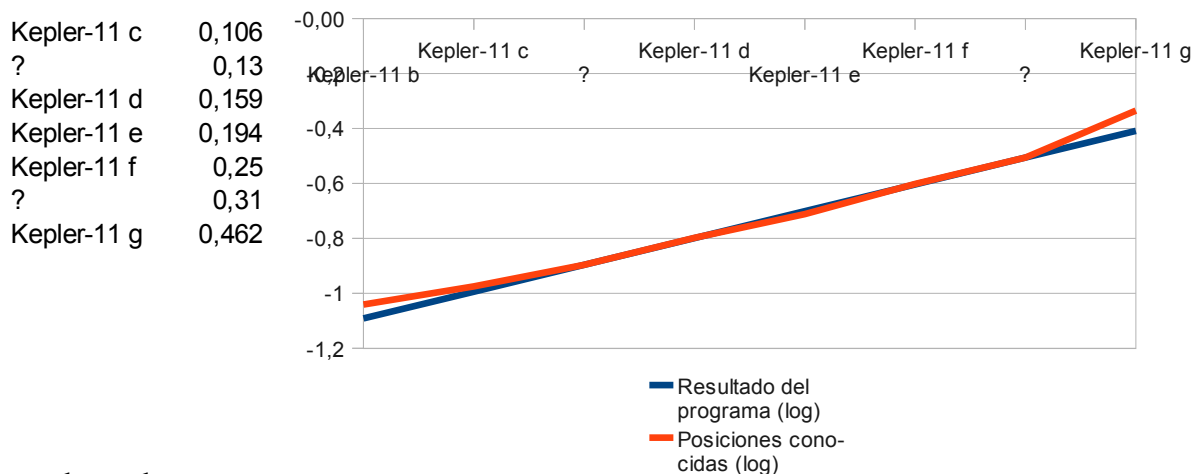
Este sistema se ajusta a la ley de Bode con un error de sólo el 9%. Con esta configuración los valores de m y n son:

$$m=0,136$$

$$n=-1,129$$

Existen otras dos configuraciones que disminuyen el error medio.

La primera consiste en colocar un planeta entre c y d y otro entre f y g . El error se reduce al 5,5%

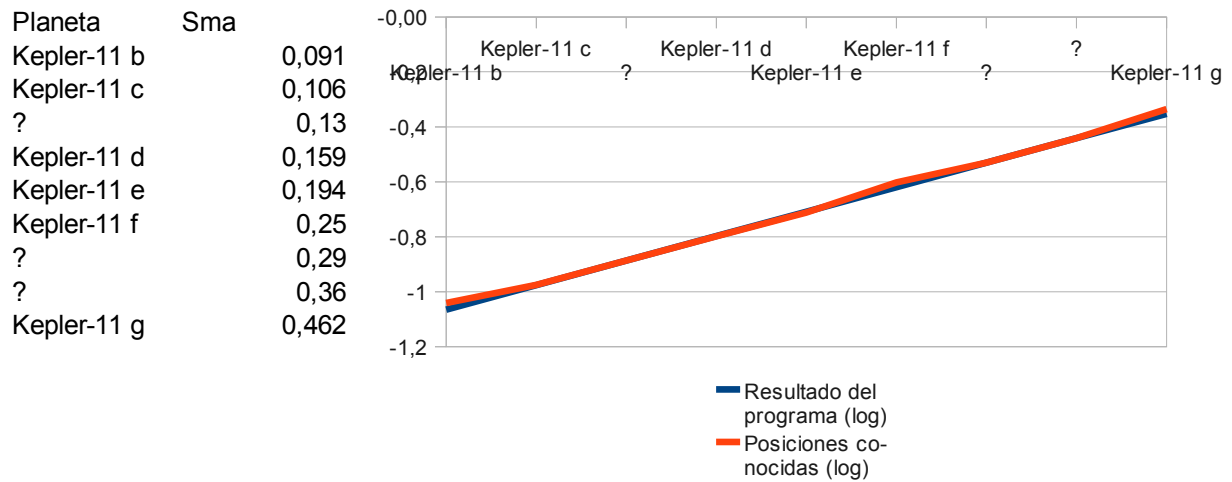


Los valores de m y n son:

$$m=0,098$$

$$n=-1,19$$

Otra configuración que se ajusta más a la ley de Bode pero es más improbable es igual que la anterior pero con no uno, sino 2 planetas entre f y g. El error medio de esta configuración es de sólo un 2,3%



Los valores de m y n son:

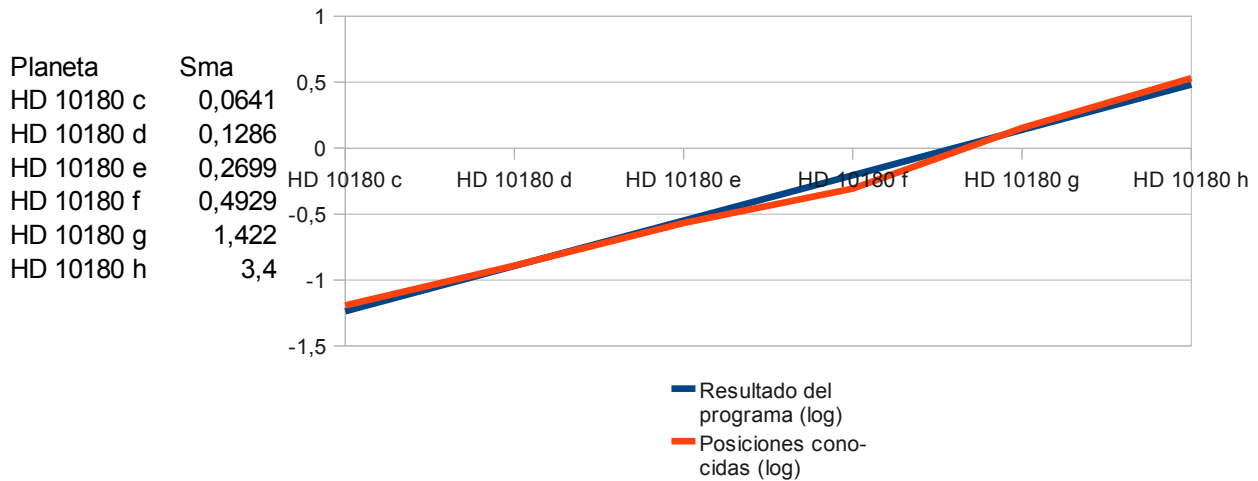
$$m=0,089$$

$$n=-1,154$$

Parece que los planetas de esta estrella cumplen bien la ley de Bode. La configuración que incluye dos planetas adicionales parece bastante realista, es menos probable que se dé la configuración de los tres planetas adicionales.

HD 10180

El ESO (European Southern Observatory) anunció el pasado mes de Agosto el descubrimiento de un sistema planetario en torno a esta estrella. En el anuncio ya se dice que este sistema parece cumplir la ley de Titius-Bode².



Esta configuración se ajusta a la ley de Titius-Bode con un error del 8%. Los valores de m y n son:

$$m=0,348$$

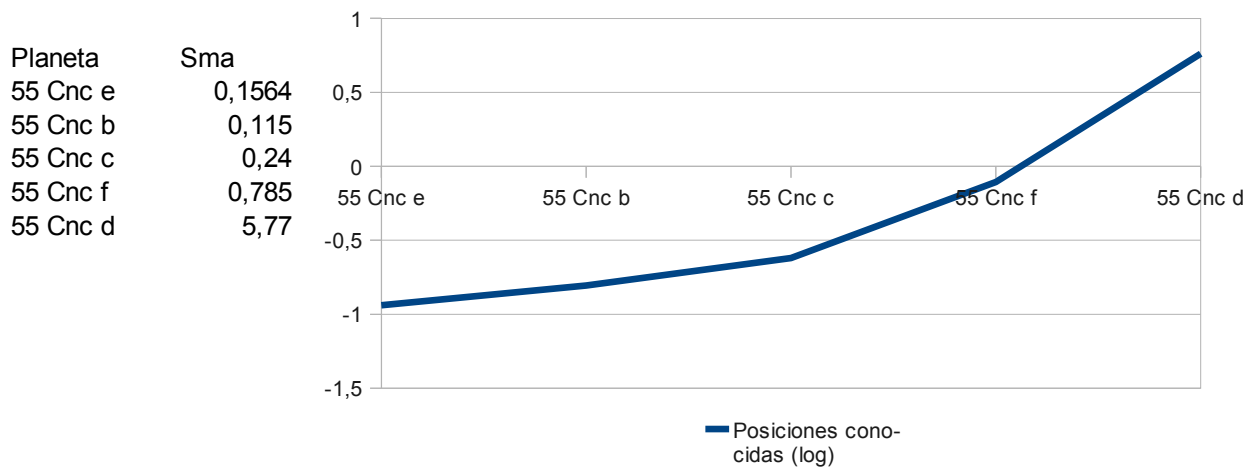
$$n=-1,587$$

Este sistema planetario se ajusta muy bien a la ley de Titius-Bode sin necesidad de suponer nuevos planetas.

² <http://www.eso.org/public/news/eso1035/#4>

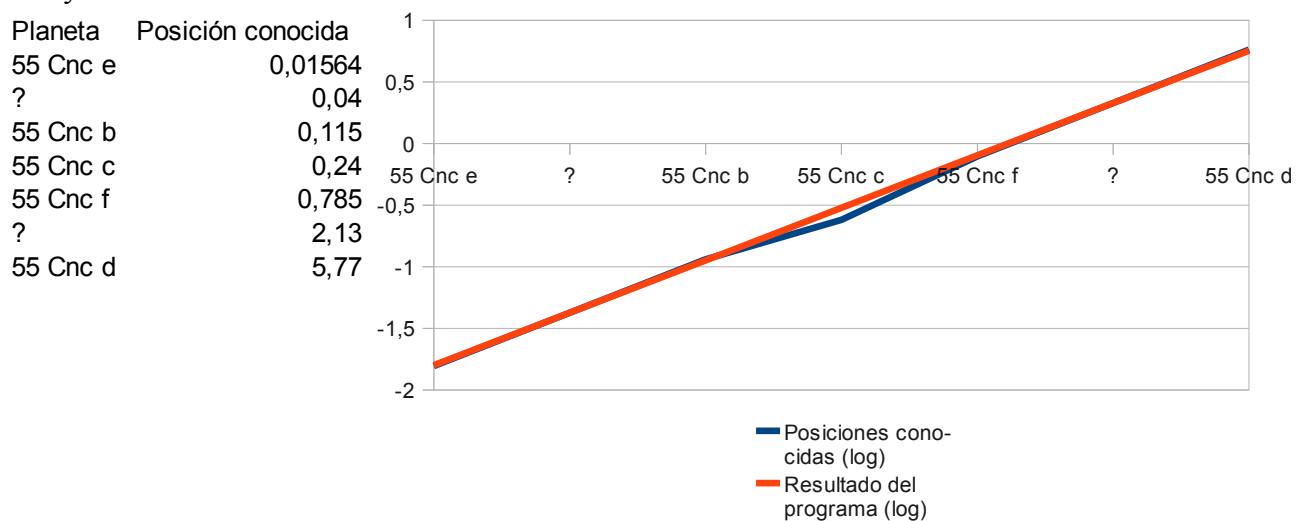
55 Cnc

Esta estrella está a 41 años luz en la constelación de Cáncer y fue la primera en la que se descubrió un sistema de más de 4 planetas.



El error de esta configuración es del 21,8% y en la gráfica se ven saltos.

Colocando otros dos planetas, entre e y b y entre f y d, se consigue un error de sólo el 6% respecto a la ley de Bode



En esta configuración los valores de m y n son:

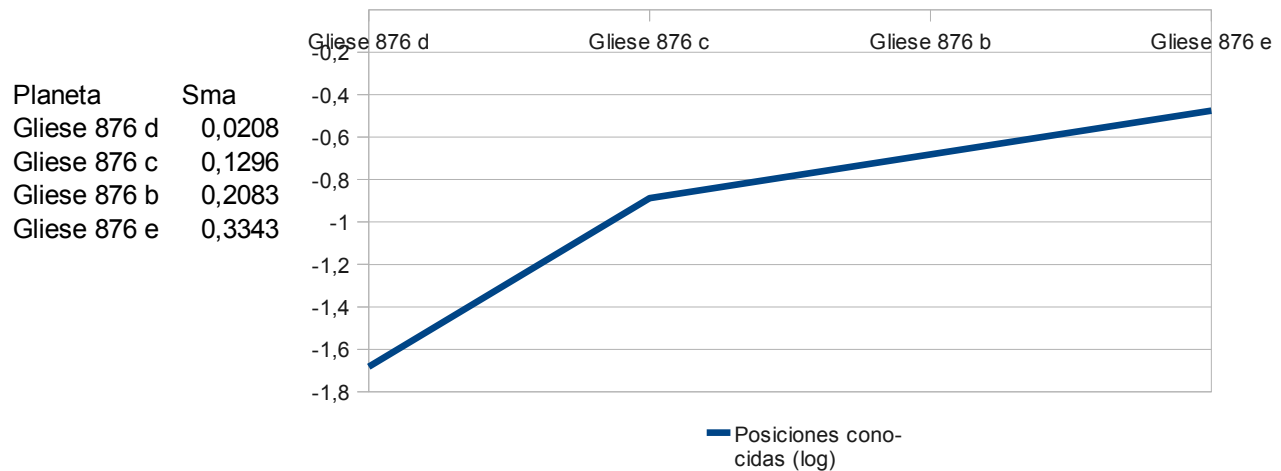
$$m=0,425$$

$$n=-2,223$$

55 Cnc no cumple la ley de Bode con los planetas que se conocen actualmente, pero si existen los dos planetas adicionales de la configuración propuesta la cumple con muy poco margen de error.

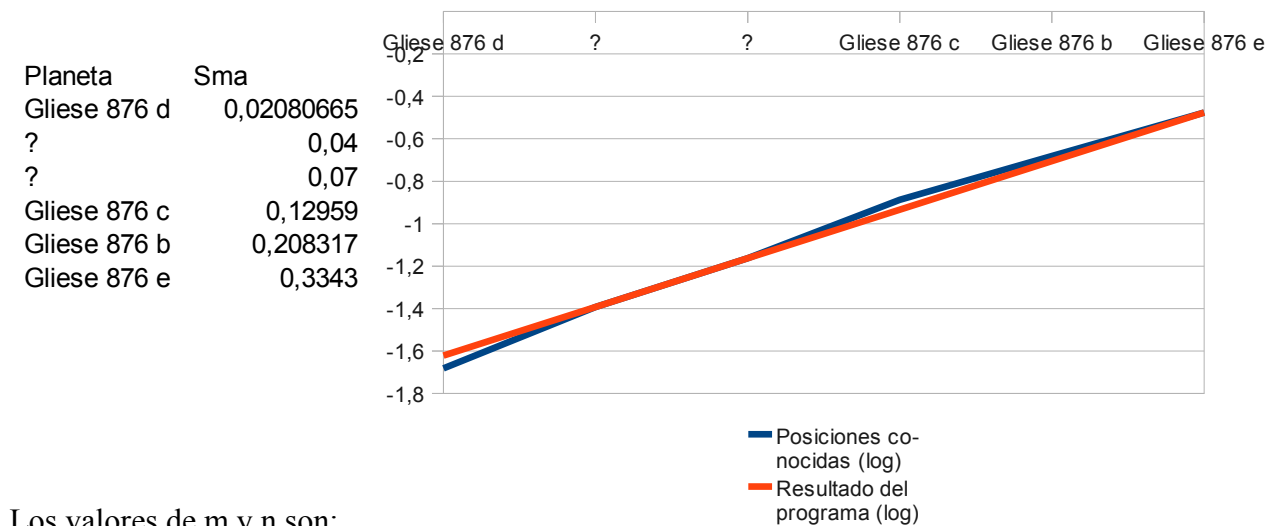
Gliese 876

Es una estrella de clase espectral M situada a 15,3 años luz en la constelación de Acuario. Se conocen 4 exoplanetas que la orbitan.



El error de esta configuración de más del 25%, pero en el gráfico se ve que mientras los planetas c,b y e están perfectamente alineados hay un salto entre d y c.

Si se colocan dos planetas entre d y c el error disminuye hasta el 7,6%

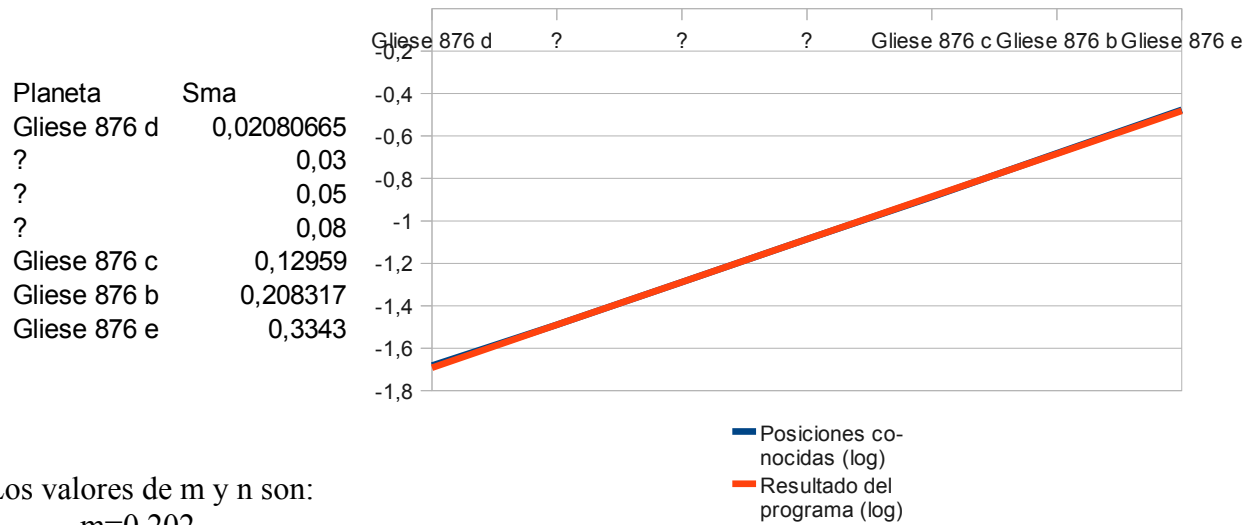


Los valores de m y n son:

$$m=0,229$$

$$n=-1,85$$

Otra posibilidad es colocar otro planeta más entre d y c. Este es un escenario menos probable que reduciría el error al 1%



Los planetas c, b, y e cumplen perfectamente la ley de Titius-Bode, d también la cumple si existen otros dos o tres planetas entre medias.

Conclusiones

De los 5 sistemas planetarios analizados dos se adaptan a la ley de Titius-Bode tal y como los conocemos actualmente: Kepler 11 y HD 10180. En el caso de Kepler 11 la existencia de planetas adicionales supondría un mejor ajuste.

En el caso de Gliese 876, de los 4 planetas que conocemos 3 se ajustan perfectamente a la ley de Bode, por lo que probablemente existan otros dos o tres planetas en ese sistema y entre todos se ajusten bien a la ley.

Gliese 581 y 55 Cnc pueden dar lugar a dudas, pero la existencia de algunos planetas por ahora desconocidos podría despejarlas. En el caso de Gliese 581 dos de esos planetas podrían haber sido descubiertos ya.

Apéndice: Código del programa

```
#Lista de semiejes mayores. El primer item de la matriz no se usa en los cálculos para simplificar el programa, puede tomar cualquier valor. Los planetas empiezan en el segundo item.
#Si no se conoce la posición de un planeta en su lugar se escribe "X", por ejemplo si no conocemos la posición del cinturón de asteroides pondremos:
Planeta=[0,0.387,0.723,1,1.523,"X",5.203,9.539,19.184,30.06]
Planeta=[0,0.387,0.723,1,1.523,2.767,5.203,9.539,19.184,30.06]

#Número de planetas
Nplanetas=9

#Buscar la inclinación de la recta (mx+n)
#Se calcula la inclinación entre cada punto de la gráfica y luego se hace la media
i=Nplanetas
u=0
total=0
while i>0:
    o=i-1
    while Planeta[o]=="X":
        o=o-1

    while o>0:
        total=total+(log(Planeta[i],10)-log(Planeta[o],10))/(i-o)
        u=u+1
        o=o-1
        while Planeta[o]=="X":
            o=o-1

    i=i-1

    while Planeta[i]=="X":
        i=i-1

m=total/u #La pendiente de la recta

#Para buscar el valor de n he probado varios sistemas y aparentemente el que mejores resultados da es el de ir probando valores hasta llegar al mayor rendimiento
```

```
n=0
errorf=100
continuar=1

while continuar==1:

    #Ejecutar la ley de bode con todos los planetas y calcular el
error medio.
    i=1
    u=0
    errorm=0

    while i<=Nplanetas:
        while Planeta[i]=="X":
            i=i+1

        Bode=10^(m*i+n)
        error=abs(Planeta[i]-Bode)/Planeta[i]*100
        errorm=errorm+error
        u=u+1
        i=i+1

    errorm=errorm/u
    if errorm<100:
        if errorm<errorf: #Si este valor de n mejora los
resultados del anterior se acepta
            errorf=errorm
        else: #Si por el contrario este valor de n los empeora
significa que ya hemos llegado a la mejor solución
            continuar=0

    n=n-0.001

#Imprimimos los datos
print(m)
print(n)
print(errorf)
```