Unit 1

옵션pricing Ⅱ

9주차. 파생상품 Ⅱ

학습 내용

- EMM Approach

학습 목표

- 다양한 옵션 pricing formula를 이해하고 설명할 수 있다.

옵션 Pricing

EMM Approach

Equivalent Martingale Measure Approach

상대가격 체계는 Martingale임을 활용한 Pricing

- 수학적 근거를 제공
- Pricing Theory분야에서 중요한 부분

옵션 Pricing

EMM Approach

Equivalent Martingale Measure Approach

모든 자산의 가격 체계를 **상대가격 체계**로 변경

Numeraire

- 0이 아닌 모든 자산 가능
- 콜옵션의 경우 만기시점의 downstate의 payoff가 0이므로 불가
- 통상 무위험자산으로 선택

옵션 Pricing

EMM Probabilities

1 ——— $(1+r)^s$

t t+s

Risk-free Asset

$S_t \xrightarrow{P_u} S^u_{t+s}$

$S_t \xrightarrow{P_d} S^d_{t+s}$

Stock

$\boxed{\dfrac{S_t}{1}} \xrightarrow{q} \dfrac{S^u_{t+s}}{(1+r)^s}$

$\boxed{\dfrac{S_t}{1}} \xrightarrow{1-q} \dfrac{S^d_{t+s}}{(1+r)^s}$

" Martingale "

- 상대가격 체계의 Conditional Expectation을 취하면 현재 Observation

옵션 Pricing

EMM Probabilities

EMM Q probabilities

$$\boxed{\frac{S_t}{1}} = \boxed{q} \times \frac{S_{t+s}^{u}}{(1+r)^s} + \boxed{(1 - q)} \times \frac{S_{t+s}^{d}}{(1+r)^s}$$

- 현재 시점에서의 Conditional Expectation

" Martingale "

옵션 Pricing

EMM Probabilities

EMM Q probabilities

u와 d라는 **Growth rate**을 Define

$$(1+\mathrm{r})^s = q\frac{S_{t+s}^u}{S_t} + (1 - q)\frac{S_{t+s}^d}{S_t}$$

*Growth Rate : 조수익률(통상 1+net 수익률)

옵션 Pricing

EMM Probabilities

EMM Q probabilities

$$(1+r)^s = qu_s + (1-q)d_s$$

무위험자산의
Growth Return

주식의
Growth Return

옵션 Pricing

EMM Probabilities

q → Risk-neutral probabilities (위험 중립 확률)

- Finance에서 위험 자산의 수익률 ≠ 무형자산의 수익률 (위험자산의 기대수익률이 더 높음)
- 예외적으로, Q확률은 위험자산의 수익률과 무형자산의 수익률이 같음

옵션 Pricing

EMM Probabilities

EMM Q probabilities

$$q = \frac{\boxed{(1+r)^{s} - d_s}}{\boxed{u_s - d_s}}$$

- 무위험자산과 위험자산의 Growth Return을 가지고 q 도출

옵션 Pricing

EMM Probabilities

Risk-neutral probabilities measure는 EMM 확률의 아주 특별한 경우에만 명명

Numeraire가 **무위험자산**일 때

- Numeraire가 주식일 경우 Risk-neutral probabilities라고 칭하지 않음
- 대부분 Numeraire를 무위험자산으로 사용하여 단어 혼용

엄밀하게 Risk neutral 확률과 EMM 확률은 서로 다르다!

옵션 Pricing

EMM Probabilities

EMM Q probabilities

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large]
 & \frac{500}{1.05} \\
\frac{400}{1} \arrow[ur, "q"] \arrow[dr, "1-q"'] & \\
 & \frac{350}{1.05}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=large]
 & \frac{100}{1.05} \\
\frac{c}{1} \arrow[ur, "q"] \arrow[dr, "1-q"'] & \\
 & \frac{0}{1.05}
\end{tikzcd}
$$

$$\frac{400}{1} = q\,\frac{500}{1.05} + (1-q)\,\frac{350}{1.05}$$

$$q = 0.4667$$

옵션 Pricing

EMM Approach

무위험자산과 콜옵션의 상대가격 체계 적용

- 콜옵션에도 동일하게 q 적용
- Numeraire와 q확률은 1:1 매칭이 가능하기 때문에

옵션 Pricing

EMM Approach

콜옵션의 상대가격 체계 적용

$$\begin{tikzcd} & \frac{500}{1.05} \\ \frac{400}{1} \arrow[ur, "q"] \arrow[dr, "1-q"'] & \\ & \frac{350}{1.05} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \frac{100}{1.05} \\ \frac{c}{1} \arrow[ur, "q"] \arrow[dr, "1-q"'] & \\ & \frac{0}{1.05} \end{tikzcd}$$

$$\frac{c}{1} = 0.4667 \times \frac{100}{1.05} + 0.4444 \times \frac{0}{1.05}$$

$$\mathrm{c} = 44.4444$$

복제 portfolio 경우와 **동일**

옵션 Pricing

EMM Approach

주식이 Numeraire인 경우

$$\frac{1}{400} = q\,\frac{1.05}{500} + (1-q)\,\frac{1.05}{350}$$

$$q = 0.5556$$

옵션 Pricing

EMM Approach

주식과 콜옵션의 상대가격 체계 적용

$$\frac{c}{400} = 0.5556 \times \frac{100}{500} + 0.4444 \times \frac{0}{350}$$

$$c = 44.4444$$

옵션 Pricing

☑ EMM Approach

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & \frac{100}{1.05} \\
\frac{c}{1} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & \frac{0}{1.05}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & \frac{500}{1.05} \\
\frac{\boxed{400}}{1} \arrow[ur, "q"] \arrow[dr, "1-q"'] & \\
 & \frac{350}{1.05}
\end{tikzcd}
$$

위와 동일한 경우의 기초자산을 이용해
풋옵션 가격 도출

$$\frac{p}{400} = 0.5556 \times \frac{0}{500} + 0.4444 \times \frac{50}{350}$$

$$\mathrm{p} = 25.3968$$

옵션 Pricing

Arrow-Debreu State Price Approach

Arrow-Debreu State Price Approach

Arrow와 Debreu가 발견(1950년대)

- State Price가 존재한다는 이론
- State가 2개면 자산은 3개 필요
  - state = n개, 자산 = n+1개

옵션 Pricing

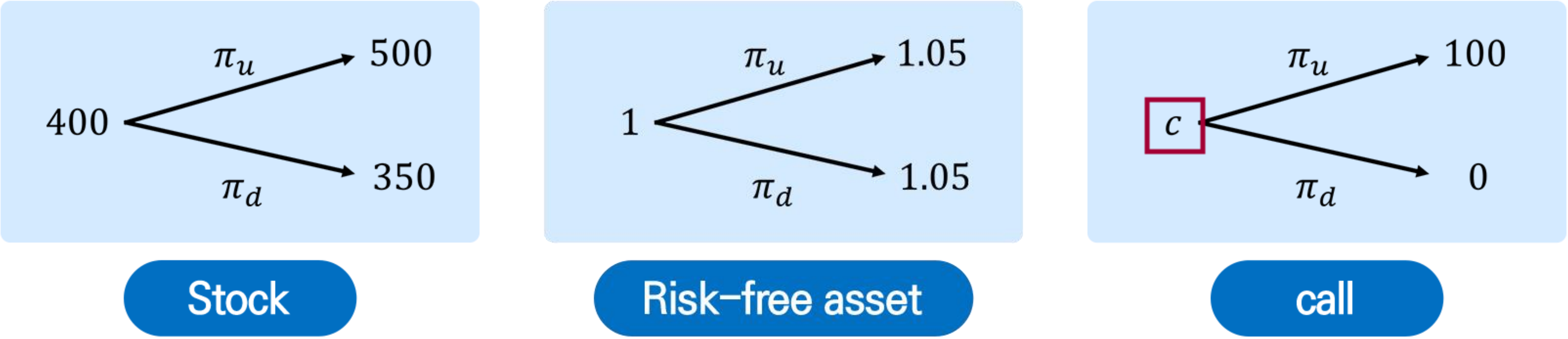
Arrow-Debreu State Price Approach

Upstate의 Price → π_u

Downstate의 Price → π_d

옵션 Pricing

Arrow-Debreu State Price Approach



$$1 = \pi_u \times 1.05 + \pi_d \times 1.05$$

옵션 Pricing

Arrow-Debreu State Price Approach

Stock	$400 = \pi_u \times 500 + \pi_d \times 350$
Risk-free asset	$1 = \pi_u \times 1.05 + \pi_d \times 1.05$
call	$c = \pi_u \times 100 + \pi_d \times 0 = 44.4444$

$$\pi_u = 0.4444$$
$$\pi_d = 0.5079$$
$$c = \pi_u \times 100 + \pi_d \times 0 = 44.4444$$

옵션 Pricing

Arrow–Debreu State Price Approach

π_u 와 π_d 를 합쳐도 1이 안됨 → State Price

State Price

확률 + 할인계수

옵션 Pricing

Arrow-Debreu State Price Approach

Arrow-Debreu State Price Approach

- Insurance를 이해하는데 매우 편리한 개념
- 실제 알고리즘 트레이딩이나 Finance 분야에서는 활용되지 않음

옵션 Pricing

옵션 Pricing의 중요성

Pricing Formula가 왜 중요할까

Finance의 핵심기술

" Pricing "

옵션 Pricing

옵션 Pricing의 중요성

Pricing의 중요성

1. Finance 분야의 상품과 서비스는 Pricing을 기초로 생산과 거래
2. 알고리즘이나 머신러닝의 핵심내용은 Pricing Formula에서 출발

- 파생상품의 옵션 Pricing Formula
  :이론과 실제가 매우 흡사한 아주 중요한 Formula

Pricing Theory를 이해하는 것은 **알고리즘 트레이딩에서 핵심 기술**을 아는 것과 동일

옵션 Pricing

Put-call Parity

Put-call Parity

동일한 기초자산, 만기, 행사가격을 가진
European 풋, 콜옵션에 대해서 성립하는 관계

$$C_t - P_t = S_t - \frac{K}{(1+r)^{T-t}}$$

- C : 콜옵션 가격
- P : 풋옵션 가격
- S_t : 기초자산 가격
- K : 행사가격
- r : Risk-free asset

옵션 Pricing

Put-call Parity

기초자산 매수
(Long position)

$$\boxed{C_t - P_t} = \boxed{S_t} - \boxed{\frac{K}{(1+r)^{T-t}}}$$

콜옵션 1개 매수(Long position)
풋옵션 1개 매도(Short position)

무위험자산의 매도
(Short position)

옵션 Pricing

☑ Put-call Parity

Forward contract의 Payoff를 현재시점으로 가져오기

Martingale Measure

$S_T \rightarrow S_t$

$K \rightarrow \dfrac{K}{(1+r)^{T-t}}$

옵션 Pricing

Put-call Parity

$$S_T - K \quad \Rightarrow \quad S_t - \frac{K}{(1+r)^{T-t}}$$

➤ 선물 매수 포지션의 현재가치

$$C_t - P_t = S_t - \frac{K}{(1+r)^{T-t}}$$

“ 콜옵션을 사고 풋옵션을 파는 것은
선물을 사는 것과 같다. ”

옵션 Pricing

Put-call Parity

Put-call Parity의 **주의사항**

1. European 옵션에 해당
2. 복제된 선물,선도는 가상적인 선물이나 선도를 의미
   - 실제 선물,선도의 가격은 0인데 복제 선물, 선도는 c-p를 만족하도록 정해짐

옵션 Pricing

Put-call Parity

$$C_t - P_t = S_t - \frac{K}{(1+r)^{T-t}}$$

$$C_t - P_t = 44.4444 - 25.3968 = 19.0476$$

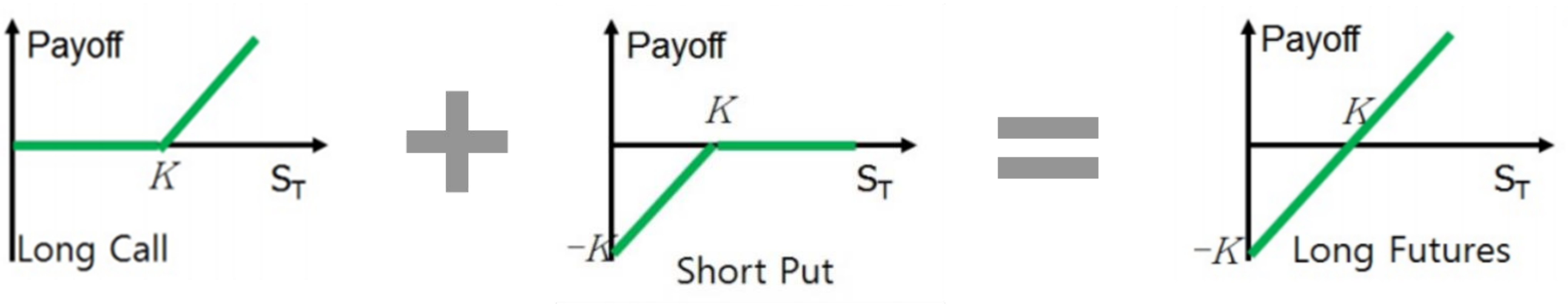
$$\Leftrightarrow$$

$$S_t - \frac{K}{(1+r)^{(T-t)}} = 400 - \frac{400}{1.05} = 19.0476$$

옵션 Pricing

Put-call Parity

Put-call Parity를 만기시점의 payoff로 다시 증명



미래시점과 현재시점 모두 Put-call Parity 성립

옵션 Pricing

Put-call Parity

복제 → 풋옵션과 콜옵션을 이용해 복제

- 복제가 다양하게 일어날 수 있음
- 투자전략에 활용 가능
- 복제전략 활용시 알고리즘 투자전략이 풍부해지고 다양해짐

옵션 Pricing

Put-call Parity

Put-call Parity = Equality

equality 관계를 벗어나게 되면
Arbitrage발생

옵션 Pricing

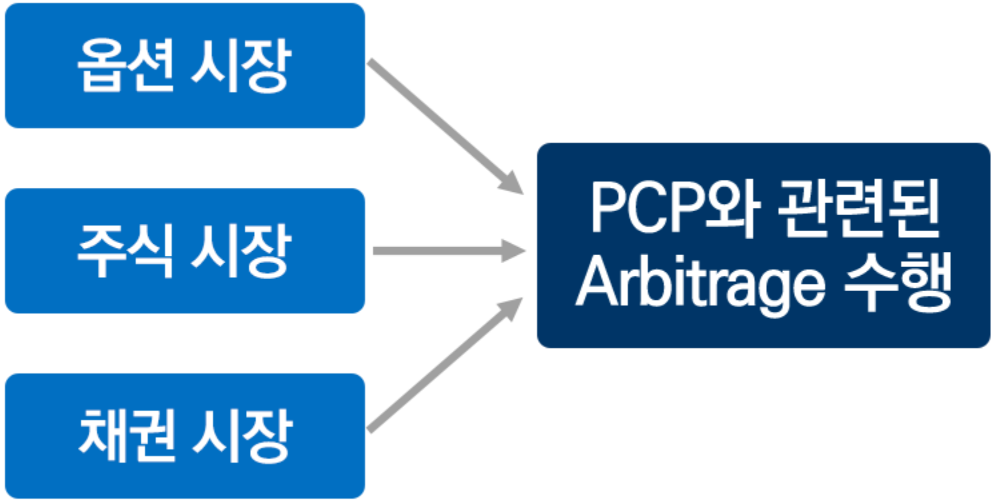
Put-call Parity

$$C_t - P_t > S_t - \frac{K}{(1+r)^{T-t}}$$

Transaction	#security	Cash flows	
		t	T
Buy Stock Sell Bond Sell Call Buy Put	1 $-\frac{K}{(1+r)^{T-t}}$ -1 1	$-S_t$ $\frac{K}{(1+r)^{T-t}}$ C_t $-P_t$	S_T $-K$ $\min\{K - S_T, 0\}$ $\max\{K - S_T, 0\}$
Total sum		$\boxed{C_t - P_t - S_t + \frac{K}{(1+r)^{T-t}} > 0}$	0

옵션 Pricing

Put-call Parity



옵션 Pricing

Put-call Parity

현선물 Arbitrage 전략

- Cost of carry에 따른 현선물간의 가격 차이로 Arbitrage 발생
- 많은 투자자들의 참여로 가격 차이 존재시간이 줄어듦

옵션 Pricing

Put-call Parity

Put-call Parity Arbitrage 전략

- 세 개의 시장(옵션,주식,채권)을 **동시에 활용**하는 Arbitrage 전략
- 알고리즘 트레이딩에서 활용 가능

각 시장의 미시구조를 알고 있어야 한다!

- 미시시장 구조상 발생할 수 있는 거래비용을 감안하면 arbitrage를 안하는 것이 이득일 수 있음

옵션 Pricing

Put-call Parity

Put-call Parity에서
Equality가 벗어나면
Arbitrage전략이 있음

옵션 Pricing

등식이 성립할 때

- Arrow-Debreu State Price approach
- Put-call parity

등식이 성립하지 않을 때

- arbitrage전략