시계열 분석 기법과 응용

Week 5. ARCH/GARCH 모형

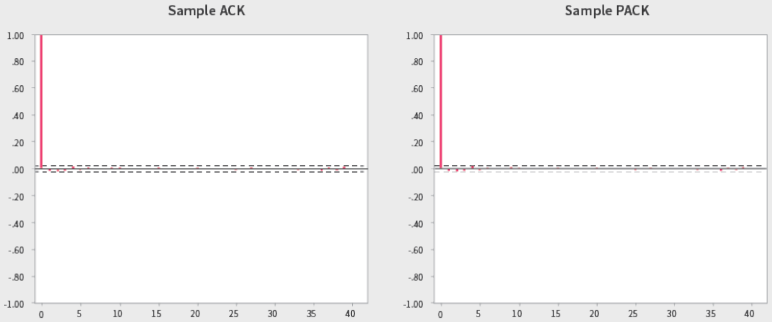
5-1. ARCH 모형

전치혁 교수
(포항공과대학교 산업경영공학과)

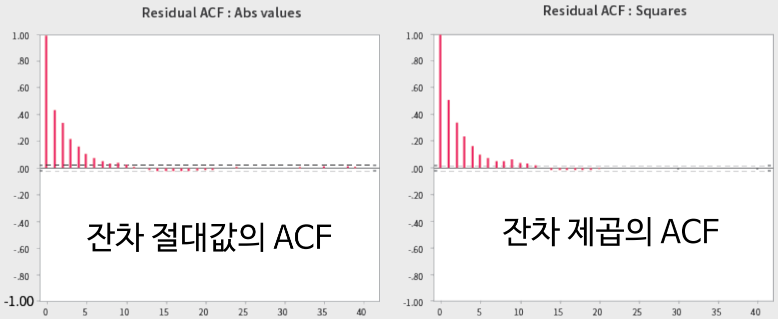
ARCH 모형

ARCH모형의 필요성

- 지금까지의 시계열모형에서 오차항은 일정한 분산을 갖는 독립적인 백색잡음으로 가정
- 대부분 금융관련 시계열에서 잔차는 백색잡음 처럼 보이지만 잔차의 절대값 또는 잔차 제곱항은 자기상관관계를 갖음
- 또한, 오차항 분산이 시간에 따라 일정하지 않고 변한다는 관측이 있음
- 오차항의 조건부 분산 (conditional variance)에 대한 모형을 고려
- 재무상품의 수익률 분산을 변동성 (volatility)이라 하며 이의 분석이 중요
- Engle (1982)이 ARCH (autoregressive conditional heteroskedasticity) 모형을 제시
- GARCH모형은 ARCH모형의 일반화 형태



잔차의 ACF & PACF



ARCH 모형

모형의 표현

- 시계열이 예를 들어 AR(1)모형을 따른다 하자

$$Z_t = \phi Z_{t-1} + u_t$$

- 이 때, 오차항의 기대치와 분산은 다음과 같다.

$$E[u_t] = 0, Var[u_t] = \sigma_u^2$$

- 오차항이 서로 독립이 아니고 다음 관계를 갖는다 가정

$$u_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q u_{t-q}^2 + w_t \ (w_t\text{는 백색잡음})$$

(즉, 제곱오차항이 AR(q)모형을 따른다고 가정)

- 오차항의 조건부 분산

$$\sigma_t^2 = Var[u_t|u_{t-1}, \ldots] = E[u_t^2|u_{t-1}, \ldots] = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q u_{t-q}^2$$

이 형태 모형을 ARCH(q) 모형이라 함.

ARCH 모형

ARCH모형의 정상성 조건

- 오차항의 조건없는 분산 (unconditional variance)은 시간에 따라 일정 (상수)

$Var[u_t] = E[u_t^2] = \sigma_u^2$

- 오차항의 조건부 분산 σ_t^2은 확률변수이며 시간에 따라 변화

$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q u_{t-q}^2$

- 오차항의 조건부 분산 과 조건없는 분산의 관계

$Var[u_t] = \sigma_u^2 = E[\sigma_t^2] = E[\alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q u_{t-q}^2]$

- ARCH모형이 정상적일 때 다음이 성립

$\sigma_u^2 = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\cdots-\alpha_q}$

- ARCH(q)모형의 정상적 조건

$\alpha_1 + \cdots + \alpha_q < 1$

ARCH 모형

평균 방정식과 분산 방정식

- ARCH모형은 오차항의 분산에 대한 것이므로 분산 방정식이라 함.
- 시계열 모형에서는 오차항이 포함된 평균방정식이 함께 사용되어야 함.
- (예 1) AR(1)-ARCH(1) 모형
  - 평균방정식: $Z_t = \phi Z_{t-1} + u_t$
  - 분산방정식: $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2$
- (예 2) MA(1)-ARCH(2) 모형
  - 평균방정식: $Z_t = u_t - \theta u_{t-1}$
  - 분산방정식: $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2$
- (예 3) 회귀모형-ARCH(3) 모형
  - 평균방정식: $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + u_t$
  - 분산방정식: $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \alpha_3 u_{t-3}^2$

ARCH 모형

ARCH-M (ARCH in mean) 모형

- 평균방정식에 조건부 분산을 포함시킨 모형
- 평균방정식이 회귀모형인 경우 ARCH-M 형태
  - 평균방정식: $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \gamma g(\sigma_t^2) + u_t$
  - 분산방정식: $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q u_{t-q}^2$

여기서 $g(\sigma_t^2)$ 는 다음 함수 사용

$$g(\sigma_t^2) = \sigma_t^2;\ g(\sigma_t^2) = \sigma_t;\ g(\sigma_t^2) = \ln(\sigma_t^2)$$