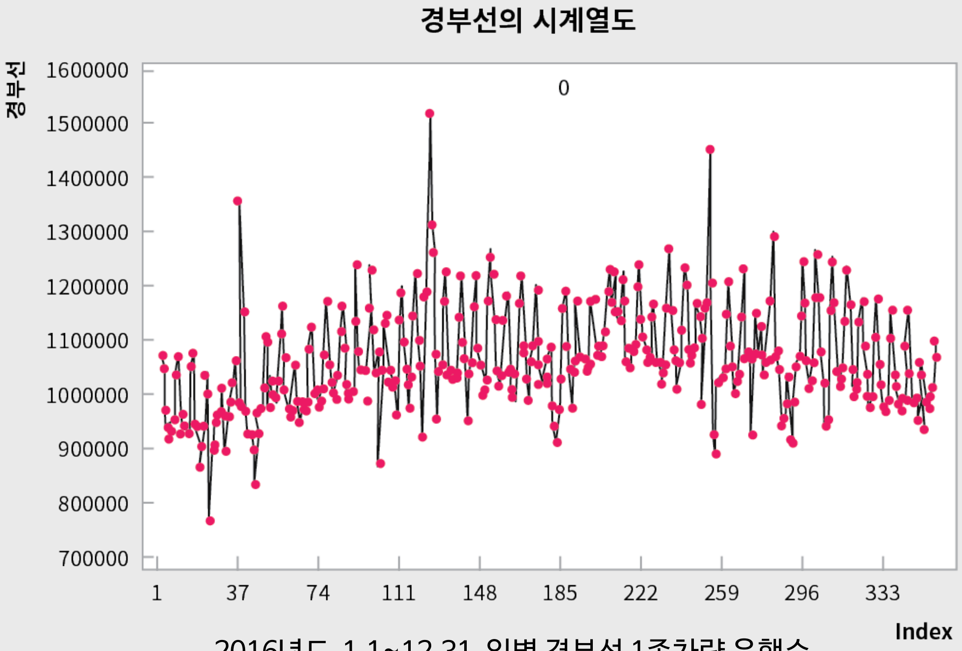
시계열 분석 기법과 응용

Week 4. 비정상적 시계열
4-2. 계절성 ARIMA모형

전치혁 교수
(포항공과대학교 산업경영공학과)

계절성 시계열

- 일반적 시계열에는 추세 와 계절성이 동시에 존재하는 경우가 많다.
- 추세는 차분으로 제거될 수 있으나 계절성은 여전히 남을 수 있다.
- 이전 ARIMA모형은 비계절성에 대한 것이며 계절성은 별도로 처리하여야 한다.
- 즉 일반적 시계열은 비계절성 ARIMA모형과 계절성 ARIMA모형이 복합된 형태이다.



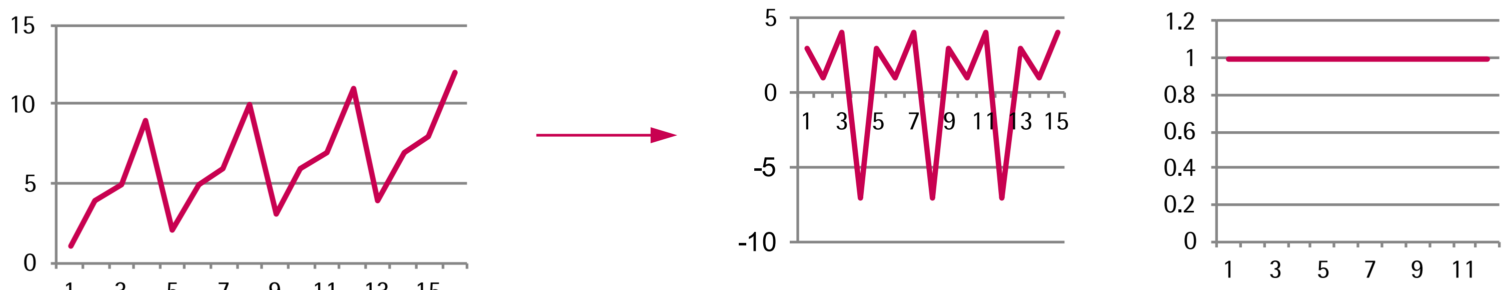
2016년도 1.1~12.31 일별 경부선 1종차량 운행수

계절성 ARIMA 모형

계절성 차분 (seasonal differencing)

- 계절성 주기 s (월별데이터: s=12; 분기별데이터: s=4)
- 계절성이 있는 경우 단순 (비계절성) 차분으로는 정상화가 되지 않음
- 1차 계절성 차분: 인근한 두 계절 값의 차이를 산출

$$\Delta_s Z_t = Z_t - Z_{t-s} = (1 - B^s) Z_t$$



차분

계절성 차분

계절성 ARIMA 모형

계절성 ARIMA모형의 유도 예

- 주기 s=12를 갖는 추세없는 월별 시계열 고려
- 매년 1월 데이터들만 볼 때 MA(1)모형을 따른다 하자.
  즉, $Z_t = (1 - \Theta B^{12})\alpha_t$
  여기서 α_t 들은 오차항으로 $\alpha_t, \alpha_{t-12}, \alpha_{t-24}$ 등은 서로 상관관계가 없다.
  매년 2월 데이터들도 MA(1)을 따른다 하면 위와 동일한 모형이 된다.
  그러나 인근 월의 오차항간에는 상관관계가 있으므로 새로운 모형이 필요하다.
- 오차항 α_t이 다시 MA(1)모형을 따른다 하자. '즉, $\alpha_t = (1 - \theta B)a_t$ (여기서 a_t는 백색잡음)
  위의 두 MA(1)모형을 결합하면 다음과 같다.
  $$Z_t = (1 - \theta B)(1 - \Theta B^{12})a_t$$
- 이 모형은 비계절성 MA(1)과 계절성 MA(1) 모형이 결합된 형태로 계절성 $ARMA\ (0,1) \times (0,1)_{12}$ 또는 계절성 $ARIMA\ (0,0,1) \times (0,0,1)_{12}$ 라 함.

계절성 ARIMA 모형

(예) 계절성 $\boldsymbol{ARIMA\ (0,1,1)\times(0,1,1)_{12}}$

비계절성 1차 차분 시계열이 MA(1)을 따르며 주기 12의 계절성 1차 차분 시계열이 MA(1)을 따름

$W_t = (1-B)(1-B^{12})Z_t$: 비계절성 1차 차분 및 계절성 1차 차분 시계열

$$W_t = (1-\theta B)(1-\Theta B^{12})a_t$$

- 일반적 계절성 ARIMA 모형
  - 표기: 계절성 $ARIMA\ (p,d,q)\times(P,D,Q)_s$
  - 비계절성 부분 d차 차분시 $ARMA\ (p,q)$
  - 주기 s의 계절성 부분 D차 차분시 $ARMA\ (P,Q)$
  - $W_t = (1-B)^d(1-B^s)^D Z_t$ 라 할 때

$$\phi_p(B)\Phi_P(B^s)W_t = \theta_q(B)\Theta_Q(B^s)a_t$$

계절성 ARIMA 모형

모형의 식별 및 추정

(단계 1) 시계열도를 그려보고 추세 및 계절성 존재여부를 판단

(단계 2) 아래사항을 고려하여 적절히 차분 실시

- 추세는 없고 계절성이 있는 경우: 해당 주기에 대한 계절성 차분
- 추세가 있고 뚜렷한 계절성이 없는 경우: 선형추세가 있는 경우 1차 차분, 곡선형태의 추세가 있는 경우 차분 전에 함수 변환 시도
- 추세와 계절성이 있는 경우: 우선 계절성 차분을 실시하고 추세를 다시 검토; 추세가 여전이 남아있는 경우 1차 차분 추가 실시

(단계 3) 차분 시계열에 대한 ACF 와 PACF를 바탕으로 p, q,P,Q를 결정

- 비계절성 계수인 p, q는 ARMA모형의 경우와 동일한 요령으로 결정
- 계절성 계수인 P, Q는 주기의 배수에서 나타나는 ACF 와 PACF의 패턴을 보고 결정

(단계 4)모형 파라미터 추정

(단계 5)잔차 검정 실시

계절성 ARIMA 모형

ACF 산출 예

- 계절성 $ARIMA\ (0,1,1)\times(0,1,1)_{12}$
- 차분시계열 산출 $W_t = (1-B)(1-B^{12})Z_t$
- 모형: $W_t = (1-\theta B)(1-\Theta B^{12})a_t = a_t - \theta a_{t-1} - \Theta\, a_{t-12} + \theta\Theta\, a_{t-13}$
- W_t 분산

  $\gamma(0) = Var[W_t] = (1+\theta^2+\Theta^2+\theta^2\Theta^2)\sigma_a^2 = (1+\theta^2)(1+\Theta^2)\,\sigma_a^2$
- 시차 k의 자기공분산

  $$\gamma(k) = E[W_t W_{t-k}] = E[(a_t - \theta a_{t-1} - \Theta\, a_{t-12} + \theta\Theta\, a_{t-13})(a_{t-k} - \theta a_{t-k-1} - \Theta\, a_{t-k-12} + \theta\Theta\, a_{t-k-13})]$$
- ACF

$$\rho(1) = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = \frac{-\theta(1+\Theta^2)\sigma_a^2}{(1+\theta^2)(1+\Theta^2)\,\sigma_a^2} = \frac{-\theta}{1+\theta^2}$$

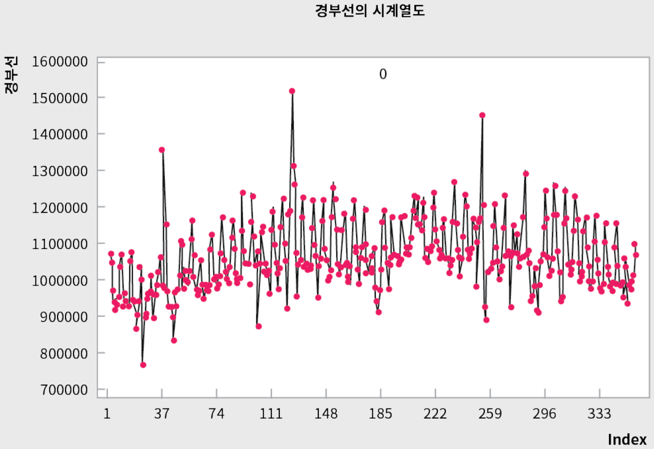
$$\rho(11) = \frac{\gamma(11)}{\gamma(0)} = \frac{\theta\Theta\sigma_a^2}{(1+\theta^2)(1+\Theta^2)\,\sigma_a^2} = \frac{\theta\Theta}{(1+\theta^2)(1+\Theta^2)} = \rho(13)$$

$$\rho(12) = \frac{\gamma(12)}{\gamma(0)} = \frac{-\Theta(1+\theta^2)\sigma_a^2}{(1+\theta^2)(1+\Theta^2)\,\sigma_a^2} = \frac{-\Theta}{1+\Theta^2}$$

계절성 ARIMA 모형

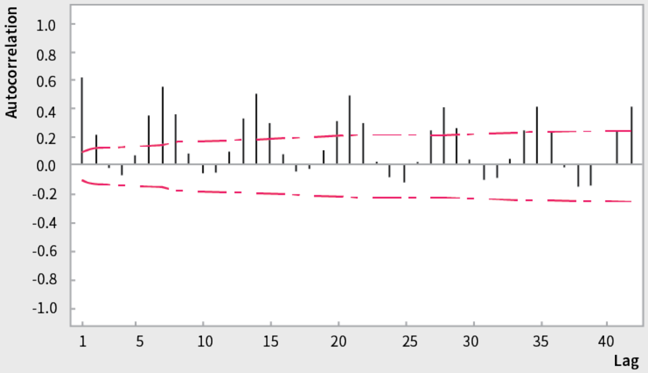
(예 - 일별 경부선 차량운행수) 2016년 1월 1일부터 2016년 12월 31일 1년간 일별 경부선 1종 차량운행수를 나타내고 있다

단계 1



주기 7의 계절성, 약간의 추세

ACF



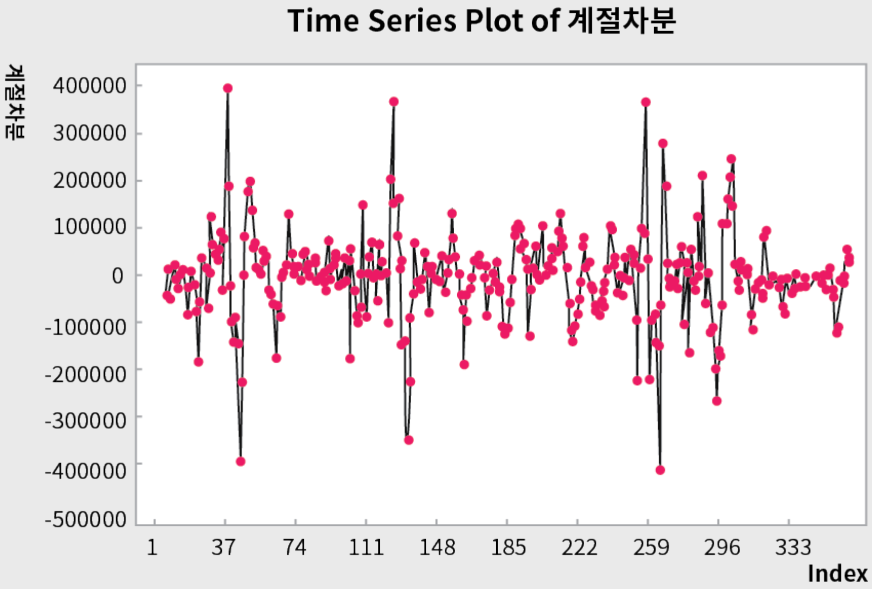
ACF가 주기 7 부근에서 나타나며 서서히 감수

#1

계절성 ARIMA 모형

(예 계속 - 일별 경부선 차량운행수)

단계 2



계절 (주기 7) 차분 시계열

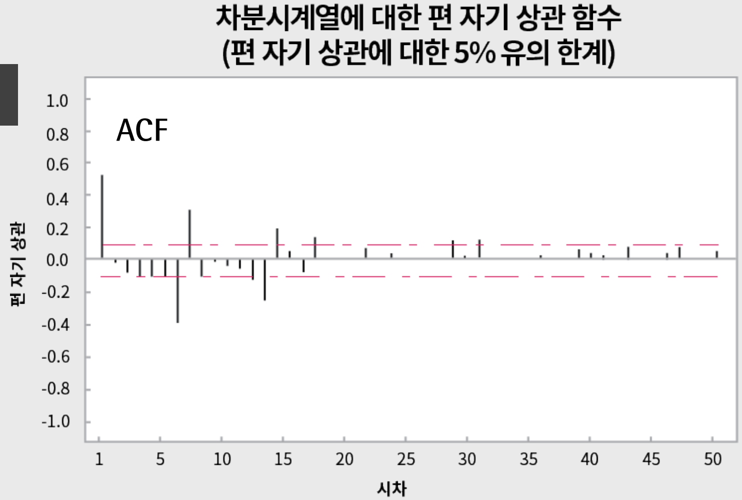
차분 시계열의 경우 추세와 계절성이 보이지 않으므로 정상적으로 간주됨

#1

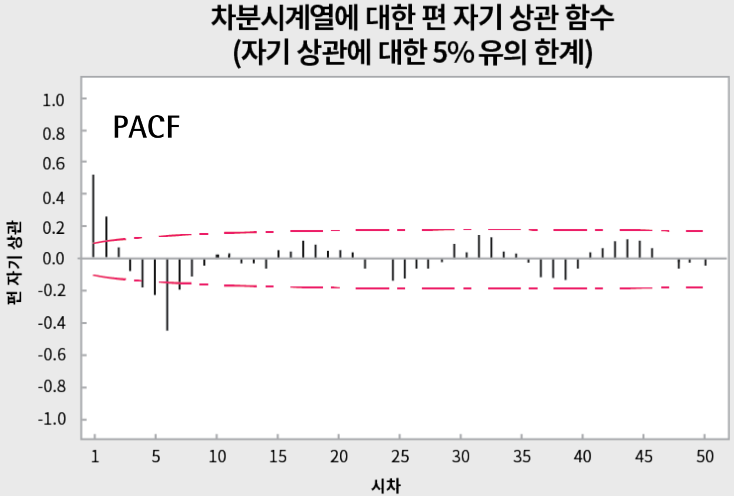
계절성 ARIMA 모형

(예 계속 - 일별 경부선 차량운행수)

단계 2



ACF를 볼 때 비계절성 부분은 지수적으로 감소하는 AR(1)형태



PACF를 볼 때 주기 7의 배수에서 지수적으로 감소하므로 계절성 부분은 MA(1)형태

따라서 계절성 $ARIMA\ (1,0,0)\times(0,1,1)_7$

#1

계절성 ARIMA 모형

(예 계속 - 일별 경부선 차량운행수) 모형: $(1-\phi B)(1-B^7)Z_t = (1-\Theta B^7)a_t$

단계 4

	계수추정치	표준오차	T값	p값
AR1 ϕ	0.6052	0.0428	14.15	0.000
SMA12 Θ	0.8721	0.0264	32.99	0.000

단계 5
(잔차검정)

시차	12	24	36	48
카이제곱통계량	16.6	36.4	49.9	59.9
p-값	0.084	0.028	0.039	0.081

#1

Reference

#1. KOSIS 국가통계포털 http://kosis.kr 2019.12