시계열 분석 기법과 응용

Week 2. ARMA 모형

2-1. 자기상관함수

전치혁 교수
(포항공과대학교 산업경영공학과)

정상적 시계열

- 정상적 시계열 (Stationary Time Series)
  - 실제 시계열은 추세, 계절성을 포함하는 비정상적 (non-stationary)인 것이 많으나 우선 정상적 시계열 의 성질을 알아본다.
  - 비정상적 시계열은 적절한 변환을 통하여 정상적 시계열로 바꿀 수 있다.
- 강 정상성 (Strong Stationarity)
  - 시계열 $\{Z_t, t \geq 1\}$에 대해 $(Z_1, \ldots, Z_m)$과 $(Z_{1+k}, \ldots, Z_{m+k})$이 동일한 결합확률분포를 가질 때 강 정상성을 갖는 시계열이라 함
  - 기대치가 시간에 따라 일정
  - 분산이 시간에 따라 일정
  - 자기공분산 또는 자기상관계수가 시간 간격 (time lag)에만 의존
- 약 정상성 (Weak Stationarity):
  - 시계열 $\{Z_t, t \geq 1\}$에 대해 기대치가 시간에 따라 일정하고 임의 두 시점 자기공분산이 시간 간격에만 의존하고 유한할 때 약 정상성을 갖는 시계열이라 함
  - 강 정상성이 성립하면 약 정상성이 성립; 역은 성립하지 않음
  - 결합확률분포가 다변량정규분포를 따를 때 강 정상성과 약 정상성은 일치
  - 시계열분석에서는 주로 약 정상성을 가정함; 본 강의에서도 약 정상성을 가정하여 이론 전개

자기상관함수

- 자기 공분산 (autocovariance)
  - 시계열의 시간에 따른 연관 패턴을 자기공분산으로 요약
  - 시차 k의 자기공분산
    - ✓ $\gamma(k) = Cov[Z_t, Z_{t-k}] = E[(Z_t - \mu_Z)(Z_{t-k} - \mu_Z)]$ (약 정상성 가정)
      $= E[Z_t\ Z_{t-k}]$ ($\mu_Z = 0$ 가정)
    - ✓ $\gamma(0) = Var[Z_t]$
    - ✓ $\gamma(k) = \gamma(-k)$
    - ✓ $\gamma(k)$ 를 k의 함수 ($k = 0, 1, 2, \ldots$)로 볼 때, 자기공분산 함수 (autocovariance function)라 함

	t-4	t-3	t-2	t-1	t	
	Z_{t-4}	Z_{t-3}	Z_{t-2}	Z_{t-1}	Z_t	

$\underbrace{Z_{t-4} \cdots Z_{t-1}}_{\gamma(3)}$

$\underbrace{Z_{t-2} \cdots Z_t}_{\gamma(2)}$

자기상관함수

- 자기상관 함수 (autocorrelation function; ACF)

  시차 k의 자기상관계수:

$$\boldsymbol{\rho(k) = Corr[Z_t, Z_{t-k}] = \frac{Cov[Z_t, Z_{t-k}]}{Var[Z_t]} = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}}$$

✓ $\boldsymbol{\rho}(0) = 1$

✓ $\boldsymbol{\rho}(k)=\boldsymbol{\rho}(-k)$

✓ $\boldsymbol{\rho}(k)$ 를 k의 함수 ($k = 0, 1, 2, \ldots$)로 볼 때, 자기상관 함수 (autocorrelation function; ACF)라 함

✓ 비교적 단순한 형태의 정상적 시계열 모형을 주로 다루며 ACF로 모형을 식별함

	t-4	t-3	t-2	t-1	t	
	$\boldsymbol{Z_{t-4}}$	$\boldsymbol{Z_{t-3}}$	$\boldsymbol{Z_{t-2}}$	$\boldsymbol{Z_{t-1}}$	$\boldsymbol{Z_t}$	

$\boldsymbol{\rho(3)}$

$\boldsymbol{\rho(2)}$

자기상관함수

- 자기상관 함수 산출 예

(예 2-1) 시계열 $\{Z_t, t \geq 1\}$이 다음의 관계를 가질 때 이의 ACF를 구하라. $Z_t = \phi Z_{t-1} + a_t$
여기서 a_t는 평균 0, 분산 σ_a^2 를 갖는 백색잡음(white noise)으로 불리는 오차항임.
이 시계열이 정상적이려면 $-1 < \phi < 1$이어야 한다.
(풀이)

① k=1에 대한 자기공분산을 구하기 위해 양변에 Z_{t-1}을 곱하고 기대치를 취하면

$E[Z_t Z_{t-1}] = \phi E[Z_{t-1}^2] + E[a_t Z_{t-1}] \Rightarrow \gamma(1) = \phi\gamma(0)$ 양변을 $\gamma(0)$로 나누면, $\boldsymbol{\rho}(1) = \phi$

① k=2에 대한 자기공분산을 구하기 위해 양변에 Z_{t-2}을 곱하고 기대치를 취하면 $E[Z_t Z_{t-2}] = \phi E[Z_{t-1} Z_{t-2}] + E[a_t Z_{t-2}] \Rightarrow \gamma(2) = \phi\gamma(1)$ 양변을 $\gamma(0)$로 나누면, $\boldsymbol{\rho}(2) = \phi\, \boldsymbol{\rho}(1) = \phi^2$

② 위와 같은 방식을 적용하면 ACF는 다음과 같다. $\boldsymbol{\rho}(k) = \phi \boldsymbol{\rho}(k-1) = \phi^k,\ k = 1,2, \ldots$

참고로 Z_t의 분산은 다음과 같다. 양변에 분산을 취하면,

$Var[Z_t] = \phi^2 Var[Z_{t-1}] + Var[a_t] + 2Cov[Z_{t-1}, a_t] \Rightarrow \gamma(0) = \phi^2\gamma(0) + \sigma_a^2 \Rightarrow \gamma(0) = \frac{\sigma_a^2}{1-\phi^2}$

자기상관함수

(예 2-2) 시계열 $\{Z_t, t \geq 1\}$이 다음의 관계를 가질 때 이의 ACF를 구하라.

$$Z_t = a_t - \theta a_{t-1}$$

(풀이)

① 우선 분산은 다음과 같이 산출된다.

$$\gamma(0) = E[Z_t^2] = E[(a_t - \theta a_{t-1})^2] = (1 + \theta^2)\sigma_a^2$$

② k=1에 대한 자기공분산을 구하면

$$\gamma(1) = E[Z_t Z_{t-1}] = E[(a_t - \theta a_{t-1})(a_{t-1} - \theta a_{t-2})] = E[-\theta a_{t-1}^2] = -\theta\sigma_a^2$$

따라서, $\rho(1) = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = \frac{-\theta}{1+\theta^2}$

③ k=2에 대한 자기공분산을 구하면

$$\gamma(2) = E[Z_t Z_{t-2}] = E[(a_t + \theta a_{t-1})(a_{t-2} + \theta a_{t-3})] = 0$$

따라서 ACF는 다음과 같다.

$$\rho(k) = \begin{cases} \frac{-\theta}{1+\theta^2} & k = 1 \\ 0 & k = 2,3,\ldots \end{cases}$$