시계열 분석 기법과 응용

Week 7. 상태공간모형

7-1. 상태공간모형의 표현

전치혁 교수
(포항공과대학교 산업경영공학과)

상태공간모형

개요

- 상태공간모형 (state-space model)에서는 관측되는 변수와 관측되지 않는 변수를 구분
- 시간에 따라 변하는 관측되지 않는 변수를 상태변수 (state variable)라 함.
- 상태변수도 확률변수로 간주
- 상태공간모형은 관측방정식 (observation equation)과 상태방정식 (state equation)의 2가지로 구성됨
- 회귀모형, ARMA모형 등을 포함하는 광범위한 모형임
- 다변량 시계열 역시 모형화 가능
- 시간에 따라 상태변수 및 관측변수가 변하는 동적시스템 (dynamic system)에 주로 활용

상태공간모형

모형의 표현

- (예 1) 시간 t 관측치를 Y_t 라 할 때 이는 상태변수 μ_t 와 관측오차 w_t로 부터 얻어지고 상태변수는 이전 시간의 상태와 오차 v_t가 더해져 변한다고 하자. 이 때, 상태공간모형은 다음으로 표현된다.
  - (관측방정식) $Y_t = \mu_t + w_t$
  - (상태방정식) $\mu_t = \mu_{t-1} + v_t$
  - 오차항 가정: $w_t \sim Nor(0, \sigma_w^2)$, $v_t \sim Nor(0, \sigma_v^2)$ 이며 다른 변수와 독립
- (예 2) 시간 t 관측치를 Y_t 라 할 때 이는 수준 (level)변수 μ_t 와 관측오차 ε_t로 부터 얻어진다. 수준변수는 이전 시간의 수준, 추세(trend)와 오차 a_t가 더해져 변하고, 추세는 이전 추세와 오차 b_t 가 더해져 변한다고 하자. 이 때, 상태공간모형은 다음으로 표현된다.
  - (관측방정식) $Y_t = \mu_t + \varepsilon_t$
  - (상태방정식) $\mu_t = \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + a_t; \beta_t = \beta_{t-1} + b_t$
  - $\Rightarrow$ 상태변수가 2개임. 이 경우 벡터/행렬로 모형을 표현

상태공간모형 표현

일반적 모형 형태

- 관측변수: $\boldsymbol{y}_t = (Y_{1t}, \dots, Y_{dt})^T$
- 상태변수: $\boldsymbol{x}_t = (X_{1t}, \dots, X_{kt})^T$
- (관측방정식) $\boldsymbol{y}_t = G\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{w}_t,\ \boldsymbol{w}_t \sim WN(\boldsymbol{0}, R)$
- (상태방정식) $\boldsymbol{x}_t = F\boldsymbol{x}_{t-1} + \boldsymbol{v}_t,\ \boldsymbol{v}_t \sim WN(\boldsymbol{0}, Q)$
  - G: $(d \times k)$ 계수 행렬
  - F : $(k \times k)$ 계수 행렬
  - R: 오차벡터$\boldsymbol{w}_t$의 $(d \times d)$ 공분산 행렬
  - Q: 오차벡터$\boldsymbol{v}_t$의 $(k \times k)$ 공분산 행렬

상태공간모형 표현

(예7-1) 다음 모형을 일반적 형태(벡터/행렬)로 표현하라.

- (관측방정식) $Y_t = \mu_t + \varepsilon_t; \varepsilon_t \sim Nor(0, \sigma_\varepsilon^2)$
- (상태방정식) $\mu_t = \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + a_t; \beta_t = \beta_{t-1} + b_t; a_t \sim Nor(0, \sigma_a^2); b_t \sim Nor(0, \sigma_b^2)$

(풀이)

- 상태방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{pmatrix} \mu_t \\ \beta_t \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mu_{t-1} \\ \beta_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}$$

- 상태변수 벡터를 정의하면

$$\boldsymbol{x}_t = \begin{pmatrix} \mu_t \\ \beta_t \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{x}_t = F\boldsymbol{x}_{t-1} + \boldsymbol{v}_t;\ Q = \begin{bmatrix} \sigma_a^2 & 0 \\ 0 & \sigma_b^2 \end{bmatrix}$$

- 관측방정식

$$Y_t = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} \mu_t \\ \beta_t \end{pmatrix} + \varepsilon_t; \mathrm{R} = \sigma_\varepsilon^2$$

- (관측방정식)

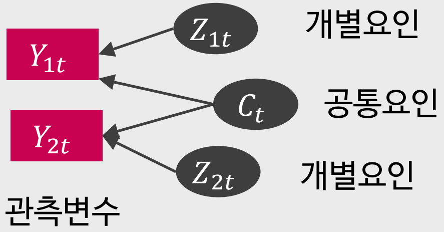
$$\boldsymbol{y}_t = G\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{w}_t, \boldsymbol{w}_t \sim WN(\boldsymbol{0}, R)$$

- (상태방정식)

$$\boldsymbol{x}_t = F\boldsymbol{x}_{t-1} + \boldsymbol{v}_t, \boldsymbol{v}_t \sim WN(\boldsymbol{0}, Q)$$

상태공간모형 표현

(예7-2)다음 그림과 같은 모형을 고려하자.



- **관측방정식**

  $$Y_{1t} = \gamma_1 C_t + Z_{1t};\ Y_{2t} = \gamma_2 C_t + Z_{2t}$$

- **상태방정식**
  - (공통요인) $C_t = \phi C_{t-1} + v_t,\ v_t \sim Nor(0,1)$
  - (개별요인1) $Z_{1t} = \alpha_1 Z_{1,t-1} + \varepsilon_{1t},\ \varepsilon_{1t} \sim Nor(0,\sigma_1^2)$
  - (개별요인2) $Z_{2t} = \alpha_2 Z_{2,t-1} + \varepsilon_{2t},\ \varepsilon_{2t} \sim Nor(0,\sigma_2^2)$

$$\boldsymbol{y}_t = \begin{pmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_t = \begin{pmatrix} C_t \\ Z_{1t} \\ Z_{2t} \end{pmatrix}$$

(관측방정식)

$$\boldsymbol{y}_t = G\boldsymbol{x}_t\ ,\ G = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 1 & 0 \\ \gamma_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(상태방정식)

$$\boldsymbol{x}_t = F\boldsymbol{x}_{t-1} + \boldsymbol{v}_t,\ \boldsymbol{v}_t \sim WN(\boldsymbol{0}, Q)$$

$$F = \begin{bmatrix} \phi & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \mathrm{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$