시계열 분석 기법과 응용

Week 2. ARMA 모형

2-2. 편자기상관함수

전치혁 교수
(포항공과대학교 산업경영공학과)

편자기상관함수

- 편자기상관 함수 (PACF)

  - 정상적 시계열의 형태를 식별하는데 ACF외에 PACF의 정보를 활용함.
  - PACF란 시차가 k인 두 값들 간의 상관계수가 중간 시점들의 값들이 이미 설명한이후 추가적인 영향만을 고려하기 위하여 고안된 것임. 따라서 다음과 같은 조건부 상관계수를 고려함

    - $P(k) = Corr[Z_t, Z_{t-k} | Z_{t-1}, \dots, Z_{t-k+1}], k = 0, 1, 2, \dots$
      - $P(1) = \rho(1)$: 중간 값이 없으므로
      - $P(k)$ 는 다음의 회귀모형의 계수 ϕ_{kk}와 동일하다
        – $Z_t = \phi_{k1} Z_{t-1} + \phi_{k2} Z_{t-2} + \cdots + \phi_{kk} Z_{t-k} + b_t$

	t-4	t-3	t-2	t-1	t	
	Z_{t-4}	Z_{t-3}	Z_{t-2}	Z_{t-1}	Z_t	

$P(4)$

편자기상관함수

- 아래 회귀모형에서 $\boldsymbol{P(k)} = \boldsymbol{\phi_{kk}}$

  - $\boldsymbol{Z_t} = \boldsymbol{\phi_{k1} Z_{t-1}} + \boldsymbol{\phi_{k2} Z_{t-2}} + \cdots + \boldsymbol{\phi_{kk} Z_{t-k}} + \boldsymbol{b_t}$

  - 위의 식으로 부터 k개의 다음 식들이 유도된다.

$$\rho(1) = \boldsymbol{\phi_{k1}} + \boldsymbol{\phi_{k2}}\rho(1) + \cdots + \boldsymbol{\phi_{kk}}\rho(k-1)$$

$$\rho(2) = \boldsymbol{\phi_{k1}}\rho(1) + \boldsymbol{\phi_{k2}} + \cdots + \boldsymbol{\phi_{kk}}\rho(k-2)$$

...

$$\rho(k) = \boldsymbol{\phi_{k1}}\rho(k-1) + \boldsymbol{\phi_{k2}}\rho(k-2) + \cdots + \boldsymbol{\phi_{kk}}$$

– 위의 연립방정식을 풀면 $\boldsymbol{\phi_{kk}}$를 ACF로 부터 산출할 수 있다.

편자기상관함수

(예 2-3) 시계열 $\{Z_t, t \geq 1\}$이 다음의 관계를 가질 때 이의 PACF를 구하라.

$$Z_t = a_t - \theta a_{t-1}$$

(풀이)

1) $\boldsymbol{P(1)} = \boldsymbol{\rho(1)}$ 인데 (예2-2)에서 $\boldsymbol{\rho(1)} = \frac{-\theta}{1+\theta^2}$ 이다.

2) $\boldsymbol{P(2)} = \boldsymbol{\phi_{22}}$ 를 구하기 위해 연립방정식을 기술하면

$$\rho(1) = \boldsymbol{\phi_{21}} + \boldsymbol{\phi_{22}}\rho(1)$$
$$\rho(2) = \boldsymbol{\phi_{21}}\rho(1) + \boldsymbol{\phi_{22}}$$

$\rho(2) = 0$을 이용하면 다음과 같다.

$$\boldsymbol{P(2)} = \boldsymbol{\phi_{22}} = \frac{-\boldsymbol{\rho}^2(\mathbf{1})}{\mathbf{1}-\boldsymbol{\rho}^2(\mathbf{1})} = \frac{-\theta^2}{\mathbf{1}+\theta^2+\theta^4}$$

3) 위와 같은 방법으로 $\boldsymbol{P(k)}, \boldsymbol{k} = \mathbf{3}, \mathbf{4}, \ldots$ 을 구할 수 있다.

시계열 표현방식

- **자기회귀 (autoregressive; AR) 표현방식**
  - 시점t의 값 (Z_t)을 과거시점의 값들을 이용한 회귀식으로 표현
  - $Z_t = \pi_1 Z_{t-1} + \pi_2 Z_{t-2} + \cdots + a_t$
  - 여기서 π_1, π_2 등은 상수이며 a_t는 백색잡음 (white noise)
  - 자기회귀 과정 (autoregressive process)라고도 함

- **이동평균 (moving average; MA) 표현방식**
  - 시점t의 값 (Z_t)을 현재와 과거시점의 백색잡음으로 표현
  - $Z_t = a_t - \psi_1 a_{t-1} - \psi_2 a_{t-2} - \cdots$
  - 여기서 ψ_1, ψ_2 등은 상수
  - 이동평균 과정 (moving average process)라고도 함

시계열 표현방식

- 후향 연산자 (backward shift operator/ backshift operator) 사용
  - $Z_{t-1} = BZ_t$
  - $Z_{t-2} = BZ_{t-1} = B^2Z_t$
  - $Z_{t-k} = B^kZ_t, k = 1,2, \ldots$

AR과정의 표현

$$Z_t = \pi_1 Z_{t-1} + \pi_2 Z_{t-2} + \cdots + a_t \Rightarrow Z_t = (\pi_1 B + \pi_2 B^2 + \cdots)Z_t + a_t$$
$$\Rightarrow (1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \cdots)Z_t = a_t$$
$$\Rightarrow Z_t = (1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \ldots)^{-1}\, a_t$$

MA과정의 표현

$$Z_t = a_t - \psi_1 a_{t-1} - \psi_2 a_{t-2} - \cdots \Rightarrow Z_t = (1 - \psi_1 B - \psi_2 B^2 - \cdots)a_t$$
$$\Rightarrow (1 - \psi_1 B - \psi_2 B^2 - \ldots)^{-1}\, Z_t = a_t$$

시계열 표현방식

(예 2-4) 다음의 시계열을 AR표현방식과 MA표현방식으로 나타내라.

$Z_t = a_t - 0.5a_{t-1} + 0.3a_{t-2}$

(풀이)

- 이미 MA방식으로 표현되어있다. 즉,

$\psi_1 = 0.5, \psi_2 = -0.3, \psi_k = 0, k = 3,4, \dots$

- AR방식으로 표현하기 위해 후방연산자를 사용하면

$Z_t = (1 - 0.5B + 0.3B^2 - \cdots)a_t \Rightarrow (1 - 0.5B + 0.3B^2 - \dots)^{-1} Z_t = a_t$

$\Rightarrow (1 + 0.5B - 0.05B^2 - 0.175B^3 - \cdots)Z_t = a_t$

$\Rightarrow Z_t = -0.5Z_{t-1} + 0.05Z_{t-2} + 0.175Z_{t-3} + \cdots + a_t$

따라서

$\pi_1 = -0.5, \pi_2 = 0.05, \pi_3 = 0.175, \cdots$