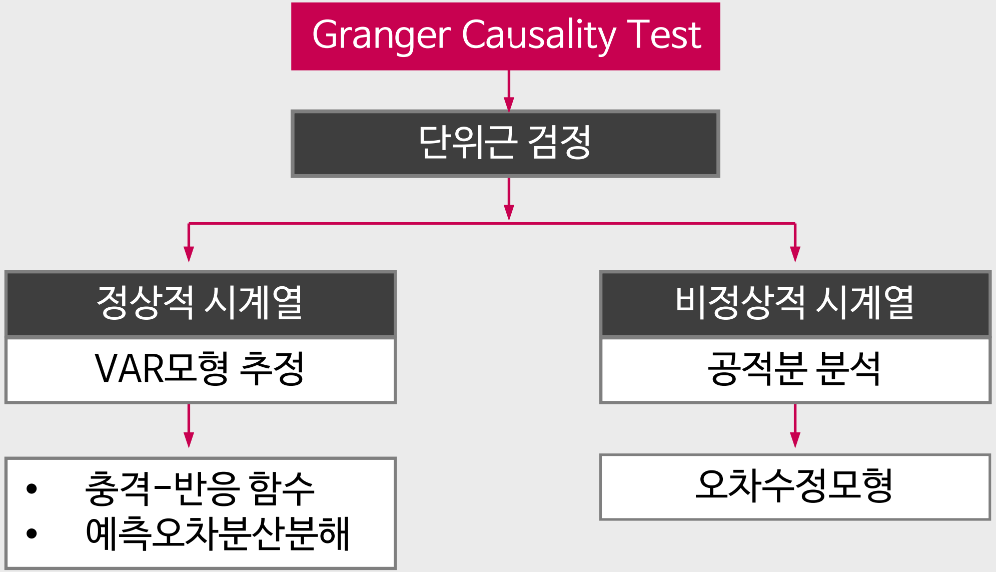
시계열 분석 기법과 응용

Week 6. 벡터자기회귀모형
6-2. 충격-반응 함수와 분산분해

전치혁 교수
(포항공과대학교 산업경영공학과)

VAR모형 분석


Granger Causality Test
단위근 검정
정상적 시계열
VAR모형 추정
• 충격-반응 함수
• 예측오차분산분해
비정상적 시계열
공적분 분석
오차수정모형

그래인저 인과관계

(그래인저 인과관계: Granger causality) 시계열 $\{X_t, t \geq 1\}$이 시계열 $\{Y_t, t \geq 1\}$의 미래값을 예측하는 데 도움이 될 때, $\{X_t, t \geq 1\}$이 $\{Y_t, t \geq 1\}$에 영향을 준다 (Granger-cause) 말한다.

그래인저 인과관계 검정

- 자기회귀 시차모형

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1} + \cdots + \alpha_p Y_{t-p} + \beta_1 X_{t-1} + \cdots + \beta_q X_{t-q} + a_t$$

- 가설

$$H_0\colon \beta_1 = \cdots = \beta_q = 0$$

- 검정통계량

$$F = \frac{(SSE_r - SSE_{ur})/q}{SSE_{ur}/(N-p-q-1)}$$

여기서 SSE_{ur} 는 상기 모형 (비제한모형)의 SSE이며, SSE_r는 H_0가 옳을 때 (제한모형) SSE임

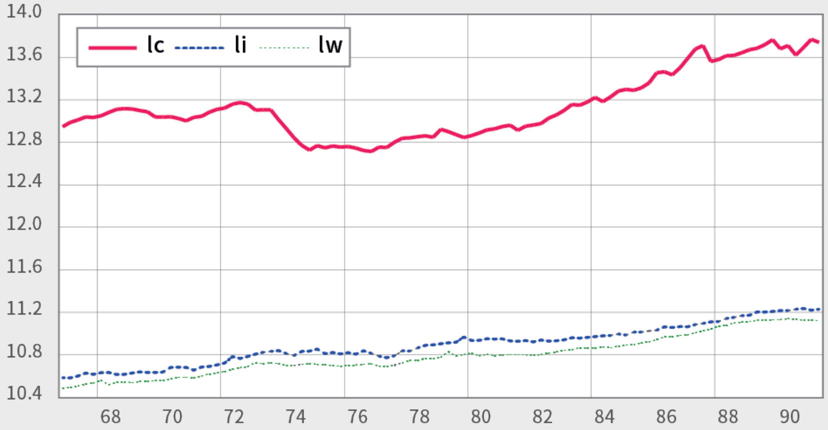
- 결과 해석 : 쌍방에 대해 검정. 서로 영향을 주지않을 때는 VAR모형 분석의 의미가 없음.

그래인저 인과관계

(예 6-1) 영국 소비(LC)/소득 (LI)/자산 (LW) 데이터에 대한 그래인저 인과관계 검정을 실시하면 아래와 같다.

Pairwise Granger Causality Tests
Date: 07/19/19 Time: 11:13
Sample: 1966Q4 1991Q2
Lags: 4

Null Hypothesis:	Obs	F-Statistic	Prob.
LI does not Granger Cause LC	95	1.77913	0.1404
LC does not Granger Cause LI		8.15510	1.E-05
LW does not Granger Cause LC	95	2.25700	0.0695
LC does not Granger Cause LW		0.72713	0.5758
LW does not Granger Cause LI	95	1.34091	0.2614
LI does not Granger Cause LW		0.52232	0.7196



결과해석: 소비가 소득에 유의하게 영향을 미침, 유의수준 10%에서 자산이 소비에 영향을 미침

충격-반응 함수

충격-반응 함수 (impulse-response function; IRF)

한 시계열에 특정시점에서 충격이 발생할 때 다른 시계열에 시간에 따라 어떤 영향을 주는지 분석

- VAR(1)모형 예

$$Z_{1t} = \phi_{11}Z_{1,t-1} + \phi_{12}Z_{2,t-1} + a_{1t}$$
$$Z_{2t} = \phi_{21}Z_{1,t-1} + \phi_{22}Z_{2,t-1} + a_{2t}$$

충격: 시점 1에서 Z_{1t}에만 σ_1의 충격이 있고 Z_{2t}에는 충격이 없음. 다른 시점에는 충격 없음

($a_{11} = \sigma_1$, $a_{1t} = 0, t > 1, a_{2t} = 0, t \geq 1; Z_{10} = Z_{20} = 0$ 가정)

반응

t=1: $Z_{11} = a_{11} = \sigma_1; Z_{21} = a_{21} = 0$

t=2: $Z_{12} = \phi_{11}Z_{11} + \phi_{12}Z_{21} + a_{12} = \phi_{11}\sigma_1; Z_{22} = \phi_{21}Z_{11} + \phi_{22}Z_{21} + a_{22} = \phi_{21}\sigma_1$

t=3: $Z_{13} = \phi_{11}Z_{12} + \phi_{12}Z_{22} + a_{13} = (\phi_{11}^2 + \phi_{12}\phi_{21})\sigma_1$

$$Z_{23} = \phi_{21}Z_{12} + \phi_{22}Z_{22} + a_{23} = (\phi_{21}\phi_{11} + \phi_{22}\phi_{21})\sigma_1$$

- 반응함수: 시간에 따른 Z_{1t}에의 영향, 시간에 따른 Z_{2t}에의 영향

충격-반응 함수

VAR 모형

$$\boldsymbol{z}_t = \Phi_1 \boldsymbol{z}_{t-1} + \Phi_2 \boldsymbol{z}_{t-2} + \cdots + \Phi_p \boldsymbol{z}_{t-p} + \boldsymbol{a}_t$$

시계열간의 상관관계가 있어 IRF산출 어려움

MA형태 모형

$$\boldsymbol{z}_t = \boldsymbol{a}_t + \Psi_1 \boldsymbol{a}_{t-1} + \Psi_2 \boldsymbol{a}_{t-2} + \cdots$$

$\boldsymbol{a}_t \sim MVN(0, \Sigma)$ 이므로 여전히 오차항간의 상관관계가 있어 IRF산출 어려움

직교오차 MA형태 모형

$$\boldsymbol{z}_t = \boldsymbol{v}_t + \Psi_1 \boldsymbol{v}_{t-1} + \Psi_2 \boldsymbol{v}_{t-2} + \cdots$$

$\boldsymbol{v}_t \sim MVN(0, I)$ 이므로 IRF산출 용이

$IRF(i, j, s)$
= j번째 시계열의 충격에 대한 i번째 시계열의 시간 s이후의 반응
= Ψ_s^*의 (i,j)원소

충격-반응 함수

- MA형태 모형

$\boldsymbol{z}_t = \boldsymbol{a}_t + \Psi_1 \boldsymbol{a}_{t-1} + \Psi_2 \boldsymbol{a}_{t-2} + \cdots, \boldsymbol{a}_t \sim MVN(0, \Sigma)$

- Σ 의 분해
  - LDL 분해: positive definite 대칭행렬 분해

    $\Sigma = LDL^T$ (L: 대각원소가 1인 아래쪽 삼각행렬; D: 양의 원소를 갖는 대각행렬)
  - Cholesky 분해: 양의 대각원소를 갖는 삼각행렬로 분해

    $\Sigma = PP^T$ $(P = LD^{1/2})$
  - 직교오차 변환

$$\boldsymbol{v}_t = P^{-1}\boldsymbol{a}_t$$

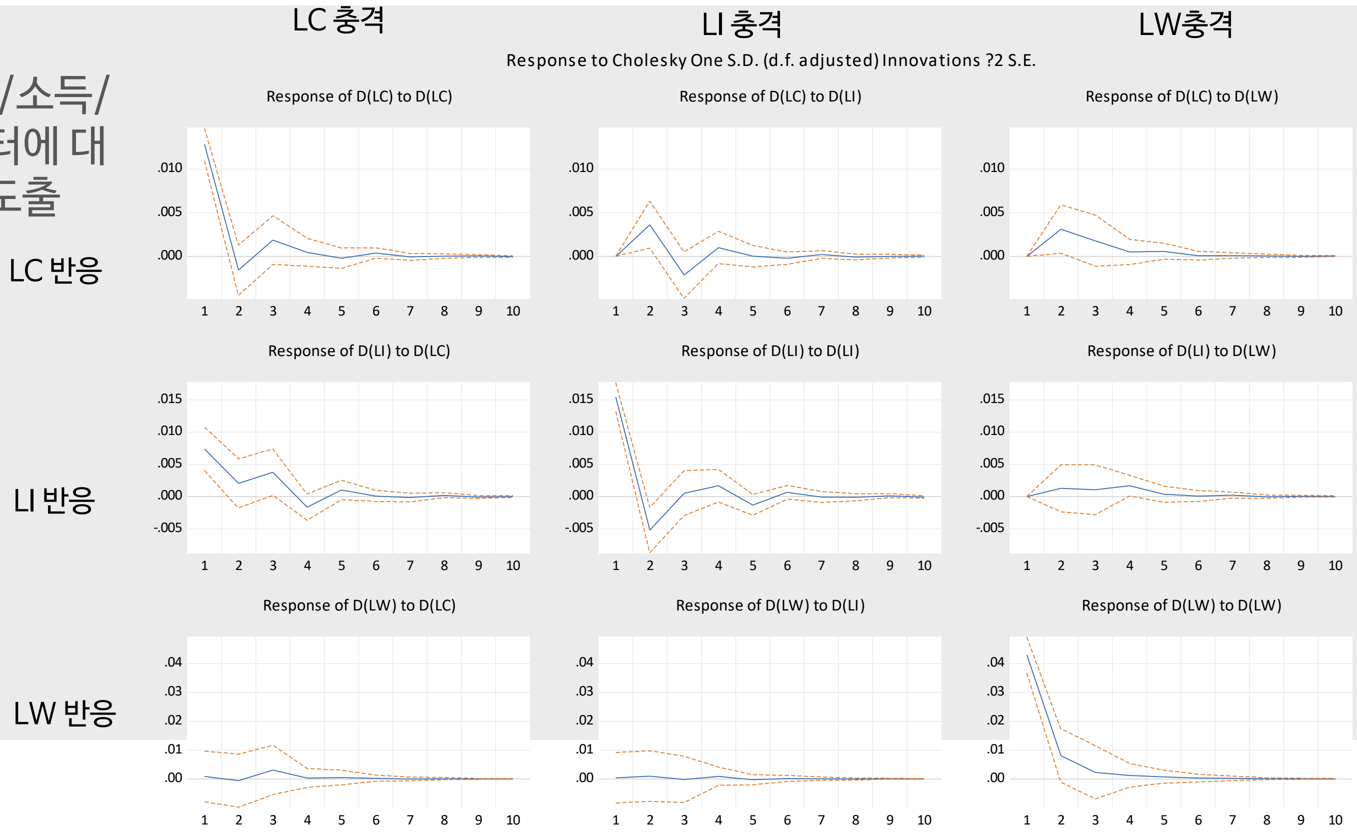
$$Var[\boldsymbol{v}_t] = Var[P^{-1}\boldsymbol{a}_t] = P^{-1}\Sigma(P^{-1})^T = I$$

  - 직교오차 MA형태 모형

$$\boldsymbol{z}_t = \boldsymbol{v}_t + \Psi_1^* \boldsymbol{v}_{t-1} + \Psi_2^* \boldsymbol{v}_{t-2} + \cdots$$

충격-반응 함수

(예 6-2) 영국 소비/소득/자산 1차 차분 데이터에 대한 충격-반응 함수 도출



예측오차 분산분해

- 필요성
  - 특정 시계열의 미래 불확실성에 다른 여러 시계열의 충격이 영향을 줄 수 있음
  - 어떤 시계열이 상대적으로 어떤 영향을 끼치고 있는지 중요도 산출이 의미있음
  - 이를 위해 미래값을 예측하고 예측오차의 분산을 시계열별로 분해함
- 예측오차
  - 모형: $\boldsymbol{z}_t = \boldsymbol{v}_t + \Psi_1^* \boldsymbol{v}_{t-1} + \Psi_2^* \boldsymbol{v}_{t-2} + \cdots$
  - k-단계 예측치

$$\boldsymbol{f}_{t,k} = E[\boldsymbol{z}_{t+k} | \boldsymbol{z}_t, \ldots] = \Psi_k^* \boldsymbol{v}_t + \Psi_{k+1}^* \boldsymbol{v}_{t-1} + \cdots$$

  - k-단계 예측오차

$$\boldsymbol{e}_{t,k} = \boldsymbol{v}_{t+k} + \Psi_1^* \boldsymbol{v}_{t+k-1} + \Psi_2^* \boldsymbol{v}_{t+k-2} + \cdots + \Psi_{k-1}^* \boldsymbol{v}_{t+1}$$

  - i-번째 시계열의 k-단계 예측오차
  - $e_{t,k}^{(i)} = \sum_{j=1}^{m} v_{j,t+k} + \sum_{j=1}^{m} \psi_{ij,1}^* v_{j,t+k-1} + \cdots + \sum_{j=1}^{m} \psi_{ij,k-1}^* v_{j,t+1}$

예측오차 분산분해

- 예측오차 분산분해 (variance decomposition)

i-번째 시계열의 k-단계 예측오차

$$e_{t,k}^{(i)} = \sum_{j=1}^{m} v_{j,t+k} + \sum_{j=1}^{m} \psi_{ij,1}^{*} v_{j,t+k-1} + \cdots + \sum_{j=1}^{m} \psi_{ij,k-1}^{*} v_{j,t+1}$$

i-번째 시계열의 k-단계 예측오차 분산

$$Var[e_{t,k}^{(i)}] = m + \sum_{j=1}^{m} \left(\psi_{ij,1}^{*}\right)^2 + \cdots + \sum_{j=1}^{m} \left(\psi_{ij,k-1}^{*}\right)^2 = \sum_{s=0}^{k-1} \sum_{j=1}^{m} \left(\psi_{ij,s}^{*}\right)^2$$

이중 j-번째 시계열 분산 비중

$$Var[e_{t,k}^{(ij)}] = 1 + \left(\psi_{ij,1}^{*}\right)^2 + \cdots + \left(\psi_{ij,k-1}^{*}\right)^2 = \sum_{s=0}^{k-1} \left(\psi_{ij,s}^{*}\right)^2$$

i-번째 예측오차분산 중 j-번째 시계열 기여율

$$R_{ij,k} = \frac{Var[e_{t,k}^{(ij)}]}{Var[e_{t,k}^{(i)}]} \times 100 = \frac{\sum_{s=0}^{k-1} \left(\psi_{ij,s}^{*}\right)^2}{\sum_{s=0}^{k-1} \sum_{j=1}^{m} \left(\psi_{ij,s}^{*}\right)^2} \times 100(\%)$$

예측오차 분산분해

(예 6-3) 영국 소비/소득/자산 데이터에 대한 예측오차 분산분해

Variance Decomposition of D(LC):

Period	S.E.	D(LC)	D(LI)	D(LW)
1	0.012824	100.0000	0.000000	0.000000
2	0.013775	87.97436	6.915991	5.109644
3	0.014178	84.78336	8.791400	6.425242
4	0.014230	84.26114	9.232929	6.505934
5	0.014244	84.12672	9.215815	6.657461
6	0.014251	84.11612	9.230617	6.653260
7	0.014253	84.09334	9.250909	6.655749
8	0.014253	84.08904	9.253813	6.657074
9	0.014253	84.08914	9.253787	6.657074
10	0.014253	84.08885	9.253944	6.657206