시계열 분석 기법과 응용

Week 7. 상태공간모형
7-2. 칼만 필터

전치혁 교수
(포항공과대학교 산업경영공학과)

최적선형예측식

- 상태공간모형에서 미래의 관측치 $\boldsymbol{y}_t$를 예측하기 위해서 우선 상태변수 $\boldsymbol{x}_t$를 예측 필요
- 새로운 관측치가 발생할 때 상태변수의 예측식을 이전 예측식으로부터 갱신하는 것을 칼만 필터 (Kalman filter)라 함
- 칼만필터식은 관측치의 선형 함수에서 제곱합을 최소로 하는 계수추정식 (즉, 최적 선형예측식)으로 부터 유도됨
- 최적선형예측식은 결과적으로 베이지안 기법에 의거 상태변수의 사전확률분포로 부터 사후확률분포의 기대치 및 분산을 구하는 식과 동일함

최적선형예측식

- 목적: 확률변수 L를 예측하는데 관측치 Y의 선형식 사용
- 예측식 형태: $E[L|Y] = \alpha + \beta Y$
  - α, β: 추정필요 계수
- 계수추정을 위해 다음 제곱합 기대치 최소화
  - $Q = E[(L - \alpha - \beta Y)^2]$
  - Q를 풀면 다음과 같다
  - $Q = Var[L] + E^2[L] + \beta^2\{Var[Y\} + E^2[Y]\} - 2\beta\{Cov[L, Y] + E[L]E[Y]\} + \alpha^2 - 2\alpha E[L] + 2\alpha\beta E[Y]$
  - $\frac{\partial Q}{\partial \alpha} = 0; \frac{\partial Q}{\partial \beta} = 0$ 풀면
  - $\alpha^* = E[L] - \beta^* E[Y]$
  - $\beta^* = \frac{Cov[L,Y]}{Var[Y\}}$
- 최적 선형예측식
  - $E^*[L|Y] = \alpha^* + \beta^* Y = E[L] + \frac{Cov[L,Y]}{Var[Y]}(Y - E[Y])$
  - $Q^* = Var[L] - \frac{Cov^2[L,Y]}{Var[Y]}$

칼만필터

최적선형예측식과 칼만필터

- 최적선형예측식
  - $E[L|Y] = \alpha^* + \beta^* Y = E[L] + \frac{Cov[L,Y]}{Var[Y]}(Y - E[Y])$
- 시계열 $Y_t, Y_{t-1}, Y_{t-2}, \ldots$ 이 있는경우
  - $E[L|Y] = E[L|Y_t, Y_{t-1}, \ldots]$: 가장 최근 관측치 Y_t를 포함한 조건부 기대치
  - $E[L] = E[L|Y_{t-1}, \ldots]$: 최근 관측치 Y_t가 없고 과거치만의 조건부 기대치

  베이지안 관점에서

  - $E[L|Y_{t-1}, \ldots]$: 사전확률분포의 기대치
  - $E[L|Y_t, Y_{t-1}, \ldots]$: 사후확률분포의 기대치
- 아래 최적선형예측식을 칼만필터라 함
  - $E[L|Y_t, Y_{t-1}, \ldots] = E[L|Y_{t-1}, \ldots] + \frac{Cov[L, Y_t|Y_{t-1}, \ldots]}{Var[Y_t|Y_{t-1}, \ldots\}}(Y_t - E[Y_t|Y_{t-1}, \ldots])$

칼만필터

(예7-3) 다음 모형에서 상태변수들의 칼만 필터식을 유도하라.

- (관측방정식) $Y_t = \mu_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim Nor(0, \sigma_\varepsilon^2)$
- (상태방정식) $\mu_t = \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + a_t, \quad a_t \sim Nor(0, \sigma_a^2)$

  $\beta_t = \beta_{t-1} + b_t, \quad b_t \sim Nor(0, \sigma_b^2)$

(풀이)

- 기호정의
- $l_t = E[\mu_t | Y_t, \dots], m_t = E[\beta_t | Y_t, \dots]$
- $p_t = Var[\mu_t | Y_t, \dots], q_t = Var[\beta_t | Y_t, \dots], r_t = Cov[\mu_t, \beta_t | Y_t, \dots]$
- 상태변수 μ_t의 최적선형예측식 (칼만필터)

$$l_t = E[\mu_t | Y_t, \dots] = E[\mu_t | Y_{t-1}, \dots] + \frac{Cov[\mu_t, Y_t | Y_{t-1}, \dots]}{Var[Y_t | Y_{t-1}, \dots\}}(Y_t - E[Y_t | Y_{t-1}, \dots])$$

$$E[\mu_t | Y_{t-1}, \dots] = E[\mu_{t-1} + \beta_{t-1} + a_t | Y_{t-1}, \dots] = l_{t-1} + m_{t-1}$$

$$l_t = l_{t-1} + m_{t-1} + K_t^\mu (Y_t - l_{t-1} - m_{t-1}), \; K_t^\mu = \frac{p_{t-1} + q_{t-1} + 2r_{t-1} + \sigma_a^2}{p_{t-1} + q_{t-1} + 2r_{t-1} + \sigma_a^2 + \sigma_\varepsilon^2}$$

칼만필터

(예7-3 계속)

- 상태변수 β_t의 최적선형예측식 (칼만필터)

$$m_t = E[\beta_t|Y_t, \dots] = E[\beta_t|Y_{t-1}, \dots] + \frac{Cov[\beta_t, Y_t|Y_{t-1}, \dots]}{Var[Y_t|Y_{t-1}, \dots\}}(Y_t - E[Y_t|Y_{t-1}, \dots])$$

$$= m_{t-1} + K_t^{\beta}(Y_t - l_{t-1} - m_{t-1}), \quad K_t^{\beta} = \frac{q_{t-1}+r_{t-1}}{p_{t-1}+q_{t-1}+2r_{t-1}+\sigma_a^2+\sigma_\varepsilon^2}$$

- 분산의 갱신 공식

$$p_t = Var[\mu_t|Y_t, \dots] = Var[\mu_t|Y_{t-1}, \dots] - \frac{Cov^2[\mu_t, Y_t|Y_{t-1}, \dots]}{Var[Y_t|Y_{t-1}, \dots\}} = K_t^{\mu}\sigma_\varepsilon^2$$

$$q_t = Var[\beta_t|Y_t, \dots] = q_{t-1} + \sigma_b^2 - K_t^{\beta}(q_{t-1} + r_{t-1})$$

$$r_t = Cov[\mu_t, \beta_t|Y_t, \dots] = K_t^{\beta}\sigma_\varepsilon^2$$

칼만필터

(예 7-4)다음은 연도별 금 가격 (온스당 미화달러)을 나타낸 것이다.

년도	2011	2012	2013	2014	2015	2016
가격	1,571.5	1,669.0	1,411.2	1,266.4	1,160.1	1,250.8

(예 7-3)의 모형을 이용하여 상태변수들의 칼만필터 공식에 적용하라. 모형에서 오차항 분산은 다음과 같다.

$\sigma_\varepsilon^2 = 25, \sigma_a^2 = 9, \sigma_b^2 = 4.$

초기치로 다음을 사용한다.

$l_0 = 100, m_0 = 0, p_0 = q_0 = 1, r_0 = 0$

(풀이) 적용결과는 표와 같다.

년도	Y_t	l_t	m_t	p_t	q_t	r_t	K_t^μ	K_t^β
2011	1,571.5	1,494.6	214.8	16.49	11.30	5.83	0.660	0.233
2012	1,669.0	1,682.7	205.3	16.49	11.31	5.83	0.660	0.233
2013	1,411.2	1,573.5	94.1	16.49	11.31	5.83	0.660	0.233
2014	1,266.4	1,402.9	0.48	16.49	11.31	5.83	0.660	0.233
2015	1,160.1	1,242.9	-56.3	16.49	11.31	5.83	0.660	0.233
2016	1,250.8	1,228.9	-41.3	16.49	11.31	5.83	0.660	0.233

베이지안 기법에 의한 칼만 필터

- 일반적 상태공간모형
  - (관측방정식) $\boldsymbol{y}_t = G\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{w}_t, \boldsymbol{w}_t \sim WN(\boldsymbol{0}, R)$
  - (상태방정식) $\boldsymbol{x}_t = F\boldsymbol{x}_{t-1} + \boldsymbol{v}_t, \boldsymbol{v}_t \sim WN(\boldsymbol{0}, Q)$

- 상태변수 기대치 및 공분산
  - 기대치 벡터: $\boldsymbol{m}_t = E[\boldsymbol{x}_t | \boldsymbol{y}_t, \dots]$
  - 공분산행렬: $P_t = Var[\boldsymbol{x}_t | \boldsymbol{y}_t, \dots]$

- 베이지안 기법
  - $\boldsymbol{x}_t$의 사전확률분포 $\boldsymbol{x}_t | \boldsymbol{y}_{t-1}$로 부터 관측치 $\boldsymbol{y}_t$ 발생시 사후확률분포 $\boldsymbol{x}_t | \boldsymbol{y}_t$ 도출
  - 칼만 필터 공식

$$\boldsymbol{m}_t = F\boldsymbol{m}_{t-1} + K_t(\boldsymbol{y}_t - GF\boldsymbol{m}_{t-1})$$
$$P_t = B_t - K_t G B_t$$
$$K_t = B_t G^T (G B_t G^T + R)^{-1}, B_t = F P_{t-1} F^T + Q$$