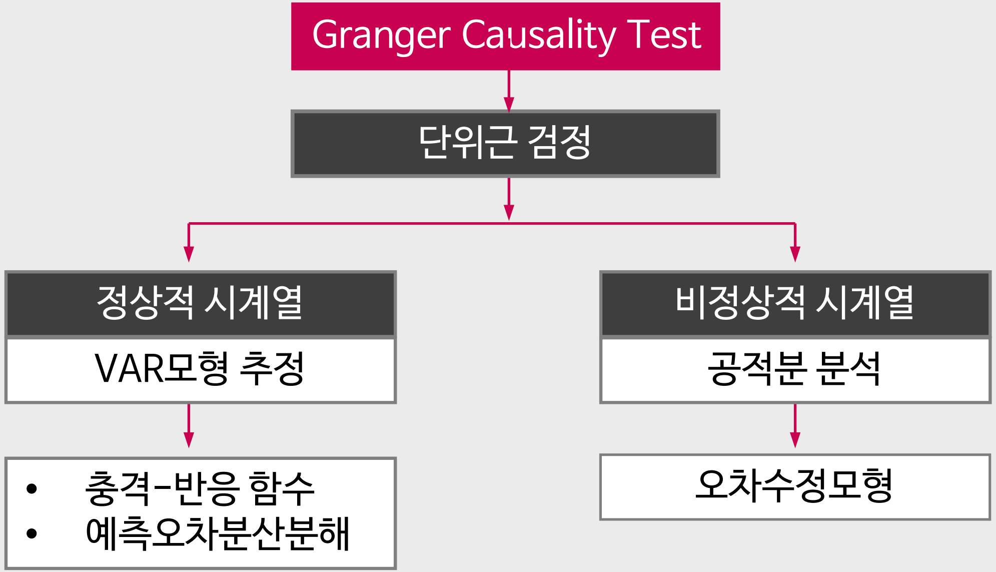
시계열 분석 기법과 응용

Week 6. 벡터자기회귀모형
6-3. 공적분과 오차수정 모형

전치혁 교수
(포항공과대학교 산업경영공학과)

VAR모형 분석


Granger Causality Test
단위근 검정
정상적 시계열
VAR모형 추정
• 충격-반응 함수
• 예측오차분산분해
비정상적 시계열
공적분 분석
오차수정모형

비정상적 시계열 분석

필요성

- VAR모형은 정상적 시계열에 대하여 적용
  - 비정상적 시계열에 대해서는 차분을 통해 정상성 확보후에 VAR모형화
- 경제/금융관련 시계열들에 각각은 비정상적이나 장기적으로 균형적 관계를 갖는 경우가 있으며 이를 공적분 (cointegration)관계라 함. (예) 소득과 소비
- 이런 경우 각각을 차분하여 정상적 시계열로 변환하여 분석하는 것보다 직접적으로 회귀 모형화하는 것이 보다 많은 정보를 얻음.
- 공적분관계가 없는 비정상적 시계열을 대상으로 회귀분석할 때 가성 회귀 (spurious regression)의 문제가 발생함에 유의
- 공적분 분석을 위해서는 각 시계열이 동일 차수의 (비정상적) 누적 시계열이어야 함.

공적분

누적 (integrated) 벡터시계열

- 벡터 시계열 $\{\boldsymbol{x}_t, t \geq 1\}$에 대해 $\{(1-B)^{d-1}\boldsymbol{x}_t, t \geq 1\}$는 비정상적이나 $\{(1-B)^{d}\boldsymbol{x}_t, t \geq 1\}$이 정상적일 때, 차수 d의 누적 벡터시계열이라 하며 $\{\boldsymbol{x}_t, t \geq 1\} \sim I(d)$ 로 표기

공적분 (cointegration)

- $I(d)$ 인 누적 벡터시계열에 대해 선형결합 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{x}_t$이 차수 d 미만의 누적 시계열이 될 때, 공적분 벡터 $\boldsymbol{\alpha}$를 갖는 공적분 관계에 있다 함
- 총 m개의 시계열이 있을 때 최대 m-1개의 공적분 벡터가 있을 수 있음. 이 때 존재하는 공적분 벡터의 최대수를 공적분 랭크 (cointegration rank)라 함
- (예) 다음 세 시계열을 고려하자.
  - $Z_{1t} = Z_{1,t-1} + a_{1t}; Z_{2t} = \beta_1 Z_{1,t} + a_{2t}; Z_{3t} = \beta_2 Z_{1,t} + \beta_3 Z_{2,t} + a_{3t}$
  - 각 시계열은 $I(1)$
  - $-\beta_1 Z_{1,t} + Z_{2t} + 0Z_{3t} = a_{2t} \sim I(0); \quad -\beta_2 Z_{1,t} - \beta_3 Z_{2,t} + Z_{3t} = a_{3t} \sim I(0)$
  - 따라서 공적분 랭크는 2

오차수정모형

- 필요성
  - 여러 시계열이 공적분 관계가 있는 경우 오차수정모형 (error correction model; ECM)을 통하여 시계열 상호간의 미치는 단기 및 장기 효과를 분석할 수 있음.
  - 공적분 관계는 ECM 표현을 위한 필요충분조건임 (그래인저 표현정리-Engle and Granger, 1987).

- ECM 유도 예
  - 두 시계열 $\{X_t\}$와 $\{Y_t\}$가 각각 $\mathrm{I}(1)$이며 다음의 공적분관계가 있다고 하자.

$$Y_t = \beta X_t + \varepsilon_t$$

  - 이 관계식을 다음과 같이 쓸수있다.

$$Y_t - (Y_{t-1} - Y_{t-1}) = \beta X_t + \beta(X_{t-1} - X_{t-1}) + \varepsilon_t$$

$$\Downarrow \quad e_{t-1} = Y_{t-1} - \beta X_{t-1} \text{ (이전 시점 오차)}$$

$$\Delta Y_t = -e_{t-1} + \beta \Delta X_t + \varepsilon_t$$

오차수정모형

- 단순형태 ECM

$$\Delta Y_t = \lambda e_{t-1} + \beta \Delta X_t + \varepsilon_t$$

  - λe_{t-1} ($\lambda < 0$): 오차수정항 (error correction term) – 이전 시점에서 예측오차가 양수이면 (실제값이 예측값보다 크면) 다음 시점에서 Y값을 축소시켜 X와 Y의 장기적관계를 유지시키는 효과
  - X값에 변화가 있으면 Y값에 영향을 줌 (단기 효과)

- 시차변수를 포함한 ECM

$$\Delta Y_t = \lambda e_{t-1} + \sum_{j=1}^{p} \beta_{1j} \Delta X_{t-j} + \sum_{j=1}^{p} \gamma_{1j} \Delta Y_{t-j} + \varepsilon_{1t} \qquad (e_{t-1} = Y_{t-1} - \beta X_{t-1})$$

$$\Delta X_t = \lambda e_{t-1} + \sum_{j=1}^{p} \beta_{2j} \Delta X_{t-j} + \sum_{j=1}^{p} \gamma_{2j} \Delta Y_{t-j} + \varepsilon_{2t}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \Delta X_t \\ \Delta Y_t \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda\beta & \lambda \\ -\lambda\beta & \lambda \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_{t-1} \\ Y_{t-1} \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{p} \begin{bmatrix} \beta_{2j} & \gamma_{2j} \\ \beta_{1j} & \gamma_{1j} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta X_{t-j} \\ \Delta Y_{t-j} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{2t} \\ \varepsilon_{1t} \end{pmatrix}$$

오차수정모형

- VAR모형과 벡터 ECM
  - 벡터 시계열의 경우 공적분관계가 있을 때 벡터 ECM (VECM)으로 확장됨
  - $I(1)$인 VAR(p)모형은 공적분관계 여부와 관계없이 다음의 VECM으로 표현

$$\boldsymbol{z}_t = \Phi_1 \boldsymbol{z}_{t-1} + \Phi_2 \boldsymbol{z}_{t-2} + \cdots + \Phi_p \boldsymbol{z}_{t-p} + \boldsymbol{a}_t$$

$$\Downarrow \quad \Pi = \Phi_1 + \Phi_2 + \cdots + \Phi_p - I,\ \Gamma_k = -\sum_{j=k+1}^{p} \Phi_j$$

$$\boldsymbol{\Delta z}_t = \Pi \boldsymbol{z}_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \Gamma_j \boldsymbol{\Delta z}_{t-j} + \boldsymbol{a}_t$$

  - 행렬 Π $(m \times m)$의 랭크 크기에 따라 3가지 경우

    $\Pi = 0$인 경우: 공적분 관계 없으며 차분 형태가 정상적인 VAR(p-1)모형으로 변환

    Π의 랭크가 m인 경우: VAR(p)모형이 이미 정상적

    Π의 랭크가 0과 m 사이인 경우: 실제적 VECM. 공적분 관계식이 랭크수만큼 있음. 이 때 $\Pi = AB^T$ 가 성립하며 행렬 B 의 열들이 공적분 벡터들이 됨.

공적분 검정

Engle-Granger 검정

- 회귀분석의 잔차 시계열에 대하여 ADF검정 실시
- 단위근이 없다면 공적분 관계있다고 결론

Johansen 검정

- 트레이스 검정
  - $H_0: r = r_0$ vs $H_1: r > r_0$
  - $r_0 = 0$에서 귀무가설 기각되면 다음으로 $r_0 = 1$을 검정하는 과정을 반복
  - 검정통계량은 우도비에 바탕으로 산출
- 최대고유치 검정
  - $H_0: r = r_0$ vs $H_1: r = r_0 + 1$
  - 역시 $r_0 = 0, 1, \ldots$ 등으로 변화시키면서 순차적으로 진행

공적분과 오차수정모형 예

(예 6-4) 옆의 그림은 2016.1 ~ 2018.12 사이 kospi200과 kospi200 선물 지수를 나타낸다. 다음을 알아보자

1. 공적분 검정
2. 공적분 관계
3. 오차수정모형

공적분과 오차수정모형 예

(예 6-4 계속)

다음은 공적분 검정 결과이다.

- 트레이스 검정 과 최대고유치 검정에서 두 시계열간 공적분관계가 있다고 판정됨

Sample (adjusted): 1/11/2016 12/28/2018
Included observations: 728 after adjustments
Trend assumption: Linear deterministic trend
Series: KOSPI200 KOSPI200_FUTURE
Lags interval (in first differences): 1to 4

Unrestricted Cointegration Rank Test (Trace)

Hypothesized No. of CE(s)	Eigenvalue	Trace Statistic	0.05 Critical Value	Prob.**
None *	0.051946	41.25473	15.49471	0.0000
At most1	0.003319	2.420325	3.841466	0.1198

Trace test indicates 1 cointegrating eqn(s)at the 0.05 level
*denotes rejection of the hypothesis at the 0.05 level
**MacKinnon-Haug-Michelis (1999) p-values

Unrestricted Cointegration Rank Test (Maximum Eigenvalue)

Hypothesized No. of CE(s)	Eigenvalue	Max-Eigen Statistic	0.05 Critical Value	Prob.**
None*	0.051946	38.83440	14.26460	0.0000
At most 1	0.003319	2.420325	3.841466	0.1198

Max-eigenvalue test indicates 1 cointegrating eqn(s) at the 0.05 level
*denotes rejection of the hypothesis at the 0.05 level
**MacKinnon-Haug-Michelis (1999) p-values

공적분과 오차수정모형 예

(예 6-4계속) 공적분관계식과 오차수정모형의 추정식을 보여준다.

공적분 관계식

$$k200_{t-1} = 0.2155 + 0.9982k200\_f_{t-1}$$

오차수정모형

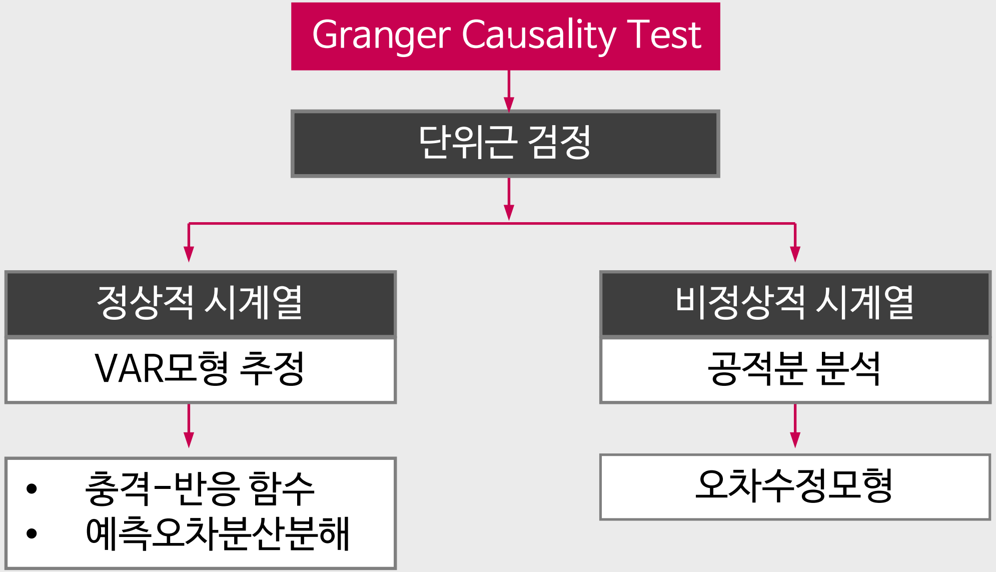
$$\Delta k200_t = 0.0364 - 0.1183e_{t-1} - 0.1867\Delta k200_{t-1} - 0.0136\Delta k200_{t-2} + 0.1561\Delta k200_{f_{t-1}} + 0.0814\Delta k200_{f_{t-2}}$$

$$\Delta k200\_f_t = 0.0365 + 0.0622e_{t-1} + 0.0811\Delta k200_{t-1} + 0.045\Delta k200_{t-2} - 0.1402\Delta k200_{f_{t-1}} - 0.0133\Delta k200_{f_{t-2}}$$

Cointegrating Eq:	CointEq1
KOSPI200(-1)	1.000000
KOSPI200_FUTURE(-1)	-0.998212 (0.00329) [-303.412]
C	-0.215456

Error Correction:	D(KOSPI200)	D(KOSPI20…
CointEq1	-0.118302 (0.12215) [-0.96850]	0.062194 (0.12706) [0.48949]
D(KOSPI200(-1))	-0.186666 (0.18259) [-1.02233]	0.081089 (0.18993) [0.42695]
D(KOSPI200(-2))	-0.013611 (0.17574) [-0.07745]	0.045013 (0.18280) [0.24624]
D(KOSPI200_FUTURE(..	0.156070 (0.17797) [0.87693]	-0.140201 (0.18512) [-0.75734]
D(KOSPI200_FUTURE(..	0.081424 (0.17234) [0.47245]	0.013280 (0.17927) [0.07408]
C	0.036415 (0.08482) [0.42932]	0.036494 (0.08823) [0.41363]

VAR모형 분석


Granger Causality Test
단위근 검정
정상적 시계열
VAR모형 추정
• 충격-반응 함수
• 예측오차분산분해
비정상적 시계열
공적분 분석
오차수정모형