시계열 분석 기법과 응용

Week 2. ARMA 모형

2-4. ARMA모형

전치혁 교수
(포항공과대학교 산업경영공학과)

ARMA 모형

- ARMA(1,1) 모형: AR(1)과 MA(1)의 복합 형태
  - $Z_t - \phi_1 Z_{t-1} = a_t - \theta_1 a_{t-1}$
  - 시점 t의 값은 시점 t-1의 값, 그리고 시점 t와 t-1의 오차항으로 생성된다
  - 정상성을 갖기 위해 모수 ϕ_1에 대한 조건 필요: $-1 < \phi_1 < 1$
  - 가역성을 위해 모수 θ_1에 대한 조건 필요: $-1 < \theta_1 < 1$

- ARMA(p,q) 모형: 시차 p까지 변수와 시차 q까지 오차항 포함
  - $Z_t - \phi_1 Z_{t-1} - \phi_2 Z_{t-2} - \cdots - \phi_p Z_{t-p} = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \cdots - \theta_q a_{t-q}$

    $\Rightarrow\ \Phi_p(B) Z_t = \Theta_q\ (B) a_t$
  - 정상성을 갖기 위해 모수 $\phi_1, \ldots, \phi_p$에 대한 조건 필요:

    다항식 $\Phi_p(x) = 0$의 p개 근의 크기(modulus)가 1보다 커야한다
  - 가역성을 갖기 위해 모수$\theta_1, \ldots, \theta_q$에 대한 조건 필요:

    다항식 $\Theta_q(x) = 0$의 q개 근의 크기(modulus)가 1보다 커야한다.

ARMA 모형

- ## ARMA(1,1) 모형의 ACF

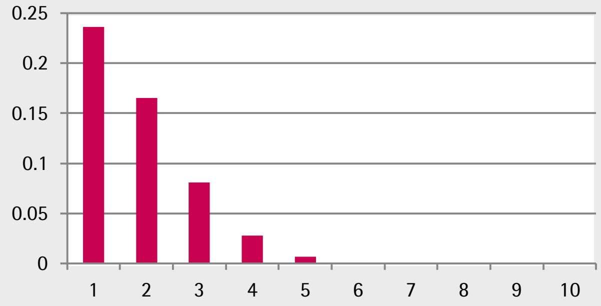
$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1} \quad -1<\phi_1< 1; -1 < \theta_1< 1$$

$$\rho(1) = \frac{(\phi_1 - \theta_1)(1-\phi_1\theta_1)}{1+\theta_1^2 - 2\phi_1\theta_1}$$

$$\rho(k) = \phi_1^{k-1}\rho(1),\ k = 2, 3, \ldots :$$

지수적으로 감소하는 패턴

ACF



- ## ARMA(1,1) 모형의 PACF

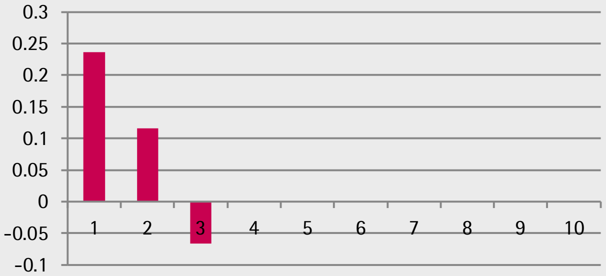
$$P(1) = \rho(1) = \frac{(\phi_1 - \theta_1)(1-\phi_1\theta_1)}{1+\theta_1^2 - 2\phi_1\theta_1}$$

$$P(2) = \frac{\rho(2)-\rho^2(1)}{1-\rho^2(1)} = \frac{\rho(1)(\phi_1 - \rho(1))}{1-\rho^2(1)}$$

$$P(3) = \frac{\rho^3(1) - 2\rho(1)\rho(2) + \rho(1)\rho^2(2)}{1 - 2\rho^2(1) + 2\rho^2(1)\rho(2) - \rho^2(2)}$$

지수적으로 감소하는 패턴

PACF



ϕ_1=0.7, θ_1=0.5

ARMA 모형

- ARMA(p,q) 모형

$$Z_t - \phi_1 Z_{t-1} - \phi_2 Z_{t-2} - \cdots - \phi_p Z_{t-p} = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \cdots - \theta_q a_{t-q}$$

$$\Rightarrow \ \Phi_p(B) Z_t = \Theta_q \ (B) a_t$$

ACF

- $\rho(k) = \phi_1 \rho(k-1) + \cdots + \phi_p \rho(k-p),\ k \geq \max(p, q+1)$
- $p \geq q+1$일 때, ACF는 AR(p)모형과 유사하게 0으로 떨어진다.
- $p \leq q$ 일 때, 처음 $q-p$ 값은 별개의 값을 갖고 이 이후 AR(p)모형과 유사하게 0으로 떨어진다.

PACF

- $p \geq q+1$일 때, PACF는 처음 $p-q$ 값은 별개의 값을 갖고 이 이후 MA(q)모형과 유사하게 0으로 떨어진다.
- $p \leq q$ 일 때, 처음부터 MA(q) 모형과 유사하게 0으로 떨어진다.

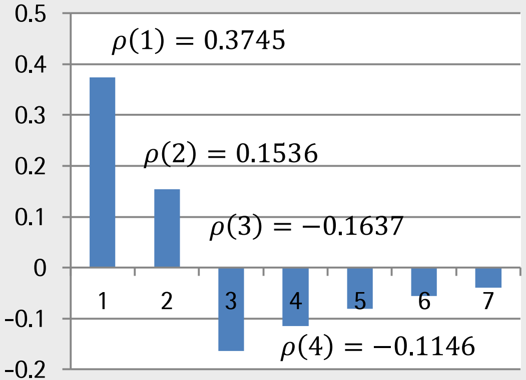
ARMA 모형

ARMA(1,3) 모형 vs ARMA(3,1) 모형

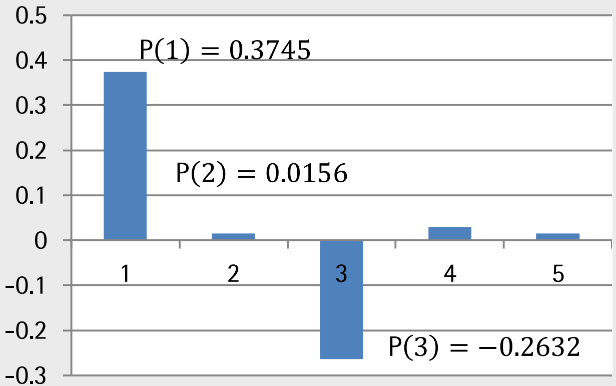
- ARMA(1,3) 모형

$$Z_t - 0.7Z_{t-1} = a_t - 0.7a_{t-1} - 0.2\, a_{t-2} - 0.5a_{t-3}$$

q-p=2이므로 ACF의 처음 2개는 별개 값이고 그 이후 지수적으로 감소;
PACF는 처음부터 지수적으로 감소



ACF



PACF

ARMA 모형

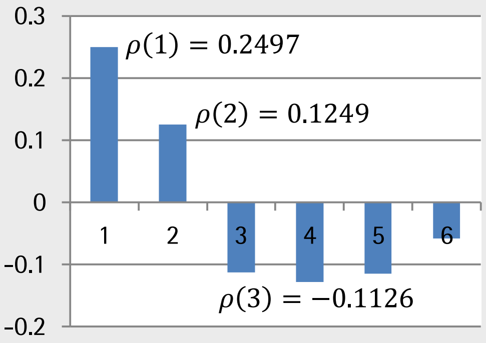
ARMA(3,1) 모형 vs ARMA(1,3) 모형

- ARMA(3,1) 모형

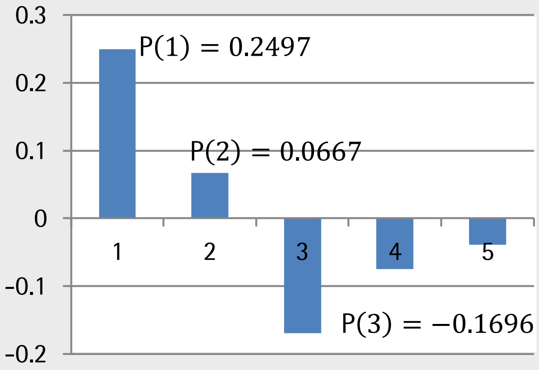
$$Z_t - 0.7Z_{t-1} + 0.1Z_{t-3} = a_t - 0.5a_{t-1}$$

$$\rho(k) = 0.7\rho(k-1) - 0.2\rho(k-3),\ \ k = 2,3,4,\ldots$$

p-q=2이므로 ACF의 처음 부터 지수적으로 감소; PACF는 처음 2개는 별개 값이며 그 이후 지수적으로 감소



ACF



PACF

ARMA 모형

ARMA모형의 이론적 ACF와 PACF의 패턴

모형	ACF	PACF
AR(p)	지수적으로 감소	시차 p 이후 절단
MA(q)	시차 q 이후 절단	지수적으로 감소
ARMA(p, q)	시차 (q-p) 이후 지수적 감소	시차 (p-q) 이후 지수적 감소