시계열 분석 기법과 응용

Week 2. ARMA 모형
2-3. AR모형과 MA모형

전치혁 교수
(포항공과대학교 산업경영공학과)

ARMA 모형

- AR 모형
  - AR 표현방식이며 유한 시차로 구성
  - AR(1): 시차 1 변수 포함

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + a_t$$

- MA 모형
  - MA표현방식이며 유한 시차로 구성
  - MA(1): 시차 1 백색잡음 포함

$$Z_t = a_t - \theta a_{t-1}$$

- ARMA 모형
  - AR방식과 MA방식이 결합된 형태
  - ARMA(1,1): 시차1의 변수와 시차1의 백색잡음 포함

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + a_t - \theta a_{t-1}$$

AR 모형

- AR(1) 모형: 가장 단순한 상태
  - $Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + a_t$
  - a_t는 평균 0, 분산 σ_a^2의 독립인 백색잡음 (white noise)이라 부르는 오차항
  - 시점 t의 값은 시점 t-1의 값과 오차항으로 생성된다
  - 상수항을 포함시킬 수 있으나 통상 Z_t의 평균을 0으로 가정하여 생략함
  - 정상성을 갖기 위해 모수 ϕ_1에 대한 조건 필요: $-1 < \phi_1 < 1$

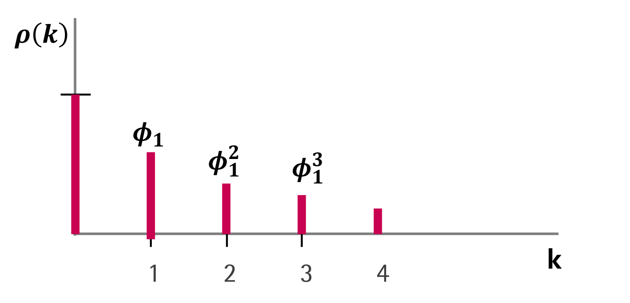
- AR(2) 모형: 시차 2변수까지 포함
  - $Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + a_t$
  - 정상성 조건: $-1 < \phi_2 < 1, \phi_1 + \phi_2 < 1, \phi_2 - \phi_1 < 1$

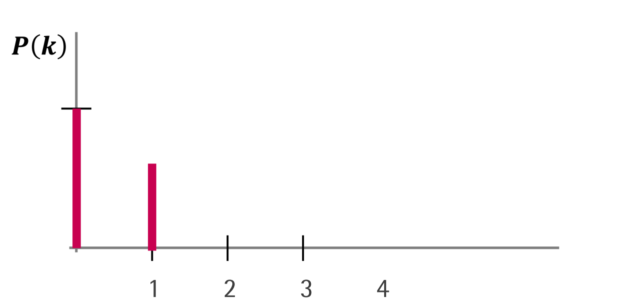
- AR(p) 모형: 시차 p의 변수까지 포함
  - $Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \cdots + \phi_p Z_{t-p} + a_t$
  - 정상성을 갖기 위해 모수 $\phi_1, \dots, \phi_p$에 대한 조건 필요: 다소 복잡

AR 모형

- AR(1) 모형의 ACF
  - $Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + a_t$ -1<ϕ_1<1
  - $Var[Z_t] = \gamma(0) = \frac{\sigma_a^2}{1-\phi_1^2}$
  - $\gamma(k) = \phi_1^k \gamma(0),\ k = 0, 1, 2, \ldots$
  - $\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} = \phi_1^k,\ k = 0, 1, 2, \ldots$:
    지수적으로 감소하는 패턴

- AR(1) 모형의 PACF
  - $P(1)$=$\rho(1)$=ϕ_1
  - $P(k)$=0, $k = 2$, 3, ⋯: 시차 1 이후 절단 패턴





AR 모형

• AR(2) 모형의 ACF

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + a_t$$

- 양변에 분산을 취하면

$$(1 - \phi_1^2 - \phi_2^2)\gamma(0) = \sigma_a^2 + 2\phi_1\phi_2\gamma(1)$$

- 양변에 Z_{t-1} 곱하고 기대치 취하면

$$\gamma(1) = \phi_1\gamma(0) + \phi_2\gamma(1) \Rightarrow \gamma(1) = \frac{\phi_1\gamma(0)}{1-\phi_2}$$

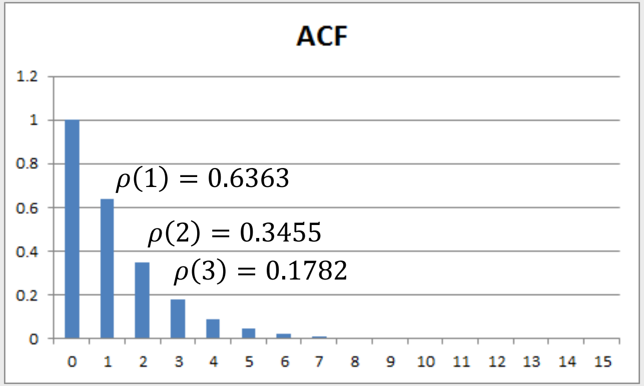
- 분산은 다음과 같다

$$\gamma(0) = \frac{1-\phi_2}{(1+\phi_2)(1+\phi_1-\phi_2)(1-\phi_1-\phi_2)}\sigma_a^2$$

- AR(2)의 ACF

$$\rho(1) = \frac{\phi_1}{1-\phi_2},\ \rho(k) = \phi_1\rho(k-1) + \phi_2\rho(k-2),\ k = 2,3,\ldots$$

(지수적으로 감소)



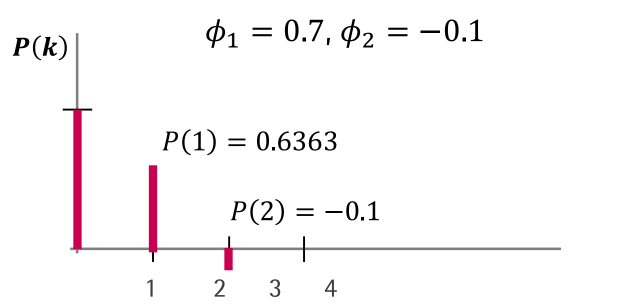
$\phi_1 = 0.7,\ \phi_2 = -0.1$

AR 모형

- AR(2) 모형의 PACF

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + a_t$$

- $\boldsymbol{P}(\mathbf{1}) = \boldsymbol{\rho}(\mathbf{1}) = \frac{\phi_1}{1-\phi_2}$
- $\boldsymbol{P}(2) = \phi_2$
- $\boldsymbol{P}(k) = 0,\ k = 3,4,\ldots$ (시차2이후 절단)



$P(3)$는 다음 회귀모형에서 ϕ_{33} 값:

✓ $Z_t = \phi_{31} Z_{t-1} + \phi_{32} Z_{t-2} + \phi_{33} Z_{t-3} + a_t$

✓ AR(2)모형과 비교하면 $P(3) = \phi_{33} = 0$

AR 모형

- AR(p) 모형

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \cdots + \phi_p Z_{t-p} + a_t$$

$$\Rightarrow (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p) Z_t = a_t \Rightarrow \Phi_p(B) Z_t = a_t$$

ACF

Yule-Walker방정식을 풀어 산출 가능

$$\rho(k) = \phi_1 \rho(k-1) + \phi_2 \rho(k-2) + \cdots + \phi_p \rho(k-p),\ k = 1,2,\ldots$$

정상성 조건

다항식 $\Phi_p(x) = 0$의 p개 근의 크기(modulus)가 1보다 커야한다.

MA 모형

- MA(1) 모형: 시차1의 백색잡음 포함

$$\boldsymbol{Z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1}}$$

  - a_t는 평균 0, 분산 σ_a^2의 독립인 백색잡음 (white noise)이라 부르는 오차항
  - 시점 t의 값은 시점 t와 시점 t-1의 오차항으로 생성된다
  - 정상성을 갖는다.
  - AR형태로 표현하기 위해 모수 θ_1에 대한 가역성 (invertibility)조건 필요: $-1 < \theta_1 < 1$

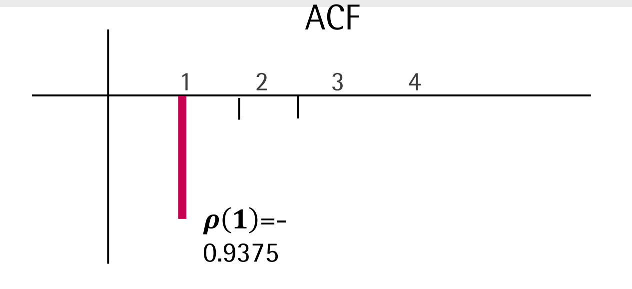
- MA(2) 모형: 시차 2의 백색잡음까지 포함
  - $Z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2}$
  - 가역성 조건: $-1 < \theta_2 < 1, \theta_1 + \theta_2 < 1, \theta_2 - \theta_1 < 1$

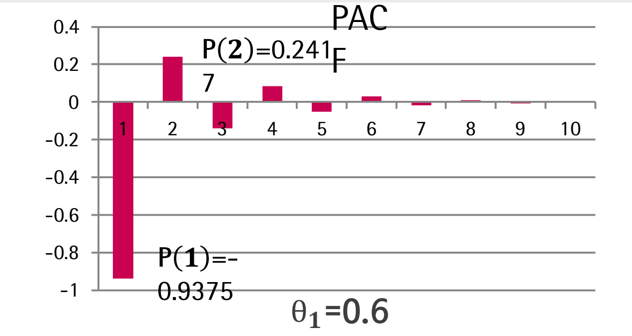
- MA(q) 모형: 시차 q의 백색잡음까지 포함
  - $Z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \cdots - \theta_q a_{t-q}$
  - 가역성을 갖기 위해 모수 $\theta_1, \ldots, \theta_q$에 대한 조건 필요: 다소 복잡

MA 모형

- MA(1) 모형의 ACF
  - $Z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} \quad -1 < \theta_1 < 1$
  - $Var[Z_t] = \gamma(0) = (1+\theta_1^2)\,\sigma_a^2$
  - $\rho(k) = \begin{cases} \frac{-\theta_1}{1-\theta_1^2}, & k=1 \\ 0, & k \geq 2 \end{cases}$: 시차 1 이후 절단 패턴

- MA(1) 모형의 PACF
  - $P(1) = \rho(1) = \frac{-\theta_1}{1-\theta_1^2}$
  - $P(2) = \frac{\rho(2)-\rho^2(1)}{1-\rho^2(1)} = \frac{-\theta_1^2(1-\theta_1^2)}{1-\theta_1^6}$
  - $P(k) = \frac{-\theta_1^k(1-\theta_1^2)}{1-\theta_1^{2(k+1)}}, k = 1, 2, \ldots$: 지수적으로 감소 패턴





MA 모형

- MA(2) 모형의 ACF 와 PACF

$$Z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2}$$

분산

$\gamma(0) = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma_a^2$

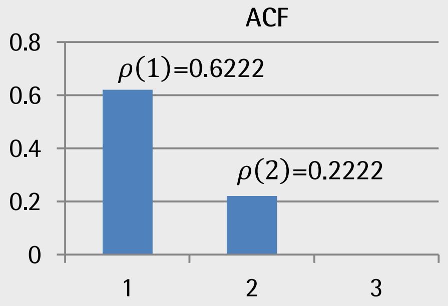
ACF

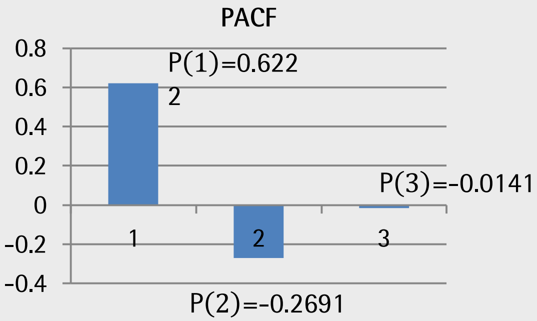
$\rho(1) = \frac{-\theta_1 + \theta_1\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}, \rho(2) = \frac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}, \rho(k) = 0, k = 3,4, \ldots$

(시차 2 이후 절단 형태)

PACF

지수적으로 감소하는 형태





MA 모형

- MA(q) 모형

$$Z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \cdots - \theta_q a_{t-q}$$

$$\Rightarrow Z_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q) a_t \Rightarrow Z_t = \Theta_q(B) a_t$$

분산

$$\gamma(0) = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \cdots + \theta_q^2)\sigma_a^2$$

가역성 조건

다항식 $\Theta_q(x) = 0$의 q개 근의 크기(modulus)가 1보다 커야 한다.

ACF

$$\rho(k) = \frac{-\theta_k + \theta_{k+1}\theta_1 + \cdots + \theta_q\theta_{q-k}}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \cdots + \theta_q^2}, \; k = 1,2,\ldots,q \quad \rho(k) = 0, \; k \geq q+1$$ (절단 패턴)

PACF

지수적으로 감소