시계열 분석 기법과 응용

Week 5. ARCH/GARCH 모형
5-2. GARCH 모형

전치혁 교수
(포항공과대학교 산업경영공학과)

GARCH 모형

- GARCH (Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity) 모형은 Bollerslev (1986)이 ARCH모형을 확장한 것임.

- 조건부 분산항에 과거 시차의 조건부 분산항들이 추가된 것으로 다음의 형태를 가짐
  - $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q u_{t-q}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \cdots + \beta_p \sigma_{t-p}^2$
  - 오차항이 GARCH(p,q) 모형을 따른다고 함
  - alpha들을 ARCH 항, beta들을 GARCH 항이라 함.
  - ARCH모형은 제곱오차항이 AR모형을 따르는 반면 ,GARCH모형은 제곱오차항이 ARMA모형을 따르게 됨.

GARCH 모형

GARCH모형의 정상성 조건

- 오차항의 조건없는 분산 (unconditional variance)은 시간에 따라 일정 (상수)

$$Var[u_t] = E[u_t^2] = \sigma_u^2$$

- GARCH모형이 정상적일 때 다음이 성립

$$\sigma_u^2 = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\cdots-\alpha_q-\beta_1-\cdots-\beta_p}$$

- ARCH(q)모형의 정상적 조건

$$\sum_{i=1}^{q} \alpha_i + \sum_{i=1}^{p} \beta_i < 1$$

GARCH 모형

GARCH 모형의 예측

- 평균방정식: $Y_t = c + u_t$ (수평적 모형)
- 분산방정식: $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$ GARCH(1,1)
- 시계열 (반응치) 예측

$$f_{T,k} = E[Y_{T+k}|Y_T, \dots] = c,\ k = 1,2,\dots$$

- 시계열 예측오차 분산

$$v_{T,1} = Var[Y_{T+1}|Y_T, \dots] = Var[u_{T+1}|Y_T, \dots] = E[\sigma_{T+1}^2 \big| Y_T, \dots]$$

$$v_{T,k} = Var[Y_{T+k}|Y_T, \dots] = Var[u_{T+k}|Y_T, \dots] = E[\sigma_{T+k}^2|Y_T, \dots],\ k = 1,2,\dots$$

- 조건부 분산 (변동성) 예측
  - 한단계이후 예측: $h_{T,1} = E[\sigma_{T+1}^2 \big| Y_T, \dots] = E[\alpha_0 + \alpha_1 u_T^2 + \beta_1 \sigma_T^2 \big| Y_T, \dots] = \alpha_0 + \alpha_1 u_T^2 + \beta_1 \sigma_T^2$
  - 2단계이후 예측: $h_{T,2} = E[\sigma_{T+2}^2 \big| Y_T, \dots] = E[\alpha_0 + \alpha_1 u_{T+1}^2 + \beta_1 \sigma_{T+1}^2 \big| Y_T, \dots] = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) h_{T,1}$

GARCH 모형의 변형

- GARCH-M 모형

  ARCH-M 모형과 같이 평균방정식에 조건부 분산을 포함시킨 모형

  - 평균방정식: $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \gamma g(\sigma_t^2) + u_t$
  - 분산방정식: $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q u_{t-q}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \cdots + \beta_p \sigma_{t-p}^2$
    - 여기서 $g(\sigma_t^2)$ 는 다음 함수 사용
    - $g(\sigma_t^2) = \sigma_t^2;\ g(\sigma_t^2) = \sigma_t;\ g(\sigma_t^2) = \ln(\sigma_t^2)$

- E-GARCH 모형

  Nelson (1991)이 제안한 것으로 로그 변동성을 모형화

  - 분산방정식: $log(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \frac{\alpha_i |u_{t-i}| + \gamma_i u_{t-i}}{\sigma_{t-i}} + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \log(\sigma_{t-j}^2)$
  - 나쁜 뉴스가 좋은 뉴스보다 변동성에 더 큰 충격을 준다고 가정

GARCH 모형의 변형

- T-GARCH 모형
  - Glosten 등 (1993)제안
  - 분산방정식: $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q}(\alpha_i+\gamma_i I_{t-i})\, u_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j\, \sigma_{t-j}^2$
  - 여기서 $I_{t-i} = \begin{cases} 1 & u_{t-i} < 0 \\ 0 & u_{t-i} \geq 0 \end{cases}$
  - 오차항의 부호에 따라 변동성에 미치는 영향을 다르게 평가하는 모형
  - 즉, 오차항이 양일 때 (좋은 소식) 조건부 분산에 미치는 영향보다 오차항이 음일 때 (나쁜 소식) 미치는 영향이 크도록 고안
  - 이와 유사한 비대칭 모형이 다수 있음