מבחן באלגוריתמים – אביב תשפ"א, מועד ב'

- המבחן כולל **4** שאלות ויש לענות על כולן.
- יש לנמק את כל תשובותיכם – תשובה ללא נימוק לא תזכה בניקוד!

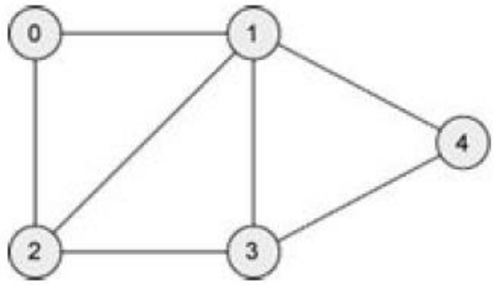
בהצלחה!

1. (25 נק') בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$ וצומת $s\in V$, הקשת (u,v) תיקרא **מיוחדת עבור צומת s** אם $\delta(s,u)=\delta(s,v)$.

תזכורת: $\delta(x,y)$ מוגדר כאורך המסלול הקצר ביותר בין x ל-y.

לדוגמה, בגרף שבציור, הקשת $(3,4)$ היא מיוחדת עבור צומת 0, כי $\delta(0,3)=\delta(0,4)=2$.

גם הקשת $(1,2)$ מיוחדת עבור צומת 0, כי $\delta(0,1)=\delta(0,2)=1$.



כיתבו אלגוריתם המקבל גרף לא מכוון $G=(V,E)$ וקשת (u,v), המוצא **את כל הצמתים ב- G שעבורם (u,v) היא קשת מיוחדת**. אם אין אף צומת כזה, יוחזר $false$.

על זמן הריצה של האלגוריתם להיות $O(V+E)$.

הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.

פתרון:

האלגוריתם:

1. נריץ BFS מ-u לחישוב המרחקים $d_1(v)$ לכל $w\in V$.
2. נריץ BFS מ-v לחישוב המרחקים $d_2(v)$ לכל $w\in V$.
3. נעבור על כל הקודקודים, כל קודקוד w שעבורו מתקיים $d_1(v)=d_2(v)\neq\infty$ מוחזר כפלט.

זמן ריצה:

1. $O(V+E)$.
2. $O(V+E)$.
3. $O(V)$.

סה"כ: $O(V+E)$.

הוכחת נכונות:

טענה: קודקוד w מוחזר ע"י האלגוריתם אמ"מ $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ היא קשת מיוחדת עבורו.

הוכחה: אם קשת $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ היא קשת מיוחדת עבור קודקוד w אז מתקיים: $\delta(w,u)=\delta(w,v)$.

מכיוון שהוכחנו נכונות BFS, נקבל כי $d_1(w)=d_2(w)$ (G לא מכוון) ולכן w מוחזר כפלט.

להיפך, אם עבור w מתקיים $d_1(w)=d_2(w)$, לפי נכונות BFS זה שקול ל-$\delta(w,u)=\delta(w,v)$, ולכן

$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ היא קשת מיוחדת עבור w.

2. (30 נק') נתונה סדרה $A=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ של n מספרים שלמים וחיוביים.

תת סדרה $(a_{i_1},a_{i_2},\dots,a_{i_k})$ של A נקראת **בדלנית** אם היא לא מכילה אף זוג איברים עוקבים מהסדרה A.

תארו אלגוריתם יעיל ככל הניתן **בסגנון תכנות דינאמי** אשר בהינתן סדרה A מוצא **תת-סדרה בדלנית שמכפלת איבריה גדולה ככל האפשר**, מחזיר את המכפלה שלה, ומדפיס את איבריה.

לדוגמא, עבור הסדרה $A=<2,8,2,6,1,2,5,5,3>$ על האלגוריתם להחזיר 720 ולהדפיס 8,6,5,3 .

הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.

פתרון:

נגדיר מערך M באורך $n+1$ כך ש-$M[i]$- מוגדר להיות המכפלה הגדולה ביותר האפשרית של תת-סידרה בדלנית של $(a_0,a_1,\dots,a_i)$ כאשר נגדיר $a_0=1$.

נבנה נוסחא רקורסיבית:

$i=0$: $M[0]=1$, $i=1$: $M[1]=a_1$

$i\geq 2$: $M[i]=\max\{M[i-2]*a_i,\ M[i-1]\}$

האלגוריתם:

נמלא את המערך משמאל לימין באמצעות הנוסחא הרקורסיבית הנ"ל.

נחזיר את $M[n]$ כתוצאת המכפלה המקסימלית:

```
Max_Product(A,n)

M[0]=1; M[1]=A[1];

for(i=2;i<=n;i++)
M[i]=max(M[i-2]*A[i],M[i-1]);

return M[n];
```

נשחזר את איברי המכפלה המקסימלית על ידי שימוש ב-M שמילאנו, החל מ-$i=n$ ע"י האלגוריתם הבא:

```
Print_MP (M,i)

if (i>1) {

        if(M[i]==M[i-1])  Print_MP(M,i-1);

        else {

            Print_MP(M,i-2);

             Print(M[i]/M[i-2]);

            }

        }

if(i==1)    Print(M[1]);
```

זמן ריצה:

מילוי המערך M: $n \cdot O(1) = O(n)$

החזרת המכפלה המקסימלית: $O(1)$

שחזור אברי המכפלה המקסימלית: $n \cdot O(1) = O(n)$

סה"כ: $O(n)$

הסבר נכונות הנוסחא הרקורסיבית:

עבור האיבר שהוספנו לסדרה: $a_0 = 1$. הוא לא ישפיע על התוצאה.

עבור האיבר, a_1 מכיוון שהמספרים שלמים וחיוביים מתקיים $a_1 \geq 1$ ולכן ע״י שימוש בו בלבד (וב-a_0)

ניתן להשיג סדרה בדלנית עם מכפלה ששווה מקסימום a_1.

כשמגיעים לאיבר i , יש 2 אפשרויות:

אם נחליט לצרף אותו לסדרה הבדלנית, ערך המכפלה המקסימלית שנוכל להשיג ע״י שימוש ב-$(a_0, a_1, \dots, a_i)$

הוא $M[i-2]* a_i$ (כי אז אסור להשתמש ב- a_{i-1})

אם נחליט לא לצרף אותו לסדרה הבדלנית, אז מה שניתן להשיג ע״י שימוש ב-$(a_0, a_1, \dots, a_i)$ איתו , זה מה שניתן להשיג בלעדיו, כלומר, $M[i-1]$, ובין שתי האפשרויות האלה בוחרים את זו שנותנת את המכפלה המקסימלית.

נכונות השחזור נובעת מנכונות הנוסחא הרקורסיבית.

3. (25 נק׳)

הגדרה: צביעה חוקית של גרף לא מכוון $G = (V, E)$ ב- k צבעים $\{1,2,3 \dots, k\}$ היא פונקציה

$c: V \to \{1,2, \dots k\}$ המתאימה צבע לכל קודקוד , כך שאין קשת ששני קצותיה צבועים באותו הצבע.

אם אפשר לצבוע את G בצורה חוקית ב-k צבעים, אומרים ש G הוא ***k*-צביע**.

נגדיר את **בעיית $4 - COL$:**

<u>קלט</u>: גרף לא מכוון $G = (V, E)$.

<u>פלט</u>: האם ניתן לצבוע את G בצורה חוקית ב-4 צבעים? (כלומר, האם G הוא 4-צביע?)

א. (10 נק׳) **הראו ש- $4 - COL \in NP$.**

פתרון:

בהינתן ניחוש-צביעה של הגרף (כלומר, רשימת קודקודים, וצבע לכל קודקוד)

התכנית האי-דטרמיניסטית תבדוק:

1. שכמות הצבעים קטנה שווה ל-4 (למשל ע״י שמירת 4 הצבעים הראשונים והשוואת השאר מולם)
2. שהקצוות של כל קשת בגרף צבועים בצבעים שונים.

אם שתי הבדיקות מצליחות, התכנית תחזיר ״כן״, אחרת, תחזיר ״לא״.

זמן ריצת התכנית $O(V + E)$, פולינומי ביחס לגודל הגרף והניחוש.

ב. (15 נק׳) נגדיר את **בעיית** $\mathbf{3-COL}$:

<u>קלט</u>: גרף לא מכוון $G=(V,E)$.

<u>פלט</u>: האם ניתן לצבוע את G בצורה חוקית ב-3 צבעים? (כלומר, האם G הוא 3-צביע?)

ידוע ש– $\mathbf{3-COL}$ היא בעיה NP-שלמה.

הוכיחו: $\mathbf{4-COL}$ היא NP-שלמה.

פתרון:

בהנתן גרף $G=(V,E)$ לא מכוון, ניצור את הגרף $G'=(V',E')$ כך:

$V'=V\cup\{y\},\quad y\notin V$

$E'=E\cup\{(y,v)\},\quad \forall v\in V$

כלומר, מוסיפים ל-G קודקוד חדש y, ומחברים אותו בקשת לשאר הקודקודים.

הרדוקציה יעילה: להוסיף קודקוד ולחברו בקשת ליתר הקודקודים לוקח $O(V)$, פולינומי בגודל G.

הרדוקציה תקפה:

טענה: G הוא 3-צביע אמ״מ G' הוא 4-צביע.

הוכחה: אם G הוא 3-צביע, אז G' הוא 4-צביע: נצבע את כל קודקודי V' (חוץ מ-y) באותם הצבעים (3 לכל היותר) כמו בצביעה הקיימת שלG, ואת y נצבע בצבע נוסף. סה״כ משתמשים ב-4 צבעים לכל היותר, והצביעה חוקית כי נתון כי הצביעה שלG ב-3 צבעים חוקית, וכן, ל-y יש צבע שונה מכל שכניו.

אם G' הוא 4 צביע, אנו יודעים שקודקוד y הוא היחיד עם הצבע שלו- כי לפי הבניה כל יתר הקודקודים הם שכניו. ולכן יתר הקודקודים $y\neq v\in V'$ צבועים באופן חוקי ב-3 צבעים (לכל היותר), ומכיוון שכל הקודקודים האלה הם בדיוק קודקודי V, G הוא 3-צביע.

4. (20 נק׳) נתון גרף לא מכוון, קשיר וממושקל $G=(V,E)$.

מריצים על הגרף את אלגוריתם קרוסקל *Kruskal* למציאת עץ פורש מינימלי, ומתקבל עץ פורש שמשקלו 80.

מוסיפים לגרף קשת חדשה e שמשקלה 5 (הקשת החדשה מחברת בין שני צמתים קיימים), ומריצים שוב את האלגוריתם. מתקבל עץ פורש מינימלי שמשקלו x .

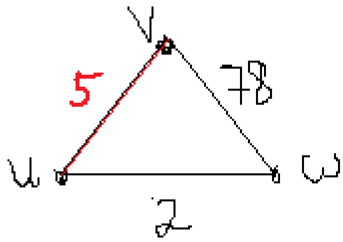
לכל אחת מהטענות הבאות, החליטו האם היא נכונה או לא. נמקו תשובתכם.

א. נכון/לא נכון: אם $x = 80$ אז הקשת החדשה נמצאת לפחות על מעגל אחד שכל הקשתות בו במשקל 5 לכל היותר.

הטענה נכונה. הקשת החדשה בהכרח סוגרת מעגל יחיד בעפ״מ, ואם היא היתה קלה ממש מאחת הקשתות במעגל אז אותה הקשת לא הייתה נכנסת לעפ״מ, לפי אופן פעולת קרוסקל, והמשקל שלו היה קטן ולא נשאר זהה.

ב. נכון/לא נכון: אם $x < 80$ אז הקשת החדשה נמצאת לפחות על מעגל אחד שכל הקשתות בו במשקל גדול ממש מ-5.

הטענה לא נכונה. דוגמא נגדית:



לפני הוספת הקשת *(u,v)* משקל עפ״מ היה 80, אחרי הוספתה קטן ל-7, אבל יש קשת במשקל 2<5 במעגל אותו היא סוגרת.