# אלגוריתמים - תרגיל מס' 1

תאריך אחרון להגשה : 10.5.2023

**יש להקפיד על הוכחות מסודרות ומדויקות וכתב נקי ומסודר.**

**ההגשה בזוגות – חובה! למתקשים למצוא שותף, נא להעלות הודעה למודל.**

**1.** יהי $G$ גרף מכוון וחסר מעגלים בעל n קודקודים. **הוכיחו או הפריכו:**

**א.** יהיו $u,v \in V$ שני קודקודים ב-$G$, כך שכל קודקודי $G$ יישיג מ-u וכך ש-v יישיג מכל הקודקודים האחרים. אזי בכל מיון טופולוגי של $G$, u הוא הראשון ו-v הוא האחרון במיון.

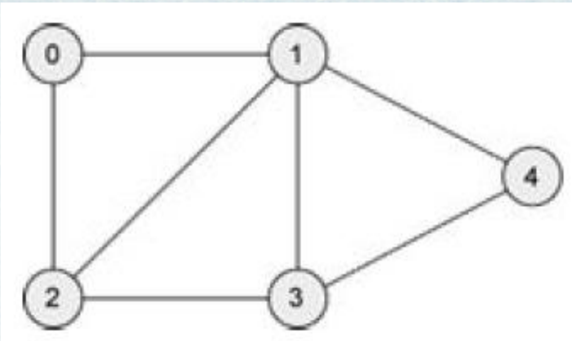
**ב.** יהי $v_1 < v_2 < \ldots < v_n$ מיון טופולוגי של קודקודי הגרף $G$. יהי $G'$ גרף חדש הנוצר על ידי **הוספת קשת אחת** ($v_b \rightarrow v_a$) ל-$G$ עבור זוג קודקודים המקיים $v_b > v_a$. אזי בגרף החדש $G'$ יש בהכרח מעגל.

**2.** בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$ וצומת $s \in V$, הקשת $(u, v)$ תיקרא **מיוחדת עבור צומת $s$** אם $\delta(s, u) = \delta(s, v)$.

תזכורת: $\delta(x, y)$ מוגדר כאורך המסלול הקצר ביותר בין $x$ ל-$y$.

לדוגמה, בגרף שבציור, הקשת $(3,4)$ היא מיוחדת עבור צומת 0, כי $\delta(0,3) = \delta(0,4) = 2$ .

גם הקשת $(1,2)$ מיוחדת עבור צומת 0, כי $\delta(0,1) = \delta(0,2) = 1$.




כיתבו אלגוריתם המקבל גרף לא מכוון $G = (V, E)$ וקשת $(u, v)$, המוצא **את כל הצמתים ב- $G$ שעבורם $(u, v)$ היא קשת מיוחדת**. אם אין אף צומת כזה, יוחזר $false$.

על זמן הריצה של האלגוריתם להיות $O(V + E)$.

הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.

**3.** נתון גרף לא מכוון $G=(V,E)$. תארו אלגוריתם יעיל ככל הניתן המקבל קודקוד מוצא s וקודקוד יעד t, וקשת $e=(u,v)$, ובודק האם $e$ הזו נמצאת על **כל** המסלולים הקצרים ביותר מ-s ל-t ב-$G$.
נמקו נכונות ונתחו סיבוכיות.

**4.** נתון גרף מכוון $G=(V,E)$ וקבוצת קודקודים $S \subseteq V$. כתבו אלגוריתם יעיל ככל האפשר הבודק האם קיים מסלול העובר דרך כל צמתי $S$ (מותר לבקר באותו הצומת ואותה הקשת כמה פעמים). נמקו נכונות ונתחו סיבוכיות.

**בהצלחה!**

רז ויס 315495622

נטליה בסנוג 317450013

**1.** יהי $G$ גרף מכוון וחסר מעגלים בעל n קודקודים. **הוכיחו או הפריכו:**

**א.** יהיו $u, v \in V$ שני קודקודים ב-$G$, כך שכל קודקודי $G$ יישיג מ-u וכך ש-v יישיג מכל הקודקודים האחרים. אזי בכל מיון טופולוגי של $G$, u הוא הראשון ו-v הוא האחרון במיון.

אם קיים מסלול מ-u ל-V

אז u בהכרח מופיע לפני

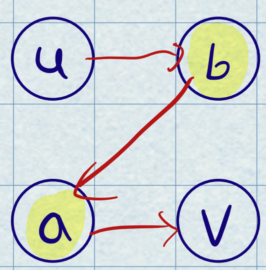
V.

אם כל קודקודי G יישיגו מ-u הרי שקיים מסלול

מ-u לכל אחד מהקודקודים.

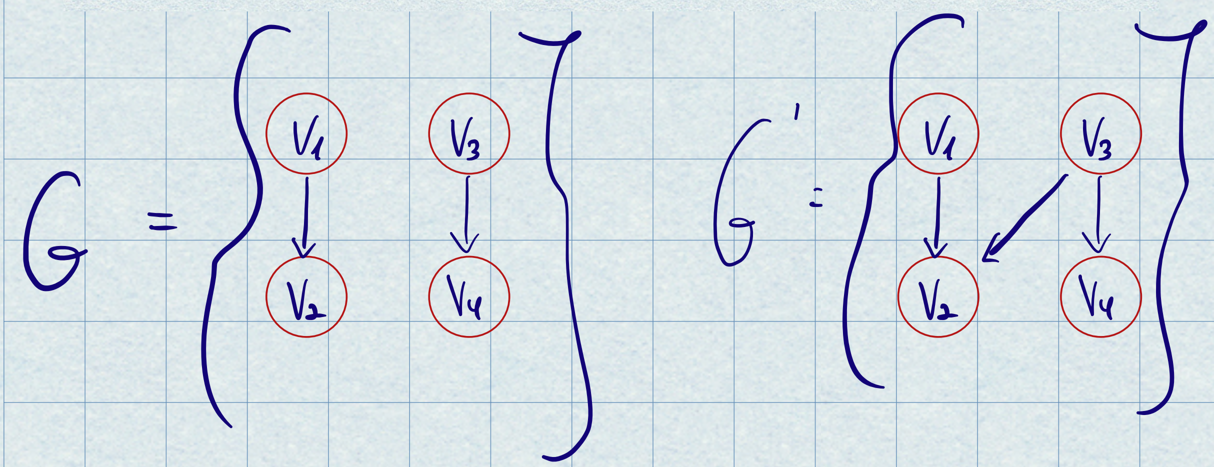
אם V יישיג מכל הקודקודים האחרים אומר קיים מסלול

מ- הקודקודים ל-V.




ולכן הטענה נכונה.

**ב.** יהי $v_1 < v_2 < \ldots < v_n$ מיון טופולוגי של קודקודי הגרף $G$. יהי $G'$ גרף חדש הנוצר על ידי **הוספת קשת אחת** $(v_b \to v_a)$ ל-$G$ עבור זוג קודקודים המקיים $v_a < v_b$. אזי בגרף החדש $G'$ יש בהכרח מעגל.



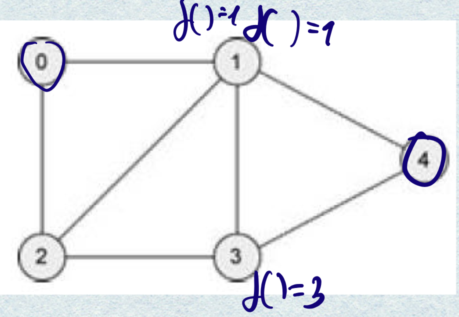

דוגמא נגדית. במידה והגרף לא קשיר יהיו 2 רכיבי קשירות ולכן במידה ונוסיף קשת בין הרכיבי קשירות לא ייסגר מעגל.

**2.** בהינתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$ וצומת $s \in V$, הקשת $(u, v)$ תיקרא **מיוחדת עבור צומת $s$** אם $\delta(s, u) = \delta(s, v)$.

תזכורת: $\delta(x, y)$ מוגדר כאורך המסלול הקצר ביותר בין $x$ ל-$y$.

לדוגמה, בגרף שבציור, הקשת $(3,4)$ היא מיוחדת עבור צומת 0, כי $\delta(0,3) = \delta(0,4) = 2$.

גם הקשת $(1,2)$ מיוחדת עבור צומת 0, כי $\delta(0,1) = \delta(0,2) = 1$.




כיתבו אלגוריתם המקבל גרף לא מכוון $G = (V, E)$ וקשת $(u, v)$, המוצא **את כל הצמתים ב- $G$ שעבורם $(u, v)$ היא קשת מיוחדת**. אם אין אף צומת כזה, יוחזר $false$.

על זמן הריצה של האלגוריתם להיות $O(V + E)$.

הוכיחו נכונות ונתחו סיבוכיות.

האלג':

1. נריץ BFS פעמיים, פעם על u ועל V.
2. נשווה האם המרחק מ-u לקודקוד מסויים שווה למרחק מ-V לאותו קודקוד, שקיבלנו מהריצות של BFS.

זמן ריצה: $O(V+E)$

הוכחת נכונות: מהנכונות $a$ BFS נובע

כי במידה וקיבלנו מרחק זהה באותו

קודקוד סומנו לפי BFS זה אומר

ש $\delta(a,u)=\delta(a,V)$ ולכן תהיה קשת

מוחזרת.

**3.** נתון גרף לא מכוון $G=(V,E)$. תארו אלגוריתם יעיל ככל הניתן המקבל קודקוד מוצא s וקודקוד יעד t, וקשת $e = (u,v)$, ובודק האם $e$ הזו נמצאת על **כל** המסלולים הקצרים ביותר מ-s ל-t ב-$G$.
נמקו נכונות ונתחו סיבוכיות.

**האלג':**

1. נריץ BFS מ-s ונבדוק ש $D=\delta(t,s)\neq\infty$
2. נבנה גרף חדש $G'$ ללא הקשת $e=(u,v)$
3. נריץ BFS מ-s ונבדוק ש $H=\delta(t,s)\neq\infty$
4. נבדוק האם $H=\infty$ כלומר שהקשת e נמצאת על כל המסלולים. אחרת נחזיר לא.

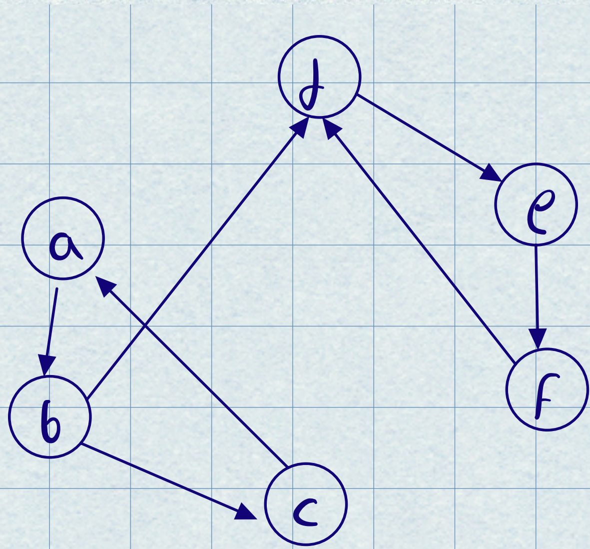
**סיבוכיות:** סה"כ 2 BFS כלומר $O(E+V)$

**נכונות:** הקשת e נמצאת בכל המסלולים אמ"מ $\delta(t,s)=\infty$ בגרף $G'$.

לפי הנכונות של BFS במידה ו $\delta(t,s)=\infty$ משמע כבר שלא קיים מסלול בין השניים. ועוד כי בגרף G המקורי

כי $\delta(f,s)\neq\infty$ ולכן כשהורדנו את הקשת הקשירות נפגעה. לכן שהקשת חייבת להיות בכל מסלול קצר ביותר מ- s ל- f.

**4.** נתון גרף מכוון $G=(V,E)$ וקבוצת קודקודים $S \subseteq V$. כתבו אלגוריתם יעיל ככל האפשר הבודק האם קיים מסלול העובר <u>דרך כל צמתי $S$</u> (מותר לבקר באותו הצומת ואותה הקשת כמה פעמים). נמקו נכונות ונתחו סיבוכיות.




$S=\{a,b,c,d,e,f\}$

<u>באלג:</u> 1. נאתחל קבוצת קודקודים שביקרו בהם ריקה.

2. עבור כל קודקוד v ב- S, נפעיל DFS החל מ- v. אם DFS אינו מבקר בכל הקודקודים ב- S החזר False.

3. אם DFS מבקר בכולם החזר True.

**זמן ריצה:** מכיוון שמריצים DFS עבור כל קודקוד
ב-S וכל DFS לוקח $O(|V|+|E|)$
סה״כ $O(|S|*(|E|+|V|))$

**נכונות:** האלגוריתם נכון אמ״מ קיים מסלול
שעובר בכל הצמתים ב-S.

אם קיים מסלול כזה, האלג׳ ימצא אותו. מאחר
ולכל קודקוד ב-S מריצים DFS. אם יש מסלול
שעובר בכל הקודקודים ב-S, אז ה-DFS שמתחיל
מה קודקוד ב-S יבקר בכל הקודקודים ולכן יחזיר
True.

אם האלגוריתם החזיר True זה אומר שלכל
קודקוד v ב-S, קיים DFS שמתחיל מ-v שמבקר
בכל הקודקודים ב-S. P מסלול שמבקר בכל הקודקודים
ב-S. נראה ש-P הוא מסלול שעובר בכל S
לפחות פעם אחת.

נניח ש-P לא מבקר בקודקוד w ב-S. v הקודקוד
האחרון ב-P שנמצא לפני w. מאחר ונכון קיימת ריצת

DFS שמתחיל מ-$v$ שמבקר בכל הקודקודים ב-$S$
כולל $w$. לכן קיים מסלול מ-$v$ ל-$w$ שעובר
דרך הקודקודים ב-$S$, וזה בסתירה להנחה
ולכן $p$ מבקר ב-$S$ יותר מפעם אחת.