Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Geometría de Curvas y Superficies
Segundo semestre 2020

Práctico 1

Para aprobar el curso hay que entregar al menos un ejercicio con asterisco $(*)$ *de este practico y para exonerar la parte practica hay que entregar al menos la mitad de los mismos. La fecha limite de esta entrega es el viernes 11 de setiembre, el archivo debe subirse a la pagina de EVA.*

1. Un disco de radio 1 en el plano xy gira sin desizar sobre el eje x. La figura descrita por un punto de la circunferencia se llama *cicloide*.

   a) Obtener una parametrización $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ cuya traza sea la cicloide.

   b) Calcular la longitud de arco correspondiente a una rotación completa del disco.

2. $(*)$ Sea $\alpha : (0\pi) \to \mathbb{R}^2$ la siguiente curva:
$$\alpha(t) = \left(\sin t, \cos t + \log \tan \frac{t}{2}\right)$$
   La traza de α se denomina *tractriz*. Mostrar que:

   a) α es una curva parametrizada diferenciable, regular excepto en $t = \frac{\pi}{2}$.

   b) La longitud del segmento sobre una recta tangente a la tractriz entre el punto de tangencia y el corte con el eje y es constante e igual a 1.

3. $(*)$ Una *espiral logarítmica* es la curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $\alpha(t) = \left(ae^{-bt}\cos t, ae^{-bt}\sin t\right)$, con $a, b > 0$ constantes.

   a) Probar que $\lim_{t\to+\infty} \alpha(t) = (0,0)$, y que forma un ángulo constante con los rayos que parten de (0,0).

   b) Probar que $\lim_{t\to+\infty} \int_0^t \|\alpha'(t')\| dt'$ es finito.

   c) Demostrar que si una curva forma un ángulo constante con los rayos que parten del origen (distinto de $\pi/2$), entonces la curva es una espiral logarítmica.

4. $(*)$ Sean $p, q \in \mathbb{R}^3$. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada tal que existen $a, b \in I, a < b$, con $\alpha(a) = p$ y $\alpha(b) = q$.

   a) Probar que para cualquier vector $v \in \mathbb{R}^3$ de norma 1 se verifica
$$\langle q - p, v\rangle = \int_a^b \langle \alpha'(t), v\rangle dt \leq \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

   b) Considerando $v = \frac{q-p}{\|q-p\|}$, probar que $\|q - p\| \leq \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$, es decir, la curva que minimiza la distancia enentre p y q es el segmento de recta.

5. $(*)$

   a) Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por longitud de arco. Probar que la curvatura κ y la torsión τ se obtienen mediante $\kappa = \|\alpha''\|$ y $\tau = \frac{-1}{\kappa^2}\left(\alpha', \alpha'', \alpha'''\right)$. (Este último es el producto triple de tres vectores: $(u, v, w) := \langle u, v \wedge w\rangle$)

b) Sea $\alpha : T \to \mathbb{R}^3$ una curva, pero **no** necesariamente parametrizada por longitud de arco. Probar que

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}, \qquad \tau = -\frac{\left(\alpha', \alpha'', \alpha'''\right)}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}$$

6. Calcular el triedro de Frenet, la curvatura y la torsión de las siguientes curvas $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$:

   a) $\alpha(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$.

   b) $\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, con $a > 0, b \neq 0$ (es decir, una hélice).

7. Mostrar que una curva de curvatura constante contenida en una esfera de $\mathbb{R}^3$, es necesariamente un arco de circunferencia.

8. $(*)$ Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por longitud de arco con $\kappa(s) \neq 0$ y que verifica $\tau(s) \neq 0$ y $\kappa'(s) \neq 0$, $\forall s \in I$. Probar que la traza de α está contenida en una esfera si y solo si:

$$R^2 + \left(R'T\right)^2 = \text{cte}$$

   siendo $R = \frac{1}{\kappa}$, $T = \frac{1}{\tau}$ y $R' = \frac{dR}{ds}$. (Sugerencia: definir $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ mediante $\beta = \alpha + Rn - R'Tb$ y probar que $R^2 + \left(R'T\right)^2$ es constante si y solo si β es constante.)

9. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por la longitud de arco, y suponemos que verifica $\tau(s) \neq 0$, $\forall s \in I$. Mostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

   a) La tangente forma un ángulo constante con una dirección fija.

   b) La normal principal es paralela a un plano fijo.

   c) La binormal forma un ángulo constante con una dirección fija.

   d) El cociente $\frac{\kappa}{\tau}$ es constante.

   Una curva que verifique las condiciones anteriores se llama *hélice*. Mostra que las hélices se parametrizan por $\alpha(t) = \beta(t) + (t - t_0)v$, donde β es una parametrización de una curva plana y v es una vector perpendicular al plano de β.

10. Sea I un intervalo abierto y $\kappa : I \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Dados $a, b, \phi \in \mathbb{R}$, definimos $\theta : I \to \mathbb{R}$ y $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ mediante

$$\theta(s) = \int \kappa(s)ds + \phi, \qquad \alpha(s) = \left(\int \cos\theta(s)ds + a, \int \sin\theta(s)ds + b\right), \qquad s \in I$$

   a) Probar que la curva α está parametrizada por longitud de arco y tiene curvatura κ.

   b) Probar que variando a, b, ϕ obtenemos todas las curvas $I \to \mathbb{R}^2$ que tienen curvatura κ.

11. $(*)$ Sea α una curva plana parametrizada por longitud de arco. Sea $\alpha(s)$ un punto de la curva con $\kappa(s) \neq 0$. Probar que de todas las circunferencias que pasan por $\alpha(s)$ la que mejor aproxima a la curva α en $\alpha(s)$ es aquella que su centro está en la recta normal y que su radio es $\frac{1}{\kappa(s)}$ (denominado *radio de curvatura*).

12. *Folium de Descartes:* sea $\alpha : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(t) = \left(\frac{3at}{1+t^3}, \frac{3at^2}{1+t^3}\right)$$

   Probar que:

   a) Para $t = 0$, α es tangente al eje x.

   b) $\lim_{t\to+\infty} \alpha(t) = \lim_{t\to+\infty} \alpha'(t) = (0,0)$.

   c) Considerar ahora la curva con la orientación revertida. Probar que en el límite $t \to -1$, la curva y su tangente se aproximan a la recta $x + y + a = 0$.

13. *Curvas no rectificables:* mostraremos un ejemplo de una curva de clase C^0, de dominio compacto, cuya longitud de arco no es acotada. Sea $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(t) = \left(t, t\sin\left(\frac{\pi}{t}\right)\right), \qquad t \neq 0$$

y $\alpha(0) = (0,0)$ si $t = 0$. Mostrar que la longitud de arco en el intervalo $\frac{1}{N} \leq t \leq 1$ es mayor que $\sum_{l=1}^{N} \frac{2}{l+1}$, y deducir que la longitud de arco tiende a infinito cuando $N \to +\infty$.

Ejercicios opcionales:

1. *a*) ¿Toda curva regular en $\mathbb{R}^3$ es una subvariedad de dimensión 1? (por subvariedad nos referimos a la definición que se da en calculo 3).
   b) Recíprocamente, ¿toda subvariedad de dimensión 1 es una curva regular?

2. (Teorema de la curva de Jordan diferenciable) Sea $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ una curva regular simple y cerrada (es decir $\alpha(t) = \alpha(s)$ sii $s, t \in \{a,b\}$). Dado $v \in S^1$ (es decir $v \in \mathbb{R}^2$ con $|v| = 1$), definamos la función altura $h_v(s) = \langle \alpha(s), v \rangle$.
   a) Interpretar geométricamente la función h_v.
   b) Probar que existe $v \in S^1$ tal que h_v tiene solamente puntos críticos no degenerados (recordar que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tiene un punto crítico no degenerado si $f'(x) = 0$ pero $f''(x) \neq 0$)[1].
   c) Probar el siguiente lema de cálculo 1: si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tiene un punto crítico no degenerado en x_0, entonces localmente y a menos de una reparametrización[2] tenemos que $f(x) = f(x_0) \pm (x - x_0)^2$, dependiendo del signo de la segunda derivada (sugerencia: toda función diferenciable se puede escribir como $f(x) = f(x_0) + g(x)(x - x_0)$, donde $g(x_0) = f'(x_0)$, a esto se conoce como el lema de Hadamard).
   d) Estudiar como son los conjuntos $h_v^{-1}(I) \cap \alpha$, donde $I \subset \mathbb{R}$ (capaz que puede ayudar separar los casos cuando I tiene puntos críticos y cuando no).
   e) Probar que el complemento de la curva tiene dos componentes conexas, ¿Podés describir la componente conexa acotada?.

[1] Preguntas extra: ¿la condición en v es "genérica" o hay pocos v que cumplen esto?, pensar la misma pregunta en curvas regulares de $\mathbb{R}^3$.

[2] Formalizar esto.