计算 SVD 的 Jacobi 方法

数值实验报告

梁子龙

数值代数讨论班 2018

2018 年 6 月 5 日

介绍

本次试验实现了教材 3.4 节介绍的 Jacobi 方法，用来计算对称特征值问题与 SVD 问题. 函数 `jacobi_eig` 接受一个对称矩阵，得到其特征值及特征向量；函数 `jacobi_svd` 接受一个一般的矩阵，得到其奇异值及左右奇异向量，并可以指定教材中提及的一些加速方法. 脚本 `experiments_jacobi.m` 包含了几个实验程序.

实验一：Jacobi 方法可以提高小特征值的计算精度

实验原理：
参考文献 [18] 提出了新的扰动理论，证明了求解对称矩阵特征值的 Jacobi 方法有如下的误差估计：设计算得到 A 的第 i 个特征值为 $\widehat{\lambda}_i$，而 λ_i 为其真值

$$\frac{|\widehat{\lambda}_i - \lambda_i|}{|\lambda_i|} \approx \epsilon \kappa_2(D^{-1}AD^{-1}),$$

这里 $D = \mathrm{diag}(\sqrt{a_{11}}, \ldots, \sqrt{a_{nn}})$. 这一个估计的意义在于，一般来说 $\kappa_2(D^{-1}AD^{-1})$ 会远小于 $\kappa_2(A)$，这样只要 $D^{-1}AD^{-1}$ 是良态的，Jacobi 方法的精度就可以保证.

实验一：Jacobi 方法可以提高小特征值的计算精度

具体地，我们考虑这个人为构造的例子：

$$A = \begin{bmatrix} 10^{40} & 10^{29} & 10^{19} \\ 10^{29} & 10^{20} & 10^{9} \\ 10^{19} & 10^{9} & 1 \end{bmatrix},$$

有 $\kappa_2(A) \approx 10^{40}$，$\kappa_2(D^{-1}AD^{-1}) \approx 1.33$.

实验一： Jacobi 方法可以提高小特征值的计算精度

	1
1	-1.9286e+23
2	0.9900
3	1.0000e+40

图: MATLAB 内置函数 eig 的结果

1.0000e+40	1.7593e+13	-159.9380
1.7592e+13	9.9000e+19	8.9256e-12
-159.9290	0	0.9818

图: jacobi_eig 的结果

实验二：Jacobi 方法加速技术

实验原理：
教材中提到了 de Rijk 与 QR 预处理的加速技术，我们可以考察采取不同加速技术时进行 Jacobi 旋转的扫描次数和具体的变换次数，得知这些加速技术的效果.
类似教材的讨论，我们分别考察不加速、带 de Rijk 加速、带 QR 预处理和带两种加速策略的 Jacobi 方法.
这里，我们对不同维度的、不同秩的矩阵进行了考察.

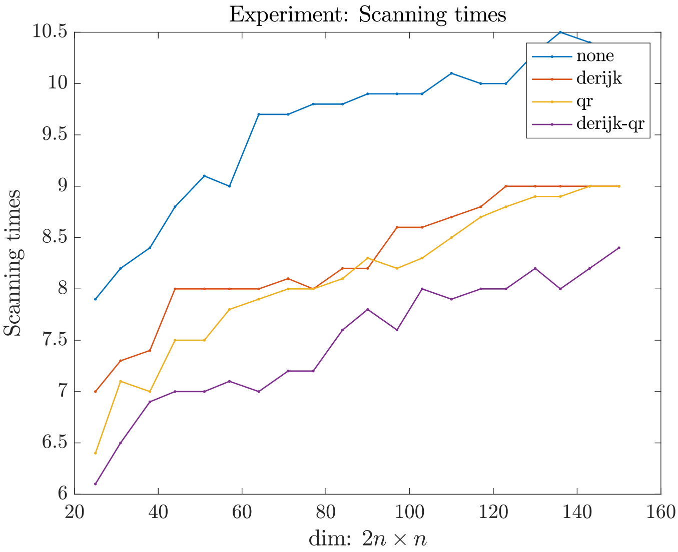

图: 秩 $r < n$ 时，各种加速策略的扫描次数

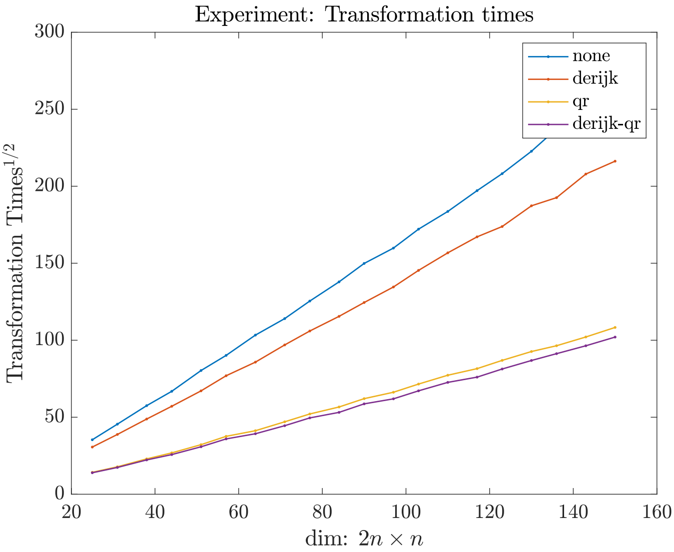

图: 秩 $r < n$ 时，各种加速策略的变换次数（开平方意义下）

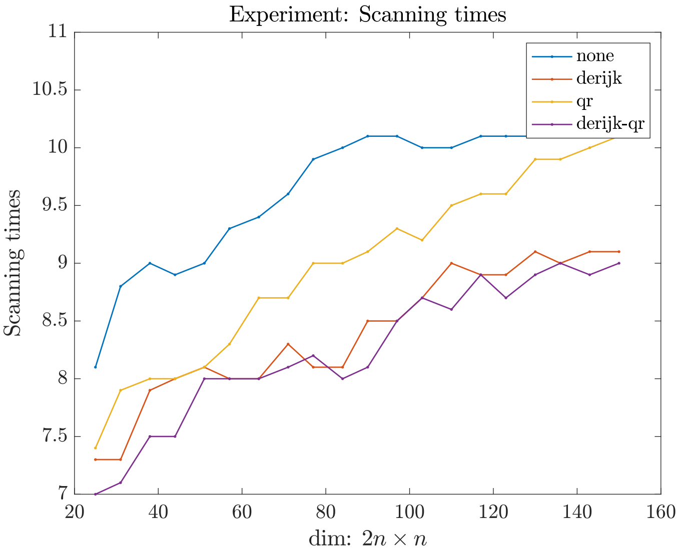

图: 秩 $r = n$ 时，各种加速策略的扫描次数

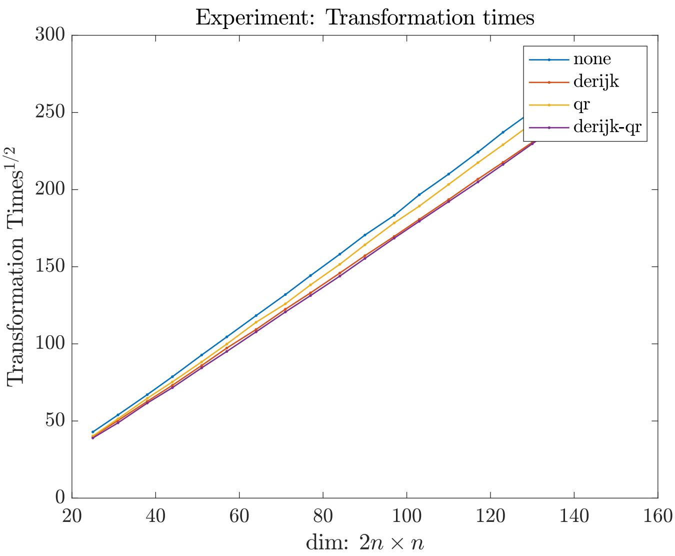

图: 秩 $r = n$ 时，各种加速策略的变换次数（开平方意义下）

实验三：QR 预处理后选择 R 还是 R^{T}

实验原理：
参考文献 [21] 详细讨论了为什么在进行 QR 预处理后选择 R^{T} 进行变换．作为一个例子，我们考虑方阵 A 可以写为 $A = DQ$，其中 D 为对角的，Q 为正交的，那么 $A^{\mathrm{T}}A = Q^{\mathrm{T}}D^2Q$，$AA^{\mathrm{T}} = D^2$，则 AA^{T} 的“对角化”程度比 $A^{\mathrm{T}}A$ 要高，因此收敛得快．
我们的实验挑选了一系列满秩的方阵执行了带 QR 预处理的 Jacobi 方法，对比选择 R 与 R^{T} 时的扫描次数和变换次数．

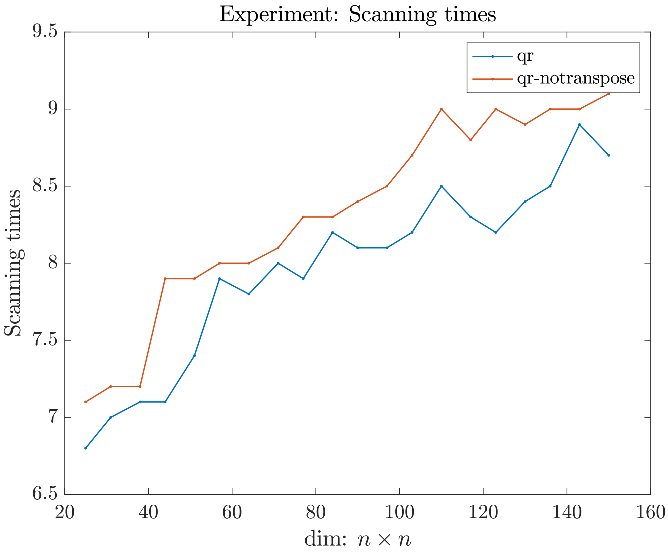
Experiment: Scanning times
Scanning times
dim: $n \times n$
qr
qr-notranspose
9.5
9
8.5
8
7.5
7
6.5
20
40
60
80
100
120
140
160

图: 扫描次数

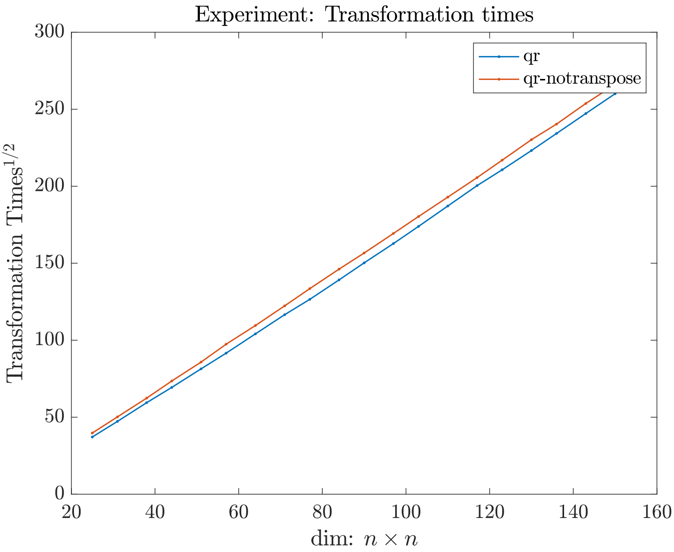
Experiment: Transformation times
300
250
200
150
100
50
0
20
40
60
80
100
120
140
160
Transformation Times$^{1/2}$
dim: $n \times n$
qr
qr-notranspose

图: 变换次数