Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ХАКАССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Н.Ф. КАТАНОВА»
(ФГБОУ ВО «ХГУ ИМ. Н.Ф. КАТАНОВА»)

ИНЖЕНЕРНО – ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
КАФЕДРА ПОВТИАС

Лабораторная работа 2
Классические методы машинного обучения
«Простейшие вычислительные модели»

Абакан – 2024

Задание.

Требуется решить уравнение f(x) = 0 методом Ньютона, методом пропорциональных частей и методом итерации.

В качестве корней уравнения должны быть получены одно или несколько значений аргумента x, при которых значение функции f(x) равно нулю, или иначе говоря, которые являются абсциссами точек пересечения графика y = f(x) с осью абсцисс.

Метод Ньютона (метод касательных):

Пусть кривая $y = f(x)$ изображена на координатной плоскости так, что очевидно наличие корней уравнения. Метод применяется, если кривая $y = f(x)$ не меняет знак в промежутке [a1, b1], в котором заключен корень. Если вторая производная функции $f''(x)$ сохраняет в этом промежутке знак, то за первое приближение к искомому корню уравнения следует принять то из чисел a1 или b1, для которого выполняется условие $f(x) \cdot f''(x) > 0$.

В точке кривой, соответствующей абсциссе первого приближения (пусть b1), проводится касательная. Точка пересечения этой касательной с осью абсцисс представляет приближение к корню b2, лучшее, чем b1, и расположенное с той же стороны от корня. Тогда:

$$b_2 = b_1 - \frac{f(b_1)}{f'(b_1)}$$

Повторим это рассуждение для нового приближения b2 и далее. Последовательность b1, b2, b3, b4, … стремится к искомому корню.

Метод пропорциональных частей (метод хорд):

Пусть кривая y = f(x) изображена на координатной плоскости так, что очевидно наличие корней уравнения. Метод применяется, если на промежутке [a1, b1], в котором заключен корень уравнения f(x) = 0, кривая f ’’(x) не меняет знака и f ’(x) не обращается в нуль. Проведем отрезок между теми точками кривой, 8 абсциссы которых соответствуют числам a1 и b1. Точка пересечения этого отрезка с осью абсцисс представляет приближение к корню a2. Тогда:

$$a_2 = \frac{b_1 f(a_1) - a_1 f(b_1)}{f(a_1) - f(b_1)}$$

Повторим это рассуждение для нового промежутка приближения и далее. Последовательность a1, a2, a3, a4, ... стремится к искомому корню.

Метод итерации:

Напишем исходное уравнение f(x) = 0 в виде φ(x) = ψ(x). Выбирается значение x0 абсциссы приблизительной точки пересечения кривых y = φ(x) и y = ψ(x). При x0 определим значение ординаты y0 для той кривой, для которой наклон касательной имеет меньшую по абсолютному значению величину, или иначе

говоря, которая расположена под меньшим углом к оси абсцисс, то есть производная которой имеет меньшее значение в данной точке.
Тогда подстановка значения y0 в другую функцию даст возможность определить лучшее приближение x1 к искомому корню уравнения. Повторим это рассуждение для нового приближения x1 и далее.
Последовательность x0, x1, x2, x3, ... стремится к искомому корню.

Рекомендации по выполнению
При решении методом Ньютона либо методом пропорциональных частей сначала строится грубое изображение кривой y = f(x) на координатной плоскости. Существенно, чтобы было очевидно наличие точек пересечения кривой с осью абсцисс. Эти точки и будут являться корнями уравнения f(x) = 0. Требуется найти все корни уравнения, следовательно в программе, моделирующей численный метод, должно быть предусмотрено приближение к каждой точке. По методу Ньютона производится проверка первого приближения на условие: $f(x) \cdot f''(x) > 0$. Если же проверяемая точка не удовлетворяет этому условию, то первое приближение выбирается с другой стороны от точки пересечения кривой с осью абсцисс. Следует заметить, что таким образом первое приближение в методе Ньютона располагается со стороны положительной выпуклости функции. Для метода Ньютона и метода пропорциональных частей при выборе первого приближения необходимо обратить внимание, чтобы не было параллельности оси абсцисс и перегиба кривой y = f(x) на промежутке [a1, b1]. При решении методом итерации тоже сначала строится грубое изображение кривых y = φ(x) и y = ψ(x). Существенно, чтобы было очевидно наличие точек пересечения кривых. Абсциссы этих точек и будут являться корнями уравнения f(x) = 0.

Варианты уравнений:

1) $x^3 - 10x - 5 = 0$;
2) $x^4 - 10x^2 - 20 = 0$;
3) $x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 7 = 0$;
4) $\exp(x) - 5x^2 + 5x = 0$;
5) $\exp(x^2) + x^2 - 10 = 0$;
6) $5\sin(x) - x^2 + 5 = 0$;
7) $\sin(x^2) + x^4 - 5 = 0$;
8) $\cos(12x) + 6x^2 + 6 = 0$;
9) $\cos(5x^2 + x) + x^3 + 5x = 0$;
8) $\mathrm{tg}(x) - x^2 + 10 = 0$.