

## Seminar Nr. 4

## Șiruri de funcții

## I. Aproximarea sumei unei serii convergente

**Exemplu.** i) Să se arate că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n-1)!!}$  e convergentă. Câți termeni trebuie însumați pentru a obține suma sa cu 4 zecimale exacte?

ii) Calculți suma seriei convergente  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)5^n}$  cu 4 zecimale exacte.

iii) Să se determine câți termeni trebuie însumați pentru a obține suma seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2+n}$  cu două zecimale exacte.

## II. Șiruri de funcții

1. i) Să se arate că șirul de funcții  $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = \frac{x+n}{x+n+1}$  este uniform convergent.

ii) Să se arate că șirul de funcții  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = \arctan(nx)$  nu este uniform convergent.

iii) Să se arate că șirul de funcții  $f_n : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = \frac{n}{x+n}$  nu este uniform convergent.

*Soluție.* i) Cum  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1$  rezultă  $f_n \xrightarrow{s} f$ .

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x+n}{x+n+1} - 1 \right| = \frac{1}{x+n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

deci  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$  independent de  $x$ , prin urmare limita șirului este uniformă.

ii) Dacă

- $x < 0$  atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = -\frac{\pi}{2}$ ,
- $x > 0$  atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{\pi}{2}$ ,
- $x = 0$  atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ ,

$$\text{deci } f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x > 0 \end{cases}, \text{ adică } f_n \xrightarrow{s} f.$$

Utilizăm teorema: *Limita uniformă a unui șir de funcții continue este o funcție continuă.*

Cum  $f$  nu este o funcție continuă rezultă că nu avem convergență uniformă.

**iii)**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+x} = 1$ , deci  $f_n \xrightarrow{s} f$ , unde  $f(x) = 1$ .

Se observă că dacă alegem șirul  $x_n = n$  atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2},$$

deci din criteriul de convergență neuniformă rezultă că  $f_n \not\xrightarrow{u} f$ .

**2. Calculați:**

**i)**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1}{n+x^5} dx$ ; **ii)**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_2^5 e^{-nx^2} dx$ .

*Soluție.* **i)** Fie  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = \frac{1}{n+x^5} \xrightarrow{s} 0$ , și notăm funcția limită

cu  $f$ . Convergența este uniformă deoarece  $|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{n+x^5} \right| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$  (independent de  $x$ .) Atunci se obține

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1}{n+x^5} dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+x^5} dx = \int_0^1 0 dx = 0.$$

**ii)** Fie  $f_n : [2, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = e^{-nx^2} \xrightarrow{s} 0$ , și notăm funcția limită cu  $f$ . Convergența este uniformă deoarece  $|f_n(x) - f(x)| = |e^{-nx^2}| \leq e^{-4n} \rightarrow 0$

independent de  $x$ . Rezultă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_2^5 e^{-nx^2} dx = \int_2^5 \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-nx^2} dx = \int_2^5 0 dx = 0.$$

**3.** Să se studieze convergența uniformă a următoarelor șiruri de funcții:

- i)  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}},$
- ii)  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = e^{-nx^2} \sin(nx),$
- iii)  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x^2}{n^2 + x^4},$
- iv)  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = 2n^2 x e^{-n^2 x^2},$
- v)  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = x^n.$

**Răspuns.** i) iii) uniform convergent, ii), iv) v) nu sunt uniform convergente

**4.** Se consideră șirul de funcții  $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = x^{1+\frac{1}{n}}.$

i) Să se studieze convergența punctuală.

ii) Să se studieze convergența uniformă pe  $[0, 1].$

iii) Să se studieze convergența uniformă pe  $[1, \infty).$

*Soluție.* i) Fie  $x \geq 0$  fixat; atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{1+\frac{1}{n}} = x$ . Rezultă că  $f_n$  converge punctual la  $f(x) = x$ .

ii) Pentru a studia convergența uniformă pe  $[0, 1]$  calculăm

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, 1]} \left( x - x^{1+\frac{1}{n}} \right).$$

Considerăm funcția  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x - x^{1+\frac{1}{n}}.$  Rezultă

$$g'(x) = 1 - \left( 1 + \frac{1}{n} \right) x^{\frac{1}{n}},$$

deci  $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left( 1 + \frac{1}{n} \right) x^{\frac{1}{n}} = 1 \Leftrightarrow x = \left( \frac{n}{1+n} \right)^n$ . Prin urmare rezultă

$$\sup_{x \in [0, 1]} \left( x - x^{1+\frac{1}{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{1+n} \right)^n \left( 1 - \frac{n}{n+1} \right) = 0,$$

deci șirul  $f_n$  converge uniform pe  $[0, 1]$  la funcția  $f$ .

**iii)** Procedând ca mai sus obținem

$$\sup_{x \in [1, \infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [1, \infty)} \left( x^{1+\frac{1}{n}} - x \right) = \infty,$$

deci șirul nu converge uniform.

**5** Să se arate că șirul de funcții  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\cos kx}{k(k+1)}$  este uniform convergent.

*Soluție.*  $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| = \left| \sum_{k=1}^p \frac{\cos kx}{k(k+1)} \right| \leq \sum_{k=1}^p \left| \frac{\cos kx}{k(k+1)} \right| \leq \sum_{k=1}^p \frac{1}{k(k+1)}$   
 $= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon, \forall n > n_\varepsilon = \left[ \frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$ . Din Teorema lui Cauchy rezultă  $f_n$  este un șir uniform convergent.

**6.** Fie  $f_n : \mathbb{R} \setminus \{n\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = \frac{x}{x-n}$ . Să se arate că pentru șirurile de funcții  $(f_n)$  avem  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) \neq \lim_{x \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ . De ce ?

*Indicație.*  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) \neq \lim_{x \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ , deoarece convergența  $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , pentru  $x \in \mathbb{R} \setminus \{n\}$  nu este uniformă.

**7.** Să se demonstreze că șirul de funcții  $(f_n)$ ,  $f_n : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , unde  $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(nx)$  este un șir uniform convergent la zero pe intervalul  $[0, 2\pi]$ .

**8.** Să se studieze convergența uniformă a șirurilor de funcții:

**i)**  $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$ ;  $x \in \mathbb{R}$ , **ii)**  $f_n(x) = \frac{x^3}{n^3 + x^3}$ ;  $x \in \mathbb{R}$ ,

**iii)**  $f_n(x) = \frac{2nx}{1 + n^2x^2}$ ,  $x \in [0, 1]$ .

**Răspuns.** **i)**  $f_n$  este uniform convergent; **ii)**  $f_n$  nu este uniform convergent; **iii)**  $f_n$  nu este uniform convergent.