Curs - Probabilităţi şi Statistică 2020/2021

Facultatea de Matematică şi Informatică
Universitatea Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca

Teoria Probabilităţilor

Teoria probabilităţilor este o disciplină a matematicii care se ocupă de studiul fenomenelor aleatoare.

- *aleator* = care depinde de o împrejurare viitoare şi nesigură; supus întâmplării
- provine din latină: *aleatorius*; *alea* (lat.) = zar; joc cu zaruri; joc de noroc; şansă; risc

$\hookrightarrow$ se măsoară *şansele pentru succes* sau *riscul pentru insucces* al unor evenimente

Fenomene şi procese aleatoare apar, de exemplu, în:

[Sursa: www.financialmarket.ro]

$\rightarrow$ jocuri de noroc, pariuri, loto (6 din 49)
$\rightarrow$ previziuni meteo
$\rightarrow$ previziuni economice / financiare
$\rightarrow$ sondaje de opinie, asigurări (evaluarea riscurilor, pierderilor)

$\rightarrow$ **în informatică**:
$\triangleright$ sisteme de comunicare, prelucrarea informaţiei, modelarea traficului în reţea;
$\triangleright$ analiza probabilistică a unor algoritmi, fiabilitatea sistemelor;
$\triangleright$ algoritmi de simulare, machine learning, data mining, recunoaşterea formelor sau a vocii;
$\triangleright$ generarea de numere aleatoare, algoritmi aleatori: de tip Monte-Carlo, de tip Las Vegas etc.

Octave online: `https://octave-online.net`

Exemplu: Generarea de valori aleatoare (în Octave/Matlab)

```
a=rand % valoare aleatoare între 0 şi 1
v1=rand(1,10)    %vector cu 10 valori aleatoare între 0 şi 1
a=4; b=10;
v2=a+(b-a)*rand(1,15)   %vector cu valori 15 aleatoare între 4 şi 10
v3= floor(a+(b-a)*rand(1,15))
%vector cu 15 valori  aleatoare întregi din intervalul [4,10)
%vector cu 15 valori aleatoare din mulţimea {4,5,6,7,8,9}
z=randi(6,1,20)
%vector cu 20 de valori aleatoare din mulţimea {1,2,3,4,5,6}
```

Exerciţiu: Generaţi un vector cu 100 de valori aleatoare `0` şi `1`, în care `0` şi `1` au aceleaşi şanse de apariţie.

Răspuns: `floor(2*rand(1,100))` sau `randi(2,1,100)-1`

Algoritmi aleatori

Def. 1. *Un algoritm pe cursul executării căruia se iau anumite decizii aleatoare este numit* ***algoritm aleator (randomizat)****.*

▷ durata de execuţie, spaţiul de stocare, rezultatul obţinut sunt variabile aleatoare (chiar dacă se folosesc aceleaşi valori input)

▷ la anumite tipuri de algoritmi corectitudinea e garantată doar cu o anumită probabilitate

▷ în mod paradoxal, incertitudinea ne poate oferi mai multă eficienţă

Exemplu: Random QuickSort, în care elementul pivot este selectat aleator

• Algoritm de tip **Las Vegas** este un algoritm aleator, care returnează la fiecare execuţie rezultatul corect (independent de alegerile aleatoare făcute); durata de execuţie este o variabilă aleatoare.
Exemplu: Random QuickSort

• Un algoritm aleatoriu pentru care rezultatele obţinute sunt corecte *doar* cu o anumită probabilitate se numeşte algoritm **Monte Carlo**.
$\hookrightarrow$ se examinează probabilitatea cu care rezultatul este corect; probabilitatea de eroare poate fi scăzută semnificativ prin execuţii repetate, independente;
Exemplu:
▷ testul Miller-Rabin, care verifică dacă un număr natural este prim sau este număr compus; testul returnează fie răspunsul "numărul este sigur un număr compus" sau răspunsul "numărul este probabil un număr prim";

▷ problema tăieturii minime într-un graf (algoritmul lui D. Karger: random min-cut)

Exerciţiu: Fie S(1),...,S(300) un vector cu 300 de elemente, din mulţimea $\{0, 1, 2\}$ (ordinea lor este necunoscută). $\longrightarrow$ De care tip este următorul algoritm (scris în Octave)?

```
S=floor(3*rand(1,300));
k=0;
do
    k=k+1;
    i=randi(300);
    x = S(i);
until (x == 0)
i  % indicele; S(i)=0
k  % număr iteraţii până se găseşte 0
```

Răspuns: Algoritm de tip Las Vegas.

Versiunea Monte Carlo a problemei formulate anterior: se dă M numărul maxim de iteraţii.

```
M=3;
S=floor(3*rand(1,300));
k=0;
do
    k=k+1 ;
    i=randi(300);
    x = S(i);
until ( (x == 0) || (k==M) )
i  % indicele; x=S(i)
k  % număr iteraţii până se găseşte 0 sau programul s-a oprit
x
```

$\triangleright$ dacă 0 este găsit, atunci algoritmul se încheie cu rezultatul corect, altfel algoritmul nu găseşte niciun 0.

Noţiuni introductive:

• Experienţa aleatoare este acea experienţă al cărei rezultat nu poate fi cunoscut decât după încheierea ei.

• Evenimentul este rezultatul unui experiment.

Exemple:

▷ Experiment: aruncarea a două zaruri, eveniment: ambele zaruri indică 1

▷ experiment: aruncarea unei monede, eveniment: moneda indică pajură

▷ experiment: extragerea unei cărţi de joc, eveniment: s-a extras as

▷ experiment: extragerea unui număr la loto, eveniment: s-a extras numărul 27

• evenimentul imposibil, notat cu $\emptyset$, este evenimentul care nu se realizează niciodată la efectuarea experienţei aleatoare

• evenimentul sigur este un eveniment care se realizează cu certitudine la fiecare efectuare a experienţei aleatoare

• spaţiul de selecţie, notat cu Ω, este mulţimea tuturor rezultatelor posibile ale experimentului considerat

◇ spaţiul de selecţie poate fi finit sau infinit

• dacă A este o submulţime a lui Ω atunci A se numeşte eveniment aleator, iar dacă A are un singur element atunci A este un eveniment elementar.

▷ O *analogie între evenimente şi mulţimi* permite o scriere şi o exprimare mai comode ale unor idei şi rezultate legate de conceptul de eveniment aleator.

Exemplu: Experimentul: aruncarea unui zar, spaţiul de selecţie: $\Omega = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$, e_i: s-a obţinut numărul i $(i = 1, \ldots, 6)$; $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$ sunt evenimente elementare

A: s-a obţinut un număr par $\Rightarrow A = \{e_2, e_4, e_6\}$

$\bar{A}$: s-a obţinut un număr impar $\Rightarrow \bar{A} = \{e_1, e_3, e_5\}$ ♣

Operaţii cu evenimente

• dacă $A, B \subseteq \Omega$, atunci evenimentul reuniune $A \cup B$ este un eveniment care se produce dacă cel puţin unul din evenimentele A sau B se produce

• dacă $A, B \subseteq \Omega$, atunci evenimentul intersecţie $A \cap B$ este un eveniment care se produce dacă cele două evenimente A şi B se produc în acelaşi timp

• dacă $A \subseteq \Omega$ atunci evenimentul contrar sau complemetar $\bar{A}$ este un eveniment care se realizează atunci când evenimentul A nu se realizează

• $A, B \subseteq \Omega$ sunt evenimente incompatibile (disjuncte), dacă $A \cap B = \emptyset$

• dacă $A, B \subseteq \Omega$, atunci evenimentul diferenţă $A \setminus B$ este un eveniment care se produce dacă A

are loc şi B nu are loc, adică

$$A \setminus B = A \cap \bar{B}$$

Relaţii între evenimente

• dacă $A, B \subseteq \Omega$, atunci A implică B, dacă producerea evenimentului A conduce la producerea evenimentului B: $A \subseteq B$

• dacă A implică B şi B implică A, atunci evenimentele A şi B sunt egale: $A = B$

Proprietăţi ale operaţiilor între evenimente $A, B, C \subseteq \Omega$

Operaţiile de reuniune şi intersecţie sunt operaţii **comutative**:

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A\,,$$

asociative

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)\,,$$

şi **distributive**

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C);$$

satisfac legile lui De Morgan

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

Are loc $\bar{\bar{A}} = A$.

Frecvenţa relativă şi frecvenţa absolută

Def. 2. *Fie A un eveniment asociat unei experienţe, repetăm experienţa de n ori (în aceleaşi condiţii date) şi notăm cu $r_n(A)$ numărul de realizări ale evenimentului A; frecvenţa relativă a evenimentului A este numărul*

$$f_n(A) = \frac{r_n(A)}{n}$$

$r_n(A)$ este frecvenţa absolută a evenimentului A.

Definiţia clasică a probabilităţii

Def. 3. *Într-un experiment în care cazurile posibile sunt finite la număr şi au aceleaşi şanse de a se realiza,* ***probabilitatea*** *unui eveniment A este numărul*

$$P(A) = \frac{\textit{numărul de cazuri favorabile apariţiei lui } A}{\textit{numărul total de cazuri posibile}}.$$

$\triangleright$ Prin repetarea de multe ori a unui experiment, în condiţii practic identice, frecvenţa relativă $f_n(A)$ de apariţie a evenimentului A este aproximativ egală cu $P(A)$

$$f_n(A) \approx P(A), \text{ dacă } n \to \infty.$$

Exemplu: Experiment: Se aruncă 4 monede. Evenimentul A: *(exact) 3 din cele 4 monede indică pajură*; experimentul s-a repetat de $n = 100$ de ori şi evenimentul A a apărut de 22 de ori.

$$f_n(A) = ?, \qquad P(A) = ?$$

Răspuns: $f_n(A) = \frac{22}{100} = 0.22$

$\Omega = \{(c,c,c,c),(c,p,p,p),\ldots,(p,p,p,c),(p,p,p,p)\}$

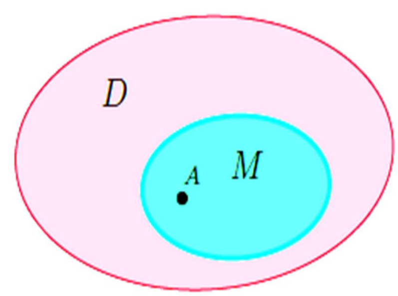
$A = \{(c,p,p,p),(p,c,p,p),(p,p,c,p),(p,p,p,c)\} \Rightarrow P(A) = \frac{4}{2^4} = 0.25$ ♠

Definiţia axiomatică a probabilităţii

Definiţia clasică a probabilităţii poate fi utilizată numai în cazul în care numărul cazurilor posibile este finit. Dacă numărul evenimentelor elementare este infinit, atunci există evenimente pentru care probabilitatea în sensul clasic nu are nici un înţeles.

Probabilitatea geometrică: Măsura unei mulţimi corespunde lungimii în $\mathbb{R}$, ariei în $\mathbb{R}^2$, volumului în $\mathbb{R}^3$. Fie $M \subset D \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \{1,2,3\}$, mulţimi cu măsură finită.
Alegem aleator un punct $A \in D$ (în acest caz spaţiul de selecţie este D). Probabilitatea geometrică a evenimentului "$A \in M$" este

$$P(A \in M) := \frac{\text{măsura}(M)}{\text{măsura}(D)}.$$



$M \subset D \subset \mathbb{R}^2$

O teorie formală a probabilităţii a fost creată în anii '30 ai secolului XX de către matematiciuanul rus **Andrei Nikolaevici Kolmogorov**, care, în anul **1933**, a dezvoltat teoria axiomatică a probabilităţii în lucrarea sa *Conceptele de bază ale Calculului Probabilităţii*.

$\twoheadrightarrow$ $P : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ este o funcţie astfel încât oricărui eveniment aleator $A \in \mathcal{K}$ i se asociază valoarea $P(A)$, ***probabilitatea de apariţie a evenimentului*** A

$\hookrightarrow$ $\mathcal{K}$ este o mulţime de evenimente şi are structura unei σ-algebre (vezi Def. 4)
$\hookrightarrow$ P satisface anumite axiome (vezi Def. 5)

Def. 4. *O familie $\mathcal{K}$ de evenimente din spaţiul de selecţie Ω se numeşte* ***σ-algebră*** *dacă sunt satisfăcute condiţiile:*

(i) *$\mathcal{K}$ este nevidă;*

(ii) *dacă $A \in \mathcal{K}$, atunci $\bar{A} \in \mathcal{K}$;*

(iii) *dacă $A_n \in \mathcal{K}$, $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{K}$.*

Perechea $(\Omega, \mathcal{K})$ se numeşte ***spaţiu măsurabil****.*

Exemple: 1) Dacă $\emptyset \neq A \subset \Omega$ atunci $\mathcal{K} = \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$ este o σ-algebră.
2) $\mathcal{P}(\Omega)$:= mulţimea tuturor submulţimilor ale lui Ω este o σ-algebră.
3) Dacă $(\Omega, \mathcal{K})$ este un spaţiu măsurabil şi $\emptyset \neq B \subseteq \Omega$, atunci

$$B \cap \mathcal{K} = \{B \cap A : A \in \mathcal{K}\}$$

este o σ-algebră pe mulţimea B, iar $(B, B \cap \mathcal{K})$ este un spaţiu măsurabil.

P. 1. *Proprietăţi ale unei σ-algebre: Dacă $\mathcal{K}$ este o σ-algebră în Ω, atunci au loc proprietăţile:*

(1) *$\emptyset, \Omega \in \mathcal{K}$;*

(2) *$A, B \in \mathcal{K} \Longrightarrow A \cap B,\ A \setminus B \in \mathcal{K}$;*

(3) *$A_n \in \mathcal{K}$, $n \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{K}$.*

Def. 5. *Fie $\mathcal{K}$ o σ-algebră în Ω. O funcţie $P : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ se numeşte* ***probabilitate*** *dacă satisface axiomele:*

(i) *$P(\Omega) = 1$;*

(ii) *$P(A) \geq 0$ pentru orice $A \in \mathcal{K}$;*

(iii) *pentru orice şir $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de evenimente două câte două disjuncte (adică $A_i \cap A_j = \emptyset$ pentru orice $i \neq j$) din $\mathcal{K}$ are loc*

$$P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)\,.$$

Tripletul $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ format din spaţiul măsurabil $(\Omega, \mathcal{K})$ şi probabilitatea $P : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ se numeşte ***spaţiu de probabilitate****.*

P. 2. *Fie* $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ *un spaţiu de probabilitate. Au loc proprietăţile:*

(1) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ *şi* $0 \leq P(A) \leq 1$*;*

(2) $P(\emptyset) = 0$*;*

(3) $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$*;*

(4) $A \subseteq B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$*, adică* P *este monotonă;*

(5) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Exerciţiu: a) Să se arate că pentru $\forall\ A, B, C \in \mathcal{K}$ are loc:

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

b) Pentru $A_1, ..., A_n \in \mathcal{K}$ care e formula similară de calcul pentru $P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n)$?

Exemplu: Dintr-un pachet de 52 de cărţi de joc se extrage o carte aleator. Care este probabilitatea p de a extrage a) un as sau o damă de pică? b) o inimă sau un as?
R.: a) A: s-a extras un as; D: s-a extras damă de pică; A şi D sunt două evenimente incompatibile (disjuncte)

$$p = P(A \cup D) = P(A) + P(D) = \frac{4+1}{52};$$

b) I: s-a extras inimă; I şi A *nu* sunt evenimente incompatibile

$$p = P(I \cup A) = P(I) + P(A) - P(T \cap A) = \frac{13+4-1}{52} = \frac{4}{13}.$$

♡

Evenimente independente

Def. 6. *Fie* $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ *un spaţiu de probabilitate. Evenimentele* $A, B \in \mathcal{K}$ *sunt* ***evenimente independente*** *dacă*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Observaţie: Fie evenimentele $A, B \in \mathcal{K}$ astfel încât $P(A) > 0$ şi $P(B) > 0$. Evenimentele A şi B sunt **independente**, dacă **apariţia evenimentului** A**, nu influenţează apariţia evenimentului** B **şi invers**. Două evenimente se numesc **dependente** dacă probabilitatea realizării unuia dintre ele depinde de faptul că celălalt eveniment s-a produs sau nu.
Exerciţiu: Se aruncă un zar de două ori.
A: primul număr este 6; B: al doilea număr este 5; C: primul număr este 1.
Sunt A şi B evenimente independente?
Sunt A şi C evenimente independente?
Sunt B şi C evenimente dependente? ♣

P. 3. *Fie $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ un spaţiu de probabilitate şi fie $A, B \in \mathcal{K}$. Sunt echivalente afirmaţiile:*

(1) *A şi B sunt independente.*

(2) *$\bar{A}$ şi B sunt independente.*

(3) *A şi $\bar{B}$ sunt independente.*

(4) *$\bar{A}$ şi $\bar{B}$ sunt independente.*

Def. 7. *Fie $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ un spaţiu de probabilitate. $B_1, \dots, B_n$ sunt n* ***evenimente independente (în totalitate)*** *din $\mathcal{K}$ dacă*

$$P(B_{i_1} \cap \dots \cap B_{i_m}) = P(B_{i_1}) \cdot \ldots \cdot P(B_{i_m})$$

pentru orice submulţime finită $\{i_1, \dots, i_m\} \subseteq \{1, 2, ..., n\}$.

Exemplu: Se dă algoritmul de tip Monte-Carlo

```
M=input('M=') % numar maxim de iteratii; M >= 1
S=floor(4*rand(1,1000)); %genereaza aleator si independent 0,1,2,3
% 0,1,2,3 au aceeasi probabilitate de aparitie
k=0;
do
    k=k+1;
    i=randi(1000);
    x = S(i); % s-a ales aleator o valoare din S
until ( (x == 0) || (k==M) )
k
x
```

Se calculează probabilităţile unor evenimente:

$$P(\text{“primul 0 este găsit la a } M\text{-a iteraţie”}) = \left(\frac{3}{4}\right)^{M-1} \cdot \frac{1}{4},$$

$$P(\text{“0 nu este găsit în } M \text{ iteraţii”}) = \left(\frac{3}{4}\right)^{M},$$

probabilitatea evenimentului complementar este

$$P(\text{“(cel puţin un) 0 este găsit în } M \text{ iteraţii”}) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{M} \longrightarrow 1, \text{ când } M \to \infty.$$

♣

Exemplu: 1) $A, B, C \in \mathcal{K}$ sunt trei evenimente independente (în totalitate), dacă

$$P(A \cap B) = P(A)P(B),\ P(A \cap C) = P(A)P(C),\ P(B \cap C) = P(B)P(C),$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C).$$

2) Cele 4 feţe ale unui tetraedru regulat sunt vopsite astfel: una este roşie, una este albastră, una este verde şi una este colorată având cele trei culori. Se aruncă tetraedrul şi se consideră evenimentele: R: tetraedrul cade pe o parte ce conţine culoarea roşie; A: tetraedrul cade pe o parte ce conţine culoarea albastră; V: tetraedrul cade pe o partea ce conţine culoarea verde.
Sunt cele 3 evenimente independente în totalitate?

R.: Nu, cele 3 evenimente nu sunt independente în totalitate pentru că $P(R \cap A \cap V) = \frac{1}{4} \neq P(R)P(A)P(V) = \frac{1}{8}$, dar cele 3 evenimente sunt independente două câte două.
3) Pentru a verifica dacă n evenimente distincte $B_1, \ldots, B_n$ sunt independente în totalitate câte relaţii trebuie verificate?
R.: $C_n^2 + C_n^3 + ... + C_n^n = 2^n - C_n^0 - C_n^1 = 2^n - 1 - n.$ ♦

Probabilitate condiţionată

Def. 8. *Fie* $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ *un spaţiu de probabilitate şi fie* $A, B \in \mathcal{K}$. ***Probabilitatea condiţionată a evenimentului*** A ***de evenimentul*** B *este* $P(\cdot|B) : \mathcal{K} \to [0, 1]$ *definită prin*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

dacă $P(B) > 0$. $P(A|B)$ *este probabilitatea apariţiei evenimentului* A*, ştiind că evenimentul* B *s-a produs.*

Observaţie: Fie evenimentele $A, B \in \mathcal{K}$ astfel încât $P(A) > 0$ şi $P(B) > 0$. Evenimentele A şi B sunt **independente** (a se vedea Def. 6), dacă apariţia evenimentului A, nu influenţează apariţia evenimentului B şi invers, adică

$$P(A|B) = P(A) \text{ şi } P(B|A) = P(B)\,.$$

Exemplu: Se extrag succesiv fără returnare două bile dintr-o urnă cu 4 bile albe şi 5 bile roşii.
a) Ştiind că prima bilă este roşie, care este probabilitatea ca a doua bilă să fie albă?
b) Care este probabilitatea ca ambele bile să fie roşii?
R.: pentru $i \in \{1, 2\}$ fie evenimentele

R_i: la a i-a extragere s-a obţinut o bilă roşie;

$A_i = \bar{R}_i$: la a i-a extragere s-a obţinut o bilă albă;

a) $P(A_2|R_1) = \frac{4}{8}$. **b)** $P(R_1 \cap R_2) = P(R_2|R_1)P(R_1) = \frac{4}{8} \cdot \frac{5}{9}$. ♣

P. 4. *Pentru $A, B \in \mathcal{K}, P(A) > 0, P(B) > 0$ au loc:*

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A),$$

$$P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B).$$

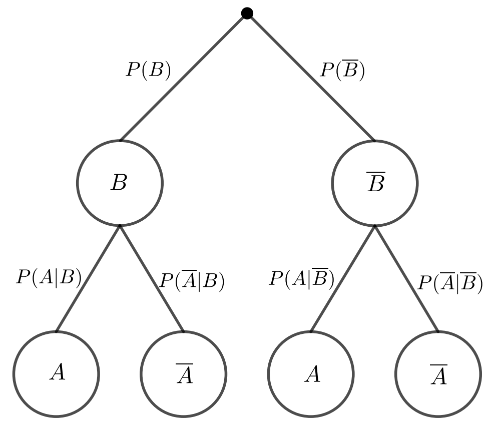
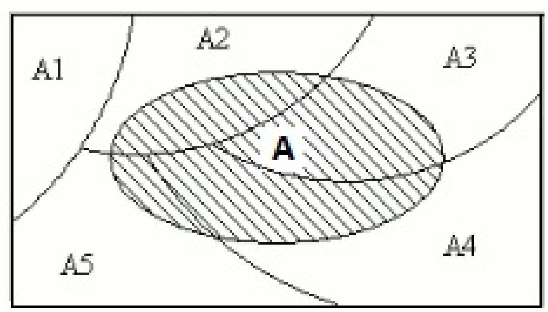


Fig.1. Probabilităţi condiţionate

Def. 9. *O familie $\{A_1, \ldots A_n\} \subset \mathcal{K}$ de evenimente din Ω se numeşte* ***partiţie*** *sau* ***sistem complet de evenimente*** *a lui Ω, dacă $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ şi pentru fiecare $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$, evenimentele A_i şi A_j sunt disjuncte, adică $A_i \cap A_j = \emptyset$.*



Partiţie $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 = \Omega$

Exemplu: Dacă $B \subset \Omega$ atunci $\{B, \bar{B}\}$ formează o partiţie a lui Ω. ♠

P. 5. ***(Formula probabilităţii totale)*** *Într-un spaţiu de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ considerăm partiţia $\{H_1, ..., H_n\}$ a lui Ω cu $H_i \in \mathcal{K}$ şi $P(H_i) > 0 \; \forall \, i \in \{1, \ldots, n\}$, şi fie $A \in \mathcal{K}$. Atunci are loc*

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + ... + P(A|H_n)P(H_n).$$

Exemplu: Într-o urnă sunt 7 bile albe, notate cu 1,2,3,4,5,6,7, şi 6 bile roşii notate cu 8,9,10,11,12,13. Se extrage o bilă. **a)** Ştiind că bila extrasă este roşie, care este probabilitatea p_1, ca numărul înscris să fie divizibil cu 4? **b)** Ştiind că prima bilă este roşie, care este probabilitatea p_2, ca o a doua bilă extrasă să fie un număr impar? (Prima bilă nu s-a returnat în urnă!)

R.: Se consideră evenimentele:

A_1: prima bilă extrasă are înscris un număr divizibil cu 4;

B_1: prima bilă extrasă este roşie;
C_1: prima bilă extrasă are înscris un număr impar;
C_2: a doua bilă extrasă are înscris un număr impar.
a) $p_1 = P(A_1|B_1) = \frac{2}{6}$.
b) $p_2 = P(C_2|B_1) =$? Folosim Def.8 şi P.4, scriem succesiv

$$p_2 = P(C_2|B_1) = \frac{P(C_2 \cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{P(C_2 \cap B_1 \cap C_1) + P(C_2 \cap B_1 \cap \bar{C}_1)}{P(B_1)}$$
$$= \frac{P(C_2|B_1 \cap C_1)P(B_1 \cap C_1) + P(C_2|B_1 \cap \bar{C}_1)P(B_1 \cap \bar{C}_1)}{P(B_1)} = \frac{\frac{6}{12} \cdot \frac{3}{13} + \frac{7}{12} \cdot \frac{3}{13}}{\frac{6}{13}} = \frac{13}{24}.$$

♡

Formula lui Bayes

Formula lui Bayes este o metodă de a "corecta" (a revizui, a îmbunătăţi) pe baza unor noi date (informaţii) disponibile o probabilitate determinată apriori. Se porneşte cu o estimare pentru probabilitatea unei anumite ipoteze I. Dacă avem noi date (informaţii) D, ce privesc ipoteza I, se poate calcula o probabilitate "corectată" pentru ipoteza I, numită probabilitate posterioară (a-posteriori).
$\hookrightarrow$ $P(I)$ probabilitatea ca ipoteza I să fie adevărată, numită şi *probabilitatea apriori*;
$\hookrightarrow$ probabilitatea condiţionată $P(I|D)$ este *probabilitatea posterioară* (corectată de cunoaşterea noilor date / informaţii);
$\hookrightarrow$ $P(D|I)$ probabilitatea ca să apară datele (informaţiile), ştiind că ipoteza I este adevarată;
$\hookrightarrow$ $P(D|\bar{I})$ probabilitatea ca să apară datele (informaţiile), ştiind că ipoteza I este falsă (ipoteza $\bar{I}$ este adevarată).
Folosind P.5 are loc:

$$P(D) = P(D|I) \cdot P(I) + P(D|\bar{I}) \cdot P(\bar{I}) = P(D|I) \cdot P(I) + P(D|\bar{I}) \cdot (1 - P(I)).$$

Formula lui Bayes este în acest caz

$$P(I|D) = \frac{P(D|I) \cdot P(I)}{P(D)} = \frac{P(D|I) \cdot P(I)}{P(D|I) \cdot P(I) + P(D|\bar{I}) \cdot P(\bar{I})}.$$

Exemplu: Considerăm evenimentele (în teste clinice):
I: o persoană aleasă aleator dintr-o populaţie are o anumită alergie $\mathcal{A}$
D_+: testul clinic returnează `pozitiv` privind alergia $\mathcal{A}$
$\bar{D}_+$: testul clinic returnează `negativ` privind alergia $\mathcal{A}$
$\triangleright$ din statistici anterioare sunt cunoscute:
$p = P(I)$, probabilitatea ca o persoană selectată aleator din populaţie să sufere de alergia $\mathcal{A}$;
sensibilitatea testului $s_1 = P(D_+|I)$;
specificitatea testului $s_2 = P(\bar{D}_+|\bar{I})$;
$\triangleright$ probabilitatea de a obţine răspuns `fals pozitiv` este $P(D_+|\bar{I}) = 1 - s_2$;
$\triangleright$ un test clinic bun implică valori apropiate de 1 pentru s_1 şi s_2;
$\blacktriangleright$ cunoscând p, s_1, s_2 se doreşte a se determina *valoarea predictivă* $P(I|D_+)$:

$$P(I|D_+) = \frac{P(D_+|I)\cdot P(I)}{P(D_+)} = \frac{P(D_+|I)\cdot P(I)}{P(D_+|I)\cdot P(I) + P(D_+|\bar{I})\cdot P(\bar{I})} = \frac{s_1\cdot p}{s_1\cdot p + (1-s_2)\cdot(1-p)}.$$

♣

P. 6. (Formula lui Bayes)
Într-un spaţiu de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ *considerăm partiţia* $\{H_1, \dots, H_n\}$ *a lui* Ω *cu* $H_i \in \mathcal{K}$ *şi* $P(H_i) > 0\ \forall\, i \in \{1, ...n\}$*, şi fie* $E \in \mathcal{K}$ *astfel încât* $P(E) > 0$*. Atunci,*

$$P(H_j|E) = \frac{P(H_j)P(E|H_j)}{P(E)} = \frac{P(H_j)P(E|H_j)}{P(E|H_1)P(H_1) + ... + P(E|H_n)P(H_n)} \quad \forall\, j \in \{1, 2, ..., n\}.$$

$\triangleright$ pentru $i \in \{1, 2, ..., n\}$ $P(H_i)$ sunt **probabilităţi apriori** pentru H_i, numite şi ipoteze (aserţiuni), E se numeşte **evidenţă** (dovadă, premisă, informaţie); cu formula lui Bayes se calculează probabilităţile pentru ipoteze, cunoscând evidenţa: $P(H_i|E)$, acestea se numesc **probabilităţi posterioare** (ulterioare); $P(E|H_i)$ reprezintă verosimilitatea datelor observate.
$\triangleright$ Se pot calcula probabilităţile *cauzelor*, date fiind *efectele*; formula lui Bayes ne ajută să diagnosticăm o anumită situaţie sau să testăm o ipoteză.

Exemplu: Ce probabilităţi calculează programul de mai jos? Ce tip de algoritm aleator este?
$\blacktriangleright$ `randi(imax,n,m)` generează o `n`×`m` matrice cu valori întregi aleatoare (pseudoaleatoare) între `1` şi `imax`.

```
clear all
ci=0;
cp=0;
c=0;
a=0;
```

```
b=0;
N=1000;
for i=1:N
 A=[randi(5,1,5),5+randi(8,1,5),13+randi(7,1,10)];
 r= randi(length(A));
 v=A(r);
 ci=ci+mod(v,2);
 cp=cp+(mod(v,2)==0);
  c=c+ mod(v,2)*(mod(v,3)==0);
  a=a+ mod(v,2)*(6<=r && r<=10);
  b=b+ (mod(v,2)==0)*(r>=10);
end
p1=c/ci
p2=a/ci
p3=b/cp
```

R.: Se dă un şir A format din 20 de elemente, în care

- 25% provin din generarea aleatoare şi cu aceeaşi probabilitate (care e 1/5) a unui număr din $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
- 25% provin din generarea aleatoare şi cu aceeaşi probabilitate (care e 1/8) a unui număr din $\{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$
- 50% provin din generarea aleatoare şi cu aceeaşi probabilitate (care e 1/7) a unui număr din $\{14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$.

Se extrage aleator un număr din şir.

►`p1` estimează probabilitatea condiţionată ca numărul ales aleator să fie divizibil cu 3, *ştiind* că s-a extras un număr impar;

► `p2` estimează probabilitatea condiţionată ca numărul ales aleator să provină din mulţimea $\{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$, *ştiind* că s-a extras un număr impar;

► `p3` estimează probabilitatea condiţionată ca numărul ales aleator să provină din mulţimea $\{14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$, *ştiind* că s-a extras un număr par.

Algoritmul este de tip Monte-Carlo! ♣

Exerciţiu: Să se calculeze valorile teoretice pentru probabilităţile `p1`, `p2`, `p3` din exemplul anterior! ♠

P. 7. ***(Regula de înmulţire)*** *Fie $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ un spaţiu de probabilitate şi fie $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{K}$ astfel încât $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$. Atunci,*

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)\ldots P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

Exemplu: Într-o urnă sunt 2 bile verzi şi 3 bile albastre. Se extrag 2 bile succesiv, fără returnare. Care este probabilitatea ca
a) prima bilă să fie verde, iar cea de-a doua albastră?
b) cele 2 bile să aibă aceeaşi culoare?
c) a doua bilă să fie albastră?
d) prima bilă să fie verde, *ştiind* că a doua este albastră?
e) se mai extrage o a treia bilă; se cere probabilitatea ca prima bilă să fie verde, cea de-a doua albastră şi a treia tot albastră.
R.: Notăm pentru $i \in \{1, 2, 3\}$ evenimentele:
A_i: la a i-a extragere s-a obţinut bilă albastră; V_i: la a i-a extragere s-a obţinut bilă verde;
a) folosim P.4: $P(V_1 \cap A_2) = P(A_2|V_1)P(V_1) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5}$
b) $P((V_1 \cap V_2) \cup (A_1 \cap A_2)) = P(V_1 \cap V_2) + P(A_1 \cap A_2) = P(V_2|V_1)P(V_1) + P(A_2|A_1)P(A_1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5}$
c) folosim formula probabilităţii totale P.6:
$P(A_2) = P(A_2|V_1)P(V_1) + P(A_2|A_1)P(A_1) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5}$
d) folosim P.4: $P(V_1|A_2) = \frac{P(V_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{P(A_2|V_1)P(V_1)}{P(A_2)} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5}}$
e) formula de înmulţire a probabilităţilor P.7:
$P(V_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(V_1) \cdot P(A_2|V_1) \cdot P(A_3|V_1 \cap A_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}$.

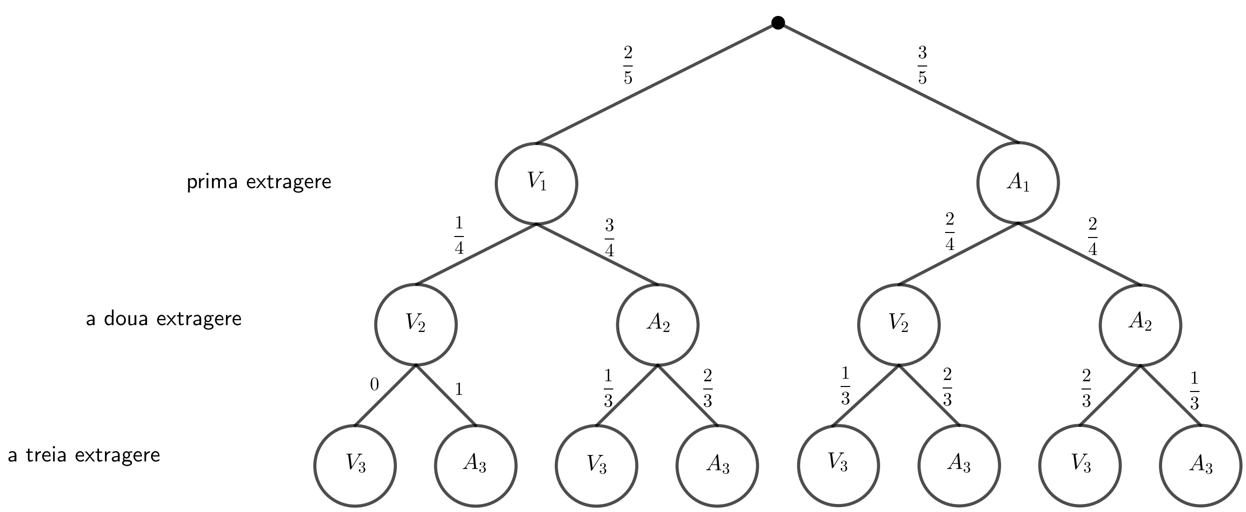


Fig. 3. Extragere fără returnare

♣

Variable aleatoare

Exemplu: Un jucător aruncă două monede $\Rightarrow \Omega = \{(c,p),(c,c),(p,c),(p,p)\}$ (c=cap; p=pajură)

X indică de câte ori a apărut pajură: $\Rightarrow X : \Omega \to \{0,1,2\}$

$\Rightarrow P(X=0) = P(X=2) = \frac{1}{4}, P(X=1) = \frac{1}{2}$ ■

Notaţie 1. *variabilă/variabile aleatoare $\to$ v.a.*

O variabilă aleatoare este:

▶ **discretă**, dacă ia un număr finit de valori $(x_1,\dots,x_n)$ sau un număr infinit numărabil de valori $(x_1,\dots,x_n,\dots)$

▶ **continuă**, dacă valorile sale posibile sunt nenumărabile şi sunt într-un interval (sau reunine de intervale) sau în $\mathbb{R}$

V.a. discrete: exemple de v.a. numerice discrete: suma numerelor obţinute la aruncarea a 4 zaruri, numărul produselor defecte produse de o anumită firmă într-o săptămână; numărul apelurilor telefonice într-un call center în decursul unei ore; numărul de accesări ale unei anumite pagini web în decursul unei anumite zile (de ex. duminica); numărul de caractere transmise eronat într-un mesaj de o anumită lungime; exemple de v.a. categoriale ($\to$ se clasifică în categorii): prognoza meteo: ploios, senin, înnorat, ceţos; calitatea unor servicii: nesatisfăcătoare, satisfăcătoare, bune, foarte bune, excepţionale . . .)

V.a. continue sunt v.a. numerice: timpul de funcţionare până la defectare a unei piese electronice, temperatura într-un oraş, viteza înregistrată de radar pentru maşini care parcurg o anumită zonă . . .

Variabile aleatoare numerice - definiţie formală

Def. 10. *Fie $(\Omega,\mathcal{K},P)$ spaţiu de probabilitate $X:\Omega\to\mathbb{R}$ este o variabilă aleatoare, dacă*

$$\{\omega\in\Omega\,:\,X(\omega)\le x\}\in\mathcal{K}\ \textit{pentru fiecare}\ x\in\mathbb{R}.$$

Variabile aleatoare discrete $X:\Omega\to\{x_1,x_2,\dots,x_i,\dots\}$

Def. 11. ***Distribuţia de probabilitate*** *a v.a. discrete X*

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_i & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_i & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i\in I}$$

$I\subseteq\mathbb{N}$ (mulţime de indici nevidă); $p_i = P(X=x_i) > 0$, $i\in I$, cu $\sum\limits_{i\in I} p_i = 1$.

▷ O variabilă aleatoare discretă X este caracterizată de **distribuţia de probabilitate** $P[X]$:

(1) $\quad P[X] : \{x_1, x_2, \dots\} \to [0,1],$ definită prin $P[X](x) = P(X = x)\ \forall\, x \in \{x_1, x_2, \dots\}.$

▷ Notăm $\{X = x_i\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i\}$; acesta este un eveniment din $\mathcal{K}$ pentru fiecare $i \in I$.

Distribuţii discrete clasice

Distribuţia discretă uniformă: $X \sim Unid(n),\ n \in \mathbb{N}^*$

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

Exemplu: Se aruncă un zar, fie X v.a. care indică numărul apărut

$$\Rightarrow X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \dots & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Matlab/Octave: `unidrnd`$(n,\ldots)$, `randi`$(n,\ldots)$ generează valori aleatoare; `unidpdf`(x,n) calculează $P(X = x)$.

Distribuţia Bernoulli: $X \sim Bernoulli(p)$, $p \in (0,1)$

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

Exemplu: în cadrul unui experiment poate să apară evenimentul A (*succes*) sau $\bar{A}$ (*insucces*)
$X = 0 \Leftrightarrow$ dacă $\bar{A}$ apare; $\ X = 1 \Leftrightarrow$ dacă A apare
$\Rightarrow X \sim Bernoulli(p)$ cu $p := P(A)$

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-P(A) & P(A) \end{pmatrix}$$

♣

generare în Matlab/Octave:

```
n=1000;
p=0.3;
nr=rand(1,n);
X=(nr<=p) % vector de date avand distributia Bernoulli(p)
%%%%%%%%
Y=floor(rand(1,n)+p)% vector de date avand distributia Bernoulli(p)
%%%%%%%%
Z=binornd(1,p,1,n)% vector de date avand distributia Bernoulli(p)
```

Distribuţia binomială: $X \sim Bino(n,p), n \in \mathbb{N}^*, p \in (0,1)$
în cadrul unui experiment poate să apară evenimentul A (*succes*) sau $\bar{A}$ (*insucces*)
• A = succes cu $P(A) = p$, $\quad \bar{A}$ = insucces $P(\bar{A}) = 1-p$
• se repetă experimentul de n ori
• v.a. X= numărul de succese în n repetări independente ale experimentului $\Rightarrow$ valori posibile: $X \in \{0,1,\ldots,n\}$

$$P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k \in \{0,\ldots,n\}.$$

Exemplu: Un zar se aruncă de 10 ori, fie X v.a. care indică de câte ori a apărut numărul 6 $\Rightarrow Bino(10, \frac{1}{6})$.
$\rightarrow$ are loc formula binomială

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

pentru $a = p$ şi $b = 1-p$ se obţine

$$1 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Matlab/Octave: `binornd`$(n,p,...)$ generează valori aleatoare; `binopdf`(x,n,p) calculează $P(X=x)$.

$\triangleright$ Distribuţia binomială corespunde modelului cu extragerea bilelor dintr-o urnă cu returnarea bilelor după fiecare extragere.
Exemplu: Într-o urnă sunt n_1 bile albe şi n_2 bile negre. Se extrag cu returnare n bile; fie v.a. X = numărul de bile albe extrase $\Rightarrow X \sim Bino(n,p)$ cu $p = \frac{n_1}{n_1+n_2}$.
2) Fie un canal de comunicare binară care transmite cuvinte codificate de N biţi fiecare. Probabilitatea transmiterii cu succes a unui singur bit este p, iar probabilitatea unei erori este $1-p$. Presupunem, de asemenea, că un astfel de cod este capabil să corecteze până la m erori, unde $0 \leq m \leq N$. Se ştie că transmiterea biţilor succesivi este independentă, atunci probabilitatea transmiterii cu succes a cuvântului este $p = P(A)$, unde
A: cel mult m erori apar în transmiterea celor N biţi

$$p = P(A) = \sum_{k=0}^{m} C_N^k p^{N-k} (1-p)^k.$$

♠

Exerciţiu: 1) Un client accesează o dată pe zi o anumită pagină web, care oferă produse bio,

cu probabilitatea 0.4. Cu ce probabilitate clientul accesează această pagină în total de 3 ori în următoarele 6 zile?
2) O reţea de laborator este compusă din 15 calculatoare. Reţeaua a fost atacată de un virus nou, care atacă un calculator cu o probabilitatea 0.4, independent de alte calculatoare. Care este probabilitatea ca virusul a atacat a) cel mult 10 computere; b) cel puţin 10 calculatoare; c) exact 10 calculatoare? ♣

Distribuţia hipergeometrică: $X \sim Hyge(n, n_1, n_2),\ n, n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$
Într-o urnă sunt n_1 bile albe şi n_2 bile negre. Se extrag **fără returnare** n bile.
Fie v.a. X = numărul de bile albe extrase ⇒ valori posibile pentru X sunt $\{0, 1, \ldots, n^*\}$ cu

$$n^* = \min(n_1, n) = \begin{cases} n_1 & \text{dacă } n_1 < n \text{ (mai puţine bile albe decât numărul de extrageri)} \\ n & \text{dacă } n_1 \geq n \text{ (mai multe bile albe decât numărul de extrageri)} \end{cases}$$

Fie $n_1, n_2, n \in \mathbb{N}$ cu $n \leq n_2$ şi notăm $n^* = \min(n_1, n)$.

$$\Rightarrow\ P(X = k) = \frac{C_{n_1}^k C_{n_2}^{n-k}}{C_{n_1+n_2}^n}, \quad k \in \{0, \ldots, n^*\}.$$

Matlab/Octave: `hygernd`$(n_1 + n_2, n_1, n, \ldots)$ generează valori aleatoare;
`hygepdf`$(x, n_1 + n_2, n_1, n)$ calculează $P(X = x)$.

Exemplu: 1) Într-o urnă sunt $n_1 = 2$ bile albe şi $n_2 = 3$ bile negre. Se extrag fără returnare $n = 3$ bile. Fie v.a. X = numărul de bile albe extrase. Vom calcula $P(X = 1)$ cu două metode:
Prima metodă: Pentru $i \in \{1, 2, 3\}$ fie evenimentele
A_i: la a i-a extragere s-a obţinut bilă albă
$N_i = \bar{A}_i$: la a i-a extragere s-a obţinut bilă neagră.
Scriem

$$P(X = 1) = P(A_1 \cap N_2 \cap N_3) + P(A_1 \cap N_2 \cap N_3) + P(A_1 \cap N_2 \cap N_3),$$

$$P(A_1 \cap N_2 \cap N_3) = P(A_1)P(N_2|A_1)P(N_3|A_1 \cap N_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{5}$$

$$P(N_1 \cap A_2 \cap N_3) = P(N_1)P(A_2|N_1)P(N_3|N_1 \cap A_2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{5}$$

$$P(N_1 \cap N_2 \cap A_3) = P(N_1)P(N_2|N_1)P(A_3|N_1 \cap N_2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow P(X = 1) = \frac{3}{5}.$$

A doua metodă: O bilă albă din două se poate alege în $C_2^1 = 2$ moduri, două bile neagre din trei se pot alege în $C_3^2 = 3$ moduri, trei bile din cinci se pot alege în $C_5^3 = 10$ moduri

$$\Rightarrow P(X = 1) = \frac{2 \cdot 3}{10} = \frac{3}{5}.$$

2) Loto 6 din 49 $\rightarrow$ Care este probabilitatea de a nimeri exact 4 numere câştigătoare?
R.: Între cele 49 de bile exact $n_1 = 6$ sunt câştigătoare ("bilele albe") şi $n_2 = 43$ necâştigătoare ("bilele negre"). Care este probabilitatea ca din $n = 6$ extrageri fără returnare, exact $k = 4$ numere să fie câştigătoare?

$$\Rightarrow \; P(X=4) = \frac{C_6^4 C_{43}^2}{C_{49}^6}$$

$\diamondsuit$

Distribuţia geometrică $X \sim Geo(p), p \in (0,1)$
În cadrul unui experiment poate să apară evenimentul A (*succes*) sau $\bar{A}$ (*insucces*)
• $A =$ succes cu $P(A) = p$, $\quad \bar{A} =$ insucces $P(\bar{A}) = 1 - p$
• se repetă (independent) experimentul până apare prima dată A ("succes")
• v.a. X arată de câte ori apare $\bar{A}$ (numărul de "insuccese") *până* la apariţia primului A ("succes") $\Rightarrow$ valori posibile: $X \in \{0, 1, \ldots\}$

$$P(X=k) = p(1-p)^k \quad \text{pentru } k \in \{0,1,2,\ldots\}.$$

Matlab/Octave: `geornd`$(p, ...)$ generează valori aleatoare; `geopdf`(x, p) calculează $P(X = x)$.

Exemplu: X v.a. ce indică numărul de retransmisii printr-un canal cu zgomot (canal cu perturbări) până (înainte de) la prima recepţionare corectă a mesajului; X are distribuţie geometrică.

$\spadesuit$

Variabile aleatoare independente

Def. 12. *Variabilele aleatoare discrete X (care ia valorile $\{x_i, i \in I\}$) şi Y (care ia valorile $\{y_j, j \in J\}$) sunt* ***independente****, dacă şi numai dacă*

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j) \quad \forall\, i \in I, j \in J.$$

Notaţie 2. $P(X = x_i, Y = y_j) = P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})\, \forall\, i \in I, j \in J.$

Observaţie: Fie evenimentele $A_i = \{X = x_i\}, i \in I$, şi $B_j = \{Y = y_j\}, j \in J$. V.a. X şi Y sunt independente $\Longleftrightarrow \forall\, (i,j) \in I \times J$ evenimentele A_i şi B_j sunt independente (a se vedea Def. 6).

P. 8. *Fie variabilele aleatoare discrete X (care ia valorile $\{x_i, i \in I\}$) şi Y (care ia valorile $\{y_j, j \in J\}$). Sunt echivalente afirmaţiile:*
(1) *X şi Y sunt v.a. sunt independente;*

(2) $P(X = x_i | Y = y_j) = P(X = x_i) \quad \forall\, i \in I, j \in J$;
(3) $P(Y = y_j | X = x_i) = P(Y = y_j) \quad \forall\, i \in I, j \in J$.
(4) $P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x) \cdot P(Y \leq y) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

Def. 13. $\mathbb{X} = (X_1, \ldots, X_m)$ *este un* ***vector aleator discret*** *dacă fiecare componentă a sa este o variabiă aleatoare discretă.*
Dacă $\mathbb{X}$ *este un vector aleator discret care ia valori în mulţimea* $\mathbb{X}(\Omega) = \{\mathbb{x}_k : k \in K\} \subset \mathbb{R}^m$, *unde* $K \subseteq \mathbb{N}$ *este o mulţime de indici, atunci*

$$P(\mathbb{X} = \mathbb{x}_k) = P\big(\{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) = \mathbb{x}_k\}\big),\ k \in K,$$

determină ***distribuţia de probabilitate a vectorului aleator discret*** $\mathbb{X}$

$$\mathbb{X} \sim \begin{pmatrix} \mathbb{x}_k \\ P(\mathbb{X} = \mathbb{x}_k) \end{pmatrix}_{k \in K}.$$

$\triangleright$ Vectorii aleatori sunt caracterizaţi de distribuţiile lor! De exemplu, un vector aleator cu 2 componente:

$$\mathbb{X} = (X, Y) \sim \begin{pmatrix} (x_i, y_j) \\ p_{ij} \end{pmatrix}_{(i,j) \in I \times J}$$

unde I, $J \subseteq \mathbb{N}$ sunt mulţimi de indici,
$p_{ij} = P((X, Y) = (x_i, y_j)) = P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}), p_{ij} > 0\ \forall\, i \in I, j \in J$,
iar $\displaystyle\sum_{(i,j) \in I \times J} p_{ij} = 1$.

$\triangleright$ Uneori distribuţia vectorului (X, Y) se dă sub formă tabelară:

$X \backslash Y$	...	y_j	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	...	p_{ij}	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Observaţie: Dacă X şi Y sunt v.a. independente, atunci

$$(2) \qquad p_{ij} = P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}) = P(X = x_i)P(Y = y_j) \quad \forall\, i \in I, j \in J.$$

$\triangleright$ Dacă X şi Y sunt v.a. independente, şi se ştiu distribuţiile lor, atunci distribuţia vectorului aleator (X, Y) se determină pe baza formulei (2).
$\triangleright$ Dacă se cunoaşte distribuţia vectorului aleator (X, Y) distribuţiile lui X şi Y se determină astfel:

$$P(X = x_i) = \sum_{j \in J} p_{ij} \quad \forall i \in I$$

$$P(Y = y_j) = \sum_{i \in I} p_{ij} \quad \forall j \in J.$$

Operaţii cu variabile aleatoare (numerice)

• Cunoscând distribuţia vectorului (X,Y) cum se determină distribuţia pentru $X+Y$, $X\cdot Y$, X^2-1, $2Y$?

Exemplu: Fie vectorul aleator discret (X_1,X_2) cu distribuţia dată de următorul tabel:

$X_1 \backslash X_2$	0	1	2
1	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$

. Determinaţi: a) distribuţiile variabilelor aleatoare X_1 şi X_2;

b) distribuţiile variabilelor aleatoare X_1+X_2 şi $X_1\cdot X_2$, X_1^2-1;

c) dacă variabilele aleatoare X_1 şi X_2 sunt independente sau dependente.

R.: a) $X_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{5}{16} & \frac{11}{16} \end{pmatrix}$ şi $X_2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{3}{16} & \frac{6}{16} & \frac{7}{16} \end{pmatrix}$.

b) $X_1+X_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{2}{16} & \frac{2}{16} & \frac{7}{16} & \frac{5}{16} \end{pmatrix}$ şi $X_1\cdot X_2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ \frac{3}{16} & \frac{1}{16} & \frac{7}{16} & \frac{5}{16} \end{pmatrix}$, $X_1^2-1 \sim \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ \frac{5}{16} & \frac{11}{16} \end{pmatrix}$

c) X_1 şi X_2 nu sunt independente, pentru că $\frac{2}{16} = P(X_1=1,X_2=0) \neq P(X_1=1)P(X_2=0) = \frac{5}{16}\cdot\frac{3}{16}$. ♡

• Cunoscând distribuţiile variabilelor aleatoare independente (discrete) X şi Y, cum se determină distribuţia pentru $X+Y$, $X\cdot Y$?

Exerciţiu: Fie X,Y v.a. independente, având distribuţiile

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

a) Care sunt distribuţiile v.a. $2X+1$, Y^2, dar distribuţia vectorului aleator (X,Y)?

b) Care sunt distribuţiile v.a. $X+Y$, $X\cdot Y$, $\max(X,Y)$, $\min(X,Y^2)$? ♣

Exerciţiu: Se aruncă două zaruri. a) Să se scrie distribuţia de probabilitate pentru variabila aleatoare, care este suma celor două numere apărute. b) Să se scrie distribuţia de probabilitate pentru variabila aleatoare, care este produsul celor două numere apărute. ♠

Def. 14. ***Valoarea medie a unei variabile aleatoare discrete*** *(numerice) X, care ia valorile $\{x_i, i\in I\}$, este*

$$E(X) = \sum_{i\in I} x_i P(X=x_i),$$

dacă $\sum_{i\in I} |x_i| P(X=x_i) < \infty$.

▷ Valoarea medie a unei variabile aleatoare caracterizează *tendinţa centrală* a valorilor acesteia.

P. 9. *Fie X şi Y v.a. discrete. Au loc proprietăţile:*
$\rightarrow E(aX+b) = aE(X)+b$ pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$;
$\rightarrow E(X+Y) = E(X)+E(Y)$;
$\rightarrow$ Dacă X şi Y sunt v.a. independente, atunci $E(X\cdot Y) = E(X)E(Y)$.
$\rightarrow$ Dacă $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e o funcţie astfel încât $g(X)$ este v.a., atunci

$$E(g(X)) = \sum_{i\in I} g(x_i)P(X = x_i),$$

dacă $\sum\limits_{i\in I} |g(x_i)|P(X = x_i) < \infty$.

Matlab/Octave: `mean(x)`
pentru $x = [x(1), ..., x(n)]$, se calculează $\texttt{mean}(x) = \frac{1}{n}(x(1) + ... + x(n))$

Exemplu: Joc: Se aruncă un zar; dacă apare 6, se câştigă 3 u.m. (unităţi monetare), dacă apare 1 se câştigă 2 u.m., dacă apare 2,3,4,5 se pierde 1 u.m. În medie cât va câştiga sau pierde un jucător după 30 de repetiţii ale jocului?
Răspuns: Fie X v.a. care indică venitul la un joc

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ \frac{4}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Pentru $i \in \{1, ..., 30\}$ fie X_i venitul la al i-lea joc; X_i are aceeaşi distribuţie ca X. Venitul mediu al jucătorului după 30 de repetiţii ale jocului este

$$E(X_1 + ... + X_{30}) = E(X_1) + ... + E(X_{30}) = 30 \cdot E(X) = 30 \cdot \frac{1}{6} \cdot (2 - 4 + 3) = 5 \text{ (u.m.)}.$$

Aşadar jucătorul *câştigă în medie* 5 u.m.
Exerciţiu:
Input: Fie A(1),...,A(200) un vector cu 200 de elemente, din care 50 sunt egale cu 0, 70 egale cu 1 şi 80 sunt egale cu 2 (ordinea lor este necunoscută).
Output: Să se găsească un 0 în vector, alegând aleator un element din şir şi verificând dacă acesta este 0.
Întrebare: În *medie* câte iteraţii sunt necesare *înainte* să apară primul 0?

```
clear all
A=[zeros(1,50), zeros(1,70)+1,zeros(1,80)+2];
index=randperm(length(A));
A=A(index);
c=0;
```

```
i=randi(length(A));
while A(i)~=0
c=c+1;
i=randi(length(A));
end
fprintf('nr. iteratii inainte sa apara primul 0: %d \n',c)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear all
A=[zeros(1,50), zeros(1,70)+1,zeros(1,80)+2];
s=[];
N=1000;
for j=1:N
index=randperm(length(A));
A=A(index);
c=0;
i=randi(length(A));
while A(i)~=0
c=c+1;
i=randi(length(A));
end
s=[s,c];
end
fprintf('nr. mediu de iteratii: %4.3f \n',mean(s))
```

Probabilitatea să apară la orice iteraţie 0 este $p = \frac{50}{200} = 0.25$.
Notăm cu X v.a. care indică numărul de iteraţii necesare *înainte* să apară primul 0
$\Rightarrow X \sim Geo(p)$.
Numărul mediu de iteraţii necesare *înainte* să apară primul 0 este $E(X)$. Se poate arăta că $E(X) = \frac{1-p}{p} = \frac{1-0.25}{0.25} = 3$. ▼

Def. 15. *Fie $X_1, \ldots, X_n$ cu $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, variabile aleatoare, care iau valori în mulţimile $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n$. $X_1, \ldots, X_n$ sunt* ***variabile aleatoare independente****, dacă*

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \cdot \ldots \cdot P(X_n = x_n)$$

pentru fiecare $x_1 \in \mathcal{X}_1, \ldots, x_n \in \mathcal{X}_n$.

Exemplu: Se aruncă patru zaruri. Fie X_i v.a. care indică numărul apărut la al i-lea zar.
a) X_1, X_2, X_3, X_4 sunt v.a. independente;
b) $X_1 + X_2$ şi $X_3 + X_4$ sunt v.a. independente;
c) $X_1 + X_2 + X_3$ şi X_4 sunt v.a. independente.

Notaţie 3. Fie $\mathbb{U}$ un vector aleator discret care ia valori în $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ notăm

$$P[\mathbb{U}] : \mathcal{U} \to [0,1] \text{ definită prin } P[\mathbb{U}](\mathbb{u}) = P(\mathbb{U} = \mathbb{u}) \; \forall \; \mathbb{u} \in \mathcal{U}.$$

$\hookrightarrow P[\mathbb{U}]$ este **distribuţia de probabilitate** a vectorului aleator, dacă $m > 1$ (a se vedea Def. 13), sau a v.a., dacă $m = 1$ (a se vedea Def. 11).

► **Observaţie: (1)** Def. 15 se transcrie mai compact astfel:
$X_1, \dots, X_n$ sunt **variabile aleatoare independente**

$$\Longleftrightarrow P[X_1, \dots, X_n] = P[X_1] \cdot \dots \cdot P[X_n].$$

(2) Dacă U_1 and U_2 sunt 2 v.a. discrete atunci:
$\triangleright$ U_1 au U_2 aceeaşi distribuţie $\Longleftrightarrow P[U_1] = P[U_2]$.
$\triangleright$ U_1 şi U_2 sunt v.a. independente $\Longleftrightarrow P[U_1, U_2] = P[U_1]P[U_2] \Longleftrightarrow P[U_1|U_2] = P[U_1] \Longleftrightarrow P[U_2|U_1] = P[U_2]$.

P. 10. *Dacă $X_1, \dots, X_n$ sunt variabile aleatoare independente, atunci pentru orice indici diferiţi $i_1, ..., i_k \subset \{1, ..., n\}$ $X_{i_1}, \dots, X_{i_k}$ sunt variabile aleatoare independente, adică*

$$P[X_{i_1}, \dots, X_{i_k}] = P[X_{i_1}] \cdot \dots \cdot P[X_{i_k}].$$

Reţele Bayes

Reţele Bayes sunt anumite grafuri orientate aciclice, în care nodurile sunt variabile aleatoare şi există anumite proprietăţi de independenţă între noduri. O noţiune de bază în contextul reţelelor Bayes este *condiţional independenţa*.

Fie $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ un spaţiu de probabilitate. De asemenea considerăm că toate probabilităţile condiţionate sunt definite (adică condiţionarea se face în raport cu un eveniment a cărui probabilitate nu este 0).

Def. 16. *Evenimentele $A, B \in \mathcal{K}$ sunt* ***condiţional independente****, cunoscând evenimentul $C \in \mathcal{K}$, dacă şi numai dacă*

$$P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C).$$

P. 11. *Au loc echivalenţele:*

$$P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C) \Leftrightarrow P(A|B \cap C) = P(A|C) \Leftrightarrow P(B|A \cap C) = P(B|C).$$

Demonstraţie: • Pentru prima echivalenţă: "⇒"

$$P(A|B \cap C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} = \frac{P(A \cap B|C)P(C)}{P(B|C)P(C)} = \frac{P(A|C)P(B|C)}{P(B|C)} = P(A|C).$$

"$\Leftarrow$"

$$P(A \cap B|C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A|B \cap C)P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A|C)P(B \cap C)}{P(C)}$$
$$= P(A|C)P(B|C).$$

• $P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C) \Leftrightarrow P(B|A \cap C) = P(B|C)$ se demonstrează analog. ■

Exemplu: 1) Într-o cutie sunt 2 monede: o monedă corectă şi una măsluită, care indică pe ambele părţi pajură. Se alege aleator o monedă şi se aruncă de două ori. Se consideră evenimentele
A: la prima aruncare s-a obţinut pajură;
B: la a doua aruncare s-a obţinut pajură;
M: s-a ales moneda corectă $\Rightarrow \bar{M}$: s-a ales moneda măsluită.
Să se calculeze $P(A|M), P(B|M), P(A \cap B|M), P(A \cap B), P(A), P(B)$. Sunt A şi B evenimente independente?
R.: $P(A|M) = P(B|M) = 0.5$; ştiind că s-a ales moneda corectă $\Rightarrow P(A \cap B|M) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, adică A şi B sunt condiţional independente, cunoscându-se evenimentul M; ştiind că s-a ales moneda măsluită $\Rightarrow P(A \cap B|\bar{M}) = 1$.

Folosind formula probabilităţii totale (a se vedea P5)

$$\Rightarrow P(A) = P(A|M)P(M) + P(A|\bar{M})P(\bar{M}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Similar, $P(B) = \frac{3}{4}$. Folosind din nou formula probabilităţii totale

$$P(A \cap B) = P(A \cap B|M)P(M) + P(A \cap B|\bar{M})P(\bar{M}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{8}.$$

Concluzie: A şi B ***nu*** sunt evenimente independente, dar A şi B sunt conditional independente, cunoscându-se evenimentul M.
2) Fie Z o v.a. care indică rezultatul aruncării unui zar. Considerăm evenimentele: $A = (Z \in \{1, 2\})$, $B = (Z \in \{2, 4, 6\})$ şi $C = (Z \in \{1, 4\})$. Să se arate că:
a) A şi B sunt independente;
b) A şi B nu sunt condiţional independente, cunoscând evenimentul C.
R.: a) $P(A \cap B) = P(Z = 2) = \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = P(Z \in \{1, 2\})P(Z \in \{2, 4, 6\}) = P(A)P(B) \implies A$ şi B sunt independente.
b)$P(A \cap B|C) = P(Z = 2|Z \in \{1, 4\}) = 0$, $P(A|C) = P(Z = 1|Z \in \{1, 4\}) = \dfrac{1}{2} = P(Z = 4|Z \in \{1, 4\}) = P(B|C) \Rightarrow A$ şi B nu sunt condiţional independente, cunoscând C. ▲

Def. 17. *Fie X, Y, Z v.a. discrete care iau valori în mulţimile $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$. V.a. X este* ***condiţional independentă*** *de Y, cunoscând (ştiind) v.a. Z, dacă pentru fiecare $x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}, z \in \mathcal{Z}$,are loc*

$$P(X = x, Y = y|Z = z) = P(X = x|Z = z)P(Y = y|Z = z)\,.$$

Notaţie 4. Fie $\mathbb{U}$ un vector aleator discret care ia valori în $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ şi fie $\mathbb{V}$ un vector aleator discret care ia valori în $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$, $m, n \in \mathbb{N}^*$. Notăm cu $P[\mathbb{U}|\mathbb{V}] : \mathcal{U} \times \mathcal{V} \to [0, 1]$ distribuţia de probabilitate condiţionată

$$P[\mathbb{U}|\mathbb{V}](\mathbb{u}, \mathbb{v}) = P(\mathbb{U} = \mathbb{u}|\mathbb{V} = \mathbb{v})\ \forall\, \mathbb{u} \in \mathcal{U}, \mathbb{v} \in \mathcal{V}.$$

► **Observaţie:** X este condiţional independentă de Y, cunoscând (ştiind) v.a. Z (a se vedea Def. 17) dacă

(3) $$P[X, Y|Z] = P[X|Z]P[Y|Z]\,.$$

Folosind **P.11**, rezultă:

P. 12. *V.a. X şi Y sunt condiţional independente, cunoscând $Z \Leftrightarrow\ P[X, Y|Z] = P[X|Z]P[Y|Z]$ $\Leftrightarrow\ P[X|Y, Z] = P[X|Z] \Leftrightarrow\ P[Y|X, Z] = P[Y|Z]$.*

Vom introduce noţiunea de condiţional independenţă pentru mai multe v.a. discrete.

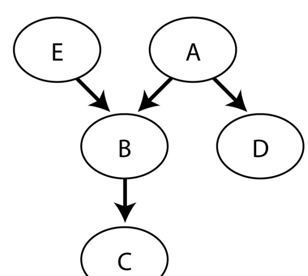
Def. 18. *Fie $X, Y_1, \ldots, Y_m, Z_1, \ldots, Z_n$ v.a. discrete. V.a. X este* ***condiţional independentă*** *de $Y_1, \ldots, Y_m$, ştiind (cunoscând) v.a. $Z_1, \ldots, Z_n$, dacă are loc*

$$P[X, Y_1, \ldots, Y_m|Z_1, \ldots, Z_n] = P[X|Z_1, \ldots, Z_n]P[Y_1, \ldots, Y_m|Z_1, \ldots, Z_n].$$

P. 13. *Fie X o v.a. discretă condiţional independentă de v.a. discrete $Y_1, \ldots, Y_m$, cunoscând v.a. discrete $Z_1, \ldots, Z_n$. Dacă $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, m\}$ sunt indici diferiţi, atunci X este condiţional independentă de $Y_{i_1}, \ldots, Y_{i_k}$, cunoscând $Z_1, \ldots, Z_n$, adică*

$$P[X|Y_{i_1}, \ldots, Y_{i_k}, Z_1, \ldots, Z_n] = P[X|Z_1, \ldots, Z_n]\,,$$
$$\text{şi}\quad P[Y_{i_1}, \ldots, Y_{i_k}|X, Z_1, \ldots, Z_n] = P[Y_{i_1}, \ldots, Y_{i_k}|Z_1, \ldots, Z_n].$$

Reţeaua Bayes este un graf orientat aciclic (i.e. nu conţine niciun drum orientat închis).



▷ Nodul Y este **părinte** pentru nodul X, dacă există o muchie orientată de la Y la X. Mulţimea părinţilor lui X se notează cu $p(X)$. Dacă X este nod rădăcină, atunci $p(X) = \emptyset$. De exemplu: $p(B) = \{E, A\}, p(D) = \{A\}, p(C) = \{B\}, p(E) = p(A) = \emptyset$.

▷ Nodul Y este **descendent** al nodului X, dacă există un drum orientat de la X la Y. Mulţimea

descendenţilor lui X se notează cu $d(X)$. De exemplu: $d(E) = \{B, C\}, d(A) = \{B, C, D\}$, $d(B) = \{C\}, d(D) = \emptyset$.
Într-o reţea în care există o structură cauzală, nodurile din $p(X)$ reprezintă *cauzele* pentru X, iar nodurile din $d(X)$ sunt *efectele* nodului X.
$\triangleright$ Nodul Y este **nondescendent** al nodului X, dacă nu este descendent al nodului X. Mulţimea nondescendeţilor lui X se notează cu $nd(X)$. De exemplu: $nd(E) = \{A, D\}, nd(A) = \{E\}, nd(B) = \{E, A, D\}, nd(D) = \{E, A, B, C\}, nd(C) = \{E, A, B, D\}$.
$\triangleright$ Fiecare nod X_1, ..., X_n din reţea este identificat cu o variabilă aleatoare şi este definit pe acelaşi spaţiu de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P)$; probabilităţile $P[X_j|p(X_j)], j = \overline{1, n}$ sunt date;
$\triangleright$ are loc convenţia $P[X_j|p(X_j)] = P[X_j]$, dacă X_j este nod rădăcină ($P[X_j]$ este distribuţia de probabilitate a lui X_j, a se vedea (1)), iar $P[X_j|p(X_j)]$ este distribuţia de probabilitate condiţionată, a se vedea Notaţia 4).
$\blacktriangleright$ Properietatea reţelei Bayes: orice nod X şi nondescendenţii săi $nd(X)$ sunt *condiţional independenţi*, dacă se cunosc valorile părinţilor $p(X)$; dacă $p(X) = \emptyset$, atunci X şi $nd(X)$ sunt independenţi.

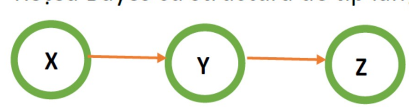
Proprietate: Fie $A, B, C \in \mathcal{K}$ evenimente. Au loc relaţiile:

(4)
$$P(A \cap C|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = P(A|C)$$

(5)
$$P(A \cap B \cap C|C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} = P(A \cap B|C).$$

Exemplul 1: Reţea Bayes de tip lanţ cauzal (a se vedea figura alăturată): Context - într-o anumită dimineaţă la Cluj

Rețea Bayes cu structură de tip lanț cauzal



$$X = \begin{cases} 1, & \text{plouă} \\ 0, & \text{nu plouă} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{este trafic aglomerat} \\ 0, & \text{nu este trafic aglomerat} \end{cases}, \quad Z = \begin{cases} 1, & \text{angajaţii întârzie la serviciu} \\ 0, & \text{angajaţii nu întârzie la serviciu} \end{cases}$$

• nod rădăcină: X, $p(X) = nd(X) = \emptyset$, $d(X) = \{X, Z\}$;
$p(Y) = nd(Y) = \{X\}$, $d(Y) = \{Z\}$; $p(Z) = \{Y\}$, $nd(Z) = \{X, Y\}$, $d(Z) = \emptyset$.

• probabilităţile $P[X]$, $P[Y|X]$, $P[Z|Y]$ sunt date;
• proprietatea reţelei Bayes:
▷ Y şi nondescendenţii săi $nd(Y) = \{X\}$ sunt condiţional independenţi, dacă se cunosc valorile părinţilor $p(Y) = \{X\}$; are loc $P[Y, X|X] = P[Y|X]P[X|X] = P[Y|X]$ (nu furnizează o informaţie suplimentară pentru calculele în reţeaua Bayes)
▷ Z şi nondescendenţii săi $nd(Z) = \{X, Y\}$ sunt condiţional independenţi, dacă se cunosc valorile părinţilor $p(Z) = \{Y\}$; atunci scriem (a se vedea Def. 18)

$$P[Z, X, Y|Y] = P[Z|Y]P[X, Y|Y] = P[Z|Y]P[X|Y] \quad \text{(am folosit (4))}; \tag{6}$$

în plus, are loc

$$P[Z, X, Y|Y] = P[Z, X|Y] \quad \text{(am folosit (5))}. \tag{7}$$

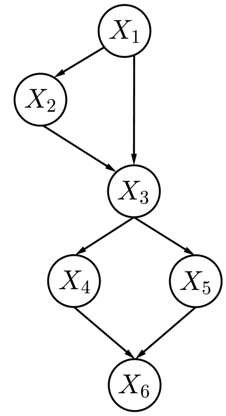
Din (6) şi (7) rezultă

$$P[Z, X|Y] = P[Z|Y]P[X|Y],$$

adică Z şi X sunt condiţional independenţi, dacă se cunosc valorile lui Y (a se vedea Def.18).
Concluzie: Z şi $nd(Z) = \{X, Y\}$ sunt condiţional independenţi, dacă se cunosc valorile $p(Z) = \{Y\}$ este echivalentă cu Z şi X sunt condiţional independenţi, dacă se cunosc valorile lui Y.

Reamintim (a se vedea P.12) v.a. discrete Z şi X sunt condiţional independente, cunoscând Y $\Leftrightarrow$ $P[Z, X|Y] = P[Z|Y]P[X|Y] \Leftrightarrow P[Z|X, Y] = P[Z|Y] \Leftrightarrow P[X|Z, Y] = P[X|Y]$.

Exemplul 2: Se dă reţeaua Bayes din figura alăturată, în care $X_1, ..., X_6$ sunt variabile aleatoare binare.



Reţea Bayes

$\triangleright$ Au loc proprietăţile:

• Mulţimile de noduri corespunzătoare părinţilor, descendenţilor, nondescendenţilor sunt:

$p(X_1) = \emptyset$, $p(X_2) = \{X_1\}$, $p(X_3) = \{X_1, X_2\}$,
$p(X_4) = p(X_5) = \{X_3\}$, $p(X_6) = \{X_4, X_5\}$
$d(X_1) = \{X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$,
$d(X_2) = \{X_3, X_4, X_5, X_6\}$,
$d(X_3) = \{X_4, X_5, X_6\}$,
$d(X_4) = d(X_5) = \{X_6\}$, $d(X_6) = \emptyset$,
$nd(X_2) = \{X_1\}$, $nd(X_3) = \{X_1, X_2\}$,
$nd(X_4) = \{X_1, X_2, X_3, X_5\}$
$nd(X_5) = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$,
$nd(X_6) = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$;

• probabilităţile (asociate nodurilor), care definesc reţeaua Bayes sunt:
$P[X_1], P[X_2|X_1], P[X_3|X_1, X_2], P[X_4|X_3], P[X_5|X_3], P[X_6|X_4, X_5]$;

• independenţe condiţionate:

$\triangleright$ X_4 este condiţional independentă de $nd(X_4) = \{X_1, X_2, X_3, X_5\}$, cunoscând $p(X_4) = \{X_3\}$ proprietate echivalentă cu X_4 este condiţional independentă de X_1, X_2, X_5, cunoscând X_3

$$\text{P.13} \Rightarrow P[X_4|X_1, X_2, X_5, X_3] = P[X_4|X_3],$$

(8)
$$\text{P.13} \Rightarrow P[X_4|X_1, X_2, X_3] = P[X_4|X_3]$$

$\triangleright$ X_5 este condiţional independentă de $nd(X_5) = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$, cunoscând $p(X_5) = \{X_3\}$ proprietate echivalentă cu X_5 este condiţional independentă de X_1, X_2, X_4, cunoscând X_3

$$\text{P.13} \Rightarrow P[X_5|X_1, X_2, X_4, X_3] = P[X_5|X_3]$$

$\triangleright$ X_6 este condiţional independentă de $nd(X_6) = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$, cunoscând $p(X_6) = \{X_4, X_5\}$ proprietate echivalentă cu X_6 este condiţional independentă de X_1, X_2, X_3, cunoscând X_4, X_5

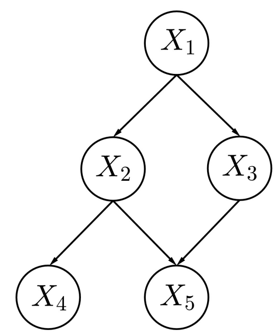
$$\Rightarrow P[X_6|X_1, X_2, X_3, X_4, X_5] = P[X_6|X_4, X_5];$$

• exemplu de calcul în această reţea Bayes: se ştiu $P(X_1{=}1){=}0.5$, $P(X_2{=}1|X_1{=}1){=}0.6$, $P(X_3{=}1|X_1{=}1, X_2{=}1){=}0.5$, $P(X_4{=}1|X_3{=}1){=}0.4$, $P(X_4{=}1|X_3{=}0){=}0.3$, atunci să se calculeze $P(X_4{=}1, X_2{=}1, X_1{=}1)$ (vom folosi şi relaţia (8)):

$$\begin{aligned}
&P(X_4{=}1, X_2{=}1, X_1{=}1)\\
=&P(X_4{=}1, X_3{=}1, X_2{=}1, X_1{=}1) + P(X_4{=}1, X_3{=}0, X_2{=}1, X_1{=}1)\\
=&P(X_1{=}1)P(X_2{=}1|X_1{=}1)P(X_3{=}1|X_1{=}1, X_2{=}1)P(X_4{=}1|X_3{=}1)\\
&\quad + P(X_1{=}1)P(X_2{=}1|X_1{=}1)P(X_3{=}0|X_1{=}1, X_2{=}1)P(X_4{=}1|X_3{=}0)\\
=&0.105.
\end{aligned}$$

♦

Exerciţiu: Se dă reţeaua Bayes din figura alăturată, în care $X_1, ..., X_5$ sunt variabile aleatoare binare. Se ştiu probabilităţile:
$P(X_1 = 0) = 0.4$, $P(X_2 = 0|X_1 = 0) = 0.2$,
$P(X_2 = 0|X_1 = 1) = 0.5$, $P(X_3 = 0|X_1 = 0) = 0.3$,
$P(X_3 = 0|X_1 = 1) = 0.4$,
$P(X_4 = 0|X_2 = 0) = 0.2$, $P(X_4 = 0|X_2 = 1) = 0.5$,
$P(X_5 = 0|X_2 = 0, X_3 = 0) = 0.5$,
$P(X_5 = 0|X_2 = 0, X_3 = 1) = 0.2$,
$P(X_5 = 0|X_2 = 1, X_3 = 0) = 0.7$,
$P(X_5 = 0|X_2 = 1, X_3 = 1) = 0.4$.



Reţea Bayes

a) Să se calculeze

$$P(X_3 = 1|X_2 = 1), P(X_1 = 0, X_3 = 1), P\left(\bigcap_{i=1}^{5}\{X_i = 1\}\right).$$

b) Să se scrie distribuţia de probabilitate a variabilei aleatoare X_3.
R.: Se calculează: $P(X_1 = 1) = 1 - P(X_1 = 0) = 0.6$

$$P(X_2 = 1|X_1 = 0) = 1 - P(X_2 = 0|X_1 = 0) = 0.8;$$

$$P(X_2 = 1|X_1 = 1) = 1 - P(X_2 = 0|X_1 = 1) = 0.5;$$

$$P(X_3 = 1|X_1 = 0) = 1 - P(X_3 = 0|X_1 = 0) = 0.7;$$

$$P(X_3 = 1|X_1 = 1) = 1 - P(X_3 = 0|X_1 = 1) = 0.6;$$

$$P(X_4 = 1|X_2 = 0) = 1 - P(X_4 = 0|X_2 = 0) = 0.8;$$

$$P(X_4 = 1|X_2 = 1) = 1 - P(X_4 = 0|X_2 = 1) = 0.5;$$

$$P(X_5 = 1|X_2 = 1, X_3 = 1) = 1 - P(X_5 = 0|X_2 = 1, X_3 = 1) = 0.6.$$

a) Are loc:

$$P(X_3 = 1|X_2 = 1) = \frac{P(X_3 = 1, X_2 = 1)}{P(X_2 = 1)}.$$

Folosind formula probabilităţilor totale şi proprietăţile reţelelor Bayes (X_2 este condiţional independentă de X_3, cunoscând X_1)[1]:

- $P(X_3 = 1, X_2 = 1) = P(X_3 = 1, X_2 = 1|X_1 = 0)P(X_1 = 0)$
  $\quad + P(X_3 = 1, X_2 = 1|X_1 = 1)P(X_1 = 1) =$
  $= P(X_3 = 1|X_1 = 0)P(X_2 = 1|X_1 = 0)P(X_1 = 0)$
  $\quad + P(X_3 = 1|X_1 = 1)P(X_2 = 1|X_1 = 1)P(X_1 = 1)$
- $P(X_2 = 1) = P(X_2 = 1|X_1 = 0)P(X_1 = 0) + P(X_2 = 1|X_1 = 1)P(X_1 = 1)$.

Are loc

$$P(X_1 = 0, X_3 = 1) = P(X_3 = 1|X_1 = 0)P(X_1 = 0).$$

Folosind regula de înmulţire şi proprietăţile reţelelor Bayes (X_2 este condiţional independentă de X_3, cunoscând X_1; X_4 este condiţional independentă de X_1, X_3, cunoscând X_2; X_5 este condiţional independentă de X_1, X_4, cunoscând X_2, X_3)

$$\begin{aligned}
&P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1, X_4 = 1, X_5 = 1)\\
&= P(X_1 = 1)P(X_2 = 1|X_1 = 1)P(X_3 = 1|X_1 = 1, X_2 = 1)\cdot\\
&\quad \cdot P(X_4 = 1|X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1)P(X_5 = 1|X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1, X_4 = 1) =\\
&= P(X_1{=}1)P(X_2{=}1|X_1{=}1)P(X_3 = 1|X_1 = 1)P(X_4 = 1|X_2 = 1)P(X_5 = 1|X_2 = 1, X_3 = 1).
\end{aligned}$$

b) $P(X_3 = 0) = P(X_3 = 0|X_1 = 0)P(X_1 = 0) + P(X_3 = 0|X_1 = 1)P(X_1 = 1) = 0.12 + 0.24 = 0.36 \Rightarrow P(X_3 = 1) = 0.64$

$$\Rightarrow\ X_3 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.36 & 0.64 \end{pmatrix}.$$

♦

[1] Orice nod X şi nondescendenţii săi $nd(X)$ sunt condiţional independenţi, cunoscând valorile părinţilor $p(X)$.

Variabile aleatoare continue

V.a. continuă: ia un număr infinit şi nenumărabil de valori într-un interval sau reuniune de intervale (v.a. poate lua orice valoare din intervalul considerat);

▷ v.a. continue pot modela caracteristici fizice precum timp (de ex. timp de instalare, timp de aşteptare), greutate, lungime, poziţie, volum, temperatură (de ex. X e v.a. care indică durata de funcţionare a unui dispozitiv până la prima defectare; X e v.a. care indică temperatura într-un oraş la ora amiezii)

▷ ea este caracterizată de o funcţie de densitate.

Def. 19. ***Funcţia de densitate*** *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a unei v.a. continue este funcţia pentru care are loc*

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

P. 14. *Fie f funcţia de densitate a unei v.a. continue X. Au loc proprietăţile:*

(1) $f(t) \geq 0$ *pentru orice $t \in \mathbb{R}$;*

(2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 1;$

(3) $P(a < X \leq b) = \int_{a}^{b} f(t)dt \ \forall\, a, b \in \mathbb{R}, a < b;$

(4) $P(X = a) = 0 \ \ \forall\, a \in \mathbb{R};$

(5) *pentru* $\forall\, a < b, a, b \in \mathbb{R}$ *au loc*

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = \int\limits_{a}^{b} f(t)dt.$$

Observaţie: Orice funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, care are proprietăţile (1), (2) din **P.14** este o funcţie de densitate.

Exemple de distribuţii clasice continue

➡**Distribuţia uniformă pe un interval $[a, b]$:** $X \sim Unif[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

• funcţia de densitate este

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, \text{pentru } t \in [a, b] \\ 0, \ \text{pentru } t \in \mathbb{R} \setminus [a, b] \end{cases}$$

Matlab/Octave:

▷ pentru $a = 0, b = 1$: `rand`(M, N) returnează o matrice $M \times N$ cu valori aleatoare din [0,1]

▷ `unifrnd`(a, b, M, N), respectiv $(b-a)$`rand`$(M, N) + a$ returnează o matrice $M \times N$ cu valori aleatoare din $[a, b]$
▷ `unifpdf`(t, a, b) calculează $f(t)$

Friedrich Gauss şi legea normală $N(m, \sigma^2)$ (bancnota de 10 DM)

➡ **Distribuţia normală (Gauss):** $X \sim N(m, \sigma^2)$, $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$
• funcţia de densitate este

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right), t \in \mathbb{R}.$$

• Pentru $m = 0, \sigma = 1$: $N(0, 1)$ se numeşte *distribuţia standard normală.*
• Distribuţia normală se aplică în: măsurarea erorilor (de ex. termenul eroare în analiza regresională), în statistică (teorema limită centrală, teste statistice) etc.
Matlab/Octave: `normrnd`(m, σ, M, N) returnează o matrice $M \times N$ cu valori aleatoare;
`normpdf`(t, m, σ) calculează $f(t)$
➡ **Distribuţia exponenţială:** $X \sim Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$
• funcţia de densitate este

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, \text{ pentru } t > 0 \\ 0, \text{ pentru } t \leq 0 \end{cases}$$

Matlab/Octave: `exprnd`$\left(\frac{1}{\lambda}, M, N\right)$ returnează o matrice $M \times N$ cu valori aleatoare;
`exppdf`$\left(t, \frac{1}{\lambda}\right)$ calculează $f(t)$

```
pkg load statistics
clear all
close all
```

```
figure
title('Functia de densitate a legii exponentiale')
hold on
L=[1,2,4]; %  lambda parametru
t=[-1:0.01:2];
plot(t, exppdf(t,1/L(1)), 'r*')
plot(t, exppdf(t,1/L(2)), 'b*')
plot(t, exppdf(t,1/L(3)), 'g*')
legend('lambda=1','lambda=2','lambda=4')
```

➡**Distribuţia Student:** $X \sim St(n), n \in \mathbb{N}^*$

• distribuţia Student cu $n \in \mathbb{N}^*$ grade de libertate are funcţia de densitate

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \ t \in \mathbb{R}$$

unde funcţia Gamma este

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty v^{a-1}\exp(-v)dv, \ a > 0$$

Matlab/Octave: $\texttt{trnd}(n, M, N)$ returnează o matrice $M \times N$ cu valori aleatoare;
$\texttt{tpdf}(t, n)$ calculează $f(t)$

➡**Distribuţia Chi-pătrat:** $X \sim \chi^2(n), n \in \mathbb{N}^*$

• distribuţia χ^2 cu $n \in \mathbb{N}^*$ grade de libertate are funcţia de densitate

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } t \leq 0 \\ \dfrac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}} \cdot t^{\frac{n}{2}-1} \cdot \exp\left(-\dfrac{t}{2}\right), & \text{dacă } t > 0, \end{cases}$$

Matlab/Octave: $\texttt{chi2rnd}(n, M, N)$ returnează o matrice $M \times N$ cu valori aleatoare;
$\texttt{chi2pdf}(t, n)$ calculează $f(t)$

Exemplu: Fie $X \sim Exp(0.5)$ v.a. care indică timpul de funcţionare a unei baterii (câte luni funcţionează bateria). Folosind simulări, să se estimeze a) $P(2 \leq X \leq 4)$; b) $P(X > 3)$ şi să se compare rezultatele obţinute cu rezultatele teoretice.

```
X=exprnd(2,1,10000);
p=mean((2<=X)&(X<=4))
q=mean(X>3)
> p =  0.23280
> q= 0.22060
```

$$P(2 \leq X \leq 4) = \int_2^4 0.5e^{-0.5t}dt = -e^{-0.5t}\Big|_2^4 = e^{-1} - e^{-2} \approx 0.23254$$

$$P(X>3)=\int_3^{\infty}0.5e^{-0.5t}dt=-e^{-0.5t}\Big|_3^{\infty}=e^{-1.5}\approx 0.22313 \qquad \clubsuit$$

Def. 20. ***Funcţia de repartiţie*** $F:\mathbb{R}\to[0,1]$ *a unei variabile aleatoare* X *(discrete sau continue) este*

$$F(x)=P(X\le x)\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

P. 15. *Funcţia de repartiţie* F *a unei variabile aleatoare* X *(discrete sau continue) are următoarele proprietăţi:*

(1) F *este monoton crescătoare, adică pentru orice* $x_1<x_2$ *rezultă* $F(x_1)\le F(x_2)$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=1$ *şi* $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$.

(3) F *este continuă la dreapta, adică* $\lim\limits_{x\searrow x_0}F(x)=F(x_0)\ \forall\, x_0\in\mathbb{R}$.

(4) $P(a<X\le b)=F(b)-F(a)\ \forall a,b\in\mathbb{R}, a<b$.

Observaţie importantă:

$\triangleright$ Orice funcţie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, care are proprietăţile (1), (2), (3) din **P.15** este o funcţie de repartiţie.

Matlab/Octave:

Distribuţia v.a. discrete X	Generare valori aleatoare	Funcţia de repartiţie $F_X(x)$	Probabilitate $P(X=x)$
$Bino(n,p)$	`binornd`(n,p)	`binocdf`(x,n,p)	`binopdf`(x,n,p)
$Unid(n)$	`unidrnd`(n)	`unidcdf`(x,n)	`unidpdf`(x,n)
$Hyge(n,n_1,n_2)$	`hygernd`(n_1+n_2,n_1,n)	`hygecdf`(x,n_1+n_2,n_1,n)	`hygepdf`(x,n_1+n_2,n_1,n)
$Geo(p)$	`geornd`(p)	`geocdf`(x,p)	`geopdf`(x,p)

Distribuţia v.a. continue X	Generare valori aleatoare	Funcţia de repartiţie $F_X(x)$	Funcţia de densitate $f_X(x)$
$Unif[a,b]$	`unifrnd`(a,b)	`unifcdf`(x,a,b)	`unifpdf`(x,a,b)
$N(m,\sigma^2)$	`normrnd`(m,σ)	`normcdf`(x,m,σ)	`normpdf`(x,m,σ)
$Exp(\lambda)$	`exprnd`$(\frac{1}{\lambda})$	`expcdf`$(x,\frac{1}{\lambda})$	`exppdf`$(x,\frac{1}{\lambda})$

Observaţie: Dacă în cadrul aceluiaşi program Matlab/Octave se generează valori aleatoare (de exemplu cu `rand`, `randi`, `binornd`, `hygernd`, `unidrnd`, `geornd`, `unifrnd`, `normrnd`, `exprnd`, etc.) atunci acestea pot fi considerate ca fiind valorile unor variabile aleatoare independente.

V.a. discretă	V.a. continuă
• caracterizată de distribuţia de probabilitate discretă $X \sim \begin{pmatrix} x_i \\ P(X=x_i) \end{pmatrix}_{i \in I}$	• caracterizată de funcţia de densitate f $P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$
• $\sum\limits_{i \in I} P(X = x_i) = 1$	• $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$
• $P(X \in A) = \sum\limits_{i \in I:\, x_i \in A} P(X = x_i)$	• $P(X \in A) = \int_A f(t)dt$
• funcţia de repartiţie $F(x)=P(X \leq x)\ \forall x \in \mathbb{R}$	• funcţia de repartiţie $F(x)=P(X \leq x)\ \forall x \in \mathbb{R}$
• $F(x) = \sum\limits_{i \in I:\, x_i \leq x} P(X = x_i)\ \forall x \in \mathbb{R}$	• $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$
• F este funcţie continuă la dreapta	• F este funcţie continuă în orice punct $x \in \mathbb{R}$
• F este discontinuă în punctele $x_i,\ \forall\, i \in I$	
• $\forall\, a < b, a, b \in \mathbb{R}$ $P(a \leq X \leq b) = \sum\limits_{i \in I: a \leq x_i \leq b} P(X = x_i)$	• $\forall\, a < b, a, b \in \mathbb{R}$ $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b)$ $= P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = \int\limits_a^b f(t)\, dt$
• $P(X = a) = 0$ dacă $a \notin \{x_i : i \in I\}$	• $P(X = a) = \int\limits_a^a f(t)\, dt = 0\ \forall\, a \in \mathbb{R}$
	• dacă F este derivabilă în punctul x $\Rightarrow F'(x) = f(x)$.

Exemplu: Fie X v.a. care indică timpul de funcţionare neîntreruptă (în ore) până la prima defectare a unui aparat, pentru care $P(X > x) = 2^{-x}, x > 0$ şi $P(X > x) = 1,\ x \leq 0$. Să se determine f_X şi $P(2 < X < 3)$.

Vector aleator continuu

Def. 21. $(X_1, \ldots, X_n)$ *este un* ***vector aleator continuu*** *dacă fiecare componentă a sa este o variabiă aleatoare continuă.*

Def. 22. $f_{(X,Y)} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *este* ***funcţia de densitate a vectorului aleator continuu*** (X,Y)*, dacă*

$$P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{(X,Y)}(s,t) ds dt \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Def. 23. $F_{(X,Y)} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *este* ***funcţia de repartiţie a vectorului aleator*** (X,Y) *(discret sau continuu), dacă*

$$F_{(X,Y)}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

Exemplu: Vectorul aleator discret (X_1, X_2) este dat prin următorul tabel de contingenţă:

$X_1 \backslash X_2$	0	3
-2	0.4	0.3
4	0.2	0.1

$\Longrightarrow (X_1, X_2)$ are funcţia de repartiţie $F_{(X_1,X_2)} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0,1]$

$$F_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x_1 < -2 \text{ sau } x_2 < 0 \\ 0.4, & \text{dacă } -2 \leq x_1 < 4 \text{ şi } 0 \leq x_2 < 3 \\ 0.7, & \text{dacă } -2 \leq x_1 < 4 \text{ şi } 3 \leq x_2 \\ 0.6, & \text{dacă } 4 \leq x_1 \text{ şi } 0 \leq x_2 < 3 \\ 1, & \text{dacă } 4 \leq x_1 \text{ şi } 3 \leq x_2\,. \end{cases}$$

✷

Observaţie:

► Dacă se cunoaşte funcţia de repartiţie $F_{(X,Y)}$ pentru vectorul aleator (X,Y) (discret sau continuu), atunci F_X, respectiv F_Y, se determină cu

(9) $$F_X(x) = \lim_{y \to \infty} F_{(X,Y)}(x,y), \quad F_Y(y) = \lim_{x \to \infty} F_{(X,Y)}(x,y).$$

► Dacă se cunoaşte funcţia de densitate $f_{(X,Y)}$ pentru vectorul aleator continuu (X,Y), atunci f_X, respectiv f_Y, se determină cu

(10) $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y) dy, \ \forall x \in \mathbb{R}, f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y) dx, \ \forall y \in \mathbb{R}.$$

Exemplu: Funcţia de repartiţie a vectorului aleator (X_1, X_2) este $F_{(X_1,X_2)} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, 1]$

$$F_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x_1 < 0 \text{ sau } x_2 < 1 \\ x_1(x_2 - 1), & \text{dacă } 0 \le x_1 < 1 \text{ şi } 1 \le x_2 < 2 \\ x_1, & \text{dacă } 0 \le x_1 < 1 \text{ şi } 2 \le x_2 \\ x_2 - 1, & \text{dacă } 1 \le x_1 \text{ şi } 1 \le x_2 < 2 \\ 1, & \text{dacă } 1 \le x_1 \text{ şi } 2 \le x_2 \,. \end{cases}$$

Ce distribuţie au X_1, respectiv X_2?
R.: Se determină F_{X_1}, F_{X_2} cu (9) şi se calculează $f_{X_1} = F'_{X_1}, f_{X_2} = F'_{X_2}$; se obţine $X_1 \sim Unif[0, 1], X_2 \sim Unif[1, 2]$. ✶

Def. 24. $X_1, \ldots, X_n$ *sunt* ***n variabilele aleatoare independente*** *(discrete sau continue), dacă*

$$P(X_1 \le x_1, \ldots, X_n \le x_n) = P(X_1 \le x_1) \cdot \ldots \cdot P(X_n \le x_n) \,\forall\, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}.$$

Observaţie ($n = 2$ in definiţia de mai sus): X şi Y sunt **două variabilele aleatoare independente**, dacă

$$P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2) = P(X_1 \le x_1) \cdot P(X_2 \le x_2) \quad \forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$

adică

$$F_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2) = F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(x_2) \quad \forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

P. 16. *Variabilele aleatoare continue X_1 (cu funcţia de densitate f_{X_1}) şi X_2 (cu funcţia de densitate f_{X_2}) sunt independente, dacă şi numai dacă*

$$f_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \quad \forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$

unde $f_{(X_1,X_2)}$ este funcţia de densitate a vectorului aleator (X_1, X_2).

Exemplu: (X_1, X_2) are *distribuţie uniformă* pe $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, cu $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, $a_1 < b_1, a_2 < b_2$ dacă

$$f_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)} & \text{dacă } (x_1, x_2) \in I \\ 0 & \text{dacă } (x_1, x_2) \notin I. \end{cases}$$

Cu (10) se calculează

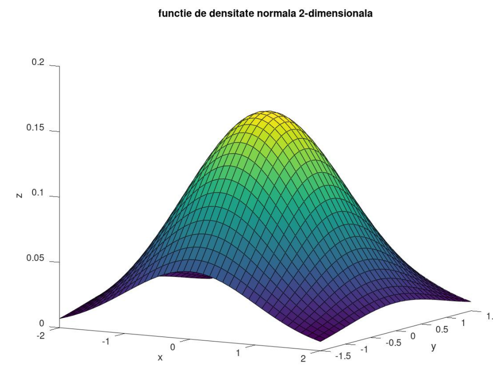
$$f_{X_1}(x_1) = \begin{cases} \dfrac{1}{b_1 - a_1} & \text{dacă } x_1 \in [a_1, b_1] \\ 0 & \text{dacă } x_1 \in \mathbb{R} \setminus [a_1, b_1]. \end{cases} \quad \text{şi } f_{X_2}(x_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{b_2 - a_2} & \text{dacă } x_2 \in [a_2, b_2] \\ 0 & \text{dacă } x_2 \in \mathbb{R} \setminus [a_2, b_2]. \end{cases}$$

$\Longrightarrow X_1 \sim Unif[a_1, b_1], X_2 \sim Unif[a_2, b_2]$;
se observă $f_{(X_1,X_2)} = f_{X_1} \cdot f_{X_2} \Longrightarrow X_1$ şi X_2 sunt v.a. independente! ✿

Exemplu pentru o distribuţie normală bidimensională: (X, Y) are funcţia de densitate

$$f_{(X,Y)} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}, \ \ x, y \in \mathbb{R}.$$

Graficul acestei funcţii este dat în figura alăturată.



$f_{(X,Y)}$ pentru distribuţia normală bidimensională

```
% graficul unei functii de densitate normala bidimensionala
clear all
close all
figure(1)
hold on
f=@(x,y) (1/(2*pi))*exp(-(x.^2+y.^2)/2);
% functie de densitate normala 2-dimensionala
x=-2:0.1:2;
y=-1.5:0.1:1.5;
view(30,10)
[xx,yy]=meshgrid(x,y);
ff=f(xx,yy);
surf(x,y,ff)
title('functie de densitate normala 2-dimensionala')
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('z')

figure(2)
view(30,10)
hold on
title('functie de densitate normala 2-dimensionala / animatie')
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('z')
for i=1:length(x)
for j=1:length(y)
plot3(x(i),y(j),f(x(i),y(j)),'r*')
pause(0.00001)
end
end
```

P. 17. *Pentru un vector aleator continuu (X, Y) au loc proprietăţile:*

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(u, v)\, dudv = 1.$

2. *$F_{(X,Y)}$ este funcţie continuă.*

3. Dacă $F_{(X,Y)}$ este derivabilă parţial în (x,y), atunci are loc:

$$\frac{\partial^2 F_{(X,Y)}(x,y)}{\partial x \partial y} = f_{(X,Y)}(x,y).$$

4. $P((X,Y) \in A) = \underbrace{\int\int}_{A} f_{(X,Y)}(u,v)dudv,\ A \subset \mathbb{R}^2$ *(măsurabilă).*

Exemplu: Fie (X,Y) vector aleator continuu, având funcţia de repartiţie

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} (1-e^{-x})(1-e^{-2y}) & \text{dacă } x > 0 \text{ şi } y > 0 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

Sunt X şi Y v.a. independente? Să se calculeze $P(1 \leq X \leq 2 \leq Y \leq 3)$.
R.: Se calculează $F_X(x) = 1 - e^{-x}$ pentru $x > 0$ şi $F_X(x) = 0$ pentru $x \leq 0$, precum şi $F_Y(y) = 1 - e^{-2y}$ pentru $y > 0$ şi $F_Y(y) = 0$ pentru $y \leq 0$. Se verifică

$$F_{(X,Y)}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

Deci, X şi Y sunt v.a. independente.

$$P(1 \leq X \leq 2 \leq Y \leq 3) = \int_1^2 \int_2^3 f_X(u) f_Y(v) dudv = (e^{-1} - e^{-2})(e^{-4} - e^{-6}) \approx 0.00368.$$

♡

Def. 25. ***Valoarea medie a unei v.a. continue*** *X, care are funcţia de densitate f, este*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) dt, \text{ dacă } \int_{-\infty}^{\infty} |t| f(t) dt < \infty.$$

$\triangleright$ Valoarea medie a unei variabile aleatoare caracterizează tendinţa centrală a valorilor acesteia.

P. 18. *Proprietăţi ale valorii medii; fie X, Y v.a. continue:*
$\rightarrow$ *$E(aX + b) = aE(X) + b$ pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$;*
$\rightarrow$ *$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$;*
$\rightarrow$ *Dacă X şi Y sunt variabile aleatoare* ***independente****, atunci $E(X \cdot Y) = E(X)E(Y)$.*
$\rightarrow$ *Dacă $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e o funcţie, astfel încât $g(X)$ este o v.a. continuă, atunci*

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx,$$

dacă $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| f_X(x) dx < \infty$.

Exemplu: Durata drumului parcurs de un elev dimineaţa de acasă până la şcoală este o v.a. uniform distribuită între 20 şi 26 minute. Dacă elevul porneşte la 7:35 (a.m.) de acasă şi are ore de la 8 (a.m.), care este probabilitatea ca elevul să ajungă la timp la şcoală? ***În medie*** cât durează drumul elevului până la şcoală?
Răspuns: fie X (v.a.) = durata drumului parcurs până la şcoală (în minute) $\Rightarrow X \sim Unif[20, 26]$

$$\Longrightarrow f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{26-20} = \frac{1}{6}, & \text{dacă } 20 \leq t \leq 26 \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

$$P(\text{“elevul ajunge la timp la şcoală”}) = P(X \leq 25) = \int_{-\infty}^{25} f_X(t) dt = \int_{20}^{25} \frac{1}{6} dt = \frac{25-20}{6} = \frac{5}{6}.$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t) dt = \int_{20}^{26} \frac{t}{6} dt = \frac{1}{6} \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_{20}^{26} = 23 \text{ (minute)}.$$

♣

Def. 26. ***Varianţa (dispersia)*** *unei variabile aleatoare X (discrete sau continue) este*

$$V(X) = E\Big((X - E(X))^2\Big),$$

(dacă valoarea medie $E\Big((X - E(X))^2\Big)$ există). Valoarea $\sqrt{V(X)}$ se numeşte ***deviaţia standard*** *a lui X şi o notăm cu $Std(X)$.*

$\triangleright$ Varianţa unei variabile aleatoare caracterizează împrăştierea (dispersia) valorilor lui X în jurul valorii medii $E(X)$.

P. 19. *Proprietăţi ale varianţei:*
$\rightarrow V(X) = E(X^2) - E^2(X)$.
$\rightarrow V(aX + b) = a^2 V(X)\ \forall\, a, b \in \mathbb{R}$.
$\rightarrow$ *Dacă X şi Y sunt variabile aleatoare* ***independente****, atunci $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.*

Exemple: 1) Fie $X \sim Bino(n, p)$. Să se calculeze $E(X)$ şi $V(X)$.
R.: Pentru $i \in \{1, \ldots, n\}$ fie $X_i \sim Bernoulli(p)$ (adică $P(X_i = 1) = p$, $P(X_i = 0) = 1 - p$), astfel încât $X_1, \ldots, X_n$ sunt v.a. independente. Observăm că $X_1 + \ldots + X_n \sim Bino(n, p)$. Deci, $X_1 + \ldots + X_n$ şi X au aceeaşi distribuţie, aşadar ele au aceeaşi valoare medie şi aceeaşi varianţă

$$E(X) = E(X_1 + \cdots + X_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n) = p + ... + p = np.$$

V.a. $X_1, \ldots, X_n$ sunt independente şi folosind P.19, obţinem

$$V(X) = V(X_1 + \cdots + X_n) = V(X_1) + \cdots + V(X_n) = np(1-p) = np(1-p).$$

2) Dacă $X \sim N(m, \sigma^2)$ să se arate că $E(X) = m,\ V(X) = \sigma^2$.

R.: Funcţia de densitate a lui X este

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}, x \in \mathbb{R}.$$

Când $m = 0$ şi $\sigma = 1$ obţinem funcţia de densitate a distribuţiei normale standard

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}, x \in \mathbb{R}.$$

Din P.14-(1) rezultă

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)dt = 1.$$

În calculele de mai jos utilizăm schimbarea de variabilă $t = \dfrac{x-m}{\sigma}$

$$\begin{aligned} E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\} dx \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt + m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt \\ &= 0 + m \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)dt = m\ . \end{aligned}$$

Folosind aceeaşi schimbare de variabilă şi apoi integrare prin părţi, avem

$$\begin{aligned} V(X) &= E[(X-m)^2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\} dx \\ &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t \left(-\exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}\right)' dt \\ &= t\left(-\exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty} - \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}\right) dt \\ &= 0 - 0 + \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)dt = \sigma^2. \end{aligned}$$

3) Vectorul aleator (X, Y) are funcţia de densitate

$$f_{(X,Y)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} x - y, & \text{dacă } 0 \le x \le 1 \text{ şi } -1 \le y \le 0 \\ 0, & \text{altfel .} \end{cases}$$

Să se calculeze $E(X)$ şi $E(X^2)$.
R.:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)dy = \begin{cases} \displaystyle\int_{-1}^{0} (x-y)\,dy = x + \frac{1}{2}, & \text{dacă } 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{altfel .} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = \int_0^1 x\left(x+\frac{1}{2}\right)dx = \frac{7}{12}.$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx = \int_0^1 x^2\left(x+\frac{1}{2}\right)dx = \frac{5}{12}.$$

♣

► Matlab/Octave: `mean, var, std`
Fie $x = [x_1, \dots, x_n]$ valorile unei v.a. X

$$mean(x) = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)$$

$mean(x) \approx E(X)$ pentru n suficient de mare

$$var(x,1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - mean(x))^2, \quad var(x) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - mean(x))^2$$

$var(x,1) \approx V(X), var(x) \approx V(X)$ pentru n suficient de mare

$$std(x,1) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - mean(x))^2\right)^{\frac{1}{2}}, std(x) = \left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - mean(x))^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$std(x,1) \approx Std(X), std(x) \approx Std(X)$ pentru n suficient de mare

Def. 27. $(X_n)_n$ *este* ***şir de v.a. independente****, dacă* $\forall\ \{i_1, \dots, i_k\} \subset \mathbb{N}$ *v.a.* $X_{i_1}, \dots, X_{i_k}$ *sunt independente, adică*

$$P(X_{i_1} \le x_{i_1}, \dots, X_{i_k} \le x_{i_k}) = P(X_{i_1} \le x_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(X_{i_k} \le x_{i_k})$$

$\forall\ x_{i_1}, \dots, x_{i_k} \in \mathbb{R}$.

Exemplu: a) X_n= v.a. care indică numărul apărut la a n-aruncare a unui zar $\Rightarrow (X_n)_n$ şir de v.a. independente
b) Se aruncă o monedă

$$X_n = \begin{cases} 0 & : \text{ la a } n\text{-a aruncare a apărut } \textit{cap}, \\ 1 & : \text{ la a } n\text{-a aruncare a apărut } \textit{pajură}. \end{cases}$$

$\Rightarrow (X_n)_n$ şir de v.a. independente.

Def. 28. *Şirul de v.a.* $(X_n)_n$ ***converge aproape sigur*** *la v.a.* X*, dacă*

$$P\big(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}\big) = 1.$$

Notaţie: $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$

► Cu alte cuvinte, convergenţa a.s. $X_n \overset{\text{a.s.}}{\to} X$ impune ca $\big(X_n(\omega)\big)_n$ să conveargă la $X(\omega)$ pentru fiecare $\omega \in \Omega$, *cu excepţia* unei mulţimi "mici" de probabilitate nulă; dacă $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ atunci evenimentul

$$M = \{\omega \in \Omega : (X_n(\omega))_n \textbf{ nu converge} \text{ la } X(\omega)\} \text{ are } P(M) = 0.$$

Exemple: 1) În spaţiul de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ fie $A \in \mathcal{K}$ cu $P(A) = 0.4$ şi $P(\bar{A}) = 0.6$:

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n}, & \text{pentru } \omega \in A \\ -\frac{1}{n}, & \text{pentru } \omega \in \bar{A}. \end{cases} \Longrightarrow P(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = ???\}) = 1.$$

Definim

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } \omega \in A \\ 0, & \text{pentru } \omega \in \bar{A}. \end{cases} \Longrightarrow P(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Aşadar $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$.

2) Fie $\Omega := [0, 1]$ spaţiul de selecţie, P probabilitatea pe [0,1] indusă de măsura Lebesgue pe [0,1], adică pentru $\forall \alpha < \beta$ din $[0, 1]$ are loc

$$P\Big([\alpha, \beta]\Big) = P\Big([\alpha, \beta)\Big) = P\Big((\alpha, \beta]\Big) = P\Big((\alpha, \beta)\Big) := \beta - \alpha \text{ (lungimea intervalului)}$$

2a) $X_n(\omega) = \omega + \omega^n + (1-\omega)^n,\ \omega \in [0, 1], n \geq 1 \Rightarrow\ X_n \xrightarrow{a.s.}\quad ???$

R.:

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = \begin{cases} \omega & \text{pentru } \omega \in (0, 1) \\ 1 & \text{pentru } \omega = 0 \\ 2 & \text{pentru } \omega = 1. \end{cases}$$

Fie $X(\omega) = \omega$ pentru fiecare $\omega \in \Omega$

$$\Rightarrow\ \{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = \omega\} = (0, 1)$$

$$\Rightarrow\ P(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = \omega\}) = P((0, 1)) = 1.$$

$$X_n \xrightarrow{a.s.} X.$$

2b) $X_n(\omega) = (-1)^n \omega,\ \omega \in [0,1], n \geq 1$; converge $\big(X_n\big)_n$ a.s.?
R.: $(X_n)_n$ nu converge a.s. spre o v.a.; şirul $\big(X_n(\omega)\big)_n$ este convergent doar în $\omega = 0$, iar $P(\{0\}) = 0$. ▲

Frecvenţe relative şi absolute (a se vedea Def.2): Fie A un eveniment asociat unei experienţe, repetăm experienţa de n ori (în aceleaşi condiţii date) şi notăm cu r_n numărul de realizări ale evenimentului A; **frecvenţa relativă** a evenimentului A este numărul

$$f_n(A) = \frac{r_n(A)}{n}$$

$r_n(A)$ este **frecvenţa absolută** a evenimentului A.

Experiment: Se aruncă o monedă de n ori; A: se obţine *pajură*

n	frecvenţă absolută $r_n(A)$	frecvenţă relativă $f_n(A)$
100	48	0.48
1000	497	0.497
10000	5005	0.5005

$f_n(A) \xrightarrow{a.s.} \frac{1}{2}$ (a se vedea P.21)

Legea tare a numerelor mari (LTNM)

Legea numerelor mari se referă la descrierea rezultatelor unui experiment repetat de foarte multe ori. Conform acestei legi, rezultatul mediu obţinut se apropie tot mai mult de valoarea aşteptată, cu cât experimentul se repetă de mai multe ori. Aceasta se explică prin faptul că abaterile aleatoare se compensează reciproc.
Legea numerelor mari are două formulări: **legea slabă a numerelor mari (LSNM)** şi **legea tare a numerelor mari (LTNM)**.
▲ **Scurt istoric**: Jacob Bernoulli (1655 -1705) a formulat LSNM pentru frecvenţa relativă a unui experiment şi a dat răspunsul la întrebarea "*Putem aproxima empiric probabilităţile*?" (în opera publicată postum, în 1713, *Ars conjectandi*):
▷ Teorema lui Bernoulli afirmă: *"Frecvenţele relative converg în probabilitate la probabilitatea teoretică."*

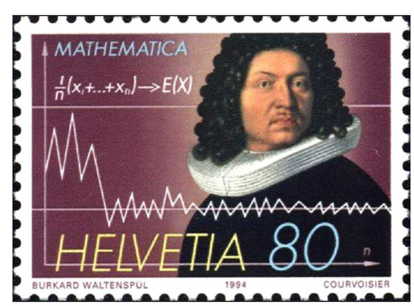


Fig. 5. Jacob Bernoulli (timbru emis în 1994 cu ocazia Congresului Internaţional al Matematicienilor din Elveţia)

▷ În cadrul unui experiment poate să apară evenimentul A (*succes*) sau $\bar{A}$ (*insucces*).

• $X_i = 0 \Leftrightarrow$ dacă $\bar{A}$ apare în a i-a repetiţie a experimentului
• $X_i = 1 \Leftrightarrow$ dacă A apare în a i-a repetiţie a experimentului
$\Rightarrow X_i \sim Bernoulli(p)$ cu $p := P(A)$

$$X_i \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - P(A) & P(A) \end{pmatrix}$$

• $X_1, ..., X_n$ sunt v.a. independente
• frecvenţa relativă de apariţie a lui A este

$$f_n(A) = \frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n); \quad f_n(A) \text{ este o v.a.}$$

▲ $(X_n)_n$ verifică LSNM (legea slabă a numerelor mari), adică

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\Big|f_n(A) - P(A)\Big| > \varepsilon\right) = 0 \; \forall\, \varepsilon > 0,$$

şirul $\big(f_n(A)\big)_n$ converge în probabilitate către $P(A)$. △

Def. 29. *Şirul de v.a. $(X_n)_n$ cu $E|X_n| < \infty \; \forall\, n \in \mathbb{N}$ verifică* ***legea tare a numerelor mari (LTNM)*** *dacă*

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(X_k(\omega) - E(X_k)\Big) = 0\right\}\right) = 1,$$

adică

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(X_k - E(X_k)\Big) \xrightarrow{a.s.} 0.$$

P. 20. *Fie $(X_n)_n$ şir de v.a. independente având aceeaşi distribuţie (şi există $m = E(X_n) \; \forall\, n \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow (X_n)_n$ verifică* ***LTNM****, adică*

$$\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) \xrightarrow{a.s.} m.$$

În simulări: $\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) \approx m,$ dacă n este suficient de mare.
Exemplu 1: Fie $X_1, ..., X_n, ... \sim Unid(6)$ v.a. independente; are loc $E(X_n) = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3.5 \; \forall\, n \geq 1$. Folosind P.20 rezultă că $(X_n)_n$ verifică **LTNM**, adică $\frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n) \xrightarrow{a.s.} 3.5$.
Simulare LTNM (Matlab/Octave):

```
pkg load statistics
clear all
close all
figure
hold on
n=300;
x=unidrnd(6,1,n);
for i=1:n
    s(i)=mean(x(1:i)); %media primelor i valori
end
disp('valoarea medie din simulari')
disp(mean(x)) % este egala cu s(n)
disp('valoarea medie teoretica')
v=[1:6];
vmt= mean(v)
plot([1:n],3.5*ones(1,n),'g-')
plot([1:n],s,'r-')
plot([1:n],s,'b.')
xlabel('Nr. aruncari zar')
ylabel('Media numerelor aparute')
```

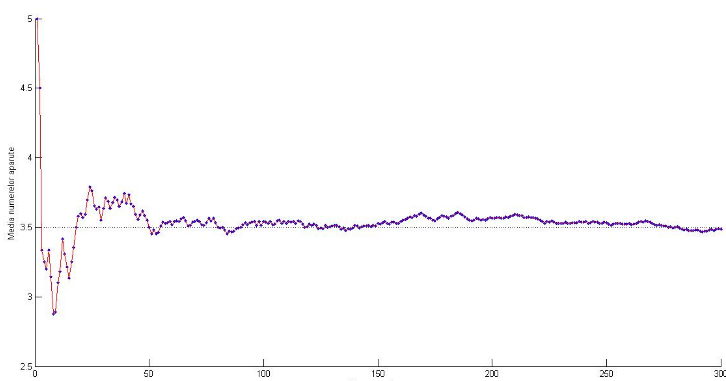


Fig. 4. Simulare LTNM

Exemplu 2: Fie $(X_n)_n$ şir de v.a. independente, având aceeaşi distribuţie ca v.a. X şi varianţă finită: $E(X_n) = E(X) \in \mathbb{R}$, $V(X_n) = V(X) \in \mathbb{R}$ pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$.
Definim $Y_n = (X_n - E(X))^2 \; \forall \; n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (Y_n)_n$ este şir de v.a. independente, având aceeaşi distribuţie ca v.a. $(X - E(X))^2$ şi $E(Y_n) = E((X - E(X))^2) = V(X) \; \forall \; n \in \mathbb{N}^*$.
P.20 $\Rightarrow (Y_n)_n$ verifică **LTNM**

$$\frac{1}{n}\Big(Y_1 + ... + Y_n\Big) \xrightarrow{a.s.} V(X),$$

adică

$$\frac{1}{n}\Big((X_1 - E(X))^2 + ... + (X_n - E(X))^2\Big) \xrightarrow{a.s.} V(X).$$

Caz particular: Fie $X_1, ..., X_n, ... \sim Unid(6)$ v.a. independente; are loc $E(X_n) = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{7}{2} = 3.5$, $V(X_n) = E(X_n^2) - E^2(X_n) = \frac{35}{12} \approx 2.91666 \ \forall\ n \geq 1$. Folosind P.20 rezultă că $(Y_n)_n = \big((X_n - 3.5)^2\big)_n$ verifică **LTNM**, adică $\frac{1}{n}\big((X_1 - 3.5)^2 + ... + (X_n - 3.5)^2\big) \xrightarrow{a.s.} \frac{35}{12}$.

```
figure
hold on
n=1000;
x=unidrnd(6,1,n);
for i=1:n
    z(i)=var(x(1:i),1); %varianta primelor i valori
end
disp('varianta din simulari')
disp(var(x,1)) % este egala cu z(n)
disp('varianta teoretica')
v=[1:6];
vt= mean(v.^2)-(mean(v))^2
plot([1:n],vt*ones(1,n),'g-')
plot([1:n],z,'r-')
plot([1:n],z,'b.')
xlabel('Nr. aruncari zar')
ylabel('Varianta numerelor aparute')
```

Exemplu 3: Fie $X_1, ..., X_n, ... \sim Unif[-1, 1]$ v.a. independente. Spre ce valoare converge a.s. şirul

$$Z_n = \frac{1}{n}(X_1^2 + ... + X_n^2),\ n \in \mathbb{N}^* \ \ ?$$

R.: Aplicăm P.20 pentru şirul de v.a. independente $(X_n^2)_n \Longrightarrow Z_n \xrightarrow{a.s.} E(X_1^2)$. Calculăm

$$E(X_1^2) = \int_{-1}^{1} t^2 \frac{1}{1-(-1)} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{3}.$$

$\Longrightarrow Z_n \xrightarrow{a.s.} \frac{1}{3}$. ▲

P. 21. *Fie A un eveniment asociat unei experienţe, repetăm experienţa de n ori (în aceleaşi condiţii date şi independent unele de altele). LTNM: cu cât repetăm mai des un experiment ($n \to \infty$), cu atât mai bine aproximează frecvenţa relativă $f_n(A)$ a evenimentului A probabilitatea sa teoretică de apariţie $P(A)$:*

$$f_n(A) \xrightarrow{a.s.} P(A),\ \textit{dacă}\ n \to \infty.$$

În simulări: $f_n(A) \approx P(A),$ dacă n este suficient de mare.
Demonstraţie pentru P.21: Aplicăm P.20 pentru şirul de v.a. independente $(X_n)_n$, unde

$$X_n = \begin{cases} 1, & \text{dacă } A \text{ apare în a } n\text{- a execuţie a experimentului} \\ 0, & \text{dacă } \bar{A} \text{ apare în a } n\text{- a execuţie a experimentului} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow X_n \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - P(A) & P(A) \end{pmatrix} \Longrightarrow X_n \sim Bernoulli\big(P(A)\big)$$

$$\Longrightarrow E(X_n) = 0 \cdot (1 - P(A)) + 1 \cdot P(A) = P(A) \;\; \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$\text{P.20} \Longrightarrow \frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n) \xrightarrow{a.s.} P(A).$$

Dar $\frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n) = f_n(A)$ (frecvenţa relativă a lui A) $\Longrightarrow f_n(A) \xrightarrow{a.s.} P(A).$ □

Statistică matematică

► Statistica matematică este o ramură a matematicii aplicate, care se ocupă de *colectarea*, *gruparea*, *analiza* şi *interpretarea datelor* referitoare la anumite fenomene în scopul obţinerii unor previziuni;
• statistica descriptivă: metode de colectare, organizare, sintetizare, prezentare şi descriere a datelor numerice (sau nenumerice) într-o formă convenabilă
• statistica inferenţială: metode de interpretare a rezultatelor obţinute prin metodele statisticii descriptive, utilizate apoi pentru luarea deciziilor.
► O *colectivitate* sau *populaţie statistică* $\mathcal{C}$ este o mulţime de elemente care au anumite însuşiri comune ce fac obiectul analizei statistice. Numărul elementelor populaţiei se numeşte *volumul populaţiei.*
Exemple de populaţii statistice: mulţimea persoanelor dintr-o anumită ţară, localitate, zonă etc. într-un anumit an; multimea gospodăriilor din Romania la un moment dat; mulţimea consumatorilor unui anumit produs; mulţimea societăţilor care produc un anumit produs; angajaţii unei societăţi; studenţii unei facultăţi.
► *Eşantionul* $\mathcal{E}$ reprezintă o submulţime a unei populaţii statistice $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$, constituită după criterii bine stabilite:
a) să fie aleatoare;
b) toate elementele colectivităţii să aibe aceeaşi şansă de a fi alese în eşantion;
c) eşantionul să fie reprezentativ (structura eşantionului să fie apropiată de structura populaţiei);
d) volumul eşantionului să fie suficient de mare.
► *Unitatea statistică* (indivizii) este elementul, entitatea de sine stătătoare a unei populaţii statistice, care posedă o serie de trăsături caracteristice ce-i conferă apartenenţa la populaţia studiată.
De exemplu: *unitatea statistică simplă*: un salariat, un student, un agent economic, o trăsătură, o părere; *unitatea statistică complexă*: o grupă de studenţi sau o echipă de salariaţi, o familie sau o gospodărie, o categorie de mărfuri.
► *Variabila statistică* sau *caracteristica* reprezintă o însuşire, o proprietate măsurabilă a unei unităţi statistice, întâlnită la toate unităţile care aparţin aceleiaşi colectivităţi şi care prezintă variabilitate de la o unitate statistică la alta. Caracteristica sau variabila statististică corespunde unei variabile aleatoare.
Exemple de caracteristici: vârsta, salariul, preferinţele politice, preţul unui produs, calitatea unor servicii, nivelul de studii.
a) variabile (caracteristici) continue $\rightarrow$ iau un număr infinit şi nenumărabil de valori într-un interval sau reuniune de intervale (de ex.: greutatea, înălţimea, valoarea glicemiei, temperatura aerului)

b) variabile (caracteristici) discrete $\rightarrow$ iau număr finit sau infinit dar numărabil de valori discrete (de ex.: numări elevi ai unei şcoli, numărul liceelor existente într-un oraş, valoarea IQ)
$\triangleright$ caracteristicile de la a) şi b) sunt variabile numerice (cantitative)
c) variabile (caracteristici) nominale (de ex.: culoarea ochilor, ramura de activitate, religia)
d) variabile (caracteristici) nominale ordinale (de ex.: starea de sănătate / calitatea unor servicii - precară, mai bună, bună, foarte bună)
e) variabile (caracteristici) dihotomiale (binare) (de ex.: stagiul militar - satisfăcut/nesatisfăcut, starea civilă - căsătorit/necăsătorit)
$\triangleright$ caracteristicile de la c),d),e) sunt variabile calitative
$\triangleright$ variabilele nominale mai sunt numite variabile categoriale
► *Datele statistice* reprezintă observaţiile rezultate dintr-o cercetare statistică, sau ansamblul valorilor colectate în urma unei cercetări statistice.
De exemplu: un angajat al unei companii are o vechime de 6 ani în muncă. Angajatul reprezintă unitatea statistică, vechimea în muncă este caracteristica (variabila) cercetată, iar 6 este valoarea acestei caracteristici.

O *colectivitate* (populaţie) $\mathcal{C}$ este cercetatată din punctul de vedere al caracteristicii (variabilei statistice) X.

Distribuţia caracteristicii X poate fi

1) complet specificată (de ex.: $X \sim Exp(3)$, $X \sim Bin(10, 0.3)$, $X \sim N(0, 1)$)

2) specificată, dar depinzând de unul sau mai mulţi parametri necunoscuţi
(de ex.: $X \sim Exp(\lambda)$, $X \sim Bin(10, p)$, $X \sim N(m, \sigma^2)$)
3) necunoscută: $X \sim ?$

• în cazul 2) parametrii sunt necunoscuţi, iar în cazul 3) distribuţia este necunoscută
$\hookrightarrow$ se estimează $\rightarrow$ teoria estimaţiei
$\hookrightarrow$ se testează $\rightarrow$ teste statistice

► Fie $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$ un eşantion. Se numesc date de selecţie relative la caracteristica X datele statistice $x_1, \ldots, x_n$ obţinute prin cercetarea indivizilor care fac parte din eşantionul $\mathcal{E}$.
► Datele de selecţie $x_1, \ldots, x_n$ pot fi considerate ca fiind valorile unor variabile aleatoare $X_1, \ldots, X_n$, numite variabile de selecţie şi care se consideră a fi variabile aleatoare independente şi având aceeaşi distribuţie ca X.
► Fie $x_1, \ldots, x_n$ datele statistice pentru caracteristica cercetată X, notăm cu $X_1, \ldots, X_n$ variabilele de selecţie corespunzătoare. Fie $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ o funcţie astfel încât $g(X_1, \ldots, X_n)$ este o variabilă aleatoare.
$g(X_1, \ldots, X_n)$ se numeşte funcţie de selecţie sau estimator

$g(x_1, \ldots, x_n)$ se numeşte valoarea funcţiei de selecţie sau valoarea estimatorului.

• **Exemple de estimatori (funcţii de selecţie)** sunt: media de selecţie, dispersia de selecţie, momentul centrat de selecţie de ordinul doi, funcţia de repartiţie empirică.
▷ Estimatorii (funcţiile de selecţie) se folosesc în statistică pentru estimarea punctuală a unor parametri necunoscuţi, pentru obţinerea unor intervale de încredere pentru parametri necunoscuţi, pentru verificarea unor ipoteze statistice.

Fie $x_1, \ldots, x_n$ datele statistice pentru caracteristica cercetată X, notăm cu $X_1, \ldots, X_n$ variabilele de selecţie corespunzătoare:

▶ media de selecţie (empirică)

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$$

▶ valoarea mediei de selecţie

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$$

▶ varianţa (dispersia) de selecţie (empirică)

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X}_n)^2$$

▶ valoarea varianţei (dispersiei) de selecţie

$$s_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x}_n)^2$$

▶ abaterea standard de selecţie (empirică)

$$S_n = \left(\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X}_n)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

▶ valoarea abaterii standard de selecţie

$$s_n = \left(\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x}_n)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

▶ momentul centrat de selecţie (empiric) de ordinul doi

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X}_n)^2$$

▶ valoarea momentului centrat de selecţie (empiric) de ordinul doi

$$m_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x}_n)^2$$

▶ funcţia de repartiţie empirică $\mathcal{F}_n : \mathbb{R} \times \Omega \to [0, 1]$

$$\mathcal{F}_n(x, \omega) = \frac{\#\{i \in \{1, ..., n\} : X_i(\omega) \le x\}}{n}, x \in \mathbb{R}$$

▶ valoarea (expresia) funcţiei de repartiţie empirice $\mathcal{F}_n : \mathbb{R} \to [0, 1]$

$$\mathcal{F}_n(x) = \frac{\#\{i \in \{1, ..., n\} : x_i \le x\}}{n}, x \in \mathbb{R}.$$

Def. 30. *$g(X_1, \ldots, X_n)$ este estimator nedeplasat pentru parametrul necunoscut θ, dacă*

$$E(g(X_1, \ldots, X_n)) = \theta.$$

$g(X_1, \ldots, X_n)$ este estimator consistent pentru parametrul necunoscut θ, dacă

$$g(X_1, \ldots, X_n) \xrightarrow{a.s.} \theta.$$

Fie $g_1 = g_1(X_1, \ldots, X_n)$ şi $g_2 = g_2(X_1, \ldots, X_n)$ estimatori nedeplasaţi pentru parametrul necunoscut θ. $g_1(X_1, \ldots, X_n)$ este mai eficient decât $g_2(X_1, \ldots, X_n)$, dacă $V(g_1) < V(g_2)$.

Observaţii:

1) Media de selecţie $\bar{X}_n$ este un estimator nedeplasat şi consistent pentru media teoretică $E(X)$ a caracteristicii X; în simulări $E(X) \approx \bar{x}_n$.
În Octave: `mean(d)`, unde `d` este vectorul datelor statistice.
2) Varianţa de selecţie S_n^2 este un estimator nedeplasat şi consistent pentru varianţa teoretică $V(X)$ a caracteristicii X; în simulări $V(X) \approx s_n^2$.
În Octave: `var(d)`, unde `d` este vectorul datelor statistice.
2^*) Momentul centrat de selecţie de ordinul doi M_n nu este un estimator nedeplasat pentru varianţa teoretică $V(X)$ a caracteristicii X; el este un estimator consistent pentru varianţa teoretică $V(X)$ a caracteristicii X; în simulări se foloseşte şi $V(X) \approx m_n$.
În Octave: `var(d,1)`, unde `d` este vectorul datelor statistice.
3) Deviaţia standard de selecţie S_n nu este un estimator nedeplasat pentru deviaţia standard teoretică $Std(X) = \sqrt{V(X)}$ a caracteristicii X; el este un estimator consistent pentru deviaţia standard teoretică $Std(X)$ a caracteristicii X; în simulări se foloseşte $Std(X) \approx s_n$.
În Octave: `std(d)`, unde `d` este vectorul datelor statistice.

4) Funcţia de repartiţie de selecţie $\mathcal{F}_n(x,\cdot)$ calculată în $x \in \mathbb{R}$ este un estimator nedeplasat şi consistent pentru $F_X(x)$, care este valoarea funcţiei de repartiţie teoretice calculată în x; în simulări $F_X(x) \approx \mathcal{F}_n(x)$.
În Octave: `empirical_cdf(`x`,d)` $= \mathcal{F}_n(x)$, unde `d` este vectorul datelor statistice şi `length(d)=`n.

Exemplu: Fie $(X_n)_n$ şirul variabilelor de selecţie pentru caracteristica cercetată $X \sim Bernoulli(p)$, unde $p \in (0,1)$ este parametru necunoscut. Estimatorul

$$\hat{p}(X_1,...,X_n) = \frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n) = \bar{X}_n \text{ (media de selecţie)}$$

este un estimator *nedeplasat* şi *consistent* pentru parametrul necunoscut p.
R.: $X \sim Bernoulli(p) \Longrightarrow E(X) = p$;

$$\Longrightarrow E\Big(\hat{p}(X_1,...,X_n)\Big) = \frac{1}{n}\Big(E(X_1) + ... + E(X_n)\Big) = E(X) = p.$$

LTNM (a se vedea P.20) implică

$$\hat{p}(X_1,...,X_n) = \frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n) \xrightarrow{a.s.} p.$$

Deci, $\hat{p}(X_1,...,X_n)$ este un estimator nedeplasat şi consistent pentru parametrul necunoscut p.
Dacă $x_1,\ldots,x_n \in \{0,1\}$ sunt date statistice, atunci valoarea estimată pentru p este

$$p \approx \hat{p}(x_1,...,x_n) = \frac{1}{n}(x_1 + ... + x_n) = \bar{x}_n.$$

$\diamondsuit$

Metoda momentelor pentru estimarea parametrilor necunoscuţi $\theta = (\theta_1,\ldots,\theta_r)$ pentru distribuţia caracteristicii cercetate X

de exemplu:
- $X \sim Exp(\lambda)$ parametrul necunoscut: $\theta = \lambda$
- $X \sim N(m,\sigma^2)$ parametri necunoscuţi: $(\theta_1,\theta_2) = (m,\sigma^2)$
- $X \sim Unif[a,b]$ parametri necunoscuţi: $(\theta_1,\theta_2) = (a,b)$

Fie $x_1,\ldots,x_n$ datele statistice pentru caracteristica cercetată X şi fie $X_1,\ldots,X_n$ variabilele de selecţie corespunzătoare.

Se rezolvă sistemul

$$\begin{cases} E(X^k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k, \\ k = \{1, ..., r\} \end{cases}$$

cu necunoscutele $\theta_1, \dots, \theta_r$.
Soluţia sistemului $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_r$ este estimatorul pentru parametrii necunoscuţi ai distribuţiei caracteristicii X.

Exemplu 1: Folosind metoda momentelor, să se estimeze parametrul necunoscut $\theta := a$ pentru $X \sim Unif[0, a]$; se dau datele statistice: 0.1,0.3,0.9,0.49,0.12,0.31,0.98,0.73, 0.13,0.62.

R.: Fie $X_1, \dots, X_n$ variabilele de selecţie. Avem cazul: $r = 1$, calculăm $E(X) = \frac{a}{2}$, $n = 10$, $\bar{x}_n = 0.468$. Se rezolvă

$$E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \Longrightarrow \frac{a}{2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Estimatorul pentru parametrul necunoscut a este

$$\hat{a}(X_1, ..., X_n) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Valoarea estimatorului este

$$\hat{a}(x_1, ..., x_n) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0.936\,.$$

Parametrul necunoscut a este estimat cu valoarea 0.936.
► Este $\hat{a}(X_1, ..., X_n)$ un estimator nedeplasat pentru parametrul a?
R.: Da, se arată că $E(\hat{a}(X_1, ..., X_n)) = a$. ♡

Exemplu 2:
Folosind metoda momentelor, să se estimeze parametrii necunoscuţi $\theta_1 := m$ şi $\theta_2 = \sigma^2$ pentru $X \sim N(m, \sigma^2)$; se dau datele statistice:

$$0.831, 0.71, -0.2, -0.04, 2.08, -1.2, 0.448, -0.18, -0.27, -0.55\,.$$

R.: Fie $n = 10$, iar $X_1, ..., X_n$ variabile de selecţie. Avem cazul: $r = 2$, calculăm $E(X) = m$, $E(X^2) = V(X) + E^2(X) = \sigma^2 + m^2$ (a se vedea exemplul de pe pg. 43), $\bar{x}_n = 0.1629$ (calculat în Octave cu `mean(x)`, unde `x` este vectorul datelor statistice), $m_n = 0.7346$ (calculat în Octave cu `var(x,1)`). Se rezolvă

$$\begin{cases} m & = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \\ \sigma^2 + m^2 & = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{cases} \implies \text{are soluţia} \begin{cases} \hat{m} & = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \\ \hat{\sigma}^2 & = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 \end{cases}$$

Estimatorii sunt

$$\hat{m}(X_1, ..., X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}_n \text{ (media de selecţie)},$$

$$\hat{\sigma}^2(X_1, ..., X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 = M_n \text{ (momentul centrat de selecţie de ordinul doi)}$$

Valorile estimatorilor sunt

$$\hat{m}(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}_n = 0.1629\,,$$

$$\hat{\sigma}^2(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = m_n = 0.7346\,.$$

♣

Metoda verosimilităţii maxime pentru estimarea parametrului necunoscut θ al distribuţiei caracteristicii cercetate X

Fie $x_1, \ldots, x_n$ datele statistice pentru caracteristica cercetată X şi fie $X_1, \ldots, X_n$ variabilele de selecţie corespunzătoare. Notăm

$$L(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \begin{cases} P(X = x_1) \cdot \ldots \cdot P(X = x_n), & \text{dacă } X \text{ e v.a. discretă} \\ f_X(x_1) \cdot \ldots \cdot f_X(x_n), & \text{dacă } X \text{ e v.a. continuă cu funcţie de densitate } f_X. \end{cases}$$

Aceasta este funcţia de verosimilitate pentru parametrul θ şi datele statistice $x_1, \ldots, x_n$.

Metoda verosimilităţii maxime se bazează pe principiul că valoarea cea mai verosimilă (cea mai potrivită) a parametrului necunoscut θ este aceea pentru care funcţia de verosimilitate $L(x_1, \dots, x_n; \theta)$ ia valoarea maximă:

$$(1) \qquad L(x_1, \dots, x_n; \hat{\theta}) = \max_{\theta} L(x_1, \dots, x_n; \theta).$$

Se rezolvă sistemul $\dfrac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ şi se arată că $\dfrac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} < 0$.

Deseori este mai practic să se considere varianta transformată

$\dfrac{\partial lnL}{\partial \theta} = 0$ cu $\dfrac{\partial^2 lnL}{\partial \theta^2} < 0$. În unele situaţii (1) se rezolvă prin alte metode.

Observaţie: Dacă distribuţia caracteristicii cercetate depinde de k parametri necunoscuţi $(\theta_1, \dots, \theta_k)$ atunci se rezolvă sistemul

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_j} = 0, j = \overline{1, k} \text{ şi se arată că matricea } \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right)_{1 \le i \le j \le k} \text{ este negativ definită.}$$

Se poate lucra şi cu varianta transformată:

$$\frac{\partial lnL}{\partial \theta_j} = 0, j = \overline{1, k} \text{ şi se arată că matricea } \left(\frac{\partial^2 lnL}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right)_{1 \le i \le j \le k} \text{ este negativ definită.}$$

O matrice M este negativ definită dacă $y^t M y < 0$ pentru orice $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$.

Exemplu: Folosind metoda verosimilităţii maxime să se estimeze parametrul $\theta := p \in (0, 1)$ al distribuţiei Bernoulli,

$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$, cu datele statistice: 0,1,1,0,0,0,1,0,1,0.

$\Rightarrow n = 10, x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 0 \dots; P(X = x) = p^x (1-p)^{1-x}, x \in \{0, 1\}$

$$\Rightarrow L(x_1, \dots, x_n; p) = P(X = x_1) \cdot \ldots \cdot P(X = x_n) = p^{x_1 + \dots + x_n} (1-p)^{n - (x_1 + \dots + x_n)}$$

$$\Rightarrow lnL(x_1, \dots, x_n; p) = (x_1 + \dots + x_n) ln(p) + (n - (x_1 + \dots + x_n)) ln(1-p)$$

$$\frac{\partial lnL}{\partial p} = 0 \Rightarrow p = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n).$$

Are loc: $\dfrac{\partial^2 lnL}{\partial p^2} < 0$.

Estimatorul de verosimilitate maximă pentru parametrul necunoscut p este

$$\hat{p}(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) = \bar{X}_n,$$

unde $X_1, \ldots, X_n$ sunt variabilele de selecţie. Valoarea estimată este

$$\hat{p}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) = \bar{x}_n = \frac{4}{10} = 0.4\,.$$

► Este $\hat{p}(X_1, ..., X_n)$ un estimator nedeplasat pentru parametrul p?

Intervale de încredere şi teste statistice

Noţiuni de bază

► Fie $\alpha \in (0,1)$ nivelul de semnificaţie (probabilitatea de risc).

Def. 31. ***Cuantila de ordin*** *α pentru distribuţia caracteristicii cercetate X este numărul $z_\alpha \in \mathbb{R}$ pentru care*

$$P(X < z_\alpha) \leq \alpha \leq P(X \leq z_\alpha).$$

Dacă $\alpha = 0.5$ atunci $z_{0.5}$ se numeşte ***mediană****.*

► dacă X este v.a. continuă, atunci: z_α este cuantilă de ordin $\alpha \iff P(X \leq z_\alpha) = \alpha \iff F_X(z_\alpha) = \alpha$
► dacă F_X este funcţie inversabilă, atunci $z_\alpha = F_X^{-1}(\alpha)$

• $\alpha \cdot 100\%$ din valorile lui X sunt mai mici sau egale cu z_α
• Matlab/Octave: `quantile`

Distribuţii de probabilitate continue frecvent folosite în statistică şi cuantilele lor corespunzătoare

▷ distibuţia normală $N(0,1)$
cuantila $z_\alpha = \texttt{norminv}(\alpha, 0, 1)$; funcţia de repartiţie $F_{N(0,1)}(x) = \texttt{normcdf}(x, 0, 1)$
▷ distibuţia Student $St(n)$
cuantila $t_\alpha = \texttt{tinv}(\alpha, n)$; funcţia de repartiţie $F_{St(n)}(x) = \texttt{tcdf}(x, n)$
▷ distibuţia Chi-pătrat $\chi^2(n)$
cuantila $c_\alpha = \texttt{chi2inv}(\alpha, n)$; funcţia de repartiţie $F_{\chi^2(n)}(x) = \texttt{chi2cdf}(x, n)$
De exemplu:
$\texttt{norminv}(0.01, 0, 1) = -2.3263, \texttt{norminv}(1 - 0.01, 0, 1) = 2.3263,$
$\texttt{tinv}(0.05, 10) = -1.8125, \texttt{tinv}(1 - 0.05, 10) = 1.8125,$
$\texttt{chi2inv}(0.05, 10) = 3.9403, \texttt{chi2inv}(1 - 0.05, 10) = 18.307.$

• Pentru cuantilele distribuţiei normale $N(0,1)$ are loc $z_\alpha = -z_{1-\alpha}$ pentru orice $\alpha \in (0,1)$;
• pentru cuantilele distribuţiei Student $St(n)$ are loc $t_\alpha = -t_{1-\alpha}$ pentru orice $\alpha \in (0,1)$.

Exemplu: Să se arate că: **a)** $X \sim N(0,1) \Longleftrightarrow -X \sim N(0,1)$;
b) pentru cuantilele distribuţiei normale $N(0,1)$ are loc $z_\alpha = -z_{1-\alpha}$ pentru orice $\alpha \in (0,1)$;
c) proprietatea analoagă are loc şi pentru distribuţia Student $St(n)$, adică $t_\alpha = -t_{1-\alpha}$ pentru orice $\alpha \in (0,1)$.
R.: a) Fie $x \sim N(0,1)$. Scriem pentru orice $u \in \mathbb{R}$

$$F_{-X}(u) = P(-X \leq u) = P(X > -u) = 1 - P(X \leq -u) = 1 - F_X(-u).$$

Aceasta implică

$$f_{-X}(u) = F'_{-X}(u) = F'_X(-u) = f_X(-u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}},\ \forall u \in \mathbb{R}.$$

Deci $-X \sim N(0,1)$. Folosind rezultatul deja demonstrat şi relaţia $X = -(-X)$, obţinem că $-X \sim N(0,1) \Longrightarrow X \sim N(0,1)$.
b) Fie $X \sim N(0,1)$ şi $z_\alpha, z_{1-\alpha}$ cuantile ale sale. Rezultă că

$$P(X \leq z_\alpha) = \alpha,\ P(X \leq z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha.$$

Scriem şi folosim faptul că $-X$ şi X urmează distribuţia $N(0,1)$

$$\begin{aligned} &P(X \leq z_\alpha) = \alpha = 1 - P(X \leq z_{1-\alpha}) = P(X > z_{1-\alpha}) = P(-X < -z_{1-\alpha}) = P(X < -z_{1-\alpha}) \\ &= P(X \leq -z_{1-\alpha}). \end{aligned}$$

Pentru distribuţia $N(0,1)$ cuantila z_α e unic determinată din relaţia $P(X \leq z_\alpha) = \alpha$ (pentru că F_X e o funcţie inversabilă şi atunci $z_\alpha = F_X^{-1}(\alpha)$), aşadar obţinem că $z_\alpha = -z_{1-\alpha}$.
c) Raţionamentul este analog. Se foloseşte $X \sim St(n) \Longleftrightarrow -X \sim St(n)$. ♣

Intervale de încredere

În paragrafele anterioare s-a văzut cum poate fi estimat un parametru necunoscut, folosind datele dintr-un eşantion. Se pune problema cât este de bună această estimare a parametrului necunoscut, adică vom calcula o anumită ”marjă de eroare”.

Presupunem că studiem media (teoretică) a timpului de aşteptare la un anumit ghişeu al unei bănci. Prin studierea unui eşantion de volum 200 s-a constatat că media de seleţie a timpului de aşteptare este $\bar{x}_{200} = 10$ (minute). Dacă considerăm un alt eşantion probabil obţinem o altă valoare pentru $\bar{x}_{200}$.

Problemă: putem construi un interval (aleator) care să acopere valoarea reală a parametrului necunoscut studiat cu o anumită probabilitate dată (numit nivel de încredere)?
Pe baza datelor din eşantion acest interval aleator va deveni un interval numeric.

Fie $x_1, \ldots, x_n$ datele statistice pentru caracteristica cercetată X, a cărei distribuţie (de obicei necunoscută) depinde de parametrul necunoscut θ; notăm cu $X_1, \ldots, X_n$ variabilele de selecţie corespunzătoare. Se precizează fie $\alpha \in (0, 1)$ *nivelul de semnificaţie*, fie $1 - \alpha$, care se numeşte *nivelul de încredere*.
Se caută doi estimatori $g_1(X_1, \ldots, X_n)$ şi $g_2(X_1, \ldots, X_n)$ astfel încât

$$P\Big(g_1(X_1, \ldots, X_n) < \theta < g_2(X_1, \ldots, X_n)\Big) = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow P\Big(\theta \notin \Big(g_1(X_1, \ldots, X_n), g_2(X_1, \ldots, X_n)\Big)\Big) = \alpha$$

► $\Big(g_1(X_1, \ldots, X_n), g_2(X_1, \ldots, X_n)\Big)$ se numeşte **interval de încredere bilateral pentru parametrul necunoscut** θ
► $\Big(g_1(x_1, \ldots, x_n), g_2(x_1, \ldots, x_n)\Big)$ este **valoarea intervalului de încredere** pentru parametrul necunoscut θ
► $g_1(X_1, \ldots, X_n)$ este limita inferioară a intervalului de încredere, valoarea sa este $g_1(x_1, \ldots, x_n)$
► $g_2(X_1, \ldots, X_n)$ este limita superioară a intervalului de încredere, valoarea sa este $g_2(x_1, \ldots, x_n)$
► probabilitatea ca parametrul necunoscut θ să fie în intervalul $\Big(g_1(X_1, \ldots, X_n), g_2(X_1, \ldots, X_n)\Big)$ este $1 - \alpha$ (nivelul de încredere)
► există şi **intervale de încredere unilaterale**: $\Big(-\infty, g_3(X_1, \ldots, X_n)\Big)$, $\Big(g_4(X_1, \ldots, X_n), \infty\Big)$, estimatorii g_3 şi g_4 sunt astfel încât

$$P\Big(\theta < g_3(X_1, \ldots, X_n)\Big) = 1 - \alpha, \text{ respectiv } \quad P\Big(g_4(X_1, \ldots, X_n) < \theta\Big) = 1 - \alpha$$

► $\Big(-\infty, g_3(x_1, \ldots, x_n)\Big)$ $\Big(g_4(x_1, \ldots, x_n), \infty\Big)$ sunt valorile intervalelor de încredere unilaterale pentru parametrul necunoscut θ
► probabilitatea ca parametrul necunoscut θ să fie în intervalul $\Big(-\infty, g_3(X_1, \ldots, X_n)\Big)$ este $1 - \alpha$, respectiv probabilitatea ca θ să fie în intervalul $\Big(g_4(X_1, \ldots, X_n), \infty\Big)$ este $1 - \alpha$.

➡ Nu este corect să afirmăm că probabilitatea ca intervalul numeric construit (din datele statistice) să cuprindă valoarea reală a lui θ este $1 - \alpha$. Intervalul de încredere este un interval aleator, deci extremităţile sale sunt v.a. Prin urmare interpretarea corectă a lui $1-\alpha$ este următoarea: dacă, facem un număr foarte mare de selecţii (din mai multe eşantioane) şi calculăm de fiecare dată intervalul de încredere cu nivelul de încredere $1-\alpha$, atunci $(1-\alpha)\cdot 100\%$ din aceste intervale vor conţine valoarea reală pentru θ.

P. 22. (Teorema limită centrală) *Fie $(X_n)_n$ un şir de v.a. independente, care au aceeaşi distribuţie. Fie $m = E(X_n)$ şi $\sigma^2 = V(X_n) > 0\ \forall\, n \geq 1$. Are loc*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\bar{X}_n - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq b\right) = F_{N(0,1)}(b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{b} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

pentru orice $b \in \mathbb{R}$, iar $\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$.

➡ $F_{N(0,1)}(b)$=`normcdf`$(b,0,1)$ funcţia de repartiţie a legii normale standard $N(0,1)$

➡ **Consecinţă** (la P. 22): pentru orice $a < b$ are loc

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a < \frac{\bar{X}_n - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < b\right) = F_{N(0,1)}(b) - F_{N(0,1)}(a) = \texttt{normcdf}(b,0,1) - \texttt{normcdf}(a,0,1).$$

Exemplul 1: Dacă $(X_n)_{1\leq n\leq 100}$ sunt variabile de selecţie pentru caracteristica cercetată $X \sim Bernoulli(0.5)$, să se estimeze $P(0.35 < \bar{X}_{100} < 0.65)$!

R.: Se calculează $m = E(X_n) = 0.5$ şi $\sigma = \sqrt{V(X_n)} = 0.5$ şi se scrie

$$P(0.35 < \bar{X}_{100} < 0.65) = P\left(-3 < \frac{\bar{X}_{100} - 0.5}{\frac{0.5}{\sqrt{100}}} < 3\right).$$

Cf. P. 22 şi a consecinţei de mai sus

$$\Longrightarrow P\left(-3 < \frac{\bar{X}_{100} - 0.5}{\frac{0.5}{\sqrt{100}}} < 3\right) \approx \texttt{normcdf}(3,0,1) - \texttt{normcdf}(-3,0,1) = 0.9973$$

$$\Longrightarrow P\Big(\bar{X}_{100} \in (0.35, 0.65)\Big) \approx 0.9973,$$

aşadar pentru o caracteristică de tip $Bernoulli(0.5)$, media de selecţie $\bar{X}_{100}$ aparţine cu o probabilitate foarte mare intervalului $(0.35, 0.65)$. ♡

Exemplul 2: Se ştie că 40% din populaţia unui orăşel susţine un anumit candidat la alegerile viitoare. Dacă $(X_n)_{1\leq n\leq 600}$ sunt variabile de selecţie pentru distribuţia $Bernoulli(0.4)$, adică $\forall\, n \in \{1, ..., 600\}$

$X_n = 1 \Longleftrightarrow$ persoana a n-a votează acest candidat,

$X_n = 0 \iff$ persoana a n-a nu votează acest candidat,
şi $X_n \sim Bernoulli(0.4)$. Estimaţi $P(\bar{X}_{600} > 0.43)$, calculaţi $E(\bar{X}_{600})$ şi $V(\bar{X}_{600})$.
R.: Dacă $(X_n)_{1\leq n\leq 600}$ sunt variabile de selecţie pentru $Bernoulli(0.4)$, se calculează $m = E(X_n) = 0.4$ şi $\sigma^2 = V(X_n) = 0.24\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$ şi se doreşte estimarea probabilităţii

$$P(\bar{X}_{600} > 0.43) = 1 - P(\bar{X}_{600} \leq 0.43).$$

Cf. P. 22

$$\Longrightarrow P(\bar{X}_{600} \leq 0.43) = P\left(\frac{\bar{X}_{600} - 0.4}{\sqrt{\frac{0.24}{600}}} \leq \frac{0.43 - 0.4}{\sqrt{\frac{0.24}{600}}}\right) = P\left(\frac{\bar{X}_{600} - 0.43}{\sqrt{\frac{0.24}{600}}} \leq 1.5\right)$$
$$\approx F_{N(0,1)}(1.5) = \texttt{normcdf}(1.5, 0, 1) = 0.93319$$

$\Longrightarrow P(\bar{X}_{600} > 0.43) \approx 0.066807.$
$E(\bar{X}_{600}) = \frac{1}{600}\Big(E(X_1) + ...E(X_{600})\Big) = 0.4$ şi
$V(\bar{X}_{600}) = \frac{1}{600^2}\Big(V(X_1) + ... + V(X_{600})\Big) = \frac{1}{600} \cdot 0.24 = 0.0004.$ ♠
Exerciţiu: 100 de zaruri sunt aruncate. Folosind P.22 (Teorema limită centrală), estimaţi probabilitatea ca suma numerelor obţinute să fie între 300 şi 400!

P. 23. *Fie $X_1, \ldots, X_n$ variabile de selecţie pentru $X \sim N(m, \sigma^2)$, atunci pentru* ***media de selecţie*** *are loc* $\dfrac{\bar{X}_n - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$.

Reamintim: $X \sim N(m, \sigma^2) \Longrightarrow E(X) = m, V(X) = \sigma^2$ (a se vedea calculele de pe pg. 43).

Interval de încredere pentru media $m = E(X)$ caracteristicii cercetate X, când dispersia $\sigma^2 = V(X)$ este cunoscută

► se dau $\alpha \in (0, 1)$, σ, datele statistice $x_1, \ldots, x_n$
► construim intervale de încredere pentru parametrul *necunoscut* $m = E(X)$
► dacă $X \sim N(m, \sigma^2)$ sau $n > 30$ şi X are o distribuţie necunoscută, atunci P. 22 şi P. 23 implică

(11) $$\frac{\bar{X}_n - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

► cuantilele legii normale $N(0, 1)$:
$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \texttt{norminv}(1 - \frac{\alpha}{2}, 0, 1)$, $z_{1-\alpha} = \texttt{norminv}(1 - \alpha, 0, 1)$, $z_\alpha = \texttt{norminv}(\alpha, 0, 1)$

• un *interval de încredere bilateral* pentru $m = E(X)$ (media teoretică) când dispersia este cunoscută este

$$\Big(\bar{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}}\ ,\ \bar{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}}\Big)\,,$$

deoarece:

$$P\Big(\bar{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}} < m < \bar{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}}\Big) = P\Big(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{X}_n - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\Big)$$

$$= F_{N(0,1)}(z_{1-\frac{\alpha}{2}}) - F_{N(0,1)}(-z_{1-\frac{\alpha}{2}}) \overset{(11)}{=} F_{N(0,1)}(z_{1-\frac{\alpha}{2}}) - F_{N(0,1)}(z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 1 - \alpha$$

• *intervale de încredere unilaterale*: $\Big(-\infty, \bar{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z_\alpha\Big), \Big(\bar{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z_{1-\alpha}, \infty\Big)$, adică

$$P\Big(m < \bar{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z_\alpha\Big) = 1 - \alpha,\quad P\Big(\bar{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z_{1-\alpha} < m\Big) = 1 - \alpha\,.$$

Interval de încredere pentru **media teoretică** când dispersia σ^2 este cunoscută:	Expresia intervalului de încredere, folosind datele statistice
bilateral	$\Big(\bar{x}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}}\ ,\ \bar{x}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}}\Big)$
unilateral	$\Big(-\infty\,, \bar{x}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z_\alpha\Big)$
	$\Big(\bar{x}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z_{1-\alpha}\ ,\ \infty\Big)$

Exemplu: Un profesor a înregistrat pe parcursul mai multor ani rezultatele elevilor săi la un anumit tip de test. Punctajul unui elev este o v.a. $X \in (0, 100)$, având abaterea standard egală cu 10. Media de selecţie a calificativelor a 144 de elevi este 68. Dacă $\alpha = 0.05$, să se construiască un interval de încredere bilateral pentru valoarea medie $E(X)$ a punctajului obţinut de un elev la un anumit test.

R:

$$\Big(\bar{x}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}}\ ,\ \bar{x}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}}\Big)$$

unde $n = 144, \sigma = 10, \bar{x}_n = 68, \alpha = 0.05, z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \texttt{norminv}(1 - \frac{0.05}{2}, 0, 1) \approx 1.96$. Valoarea intervalului de încredere bilateral este $(66.367, 69.633)$. ♣

P. 24. *Fie $X_1, \ldots, X_n$ variabile de selecţie pentru $X \sim N(m, \sigma^2)$, atunci pentru* ***media de selecţie şi abaterea standard de selecţie*** *are loc* $\dfrac{\bar{X}_n - m}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} \sim St(n-1)$.

Interval de încredere pentru media $m = E(X)$ caracteristicii cercetate X, când dispersia $V(X)$ este necunoscută

▶ se dau $\alpha \in (0,1)$, datele statistice $x_1, \dots, x_n$
▶ dacă $X \sim N(m, \sigma^2)$ sau $n > 30$ şi X are o distribuţie necunoscută, atunci P.24 implică

$$\frac{\bar{X}_n - m}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} \sim St(n-1)$$

▶ cuantilele legii Student $St(n-1)$:
$t_{1-\frac{\alpha}{2}} = \mathtt{tinv}(1-\frac{\alpha}{2}, n-1)$, $t_{1-\alpha} = \mathtt{tinv}(1-\alpha, n-1)$, $t_{\alpha} = \mathtt{tinv}(\alpha, n-1)$

• un *interval de încredere bilateral* pentru $m = E(X)$ (media teoretică), când dispersia este necunoscută este: $\Big(\bar{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}}\ ,\ \bar{X}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}}\Big)$, adică

$$P\Big(\bar{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}} < m < \bar{X}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}}\Big) = 1-\alpha$$

• *intervale de încredere unilaterale* $\Big(-\infty, \bar{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}} \cdot t_{\alpha}\Big)$, $\Big(\bar{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\alpha}\ ,\ \infty\Big)$, adică

$$P\Big(m < \bar{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}} \cdot t_{\alpha}\Big) = 1-\alpha, \quad P\Big(\bar{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\alpha} < m\Big) = 1-\alpha$$

Interval de încredere pentru **media teoretică** când dispersia este necunoscută	Expresia intervalului de încredere, folosind datele statistice
bilateral	$\Big(\bar{x}_n - \frac{s_n}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}}\ ,\ \bar{x}_n + \frac{s_n}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}}\Big)$
unilateral	$\Big(-\infty\,, \bar{x}_n - \frac{s_n}{\sqrt{n}} \cdot t_{\alpha}\Big)$
	$\Big(\bar{x}_n - \frac{s_n}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\alpha}\ ,\ \infty\Big)$

Exemplu: Media de selecţie a lungimii a 100 de şuruburi este 15.5 cm, iar varianţa de selecţie este 0.09 cm^2. Să se construiască un interval de încredere 99% bilateral pentru media (teoretică) a lungimii şuruburilor.

R.: valoarea intervalului de încredere bilateral pentru media teoretică m, când varianţa este necunoscută, este

$$\left(\bar{x}_n - \frac{s_n}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{x}_n + \frac{s_n}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

unde $\bar{x}_n = 15.5, s_n = 0.3$ $(s_n^2 = 0.09), \alpha = 0.01, t_{1-\frac{\alpha}{2}} = \texttt{tinv}(0.995, 99) = 2.6264$, $\sqrt{n} = 10$. Valoarea intervalului de încredere bilateral este $\big(15.421208, 15.578792\big)$. ♣

P. 25. *Fie $X_1, \ldots, X_n$ variabile de selecţie pentru $X \sim N(m, \sigma^2)$, atunci pentru* ***varianţa de selecţie*** *are loc $\frac{n-1}{\sigma^2} S_n^2 \sim \chi^2(n-1)$.*

Exemplu: Timpul necesar unei unităţi CPU pentru a realiza un anumit tip de operaţii are distribuţie normală cu media 20 de secunde şi abaterea standard 3 secunde. Într-un eşantion de 25 de astfel de operaţii, care este probabilitatea ca varianţa de selecţie (a timpului necesar tipului de operaţii studiate) să depăşească 12 secunde?
R: Vom folosi P.25. Scriem succesiv

$$P(S_{25}^2 > 12) = P\Big(\frac{25-1}{3^2} S_{25}^2 > \frac{25-1}{3^2} \cdot 12\Big) = 1 - P\Big(\frac{24}{9} S_{25}^2 \leq 32\Big).$$

Dar $\frac{24}{9} S_{25}^2 \sim \chi^2(25-1)$ (cf. P.25)

$$\Longrightarrow P(S_{25}^2 > 12) = 1 - F_{\chi^2(24)}(32) = 1 - \texttt{chi2cdf}(32, 24) \approx 1 - 0.87301 = 0.12699\,.$$

■

Interval de încredere pentru varianţa (dispersia) $\sigma^2 = V(X)$ caracteristicii cercetate X

► se dau $\alpha \in (0, 1)$, datele statistice $x_1, \ldots, x_n$

► dacă $X \sim N(m, \sigma^2)$, atunci P.25 implică $\frac{n-1}{\sigma^2} S_n^2 \sim \chi^2(n-1)$

► cuantilele distribuţiei $\chi^2(n-1)$ (Chi-pătrat cu $n-1$ grade de libertate):
$c_{1-\frac{\alpha}{2}} = \texttt{chi2inv}(1-\frac{\alpha}{2}, n-1)$, $c_{\frac{\alpha}{2}} = \texttt{chi2inv}(\frac{\alpha}{2}, n-1)$, $c_{1-\alpha} = \texttt{chi2inv}(1-\alpha, n-1)$, $c_\alpha = \texttt{chi2inv}(\alpha, n-1)$

• un *interval de încredere bilateral* pentru varianţa teoretică $\sigma^2 = V(X)$ este: $\Big(\frac{n-1}{c_{1-\frac{\alpha}{2}}} \cdot S_n^2, \frac{n-1}{c_{\frac{\alpha}{2}}} \cdot S_n^2\Big)$, adică

$$P\Big(\frac{n-1}{c_{1-\frac{\alpha}{2}}} \cdot S_n^2 < \sigma^2 < \frac{n-1}{c_{\frac{\alpha}{2}}} \cdot S_n^2\Big) = 1 - \alpha$$

• *intervale de încredere unilaterale*: $\left(0, \frac{n-1}{c_\alpha} \cdot S_n^2\right)$, $\left(\frac{n-1}{c_{1-\alpha}} \cdot S_n^2, \infty\right)$, adică

$$P\left(\sigma^2 < \frac{n-1}{c_\alpha} \cdot S_n^2\right) = 1-\alpha, \quad P\left(\frac{n-1}{c_{1-\alpha}} \cdot S_n^2 < \sigma^2\right) = 1-\alpha.$$

Interval de încredere pentru **varianţa (dispersia) teoretică** $V(X)$	Expresia intervalului de încredere, folosind datele statistice
bilateral	$\left(\frac{n-1}{c_{1-\frac{\alpha}{2}}} \cdot s_n^2, \frac{n-1}{c_{\frac{\alpha}{2}}} \cdot s_n^2\right)$
unilateral	$\left(0\,, \frac{n-1}{c_\alpha} \cdot s_n^2\right)$
	$\left(\frac{n-1}{c_{1-\alpha}} \cdot s_n^2\,, \infty\right)$

Interval de încredere pentru **abaterea standard teoretică** $Std(X)$	Expresia intervalului de încredere, folosind datele statistice
bilateral	$\left(\sqrt{\frac{n-1}{c_{1-\frac{\alpha}{2}}}} \cdot s_n, \sqrt{\frac{n-1}{c_{\frac{\alpha}{2}}}} \cdot s_n\right)$
unilateral	$\left(0\,, \sqrt{\frac{n-1}{c_\alpha}} \cdot s_n\right)$
	$\left(\sqrt{\frac{n-1}{c_{1-\alpha}}} \cdot s_n\,, \infty\right)$

Exemplu: Durata de funcţionare a unui anumit tip de baterie este 500 de ore. Pe baza unui eşantion s-au testat 64 de baterii şi s-a obţinut media de 525 de ore şi abaterea standard de 25 de ore. Să se construiască un interval de încredere 99%
a) bilateral pentru media (teoretică);
b) unilateral pentru abaterea standard teoretică (care are marginea inferioară 0 şi se cere să se calculeze marginea superioară)
a duratei de funcţionare a acestui tip de baterii (se presupune că durata de funcţionare a acestui tip de baterie urmează distribuţia normală).
R.: a) Valoarea intervalului de încredere bilateral pentru media teoretică, când varianţa este necunoscută, este

$$\left(\bar{x}_n - \frac{s_n}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{x}_n + \frac{s_n}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

cu $\sqrt{n} = 8, \bar{x}_n = 525, s_n = 25, \alpha = 0.01, t_{1-\frac{\alpha}{2}} = \texttt{tinv}(0.995, 63) = 2.6561 \Longrightarrow$ valoarea intervalului de încredere bilateral pentru medie este $(516.7, 533.3)$.

b) Expresia intervalului de încredere unilateral pentru abaterea standard (teoretică) este $\left(0, \sqrt{\frac{n-1}{c_\alpha}} \cdot s_n\right)$, cu $n = 64, s_n = 25, \alpha = 0.01, c_\alpha = \texttt{chi2inv}(0.01, 63) = 39.8551 \Longrightarrow$ valoarea intervalului de încredere unilateral pentru abaterea standard este $(0, 31.432)$. ♣

Interval de încredere pentru proporţia necunoscută p, a caracteristicii cercetate $X \sim Bernoulli(p)$

▶ se dau $\alpha \in (0,1)$, datele statistice $x_1, \ldots, x_n \in \{0,1\}$

▶ construim intervale de încredere pentru parametrul *necunoscut* $p \in (0,1)$

▶ dacă $X \sim Bernoulli(p)$, atunci P. 22 implică $\dfrac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0,1)$ pentru n suficient de mare

▶ cuantilele legii normale $N(0,1)$:
$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \texttt{norminv}(1-\frac{\alpha}{2}, 0, 1)$, $z_{1-\alpha} = \texttt{norminv}(1-\alpha, 0, 1)$, $z_\alpha = \texttt{norminv}(\alpha, 0, 1)$

• *intervalul de încredere bilateral* pentru p:

$$\left(\bar{X}_n - \sqrt{\frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n}} \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}}\ ,\ \bar{X}_n + \sqrt{\frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n}} \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right),$$

adică

$$P\left(\bar{X}_n - \sqrt{\frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n}} \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}} < p < \bar{X}_n + \sqrt{\frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n}} \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

• *intervale de încredere unilaterale*: $\left(0\,, \bar{X}_n - \sqrt{\frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n}} \cdot z_\alpha\right)$,
$\left(\bar{X}_n - \sqrt{\frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n}} \cdot z_{1-\alpha}\ ,\ 1\right)$, adică

$$P\left(p < \bar{X}_n - \sqrt{\frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n}} \cdot z_\alpha\right) = 1-\alpha, \quad P\left(\bar{X}_n - \sqrt{\frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n}} \cdot z_{1-\alpha} < p\right) = 1-\alpha$$

Interval de încredere pentru **proporţia** p	Expresia intervalului de încredere, folosind datele statistice
bilateral	$\left(\bar{x}_n - \sqrt{\frac{\bar{x}_n(1-\bar{x}_n)}{n}} \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}}\ ,\ \bar{x}_n + \sqrt{\frac{\bar{x}_n(1-\bar{x}_n)}{n}} \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \cap (0,1)$
unilateral	$\left(0\ ,\bar{x}_n - \sqrt{\dfrac{\bar{x}_n(1-\bar{x}_n)}{n}} \cdot z_{\alpha}\right) \cap (0,1)$
	$\left(\bar{x}_n - \sqrt{\dfrac{\bar{x}_n(1-\bar{x}_n)}{n}} \cdot z_{1-\alpha}\ ,\ 1\right) \cap (0,1)$

Exemplul 1: $p\cdot$ 100% din populaţia unui oraş susţine un anumit candidat la alegerile viitoare, unde $p \in (0,1)$ este parametru necunoscut. S-a ales un eşantion aleatoriu de dimensiunea 2000 şi s-a determinat că 980 de persoane susţin candidatul. Construiţi un interval de încredere bilateral cu nivelul de încredere 95% pentru proporţia p necunoscută.
R.: Intervalul de încredere bilateral este

$$\left(\bar{x}_n - \sqrt{\frac{\bar{x}_n(1-\bar{x}_n)}{n}} \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}}\ ,\ \bar{x}_n + \sqrt{\frac{\bar{x}_n(1-\bar{x}_n)}{n}} \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \cap (0,1)\,,$$

unde $n = 2000, \alpha = 0.05, \bar{x}_n = 980/2000 = 0.49, z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \texttt{norminv}(1 - \frac{0.05}{2}, 0, 1) \approx 1.96\,.$
Valoarea intervalului de încredere bilateral este $(0.4678, 0.51212)\,.$ $\diamondsuit$

Teste statistice

Fie $x_1, \ldots, x_n$ datele statistice pentru caracteristica cercetată X, notăm cu $X_1, \ldots, X_n$ variabilele de selecţie corespunzătoare.
► Ipoteza statistică este o presupunere relativă la un parametru necunoscut θ
► Metoda de stabilire a veridicităţii unei ipoteze statistice se numeşte test (criteriu de verificare).
► Rezultatul testării se foloseşte apoi pentru luarea unor decizii (cum ar fi: eficienţa unor medicamente, strategii de marketing, alegerea unui produs etc.).
► Se formulează ipoteza nulă H_0 şi ipoteza alternativă H_1, privind parametrul θ; fie θ_0 o valoare dată

$$\text{I. } H_0 : \theta = \theta_0 \quad H_1 : \theta \neq \theta_0$$
$$\text{II. } H_0 : \theta \geq \theta_0 \quad H_1 : \theta < \theta_0$$
$$\text{III. } H_0 : \theta \leq \theta_0 \quad H_1 : \theta > \theta_0$$

Se dă $\alpha \in (0,1)$ nivelul de semnificaţie (probabilitatea de risc). Formularea unui test revine la construirea unei regiuni critice $U \subset \mathbb{R}^n$ (pentru cazurile I, II, respectiv III) astfel încât

$$P((X_1, \ldots, X_n) \in U | H_0) = \alpha$$

ceea ce este echivalent cu

$$P((X_1, \ldots, X_n) \notin U | H_0) = 1 - \alpha$$

Concluzia testului:
$(x_1, \ldots, x_n) \notin U \Rightarrow$ ipoteza H_0 este admisă
$(x_1, \ldots, x_n) \in U \Rightarrow$ ipoteza H_0 este respinsă, în favoarea ipotezei H_1

► O colectivitate este testată în raport cu caracteristica X.

- test pentru valoarea medie $E(X)$
  - ▷ când varianţa teoretică $V(X)$ este cunoscută: testul lui Gauss (testul Z)
  - ▷ când varianţa teoretică $V(X)$ este necunoscută: testul Student (testul T)
- test pentru abaterea standard teoretică $\sqrt{V(X)}$ sau pentru varianţa teoretică $V(X)$: testul χ^2
- test asupra proporţiei (test Gauss aproximativ)

Paşii în efectuarea unui test statistic:

- Care parametru se testează? Care test este potrivit?
- Care este ipoteza nulă H_0 şi care este ipoteza alternativă H_1?
- Care este nivelul de semnificaţie (probabilitatea de risc) α ?
- Calculul valorii estimatorului pe baza datelor statistice
- Concluzia testului

Test pentru media $m = E(X)$ caracteristicii cercetate X, când varianţa $\sigma^2 = V(X)$ este cunoscută (testul Z, testul Gauss)

► se dau $\alpha \in (0, 1)$, m_0, σ

► dacă $X \sim N(m, \sigma^2)$ sau $n > 30$ şi X are o distribuţie necunoscută, atunci P.22 şi P.23 implică $\dfrac{\bar{X}_n - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$

► folosind datele statistice $x_1, \ldots, x_n$, se calculează $z = \dfrac{\bar{x}_n - m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

► cuantilele legii normale $N(0, 1)$:
$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \texttt{norminv}(1 - \frac{\alpha}{2}, 0, 1)$, $z_{1-\alpha} = \texttt{norminv}(1 - \alpha, 0, 1)$, $z_\alpha = \texttt{norminv}(\alpha, 0, 1)$

	I. H_0: $m = m_0$ H_1: $m \neq m_0$	II.H_0: $m \geq m_0$ H_1: $m < m_0$	III. H_0: $m \leq m_0$ H_1: $m > m_0$
Se acceptă H_0 dacă	$\lvert z\rvert < z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$z > z_\alpha$	$z < z_{1-\alpha}$
Se respinge H_0 în favoarea lui H_1, dacă	$\lvert z\rvert \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$z \leq z_\alpha$	$z \geq z_{1-\alpha}$

▶ în Octave/Matlab: `ztest`

```
x=normrnd(0,1,1,1000);
[a1,~,a2]=ztest(x,0,1,'tail','both','alpha',0.01) % cazul I
[b1,~,b2]= ztest(x,0,1,'tail','left','alpha',0.01) % cazul II
[c1,~,c2]=ztest(x,0,1,'tail','right','alpha',0.01) % cazul III
```

Observaţie: 1) Testele statistice şi întervalele de încredere: Se observă că
I. $|z| < z_{1-\frac{\alpha}{2}} \Longleftrightarrow \bar{x}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}} < m_0 < \bar{x}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}}$, adică m_0 (valoarea testată) aparţine intervalului de încredere bilateral (se vedea tabelul de pe pg. 64) $\Longleftrightarrow$ se acceptă H_0
II. $z > z_\alpha \Longleftrightarrow m_0 < \bar{x}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z_\alpha$, adică m_0 (valoarea testată) aparţine intervalului de încredere unilateral (se vedea tabelul de pe pg. 64) $\Longleftrightarrow$ se acceptă H_0
III. $z < z_{1-\alpha} \Longleftrightarrow \bar{x}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z_{1-\alpha} < m_0$, adică m_0 (valoarea testată) aparţine intervalului de încredere unilateral (se vedea tabelul de pe pg. 64) $\Longleftrightarrow$ se acceptă H_0
2) *regiunea critică* $U \subset \mathbb{R}^n$ pentru testul mediei, când varianţa este cunoscută are următoarele expresii:

I. $U = \Big\{(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n : \Big|\dfrac{\bar{u}_n - m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\Big| \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\Big\}$, unde $\bar{u}_n = \dfrac{1}{n}\Big(u_1 + \cdots + u_n\Big)$

II. $U = \Big\{(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n : \dfrac{\bar{u}_n - m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z_\alpha\Big\}$

III. $U = \Big\{(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n : \dfrac{\bar{u}_n - m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq z_{1-\alpha}\Big\}$

Exemplu: Un profesor a înregistrat pe parcursul mai multor ani rezultatele elevilor săi. Calificativul unui elev este o v.a. cu valoarea între 1 şi 100, având abaterea standard egală cu 12. Actuala clasă are 36 de elevi şi media calificativelor lor este 73.2. Se poate afirma din punct de vedere statistic că media calificativelor din actuala clasă este egală cu 73.5? ($\alpha = 0.05$)
R.: Se efectuează testul:
H_0: $m = 73.5$, H_1: $m \neq 73.5$, testul Z (Gauss) pentru medie, când varianţa este cunoscută $\sigma^2 = 12^2$ (din textul problemei $\sigma = 12$).
Se calculează

$$z = \frac{\bar{x}_n - m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{73.2 - 73.5}{\frac{12}{\sqrt{36}}} = -0.15 \Longrightarrow |z| < z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \texttt{norminv}(1 - \tfrac{\alpha}{2}, 0, 1) = 1.96$$

$\Longrightarrow$ (pe baza datelor statistice) se acceptă H_0, adică se poate afirma pe baza datelor statistice, că media calificativelor din actuala clasă este egală cu 73.5 . ♠

Test pentru media $m = E(X)$ caracteristicii cercetate X, când varianţa $V(X)$ este necunoscută (Testul T, testul Student)

▶ se dau $\alpha \in (0, 1)$, m_0

▶ dacă $X \sim N(m, \sigma^2)$ sau $n > 30$ şi X are o distribuţie necunoscută, atunci $\dfrac{\bar{X}_n - m}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} \sim St(n-1)$

▶ folosind datele statistice $x_1, \ldots, x_n$ se calculează $t = \dfrac{\bar{x}_n - m_0}{\frac{s_n}{\sqrt{n}}}$

▶ cuantilele legii Student cu $n-1$ grade de libertate $St(n-1)$:
$t_{1-\frac{\alpha}{2}} = \texttt{tinv}(1 - \frac{\alpha}{2}, n-1)$, $t_{1-\alpha} = \texttt{tinv}(1-\alpha, n-1)$, $t_\alpha = \texttt{tinv}(\alpha, n-1)$

	I. H_0: $m = m_0$ H_1: $m \neq m_0$	II. H_0: $m \geq m_0$ H_1: $m < m_0$	III. H_0: $m \leq m_0$ H_1: $m > m_0$
Se acceptă H_0 dacă	$\|t\| < t_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$t > t_\alpha$	$t < t_{1-\alpha}$
Se respinge H_0 în favoarea lui H_1, dacă	$\|t\| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$t \leq t_\alpha$	$t \geq t_{1-\alpha}$

▶ în Octave/Matlab: `ttest`

```
x=normrnd(0,1,1,1000);
[a1,~,a2]=ttest(x,0,'tail','both','alpha',0.01) % cazul I
[b1,~,b2]=ttest(x,0,'tail','left','alpha',0.01) % cazul II
[c1,~,c2]=ttest(x,0,'tail','right','alpha',0.01) % cazul III
```

Observaţie: Se observă că
I. $|t| < t_{1-\frac{\alpha}{2}} \Longleftrightarrow \bar{x}_n - \frac{s_n}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}} < m_0 < \bar{x}_n + \frac{s_n}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}}$, adică m_0 (valoarea testată) aparţine intervalului de încredere bilateral (se vedea tabelul de pe pg. 65) $\Longleftrightarrow$ se acceptă H_0
II. $t > t_\alpha \Longleftrightarrow m_0 < \bar{x}_n - \frac{s_n}{\sqrt{n}} \cdot t_\alpha$, adică m_0 (valoarea testată) aparţine intervalului de încredere unilateral (se vedea tabelul de pe pg. 65) $\Longleftrightarrow$ se acceptă H_0
III. $t < t_{1-\alpha} \Longleftrightarrow \bar{x}_n - \frac{s_n}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\alpha} < m_0$, adică m_0 (valoarea testată) aparţine intervalului de încredere unilateral (se vedea tabelul de pe pg. 65) $\Longleftrightarrow$ se acceptă H_0

Exemplu: Specificaţiile unui anumit medicament indică faptul că fiecare comprimat conţine în medie 2.4 g de substanţă activă. 100 de comprimate alese la întâmplare din producţie sunt analizate şi se constată că ele conţin în medie 2.5 g de substanţă activă cu o deviaţie standard de 0.2 g. Se poate spune că medicamentul respectă specificaţiile (cu $\alpha = 0.01$)?
R.: H_0: $m = 2.4$ cu H_1: $m \neq 2.4$, testul Student. ♣

Test pentru varianţa $\sigma^2 = V(X)$ / abaterea standard $\sigma = \sqrt{V(X)}$ / a caracteristicii cercetate X

▶ se dau $\alpha \in (0,1)$, σ_0
▶ dacă $X \sim N(m, \sigma^2)$, atunci $\frac{n-1}{\sigma^2} S_n^2 \sim \chi^2(n-1)$
▶ folosind datele statistice $x_1, \ldots, x_n$ se calculează $c = \dfrac{n-1}{\sigma_0^2} \cdot s_n^2$
▶ cuantilele χ^2 (Chi-pătrat) cu $n-1$ grade de libertate:
$c_{1-\frac{\alpha}{2}} = \texttt{chi2inv}(1-\frac{\alpha}{2}, n-1)$, $c_{\frac{\alpha}{2}} = \texttt{chi2inv}(\frac{\alpha}{2}, n-1)$, $c_{1-\alpha} = \texttt{chi2inv}(1-\alpha, n-1)$, $c_\alpha = \texttt{chi2inv}(\alpha, n-1)$

	I. H_0: $\sigma = \sigma_0$ H_1: $\sigma \neq \sigma_0$	II. H_0: $\sigma \geq \sigma_0$ H_1: $\sigma < \sigma_0$	III. H_0: $\sigma \leq \sigma_0$ H_1: $\sigma > \sigma_0$
Se acceptă H_0, dacă	$c_{\frac{\alpha}{2}} < c < c_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$c > c_\alpha$	$c < c_{1-\alpha}$
Se respinge H_0 în favoarea lui H_1, dacă	$c \notin (c_{\frac{\alpha}{2}}, c_{1-\frac{\alpha}{2}})$	$c \leq c_\alpha$	$c \geq c_{1-\alpha}$

▶ în Matlab: `vartest`

```
x=normrnd(0,1,1,1000);
[a1,~,a2]=vartest(x,1,'tail','both','alpha',0.01) % cazul I
[b1,~,b2]=vartest(x,1,'tail','left','alpha',0.01) % cazul II
[c1,~,c2]=vartest(x,1,'tail','right','alpha',0.01) % cazul III
```

Observaţie: Se observă că
I. $c_{\frac{\alpha}{2}} < c < c_{1-\frac{\alpha}{2}} \Longleftrightarrow \sqrt{\frac{n-1}{c_{1-\frac{\alpha}{2}}}} \cdot s_n < \sigma_0 < \sqrt{\frac{n-1}{c_{\frac{\alpha}{2}}}} \cdot s_n$, adică σ_0 (valoarea testată) aparţine intervalului de încredere bilateral (se vedea tabelul de pe pg. 67) $\Longleftrightarrow$ se acceptă H_0
II. $c > c_\alpha \Longleftrightarrow \sigma_0 < \sqrt{\frac{n-1}{c_\alpha}} \cdot s_n$, adică σ_0 (valoarea testată) aparţine intervalului de încredere unilateral (se vedea tabelul de pe pg. 67) $\Longleftrightarrow$ se acceptă H_0

III. $c < c_{1-\alpha} \iff \sqrt{\frac{n-1}{c_{1-\alpha}}} \cdot s_n < \sigma_0$, adică σ_0 (valoarea testată) aparţine intervalului de încredere unilateral (se vedea tabelul de pe pg. 67) $\iff$ se acceptă H_0

Exemplu: Un manager este suspicios că un utilaj, care umple anumite cutii cu ceai, trebuie înlocuit cu unul mult mai precis. 121 de cutii cu ceai sunt cântărite. S-a obţinut o medie de 196.6 g şi o abatere standard de 2.09 g pentru acest eşantion.

a) Pe baza datelor statistice se poate afirma că abaterea standard a utilajului este de 2 g?

b) Sunt datele suficiente pentru a concluziona, că utilajul trebuie reglat pentru că nu pune (în medie) 200 g de ceai într-o cutie? ($\alpha = 0.01$)

Să se folosească metoda intervalelor de încredere pentru a obţine răspunsurile pentru aceste teste statistice.

R.: $n = 121$, $\bar{x}_n = 196.6$, $s_n = 2.09$, $\sigma_0 = 2$, $m_0 = 200$, $\alpha = 0.01$; vom folosi metoda intervalelor de încredere:

a) H_0: $\sigma = 2$ cu H_1: $\sigma \neq 2$, test pentru abaterea standard

$c_{1-\frac{\alpha}{2}} = \texttt{chi2inv}(1-\frac{\alpha}{2}, n-1)$, $c_{\frac{\alpha}{2}} = \texttt{chi2inv}(\frac{\alpha}{2}, n-1)$; calculăm valoarea intervalului de încredere pentru abaterea standard: $\left(\sqrt{\frac{n-1}{c_{1-\frac{\alpha}{2}}}} \cdot s_n, \sqrt{\frac{n-1}{c_{\frac{\alpha}{2}}}} \cdot s_n\right) = \big(1.764015, 2.464349\big)$; cum $\sigma_0 = 2$ aparţine acestui interval numeric, se acceptă H_0: se poate afirma că abaterea standard a utilajului este de 2 g.

b) H_0: $m = 200$ cu H_1: $m \neq 200$, testul Student

$t_{1-\frac{\alpha}{2}} = \texttt{tinv}(1-\frac{\alpha}{2}, n-1)$; calculăm valoarea intervalului de încredere pentru medie (când varianţa este necunoscută): $\left(\bar{x}_n - \frac{s_n}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{x}_n + \frac{s_n}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = (196.109828, 197.090172)$; cum $m_0 = 200$ nu aparţine acestui interval numeric se respinge H_0 în favoarea lui H_1. Utilajul trebuie reglat pentru că nu pune (în medie) 200 g de ceai într-o cutie! ♣

Test asupra proporţiei p pentru caracteristica $X \sim Bernoulli(p)$ (testul Gauss aproximativ)

► se dau $\alpha \in (0,1)$, p_0

► dacă $X \sim Bernoulli(p)$ şi $np(1-p) \geq 10$, atunci $\dfrac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0,1)$

► folosind datele statistice $x_1, \ldots, x_n$ se calculează $z = \dfrac{\bar{x}_n - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$; în plus,

se verifică $np_0(1-p_0) \geq 10$

► cuantilele legii normale $N(0,1)$:

$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \texttt{norminv}(1-\frac{\alpha}{2}, 0, 1)$, $z_{1-\alpha} = \texttt{norminv}(1-\alpha, 0, 1)$, $z_\alpha = \texttt{norminv}(\alpha, 0, 1)$

	I. H_0: $p = p_0$ H_1: $p \neq p_0$	II. H_0: $p \geq p_0$ H_1: $p < p_0$	III. H_0: $p \leq p_0$ H_1: $p > p_0$
Se acceptă H_0 dacă	$\|z\| < z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$z > z_\alpha$	$z < z_{1-\alpha}$
Se respinge H_0 în favoarea lui H_1, dacă	$\|z\| \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$z \leq z_\alpha$	$z \geq z_{1-\alpha}$

Observaţie: Se observă că

I. $|z| < z_{1-\frac{\alpha}{2}} \iff \bar{x}_n - \sqrt{\frac{\bar{x}_n(1-\bar{x}_n)}{n}} \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}} < p_0 < \bar{x}_n + \sqrt{\frac{\bar{x}_n(1-\bar{x}_n)}{n}} \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}}$, adică p_0 (valoarea testată) aparţine intervalului de încredere bilateral (se vedea tabelul de pe pg. 69) $\iff$ se acceptă H_0

II. $z > z_\alpha \iff p_0 < \bar{x}_n - \sqrt{\frac{\bar{x}_n(1-\bar{x}_n)}{n}} \cdot z_\alpha$, adică p_0 (valoarea testată) aparţine intervalului de încredere unilateral (se vedea tabelul de pe pg. 69) $\iff$ se acceptă H_0

III. $z < z_{1-\alpha} \iff \bar{x}_n - \sqrt{\frac{\bar{x}_n(1-\bar{x}_n)}{n}} \cdot z_{1-\alpha} < p_0$, adică m_0 (valoarea testată) aparţine intervalului de încredere unilateral (se vedea tabelul de pe pg. 69) $\iff$ se acceptă H_0

Exemplu: O monedă s-a aruncat de 100 de ori şi s-a obţinut de 61-de ori "pajură". Pe baza acestor informaţii se poate afirma că moneda este măsluită? Adică $p \neq 0.5$, unde p este probabilitatea cu care apare "pajură" la o aruncare. Se ia $\alpha = 0.05$.

R.: $n = 100, p_0 = 0.5 \Rightarrow np_0(1-p_0) = 100 \cdot 0.5 \cdot 0.5 \geq 10$

$H_0 : p = 0.5$, $H_1 : p \neq 0.5$, test pentru proporţia p

$$z = \frac{\bar{x}_n - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{\frac{61}{100} - 0.5}{\sqrt{\frac{0.5(1-0.5)}{100}}} = 2.2$$

$z > z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \mathtt{norminv}(1 - \frac{0.05}{2}, 0, 1) = 1.96 \implies H_0$ se respinge; pe baza datelor statistice se deduce că moneda este măsluită. ■

Test pentru independenţa a două caracteristici discrete X şi Y

▶ fie $\alpha \in (0,1)$ probabilitatea de risc

▶ fie X v.a., care are valorile posibile $\{a_1, \ldots, a_r\}$ şi Y v.a., care are valorile posibile $\{b_1, \ldots, b_s\}$

▶ se dau datele statistice (x_i, y_j), $i \in I_X, j \in I_Y$, corespunzătoare caracteristicii (X,Y) (I_X, I_Y sunt mulţimile de indici)

▶ fie (X_i, Y_j), $i \in I_X, j \in I_Y$, perechile de variabile de selecţie corespunzătoare caracteristicii (X,Y)

▶ ipoteza nulă şi ipoteza alternativă

$H_0 :$ X şi Y sunt independente $\qquad$ $H_1 :$ X şi Y nu sunt independente

▶ se consideră estimatorii şi valorile lor corespunzătoare

Estimatorul	Valoarea estimatorului
• $N_{ij} = \#\{(k,l) \in I_X \times I_Y : X_k = a_i \text{ şi } Y_l = b_j\}$	$n_{ij} = \#\{(k,l) \in I_X \times I_Y : x_k = a_i \text{ şi } y_l = b_j\}$
• $N_{i\cdot} := \sum_{j=1}^{s} N_{ij}$	$n_{i\cdot} := \sum_{j=1}^{s} n_{ij}$
• $N_{\cdot j} := \sum_{i=1}^{r} N_{ij}$	$n_{\cdot j} := \sum_{i=1}^{r} n_{ij}$
• $N := \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} N_{ij}$	$n := \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} n_{ij}$

▶ din punct de vedere teoretic are loc

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} \frac{\left(N_{ij} - \frac{N_{i\cdot}\cdot N_{\cdot j}}{N}\right)^2}{\frac{N_{i\cdot}\cdot N_{\cdot j}}{N}} \sim \chi^2((r-1)(s-1))$$

▶ practic, se calculează

$$x = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} \frac{\left(n_{ij} - \frac{n_{i\cdot}\cdot n_{\cdot j}}{n}\right)^2}{\frac{n_{i\cdot}\cdot n_{\cdot j}}{n}}$$

şi se determină cuantila de ordin $1-\alpha$ a distribuţiei $\chi^2((r-1)(s-1))$, adică

$$c_{1-\alpha} = chi2inv(1-\alpha, (r-1)(s-1))$$

▶ concluzia testului:

dacă $x < c_{1-\alpha}$**, atunci se acceptă** H_0

dacă $x \geq c_{1-\alpha}$**, atunci se respinge** H_0 **în favoarea lui** H_1.

Exemplu: Se dau datele statistice referitoare la preferinţele de vacanţă ale bărbaţilor (B) şi femeilor (F):

gen \ pref.	plajă	munte
B	209	280
F	225	248

. Sunt preferinţele de vacanţă independente de gen (B,F)? (pentru $\alpha =$ 0.05)

R.: test pentru independenţă; cele 2 caracteristici sunt

X: genul (valori posibile: *B*,*F*), $r = 2$;

Y: preferinţele de vacanţă (valori posibile: *plajă*, *munte*), $s = 2$.
$\triangleright$ din tabel avem: $n_{11} = 209, n_{12} = 280, n_{21} = 225, n_{22} = 248$
$\Rightarrow n_{1\cdot} = 489, n_{\cdot 1} = 434, n_{2\cdot} = 473, n_{\cdot 2} = 528, n = 962$

$$x = \frac{(209 - \frac{489\cdot 434}{962})^2}{\frac{489\cdot 434}{962}} + \frac{(280 - \frac{489\cdot 528}{962})^2}{\frac{489\cdot 528}{962}} + \frac{(225 - \frac{473\cdot 434}{962})^2}{\frac{473\cdot 434}{962}} + \frac{(248 - \frac{473\cdot 528}{962})^2}{\frac{473\cdot 528}{962}} \approx 2.2622$$

$\triangleright$ are loc $chi2inv(1 - 0.05, 1) = 3.8415 > x$, aşadar se acceptă ipoteza H_0, cele două caracteristici sunt independente, adică preferinţele de vacanţă nu depind de gen!

♣

Erori în efectuarea testelor statistice

$P($Eroare de tip I$) = P($se respinge $H_0 | H_0$ este adevărată$) = \alpha$
adică H_0 *este respinsă deşi este adevărată*
de exemplu: se trage concluzia că un tratament este ineficient pe baza unor interpretări greşite (deşi în realitate tratamentul este eficient)
$P($Eroare de tip II$) = P($se acceptă $H_0 | H_1$ este adevărată$) \overset{\text{notaţie}}{=} \beta$
adică H_0 *nu este respinsă deşi este falsă*
de exemplu: nu este respins un tratament ineficient (deşi în realitate tratamentul este ineficient);
Puterea unui test = $1 - \beta$= $1-$ probabilitatea apariţiei unei erori de tip II.

realitatea decizia	H_0 este adevărată	H_1 este adevărată
se respinge H_0	Eroare de tip I	decizie corectă
se acceptă H_0	decizie corectă	Eroare de tip II

Analogie cu procedurile penale (realitatea: acuzatul este vinovat/nevinovat; se ia decizia: acuzatul este vinovat/nevinovat)

acuzatul decizia	vinovat	nevinovat
acuzatul este nevinovat	Eroare de tip I	decizie corectă
acuzatul este vinovat	decizie corectă	Eroare de tip II