Seminarul 3

1. Un patron deţine 3 magazine, m_1, m_2, m_3, care au 50, 75, respectiv 100, de angajaţi, din care 50%, 60%, respectiv 70%, sunt femei. Patronul alege aleator un angajat pentru un bonus la salariu. Care este probabilitatea ca angajatul norocos să lucreze la magazinul m_3, ştiind că acesta este bărbat?

Rezolvare: $P(\text{“angajatul ales lucrează la } m_3\text{”}|\text{“angajatul ales este bărbat”}) = \frac{\frac{30}{225}}{\frac{25+30+30}{225}} = \frac{30}{85} = \frac{6}{17}$.

2. O persoană întârzie la serviciu într-o zi ploioasă cu probabilitatea 0,2, iar într-o zi senină cu probabilitatea 0,1. Conform prognozei meteo, în următoarea zi va ploua cu probabilitate 0,8. Care este probabilitatea ca:
a) persoana să ajungă ziua următoare la timp la serviciu?
b) ziua următoare să fie ploioasă, ştiind că persoana ajunge la timp la serviciu?

R: Fie I: “persoana întârzie la serviciu într-o zi” şi S:“ziua e senină”. a) Formula probabilităţii totale implică $P(\bar{I}) = P(\bar{I}|S)P(S) + P(\bar{I}|\bar{S})P(\bar{S}) = 0,9 \cdot 0,2 + 0,8 \cdot 0,8 = 0,82$; b) Formula lui Bayes implică $P(\bar{S}|\bar{I}) = \frac{P(\bar{I}|\bar{S})P(\bar{S})}{P(\bar{I})} = \frac{0,8 \cdot 0,8}{0,82} = \frac{32}{41}$.

3. Se aruncă un zar. Fie N numărul care a apărut. Apoi, zarul este aruncat de N ori. Care este probabilitatea ca N=3, ştiind că:
a) numerele obţinute în urma celor N aruncări sunt diferite?
b) numerele obţinute în urma celor N aruncări sunt egale?

R: Fie D: “numerele obţinute în urma celor N aruncări sunt diferite” şi E: “numerele obţinute în urma celor N aruncări sunt egale”. Formula lui Bayes implică: a) $P(N=3|D) = \frac{P(D|N=3)P(N=3)}{\sum_{i=1}^{6} P(D|N=i)P(N=i)} = \frac{\frac{A_6^3}{6^4}}{\sum_{i=1}^{6} \frac{A_6^i}{6^{i+1}}}$;
b) $P(N=3|E) = \frac{P(E|N=3)P(N=3)}{\sum_{i=1}^{6} P(E|N=i)P(N=i)} = \frac{\frac{1}{6^3}}{\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6^i}}$.

Observaţie: În rezolvarea de mai sus am considerat: $P(D|N=1) = P(E|N=1) = 1$.

• Modelul urnei cu r culori şi bilă returnată:

$$\begin{aligned} b(k_1,\ldots,k_r;n) &= \text{probabilitatea de a obţine } k_i \text{ bile cu culoarea } i,\ i=\overline{1,r}, \\ &\quad\ \text{din } n \text{ extrageri } \textit{cu returnarea} \text{ bilei extrase} \\ &= \frac{n!}{k_1!\ldots k_r!} \cdot p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{k_r}, \end{aligned}$$

unde p_i =probabilitatea de a extrage o bilă cu culoarea i, $i=\overline{1,r}$.
▷ cazul $r=2$ corespunde distribuţiei binomiale.

• Modelul urnei cu r culori şi bilă nereturnată:

$$\begin{aligned} p(k_1,\ldots,k_r;n) &= \text{probabilitatea de a obţine } k_i \text{ bile cu culoarea } i,\ i=\overline{1,r}, \\ &\quad\ \text{din } n \text{ extrageri } \textit{fără returnarea} \text{ bilei extrase} \\ &= \frac{C_{n_1}^{k_1} \cdot \ldots \cdot C_{n_r}^{k_r}}{C_{n_1+\ldots+n_r}^{n}}, \end{aligned}$$

unde n_i =numărul iniţial de bile cu culoarea i din urnă, $i=\overline{1,r}$.
▷ cazul $r=2$ corespunde distribuţiei hipergeometrice.

4. O persoană tastează aleator 11 litere minuscule pe o tastatură engleză. Care este probabilitatea ca literele tastate să poată fi permutate astfel încât să se obţină cuvântul *abracadabra*?
R: $\frac{11!}{5!2!1!1!2!} \frac{1}{26^{11}}$.

5. O echipă formată din 4 cercetători este aleasă aleator dintr-un grup de 4 matematicieni, 3 informaticieni şi 5 fizicieni. Care este probabilitatea ca echipa să fie formată din 2 matematicieni, 1 informatician şi 1 fizician?
R: $\frac{C_4^2 C_3^1 C_5^1}{C_{12}^4}$.

6. Într-un club sunt $4N$ persoane din 4 oraşe diferite, câte N din fiecare oraş ($N \in \mathbb{N}$, $N \geq 4$). Cinci persoane sunt alese aleator. Calculaţi probabilităţile următoarelor evenimente:
a) A: "exact 4 persoane din cele alese sunt din acelaşi oraş".
b) B: "3 persoane din cele alese sunt din acelaşi oraş, iar celelalte 2 sunt dintr-un alt oraş".
c) C: "3 persoane din cele alese sunt din acelaşi oraş, iar fiecare din celelalte 2 persoane este dintr-un oraş diferit de al celorlalte persoane alese".
R: a) $A_4^2 \cdot \frac{C_N^4 C_N^1 C_N^0 C_N^0}{C_{4N}^5}$; b) $A_4^2 \cdot \frac{C_N^3 C_N^2 C_N^0 C_N^0}{C_{4N}^5}$; c) $\frac{A_4^3}{2} \cdot \frac{C_N^3 C_N^1 C_N^1 C_N^0}{C_{4N}^5}$.

Temă:

1) O persoană are în buzunar 2 zaruri roşii şi 3 zaruri albastre, dintre care alege aleator unul. Dacă a ales un zar roşu, atunci aruncă zarul ales de 3 ori, iar dacă a ales un zar albastru, atunci aruncă zarul ales de 2 ori. Calculaţi probabilitatea ca suma punctelor obţinute în urma aruncărilor să fie 10.

2) Un zar este aruncat de cinci ori. Calculaţi probabilităţile următoarelor evenimente:
a) A:"exact două numere sunt pare."
b) B:"1 apare de două ori, 3 apare o dată şi 6 apare de două ori."
c) C: "exact două numere sunt prime, un număr este egal cu 1, iar celelalte două sunt egale cu 4".