Probleme recapitulative PS (pentru examenul scris) - soluţii

Pentru determinarea cuantilelor din problemele de statistică se foloseşte programul Octave!

1. Se consideră vectorul aleator discret (U, V) cu distribuţia dată sub formă tabelară:

$U \backslash V$	-1	1	b
1	0,25	0,05	a
3	0,3	a	0,1

a) Să se determine constantele reale a şi b, ştiind că $E(V) = 0{,}15$.
b) Sunt variabilele aleatoare U şi V independente?
c) Să se calculeze valoarea medie a variabilei aleatoare $(U-3)^2$.

R: a) $2a + 0{,}4 + 0{,}3 = 1 \Rightarrow a = 0{,}15$; $P(V=-1) = 0{,}55$, $P(V=1) = 0{,}2$, $P(V=b) = 0{,}25$,
$E(V) = -0{,}55 + 0{,}2 + b \cdot 0{,}25 = 0{,}15 \Rightarrow b = 2$.
b) $P(U=1) = 0{,}45$, $P(V=1) = 0{,}2$, $P(U=1, V=1) = 0{,}05$
$\Rightarrow P(U=1) \cdot P(V=1) \neq P(U=1, V=1)$ pentru că $0{,}09 \neq 0{,}05$
c) $P(U=1) = 0{,}45$; $P(U=3) = 0{,}55 \Rightarrow E((U-3)^2) = 0{,}45 \cdot 4 = 1{,}8$.

2. Probabilitatea ca un anumit tip de cip să fie defect este 0.06. O componentă pentru calculator are instalate 12 astfel de cipuri. Componenta este funcţională dacă 11 sau mai multe dintre cipuri sunt operaţionale.

(1) Calculaţi probabilitatea ca

(1a) 12 astfel de cipuri să fie funcţionale;

(1b) componenta să fie funcţională.

(2) Dacă un calculator are instalate 4 astfel de componente, care este probabilitatea ca cel puţin 3 dintre ele să fie funcţionale?

(3) Dacă 3 astfel de componente sunt instalate pe un calculator, care este probabilitatea ca în total mai mult de 30 de chipuri să fie funcţionale?

R: (1): (1a) $(0.94)^{12}$; (1b) $p = C_{12}^{11}(0.94)^{11}0.06 + (0.94)^{12}$; (2) $C_4^3 p^3(1-p) + p^4$;
(3) $\sum\limits_{i=31}^{36} C_{36}^i (0.94)^i (0.06)^{36-i}$.

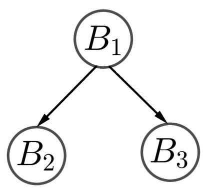
3. Timpul de reacţie (în secunde) al unui proces chimic este o variabilă aleatoare, notată cu X, care are funcţia de densitate $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3a^3}{x^4}, & x > a \\ 0, & x \leq a \end{cases} \quad \text{unde } a > 0 \text{ este parametru necunoscut.}$$

Să se calculeze $P(X \leq 2a)$ şi $E(X)$ în funcţie de a.

R: $P(X \leq 2a) = \displaystyle\int_a^{2a} \frac{3a^3}{x^4} dx = -\frac{a^3}{x^3}\Big|_a^{2a} = \frac{7}{8}$; $E(X) = \frac{3a}{2}$.

4. Un cod binar format din trei biţi $B_3 B_2 B_1$ este generat conform reţelei Bayes reprezentate alăturat cu următoarele probabilităţi: $P(B_1 = 1) = 0{,}4$; $P(B_2 = 1 | B_1 = 1) = P(B_3 = 0 | B_1 = 1) = 0{,}2$; $P(B_2 = 0 | B_1 = 0) = P(B_3 = 1 | B_1 = 0) = 0{,}3$.
Determinaţi: **a)** probabilitatea ca toţi biţii să fie egali; **b)** valoarea medie a fiecărui bit; **c)** distribuţia produsului $B_1 \cdot B_2 \cdot B_3$; **d)** valoarea medie a codului trecut în baza 10.



R: a) $P(B_1 = B_2 = B_3 = 1) + P(B_1 = B_2 = B_3 = 0) = 0{,}4 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 + 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}064 + 0{,}126 = 0{,}19$. b) $E(B_1) = 0{,}4$; $E(B_2) = P(B_2 = 1) = 0{,}4 \cdot 0{,}2 + 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}5$; $E(B_3) = P(B_3 = 1) = 0{,}4 \cdot 0{,}8 + 0{,}6 \cdot 0{,}3 = 0{,}5$. c) $P(B_1 \cdot B_2 \cdot B_3 = 1) = 0{,}4 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}064$; $P(B_1 \cdot B_2 \cdot B_3 = 0) = 0{,}936$. d) $E(2^2 B_3 + 2^1 B_2 + 2^0 B_1) = 4E(B_3) + 2E(B_2) + E(B_1) = 3{,}4$.

5. Fie X v.a. care indică timpul de restartare al unui anumit sistem şi are funcţia de densitate $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_X(t) = \begin{cases} c\,(3-t)^2, & 0 < t < 3 \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

a) Determinaţi valoarea constantei c.

b) Determinaţi funcţia de repartiţie F_X.

c) Determinaţi $P(1 < X < 2)$ şi $P(X < 2|X > 1)$.

R: a) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)dt = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{9}$.
b)

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^3}{27} - \frac{x^2}{3} + x, & 0 \leq x < 3 \\ 1, & 3 \leq x. \end{cases}$$

c) $P(1 \leq X \leq 2) = F_X(2) - F_X(1) = \frac{7}{27}$

$$P(X < 2|X > 1) = \frac{P(1 \leq X < 2)}{P(X > 1)} = \frac{F_X(2) - F_X(1)}{1 - F_X(1)} = \frac{7}{8}.$$

6. Într-o urnă sunt 4 bile verzi, 5 bile albastre, 6 bile roşii. Se extrag fără returnare 3 bile. Care este probabilitatea ca la extragerea a doua să se obţină o bilă verde şi la extragerea a treia o bilă roşie?

Pentru $i \in \{1, 2, 3\}$ considerăm:
V_i:"se obţine o bilă verde în extragerea a i-a"; A_i:"se obţine o bilă albastră în extragerea a i-a"; R_i:"se obţine o bilă roşie în extragerea a i-a".
Are loc: $B_1 \cup G_1 \cup R_1 = \Omega$; scriem succesiv

$$\begin{aligned} P(V_2 \cap R_3) &= P(V_1 \cap V_2 \cap R_3) + P(A_1 \cap V_2 \cap R_3) + P(R_1 \cap V_2 \cap R_3) \\ &= P(V_1)P(V_2|V_1)P(R_3|V_1 \cap V_2) + P(A_1)P(V_2|A_1)P(R_3|A_1 \cap V_2) + P(R_1)P(V_2|R_1)P(R_3|R_1 \cap V_2) \\ &= \frac{4}{15} \cdot \frac{3}{14} \cdot \frac{6}{13} + \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{6}{13} + \frac{6}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{5}{13} \approx 0{,}11428. \end{aligned}$$

7. 5 bile numerotate consecutiv de la 1 la 5 sunt aşezate orizontal în mod aleator. Determinaţi:
a) probabilitatea ca prima şi ultima bilă să aibe numere pare;
b) probabilitatea ca primele două bile să aibe numere impare;
c) probabilitatea ca bilele cu numere pare să fie alăturate;
d) probabilitatea să nu fie două bile cu numere de aceaşi paritate alăturate.

R: a) $\frac{2! \cdot 3!}{5!} = \frac{1}{10}$.
b) $\frac{A_3^2 \cdot 3!}{5!} = \frac{3}{10}$.
c) $\frac{2 \cdot 4 \cdot 3!}{5!} = \frac{2}{5}$.
d) $\frac{2! \cdot 3!}{5!} = \frac{1}{10}$.

8. Un cod de 5 cifre este generat aleator. Care este probabilitatea ca
a) toate cifrele să fie distincte?
b) să conţină doar cifre pare distincte?
c) exact 3 cifre să fie egale?
d) să conţină doar cifrele 1, 2, 3 (de exemplu: 12131, 22113, 31312, etc.)?

R: a) $\frac{A_{10}^5}{10^5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{100000}$.
b) $\frac{5!}{10^5}$.
c) $\frac{C_5^3 \cdot 10 \cdot 9^2}{10^5} = \frac{81}{1000}$.
d) $\frac{\frac{5!}{3!1!1!} \cdot 3 + \frac{5!}{2!2!1!} \cdot 3}{10^5} = \frac{60+90}{1000} = \frac{3}{20} = 0{,}15$.

9. Se dau două urne. Prima urnă conţine 2 bile negre şi 3 bile roşii. A doua urnă conţine 3 bile negre şi 2 bile roşii. Se aruncă un zar. Dacă se obţine un număr par, atunci se extrag două bile din prima urnă, cu repunerea bilei extrase în urnă. Dacă se obţine un număr impar, atunci se extrag două bile din a doua urnă, fără repunerea bilei extrase în urnă. Fie X variabila aleatoare care indică numărul de bile roşii extrase. Determinaţi:
a) distribuţia lui X;

b) valoarea medie lui X;
c) funcţia de repartiţie a lui X;
d) valoarea medie a numărului de repetiţii independente ale experimentului descris mai sus până la prima repetiţie a experimentului în urma căreia se obţin două bile roşii.

R: a) Folosind modelul urnei cu două culori şi bilă returnată, respectiv nereturnată (distribuţia binomială, respectiv hipergeometrică) şi formula probabilităţii totale, se obţine: $P(X=k)=\frac{3}{6}\cdot C_2^k\left(\frac{3}{5}\right)^k\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{2-k}+\frac{3}{6}\cdot\frac{C_2^kC_3^{2-k}}{C_5^2}, k=0,1,2.$
Deci, $X\sim\begin{pmatrix}0&1&2\\\frac{23}{100}&\frac{54}{100}&\frac{23}{100}\end{pmatrix}$.
b) $E(X)=0\cdot\frac{23}{100}+1\cdot\frac{54}{100}+2\cdot\frac{23}{100}=1.$
c) $F_X(x)=P(X\le x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{23}{100}, & x\in[0,1)\\ \frac{23}{100}+\frac{54}{100}, & x\in[1,2)\\ \frac{23}{100}+\frac{54}{100}+\frac{23}{100}, & x\ge 2\end{cases}=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{23}{100}, & x\in[0,1)\\ \frac{77}{100}, & x\in[1,2)\\ 1, & x\ge 2\end{cases}.$
d) Fie Y=numărul de repetiţii independente ale experimentului până la prima repetiţie în urma căreia se obţin două bile roşii. Atunci $Y\sim Geo(p)$, unde $p=P(X=2)=\frac{23}{100}$. Avem (a se vedea Seminarul 3): $E(Y)=\frac{1-p}{p}=\frac{77}{23}\approx 3{,}35$.

10. Icsulescu face naveta cu microbusul. El ajunge în fiecare zi în autogară la ora 16:30 cu o întârziere T (în minute) care are funcţia de repartiţie $F_T(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \frac{t}{10}, & t\in[0,10]\\ 1, & t>10\end{cases}$. Microbusul porneşte la ora 16:39. Determinaţi:
a) probabilitatea ca Icsulescu să piardă microbusul;
b) valoarea medie a întârzierii lui Icsulescu;
c) probabilitatea ca în 5 zile (cu întârzieri independente) Icsulescu să piardă microbuzul în cel puţin două zile.
d) Fie Y numărul de zile succesive (cu întârzieri independente) când Icsulescu prinde microbusul până la prima zi când pierde microbusul. Ce distribuţie are Y?

R: a) $P(T\ge 9)=1-F(9)=1-\frac{9}{10}=\frac{1}{10}$. b) $f_T(t)=\begin{cases}\frac{1}{10}, & t\in[0,10]\\ 0, & t\notin[0,10]\end{cases}$. $E(T)=\int_0^{10}\frac{t}{10}dt=5$. c) Z=numărul de zile din 5 când Icsulescu pierde microbusul $\Longrightarrow$ $Z\sim Bino(5,p)$. $P(Z\ge 2)=1-P(Z=0)-P(Z=1)=1-C_5^0p^0(1-p)^5-C_5^1p^1(1-p)^4=1-\frac{9^5}{10^5}-5\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{9^4}{10^4}=0.08146\approx 8\%$. d) $Y\sim Geo(p), p=P(T\ge 9)=\frac{1}{10}$.

11. Se alege uniform aleator un punct în dreptunghiul $[1,2]\times[2,4]\subset\mathbb{R}^2$. Să se calculeze:
a) probabilitatea ca punctul să fie în dreptunghiul $\left[\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right]\times\left[\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right]$;
b) valoarea medie a pătratului distanţei de la punctul ales la origine.
Fie (X,Y) coordonatele punctului ales. Atunci (X,Y) are distribuţia uniformă pe dreptunghiul $[1,2]\times[2,4]$, adică are funcţia de densitate: $f_{(X,Y)}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{(2-1)(4-2)}, & (x,y)\in[1,2]\times[2,4]\\ 0, & (x,y)\notin[1,2]\times[2,4]\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2}, & (x,y)\in[1,2]\times[2,4]\\ 0, & (x,y)\notin[1,2]\times[2,4]\end{cases}.$

R: X are funcţia de densitate $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{(X,Y)}(x,y)dy=\begin{cases}1, & x\in[1,2]\\ 0, & x\notin[1,2]\end{cases}$ şi Y are funcţia de densitate $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{(X,Y)}(x,y)dx=\begin{cases}\frac{1}{2}, & y\in[2,4]\\ 0, & y\notin[2,4]\end{cases}$; adică $X\sim Unif[1,2]$ şi $Y\sim Unif[2,4]$.
a) $P\left((X,Y)\in\left[\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right]\times\left[\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right]\right)=\iint_{\left[\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right]\times\left[\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right]}f_{(X,Y)}(x,y)\,dxdy=\iint_{\left[\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right]\times\left[\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right]}\frac{1}{2}\,dxdy=\frac{1}{6}.$
b) $E(X^2+Y^2)=E(X^2)+E(Y^2)=\int_1^2x^2\frac{1}{2-1}dx+\int_2^4y^2\frac{1}{4-2}dy=\frac{x^3}{3}\Big|_1^2+\frac{y^3}{3\cdot 2}\Big|_2^4=\frac{7}{3}+\frac{28}{3}=\frac{35}{3}.$

12. Fie $N\sim Unid(5)$. Se generează apoi un cod binar cu N cifre, în care probabilitatea de apariţie a lui 0, respectiv 1, este egală cu 0,5 (de exemplu: $N=2, X=01; N=3, X=010; N=1, X=1$). Să se calculeze:
a) $P(X=1011|N=4)$;
b) probabilitatea ca suma S, a cifrelor lui X, să fie egală cu 3.

R: a) $P(X=1011|N=4)=\dfrac{P(\{X=1011\}\cap\{N=4\})}{P(N=4)}=\dfrac{P(\{X=1011\})}{P(N=4)}=\dfrac{\frac{1}{2^4}}{\frac{1}{5}}=\dfrac{5}{2^4}.$

b) $P(S=3)=\displaystyle\sum_{i=1}^{5}P(S=3|N=i)P(N=i)=\frac{1}{5}\sum_{i=3}^{5}\frac{C_i^3}{2^i}.$

13. Departamentul de resurse umane al unei companii mari suspectează că angajaţii iau în medie pauza de prânz (care cf. contractului durează maxim 1 oră) mult mai lungă. Pe baza unui eşantion format din 36 de angajaţi s-a obţinut o medie de 70 minute şi o abatere standard de 15 minute pentru durata pauzei. Formulaţi ipoteza nulă şi ipoteza alternativă şi testaţi cu un nivelul de semnificaţie de 5% dacă în medie durata pauzei este respectată sau este depăşită. Construiţi un interval de încredere bilateral pentru abaterea standard a duratei pauzei de prânz.

R: Test pentru medie când varianţa este necunoscută (testul Student); $m_0=60, n=36; \bar{x}_n=70, s_n=15, \alpha=0.05, t_{1-\alpha}=\texttt{tinv}(0.95,35)=1.69,$

$H_0: m\leq 60,\ H_1: m>60,\ t=\dfrac{\bar{x}_n-m_0}{\frac{s_n}{\sqrt{n}}}=4>t_{1-\alpha}=1.69$

$\Longrightarrow H_0$ este respinsă $\Longrightarrow$ în medie durata pauzei nu este respectată.

Intervalul de încredere bilateral pentru abaterea standard a duratei pauzei de prânz este

$$\left(\sqrt{\frac{n-1}{c_{1-\frac{\alpha}{2}}}}\cdot s_n, \sqrt{\frac{n-1}{c_{\frac{\alpha}{2}}}}\cdot s_n\right)=\left(\sqrt{\frac{35}{53.20}}\cdot 15, \sqrt{\frac{35}{20.57}}\cdot 15\right)\approx(12.17, 19.57).$$

14. Fie $x_1,\ldots,x_{10}\in(0,1)$ date statistice pentru caracteristica X, a cărei funcţie de densitate este $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases}2\theta x^{2\theta-1}, \text{dacă } 0<x\leq 1\\ 0, \text{dacă } x\notin(0,1]\end{cases},$$

unde $\theta>0$ este parametru necunoscut. Să se estimeze θ cu ajutorul a) metodei verosimilităţii maxime; b) metodei momentelor.

R: a) Scriem funcţia de verosimilitate

$$L(x_1,...,x_{10};\theta)=f(x_1)\cdot...\cdot f(x_{10})=2^{10}\theta^{10}(x_1\cdot...\cdot x_{10})^{2\theta-1}$$

Proprietăţile funcţiei ln: $\ln(a\cdot b)=\ln(a)\cdot\ln(b)$, $\ln(\frac{a}{b})=\frac{\ln(a)}{\ln(b)}, \ln(a^b)=b\ln(a), a,b>0, \ln(e)=1, \ln(1)=0.$

$$\Rightarrow \ln L(x_1,...,x_{10};\theta)=10\ln(2)+10\ln(\theta)+(2\theta-1)\ln(x_1\cdot...\cdot x_{10})$$

$$\Rightarrow\frac{\partial\ln L}{\partial\theta}=\frac{10}{\theta}+2\ln(x_1\cdot...\cdot x_{10})\Rightarrow\frac{\partial^2\ln L}{\partial\theta^2}=-\frac{10}{\theta^2}<0$$

$$\Rightarrow\hat{\theta}(x_1,...,x_{10})=-\frac{10}{2\ln(x_1\cdot...\cdot x_{10})}=-\frac{5}{\ln(x_1\cdot...\cdot x_{10})}.$$

b) Calculăm $E(X)=\frac{2\theta}{2\theta+1}$. Scriem $\dfrac{2\theta}{2\theta+1}=\dfrac{1}{10}(X_1+...+X_{10})$, unde $X_1,...,X_{10}$ sunt variabile de selecţie pentru caracteristica X. Obţinem estimatorul $\hat{\theta}(X_1,...,X_{10})=\dfrac{\bar{X}_{10}}{2(1-\bar{X}_{10})}$ şi valoarea estimată pentru parametrul necunoscut θ: $\hat{\theta}(x_1,...,x_{10})=\dfrac{\bar{x}_{10}}{2(1-\bar{x}_{10})}.$

15. Fie X_1,...,X_n, ... variabile aleatoare independente, care au aceeaşi distribuţie

$$P(X_i=-1)=P(X_i=1)=0.5 \text{ pentru fiecare } i\in\mathbb{N}^*.$$

Fie $Y_i=\max\{X_i,X_{i+1}\}$ pentru $1\leq i\leq n-1$.

(a) Să se determine distribuţia de probabilitate pentru Y_i, $1\leq i\leq n-1$.

(b) Să se calculeze valoarea medie şi varianţa pentru Y_i, $1\leq i\leq n-1$.

(c) Fie $Z_n=\frac{1}{n}(X_1^3+X_2^3+...+X_n^3)$, $n\in\mathbb{N}^*$. Spre ce valoare converge aproape sigur şirul $(Z_n)_n$?

R: (a) X_i şi X_{i+1} sunt variabile aleatoare independente

$$\Longrightarrow P(Y_i=-1)=P(\max\{X_i,X_{i+1}\}=-1)=P(X_i=-1,X_{i+1}=-1)=P(X_i=-1)P(X_{i+1}=-1)=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow P(Y_i=1)=\frac{3}{4}.$$

$$\Rightarrow Y_i\sim\begin{pmatrix}-1 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix},\ \forall\ i=\overline{1,n-1}.$$

(b) $E(Y_i)=\frac{1}{2}, V(Y_i)=\frac{3}{4}$.
(c) Se foloseţe legea numerelor mari pentru şirul $(X_n^3)_n$

$$\Longrightarrow Z_n=\frac{1}{n}(X_1^3+X_2^3+...+X_n^3)\xrightarrow{a.s.}E(X_1^3)=0.$$

16. Timpul de servire a unui client la un anumit ghişeu la o bancă durează în medie 10 minute şi poate fi descrisă de o variabilă aleatoare exponenţială.

(a) Cu ce probabilitate servirea unui client durează cel mult un sfert de oră?

(b) În medie cât ar trebui să dureze timpul de servire a unui client, dacă probabilitatea ca timpul de servire a unui client să fie mai mare decât un sfert de oră este egală cu 0.1?

Indicaţie: Funcţia de densitate a distribuţiei exponenţiale $X\sim Exp(\lambda)$ este

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & :x>0\\ 0 & :x\leq 0.\end{cases}$$

R: (a) Calculăm valoarea medie $E(X)=\frac{1}{\lambda}$ şi din $E(X)=10$ rezultă $\lambda=\frac{1}{10}$. Are loc $P(X\leq 15)=\int_0^{15}\lambda e^{-\lambda t}dt=1-e^{-\lambda\cdot 15}=1-e^{-1.5}$.
(b) $E(X)=\frac{1}{\lambda}=?$ astfel încât $P(X>15)=0.1$. Scriem $e^{-\lambda\cdot 15}=0.1\Longrightarrow E(X)=\frac{1}{\lambda}=\frac{15}{\ln(10)}$.

17. a) Fie X variabila aleatoare care indică de câte ori a apărut numărul 1 la 3 aruncări ale unui zar. Să se calculeze $E(X)$. b) Dacă se aruncă de 432 ori trei zaruri, de câte ori apare *în medie* tripletul (1,1,1)?

R: a)

$$X\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ \frac{5^3}{6^3} & \frac{3\cdot 5^2}{6^3} & \frac{3\cdot 5}{6^3} & \frac{1}{6^3}\end{pmatrix}\Longrightarrow E(X)=\frac{0\cdot 5^3}{6^3}+\frac{1\cdot 3\cdot 5^2}{6^3}+\frac{2\cdot 3\cdot 5}{6^3}+\frac{3\cdot 1}{6^3}=\frac{1}{2}.$$

Se mai poate observa, că $X\sim Bino(3,\frac{1}{6})\Longrightarrow E(X)=3\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$.
b) Fie Y variabila aleatoare, care indică de câte ori a apărut tripletul (1,1,1) la 432 aruncări a trei zaruri.
Metoda 1: $\Longrightarrow Y\sim Bino\left(432,\frac{1}{6^3}\right)\Longrightarrow\ E(Y)=432\cdot\frac{1}{6^3}=2.$
Metoda 2: Pentru $i\in\{1,\ldots,432\}$ fie Z_i variabila aleatoare, care indică dacă $(1,1,1)$ a apărut sau nu, la a i-a aruncare a trei zaruri $\Longrightarrow Z_i\sim Bernoulli(\frac{1}{6^3})$. Are loc $Y=Z_1+\cdots+Z_{432}\Longrightarrow\ E(Y)=E(Z_1)+\cdots+E(Z_{432})=432\cdot\frac{1}{6^3}=2$.

18. Se studiază caracteristica: timpul de producţie a unui anumit produs. Această caracteristică se presupune a fi normal distribuită şi s-a realizat un eşantion cu 25 de valori (în minute). Pe baza acestora s-a obţinut o valoare medie de 8.1 minute şi o abatere standard de 1.6 minute. Cu un nivel de semnificaţie $\alpha=0.05$, testaţi dacă se poate afirma: a) abaterea standard a timpului de prelucrare este 1.5 minute ; b) media timpului de prelucrare este 7.8 minute.

R: a) H_0: $\sigma = 1.5$, H_1: $\sigma \neq 1.5$

$n = 25, \sigma_0 = 1.5, s_{25} = 1.6, \alpha = 0.05, q = \dfrac{n-1}{\sigma_0^2} \cdot s_n^2 = \dfrac{24}{1.5^2} \cdot 1.6^2 = 21.094$, $q_{0.975} = \texttt{chi2inv}(0.975, 24) = 39.3641$, $q_{0.025} = \texttt{chi2inv}(0.025, 24) = 12.4012 \Longrightarrow$ H_0 se acceptă, adică abaterea standard a timpului de prelucrare este 1.5 minute.

b) H_0: $m = 7.8$, H_1: $m \neq 7.8$

$n = 25, \sigma_0 = 7.8, \bar{x}_{25} = 8.1$, $s_{25} = 1.6, \alpha = 0.05, t = \dfrac{\bar{x}_n - m_0}{\frac{s_n}{\sqrt{n}}} = 0.93750, t_{0.975} = \texttt{tinv}(0.975, 24) = 2.0639 \Longrightarrow$ H_0 se acceptă, adică media timpului de prelucrare este 7.8 minute.