Seminar 5

1. Justificati afirmatiile
   i) $\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star$

   ii) Sirul $c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$ este convergent.

2. Determinati multimea punctelor de acumulare A' pentru
   a) $A = \left\{ \frac{1}{2^n} \middle| \, n \in \mathbb{N} \right\}$
   b) $A = \mathbb{Q}$

3. Verificati daca functiile urmatoare isi ating valorile extreme si determinati aceste valori
   a) $f : (-1,1) \to \mathbb{R} \quad f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$
   b) $f : [0,1] \to \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , x = 0 \\ x & , x \in (0,1] \end{cases}$
   c) $f : [-1,1] \to \mathbb{R} \quad f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

4. (**caracterizarea monotoniei cu ajutorul derivatei**) Fie $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ o functie derivabila pe (a,b). Au loc afirmatiile
   a) f este crescatoare pe $(a,b) \iff f'(x) \geq 0, \forall x \in (a,b)$
   b) f este decrescatoare pe $(a,b) \iff f'(x) \leq 0, \forall x \in (a,b)$
   c) Daca $f'(x) > 0, \forall x \in (a,b) \implies$ f este strict crescatoare pe (a,b)
   d) Daca $f'(x) < 0, \forall x \in (a,b) \implies$ f este strict descrescatoare pe (a,b)
In general, reciprocele afirmatiilor c) si d) nu sunt adevarate. Justificati.

5. Determinati punctele de extrem local ale functiilor de la exercitiul 3.

6. Folosind regula lui l'Hopital, calculati limitele
   a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\mathrm{e} - (1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$

   b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^\alpha}{\mathrm{e}^x}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

Regula lui l'Hopital. Fie $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, $V \subseteq \mathbb{R}$ o vecinatate a lui x_0 si $f, g : V \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ doua functii avand proprietatile:
   i) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ (sau $+\infty$)
   ii) f, g sunt derivabile pe $V \setminus \{x_0\}$
   iii) $g'(x) \neq 0, \forall x \in V \setminus \{x_0\}$
   iv) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$
atunci $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

Exercitii suplimentare

1. Determinati multimea punctelor de acumulare A' pentru
   a) $A = \left\{ \frac{n!}{3^n} \middle| \, n \in \mathbb{N} \right\}$
   b) $A = (0, 1) \setminus \mathbb{Q}$

2. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ si $f : A \to A$ o functie avand urmatoarele proprietati
   i) f este derivabila pe A
   ii) $\exists\, q < 1$ astfel incat $|f'(x)| \leq q$, $\forall x \in A$
   iii) $\exists\, a \in A$ astfel incat $f(a) = a$

Aratati ca sirul definit recursiv prin $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in A$ este convergent si are limita a.

3. Determinati punctele de extrem local si valorile extreme ale functiilor
   a) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R} \quad f(x) = |x|\,(1 - x)$
   b) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{|\ln x|}{\sqrt{x}}$

4. Folosind regula lui l'Hopital, calculati limitele
   a) $\lim\limits_{x \searrow 0} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$
   b) $\lim\limits_{x \searrow 0} x^{\alpha} \ln(\sin x), \quad \alpha > 0$