Subiectul 1

Problema 1 *Polinoamele ortogonale pe $\mathbb{R}$ în raport cu ponderea $w(t) = |t|^{2\mu} e^{-t^2}$, $\mu > -\frac{1}{2}$ au coeficienţii din relaţia de recurenţă sunt $\alpha_k = 0$, $\beta_0 = \Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right)$ şi*

$$\beta_k = \begin{cases} \frac{1}{2}k, & \text{pentru } k \text{ par} \\ \frac{1}{2}k + \mu, & \text{pentru } k \text{ impar} \end{cases}.$$

(a) *Deduceti o formulă de cuadratură de forma*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t|^{2\mu} e^{-t^2} f(t)\mathrm{d}t = A_1 f(t_1) + A_2 f(t_2) + A_3 f(t_3) + R(f)$$

(3p)

(b) *Se consideră formula de cuadratură cu n noduri*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t|^{2\mu} e^{-t^2} f(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} A_k f(t_k) + R_n(f). \tag{1}$$

Implementaţi în MATLAB o rutină pentru calculul coeficienţilor şi nodurilor formulei (1) (2p)

(c) *Calculaţi*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t|^2 e^{-t^2} \cos(t)\mathrm{d}t$$

cu 8 zecimale exacte folosind rutina de la punctul (b). (1p)

Problema 2 (a) *Se consideră ecuaţia în $\mathbb{R}$ $f(x) = 0$ cu rădăcina α şi o metodă cu ordinul de convergenţă p şi eroarea asimptotică C_p. Dacă se fac N_p operaţii pe pas şi operaţiile de iniţializare se ignoră, atunci numărul total de operaţii necesar pentru a aproxima soluţia cu precizia ε este*

$$T_p = \frac{N_p}{\log p} \log \left[\frac{\frac{\log C_p}{p-1} + \log \varepsilon}{\frac{\log C_p}{p-1} + \log e_0} \right], \tag{**}$$

unde baza logaritmului este arbitrară, e_0 este eroarea iniţială. (1p)

(b) *Considerăm algoritmul al cărui pas constă din doi paşi ai metodei lui Newton. Care este odinul de convergenţă al algoritmului? (1p)*

(c) *Utilizând ideea de la punctul precedent, arătaţi cum se pot crea metode de ordin arbitrar pentru rezolvarea ecuaţiei $f(x) = 0$. De ce nu este ordinul unei metode sigurul criteriu de selecţie la rezolvarea unei probleme? (1p)*

Indicaţie*: Fie $e_n = |x_n - \alpha|$ eroarea la pasul n. Se pune $e_{n+1} \approx C_p e_n^p$. Din condiţia $e_n \approx \varepsilon$ se scoate n.*