

Seminar 9

1. Fie $x = (1, 0, -1)$, $y = (3, -1, 1) \in \mathbb{R}^3$. Calculati $x + y$, $x \cdot y$, $\|x\|$, $\| - 2y\|$ si $\|x - y\|$.
2. Fie $x, y \in \mathbb{R}^m$ si notam $a = x \cdot y$, $b = \|x\|$ si $c = \|y\|$. Exprimati urmatoarele marimi in functie de a , b si c
 - a) $(x + y) \cdot y$
 - b) $x \cdot (2x - y)$
 - c) $\|x - y\|$
3. Fie $x, y \in \mathbb{R}^m$. Demonstrati **identitatea paralelogramului**

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

4. Determinati $\text{int}A$, $\text{fr}A$, precum si daca A este multime deschisa, respectiv multime inchisa.
 - a) $A = B(O_2, 1) \subseteq \mathbb{R}^2$
 - b) $A = [2, \infty) \times (2, \infty) \subseteq \mathbb{R}^2$
 - c) $A = \mathbb{R} \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$
 - d) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$
5. $\forall A, B \subseteq \mathbb{R}^m$ multimi nevide, au loc afirmatiile
 - a) Daca A si B sunt multimi deschise atunci $A \cup B$ si $A \cap B$ sunt multimi deschise
 - b) Daca A si B sunt multimi inchise atunci $A \cup B$ si $A \cap B$ sunt multimi inchise.
6. $\forall A \subseteq \mathbb{R}^m$ multime nevida, au loc afirmatiile
 - a) $\text{int}A \subseteq A$
 - b) $\text{int}A \cap \text{fr}A = \emptyset$
 - c) $A \subseteq \text{int}A \cup \text{fr}A$
 - d) $\text{int}A \cup \text{fr}A \cup \text{int}(\mathbb{R}^m \setminus A) = \mathbb{R}^m$
 - e) $\text{int}A$ este multime deschisa
 - f) $\text{fr}A$ este multime inchisa.

7. Fie $A, B \subseteq \mathbb{R}^m$ multimi nevide. Numarul real

$$d(A, B) = \inf\{\|x - y\| \mid x \in A, y \in B\}$$

se numeste **dianta dintre multime** A si B .

- a) Determinati dianta dintre multime $A = [1, 2]^2$ si $B = B(O_2, 1)$
- b) Dati exemplu de doua multimi nevide $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ cu $A \cap B = \emptyset$ si $d(A, B) = 0$.

Exercitii suplimentare

1. Fie $x = (-1, 2, 3)$, $y = (-2, 1, -3) \in \mathbb{R}^3$.
 - a) Determinati valorile lui $r > 0$ astfel incat $y \notin B(x, r)$
 - b) Determinati valorile lui $t \in \mathbb{R}$ astfel incat vectorul $(1, -1, t)$ sa apartina bilei $\overline{B}(x, 5)$.
2. Fie $x, y \in \mathbb{R}^m$. Demonstrati ca
 - a) $x \cdot y = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$
 - b) $|||x| - |y|| \leq \|x - y\|$
3. Doi vectori $x, y \in \mathbb{R}^m$ se numesc **ortogonali** daca $x \cdot y = 0$. Justificati afirmatia

$$x, y \in \mathbb{R}^m \text{ sunt ortogonali } \iff \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

4. Determinati $\text{int}A$, $\text{fr}A$, precum si daca A este multime deschisa, respectiv multime inchisa.
 - a) $A = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \mid n \in \mathbb{N}^* \right\} \subseteq \mathbb{R}$
 - b) $A = [0, 1] \times (0, 1) \subseteq \mathbb{R}^2$
 - c) $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^2$
5. $\forall A \subseteq \mathbb{R}^m$ multime nevida, au loc afirmatiile
 - a) $A' \subseteq A \cup \text{fr}A$
 - b) $\text{int}A \cap \text{int}(\mathbb{R}^m \setminus A) = \emptyset$
 - c) $\text{fr}A = \text{fr}(\mathbb{R}^m \setminus A)$
 - d) $\text{int}A = A \setminus \text{fr}A$

6. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^m$ multime nevida. Au loc afirmatiile
 - a) Daca A este multime deschisa atunci $A \subseteq A'$
 - b) Daca A este multime inchisa atunci $A' \subseteq A$Reciprocele afirmatiilor sunt adevarate?

7. Daca $A, B \subseteq \mathbb{R}^m$ sunt multimi nevide atunci

$$\text{int}(A \cap B) = \text{int}A \cap \text{int}B.$$

Dati exemplu de multimi $A, B \subseteq \mathbb{R}$ pentru care

$$\text{int}(A \cup B) \neq \text{int}A \cup \text{int}B.$$

8. Fie $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. Numarul real pozitiv

$$|||x|||_M \stackrel{\text{not}}{=} |x_1| + |x_2| + \dots + |x_m|$$

se numeste **norma Minkowski** a vectorului x . Aratati ca aceasta verifica proprietatile normei euclidiene.