03.VI
2022

Examen Calcul Numeric

Mașca
Răzvan
Grupa 235

Problema 2

Dorim să calculăm $\frac{1}{\sqrt{a}}$, $a>0$

a) Folosind metoda lui Newton, găsiți o ecuație convenabilă.

$$x = \frac{1}{\sqrt{a}} \Leftrightarrow \sqrt{a} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow a = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} - a = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^2} - a \;,\; f(x) = 0$$

Folosind metoda lui Newton avem iterația:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Leftrightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{\frac{1}{x_n^2} - a}{\left(\frac{1}{x_n^2} - a\right)'}$$

$$\Leftrightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{\frac{1 - a x_n^2}{\cancel{x_n^2}}}{\frac{-2}{\cancel{x_n^3}}} \Leftrightarrow x_{n+1} = x_n + \frac{x_n(1 - a x_n^2)}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_{n+1} = \frac{2x_n + x_n - a x_n^3}{2} \Leftrightarrow x_{n+1} = \frac{3x_n - a x_n^3}{2}$$

$$\Rightarrow \text{Forma finală: } x_{n+1} = \frac{1}{2} x_n \left(3 - a x_n^2\right)$$

b) Pentru ce valori ale lui x_0 metoda converge?

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = \left(\frac{1}{x^2} - a\right)' = \frac{-2}{x^3} \\ x > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x) < 0, \text{ pt } \forall x > 0$$

$$\left.\begin{array}{l} f''(x) = \left(\frac{-2}{x^3}\right)' = \frac{6}{x^4} \\ x > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{(*)}{f''(x) > 0}, \text{ pt } \forall x > 0$$

$(*) \Rightarrow \forall x_0 > 0$ este o valoare potrivită de pornire pentru care metoda converge

c) Folosind punctul (a), aproximați $\sqrt{a}$ fără împărțiri

Din a) $\Rightarrow x_n$ aproximează $\frac{1}{\sqrt{a}} \Rightarrow x_n \simeq \frac{1}{\sqrt{a}}$ $(**)$

Dorim să aproximăm $\sqrt{a}$ fără împărțiri:

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{a} = \frac{a}{\sqrt{a}} = a \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} \\ (**) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a}} \simeq x_n \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{a} \simeq a x_n$$

Problema 1

Fie $(\pi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ polinoame ortogonale Legendre monice

a) Arătați că $\pi_k^+(t^2) = \pi_{2k}(t)$ sunt ortogonale monice pe $[0,1]$ în raport cu ponderea $w(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$

Știm că $(\pi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sunt polinoame ortogonale monice

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} w(t)\cdot\pi_k(t)\,\pi_j(t)\,dt = 0 \quad , \text{ cu } w(t) = 1 \quad (*)$$

Deoarece $(\pi_k^+)_{k\in\mathbb{N}}$ polinom ortogonal, arătăm că

$$\int_0^1 w(t)\,\pi_k^+(t)\,\pi_j^+(t)\,dt = 0 \text{ , cu } w(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

$$(*) \Rightarrow \int_{-1}^{1}\pi_{2k}(t)\cdot\pi_{2j}(t)\,dt = 0 \Leftrightarrow \int_{-1}^{1}\pi_k^+(t^2)\cdot\pi_j^+(t^2)\,dt = 0$$

capetele sunt simetrice $\Rightarrow \int_{-1}^{0}\pi_k^+(t^2)\cdot\pi_j^+(t^2)\,dt + \int_0^1\pi_k^+(t^2)\,\pi_j^+(t^2)\,dt = 0$

$$\Leftrightarrow 2\cdot\int_0^1\pi_k^+(t^2)\,\pi_j^+(t^2)\,dt = 0$$

Aplicăm schimbare de variabilă $t = \sqrt{u} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{u}}\,du$

$$\Leftrightarrow 2\int_0^1\frac{1}{2\sqrt{u}}\,\pi_k^+(u)\,\pi_j^+(u)\,du = 0 \Leftrightarrow \int_0^1\frac{1}{\sqrt{u}}\,\pi_k^+(u)\,\pi_j^+(u)\,du = 0$$

$\Leftrightarrow \int_0^1\frac{1}{\sqrt{t}}\,\pi_k^+(t)\,\pi_j^+(t)\,dt = 0 \Rightarrow (\pi_k)^+$ sunt ortogonale pe $[0,1]$ cu $w(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ q.e.d.

b) Stabiliți formula de cuadratură

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} f(x)\,dx = 2\sum_{k=1}^{n} A_k f(t_k^2) + R_n(f)$$

unde A_k și t_k, $k=1\dots 2n$ sunt coeficienții respectiv nodurile formulei de cuadratură Gauss-Legendre cu $2n$ noduri.

Notăm $J=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} f(x)\,dx$ și aplicăm schimbare de variabilă:

$x=t^2,\ t>0 \Rightarrow dx = 2t\,dt$

$$\Rightarrow J=\int_0^1 2t\frac{1}{\sqrt{t^2}} f(t^2)\,dt \Leftrightarrow J = 2\int_0^1 \cancel{t}\cdot\frac{1}{\cancel{t}} f(t^2)\,dt$$

$$\Leftrightarrow J=2\int_0^1 f(t^2)\,dt \Leftrightarrow J=\int_{-1}^1 f(t^2)\,dt$$

Aplicăm Gauss-Legendre pentru $2n$ noduri cu $w(t)=1$

$$\Rightarrow J=\sum_{k=1}^{2n} A_k f(t_k^2)+R_n(f)$$

Intervalul $[-1,1]$ este simetric $\Rightarrow -t_k = t_{n-k}$

$\Rightarrow w(t)=1$ este o pondere pară $\Rightarrow f(t_k^2)=f(t_{n-k}^2) \Rightarrow A_k = A_{2n-k}$

Atunci avem: $J=\sum_{k=1}^{2n} A_k f(t_k^2) = \sum_{k=1}^{n} 2A_k f(t_k^2)$

$$\Leftrightarrow J = 2\sum_{k=1}^n A_k f(t_k^2) \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} f(x)\,dx = 2\sum_{k=1}^n A_k f(t_k^2)$$ q.e.d.

Subpunctele c) și d) sunt rezolvate în Matlab