Varianta B - iunie 2014

Rezolv: Student Enăchescu Elena

Subiectul I (2 puncte)

Se consideră seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!}\left(\frac{x}{2}-8\right)^n$ pentru $x \in \mathbb{R}$.

(1 pct.) a) Să se determine mulțimea de convergență a seriei.

(1 pct.) b) Dacă $S(x)$ e suma seriei de puteri iar $f_n : [1,2] \to \mathbb{R}$, e un șir de funcții definit prin $f_n(x) = S(nx^2)+1$ atunci să se studieze convergența uniformă a șirului $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ pe $[1,2]$.

Soluție

a) Seria se mai scrie sub forma: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x+16)^n}{n!}$.

Notăm $y = -x+16$ și seria devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$. Calculăm

$w = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ unde $a_n = \frac{1}{n!}$

$\Rightarrow w = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow R = \frac{1}{w} = +\infty$, deci mulțimea de convergență pentru serie este $(-\infty, +\infty)$.

Rămâne să determinăm pe x din inegalitățile $-\infty < y < \infty \Leftrightarrow -\infty < -x+16 < \infty$, care este verificată pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci mulțimea de convergență pentru seria dată este $(-\infty, +\infty)$.

b) Determinăm $S(x)$ (suma seriei). Din notația precedentă: $y = -x+16$ seria era: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$. Știm că $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Deci: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} - 1 = e^y - 1$. Deci suma seriei va fi pt. $y = -x+16$: $S(x) = e^{-x+16} - 1$.

$f_n(x) = S(nx^2)+1 \Rightarrow f_n(x) = e^{-nx^2+16} - 1 + 1 = e^{-nx^2+16} = e^{16} e^{-nx^2} = \frac{e^{16}}{e^{nx^2}}$, $x \in [1,2]$

$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{e^{16}}{e^{(n+1)x^2}} - \frac{e^{16}}{e^{nx^2}} = \frac{e^{16}}{e^{nx^2}\cdot e^{x^2}} - \frac{e^{16}}{e^{nx^2}} = \frac{e^{16}}{e^{nx^2}}\left(\frac{1}{e^{x^2}} - 1\right)$

$= \frac{e^{16}}{e^{nx^2}}\left(\frac{1-e^{x^2}}{e^{x^2}}\right) \leq 0 \Rightarrow \{f_n\}_{n\geq 1}$ descrescător pe $[1,2]$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{16}}{e^{nx^2}} = 0$

$\xRightarrow{\text{din Teorema Dini}}$ că $f_n(x) \xrightarrow[{[1,2]}]{\text{uniform}} 0$ pentru $n \to \infty$. ②

Soluție II Se observă că: $S(x)$ este funcție descrescătoare chiar strict. (deoarece $S'(x) = -e^{-x+16} < 0$)

$g(n) = nx^2$ funcție crescătoare $\Rightarrow$

$S \circ g$ funcție descrescătoare $\Rightarrow$ în cazul problemei că $f_n(x) = S(nx^2)+1$ este șir de funcții descrescător pe $[1,2]$

Pe de altă parte

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} [S(nx^2)+1] = -1+1=0$ $\Rightarrow$

Conform Teoremei Dini că $f_n(x) \xrightarrow[{[1,2]}]{\text{uniform}} 0$ pentru $n\to\infty$.

Subiectul II (2,5 puncte)

(1,5 pct) a) Determinați punctele de extrem local ale funcției $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xyz$ condiționate de legătura $x+y+z=12$.

(1 pct) b) Studiați continuitatea funcției $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^4+y^4}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Soluție

a) 1. Considerăm funcția lui Lagrange: $\phi(x,y,z,\lambda) = xyz + \lambda(x+y+z-12)$.

2. Determinăm punctele staționare/critice condiționate

$$\begin{cases} \phi'_x(x,y,z,\lambda) = yz+\lambda = 0 & (1) \\ \phi'_y(x,y,z,\lambda) = xz+\lambda=0 & (2) \\ \phi'_z(x,y,z,\lambda) = xy+\lambda=0 & (3) \\ \phi'_\lambda(x,y,z,\lambda) = x+y+z-12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z(x-y)=0 & (2-1) \\ y(x-z)=0 & (3-1) \\ x(y-z)=0 & (3-2)\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \text{Caz 1} & z=0 \text{ sau } x=y \\ \text{Caz 2} & y=0 \text{ sau } x=z \\ \text{Caz 3} & x=0 \text{ sau } y=z \end{matrix} \quad (*)$$

Notăm că x,y,z nu pot fi egale cu 0 căci $\Rightarrow x+y+z=12$

$\Leftrightarrow 0+0+0-12=0 \Leftrightarrow -12=0$ absurd.

Combinăm relațiile $(*)$: 3

Caz A: $x=y=z \Rightarrow x+y+z-12=0 \Leftrightarrow 3x=12 \Leftrightarrow x=4. \Rightarrow \lambda=-4$

$\Rightarrow A_1(4,4,4;-4)$ este punct staționar condiționat.

Caz B: $x=0, y=0 \Rightarrow z=12 \Rightarrow B_1(0,0,12;0)$ este punct staționar condiționat.

Sistemul este simetric $\Rightarrow$

Caz C: $C_1(0,12,0;0)$ este punct staționar condiționat

Caz D $D_1(12,0,0;0)$ este punct staționar condiționat.

> Comentariu Sistem simetric = permutând variabilele între ele $\Rightarrow$ același sistem. În astfel de cazuri cunoscând o soluție $(x,y,z)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ avem că $(x,y,z)=(\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1)$ și $(x,y,z)=(\alpha_1,\alpha_3,\alpha_2)$ sunt de asemenea soluții

Determinăm punctele de extrem condiționat.

$$\Phi(x,y,z,\lambda) \overset{not}{=} \bar{\Phi}(x,y,z)$$

Scriem matricea hessiană:

$$H_{\bar\Phi}(x,y,z)=\begin{pmatrix} F''_{x^2}(x,y,z) & F''_{xy}(x,y,z) & F''_{xz}(x,y,z) \\ F''_{xy}(x,y,z) & F''_{y^2}(x,y,z) & F''_{yz}(x,y,z) \\ F''_{zx}(x,y,z) & F''_{zy}(x,y,z) & F''_{z^2}(x,y,z)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0\end{pmatrix} \Rightarrow H_{\bar\Phi}(\underbrace{4,4,4}_{A_1})=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 0\end{pmatrix}$$

Cum $\Delta_1=0$ nu putem decide și trebuie apelat la diferențiala de ordin 2.

$$d^2\bar\Phi(A_1)=2(4\,dy\,dz+4\,dx\,dz+4\,dx\,dy)=8(dy\,dz+dx\,dz+dx\,dy) \quad (*)$$

Diferențiem legătura $\Rightarrow dg=0$, unde $x+y+z-12=g \Rightarrow dg=dx+dy+dz=0$

$\Rightarrow dx=-(dy+dz) \Rightarrow$

Înlocuind în $(*)$: $8(dy\,dz-(dy+dz)dz-dy(dy+dz))=$

$=8(dy\,dz-dy\,dz-dz^2-dy^2-dy\,dz)=-8(dz^2+dy\,dz+dy^2)=$

$=-8\,\dfrac{dz^2+(dz+dy)^2+dy^2}{2}<0 \Rightarrow A_1(4,4,4)$ este punct de maxim local condiționat.

(conform ordinului de dif. de ord. superior!)

Absolut analog se tratează cazurile $B_1(0,0,12;0)$, $C_1(0,12,0;0)$ și $A_1(12,0,0;0)$.

b) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$$0\le \lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)-0| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{x^3y^2}{x^4+y^4}\right| \quad (*)$$

Știm că $a^2+b^2-2ab\ge 0 \iff a^2+b^2\ge 2ab$

Analog $a^4+b^4-2a^2b^2\ge 0 \iff a^4+b^4\ge 2a^2b^2 \Rightarrow \frac{1}{a^4+b^4}\le\frac{1}{2a^2b^2}$

$\Rightarrow$ În $(*)$

$$0\le \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{x^3y^2}{x^4+y^4}\right| \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{x^3y^2}{2x^2y^2}\right| = \frac{|x|}{2}$$

$(x,y)\to(0,0) \qquad 0 \qquad (x,y)\to(0,0)$

Conform criteriului cleștelui $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0)\Rightarrow f$ este continuă în $(x,y)=(0,0)$ (1)

Pe $\mathbb{R}^2\setminus\{0,0\}$ funcția este continuă, fiind obținută din funcții elementare (2).

Din (1),(2), f este continuă pe $\mathbb{R}^2$.

Generalizare Studiați continuitatea funcției

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^{p+1}y^p}{x^q+y^q} & (x,y)\ne(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases} \quad \left[\text{sau}\left(\cdots \frac{x^p y^{p+1}}{x^q+y^q}\cdots\right)\right]$$

unde $2p=q$ iar $p,q\in(0,\infty)$. Indicație: Absolut analog.

Subiectul III (2 puncte)

(0,5 pct.) a) Calculați $\displaystyle\int_0^\infty e^{-2x}(1-e^{x})^2\,dx$.

(1,5 pct.) b) Desenați domeniul $\Delta=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / 0\le x\le y^2;\ -2\le y\le 2\}$ și calculați $\displaystyle\iint_\Delta xy\,dxdy$.

Soluție

a) Notăm $e^{-x}=t>0 \Rightarrow$

$x\to 0\Rightarrow t\to\frac{1}{e^0}=1$

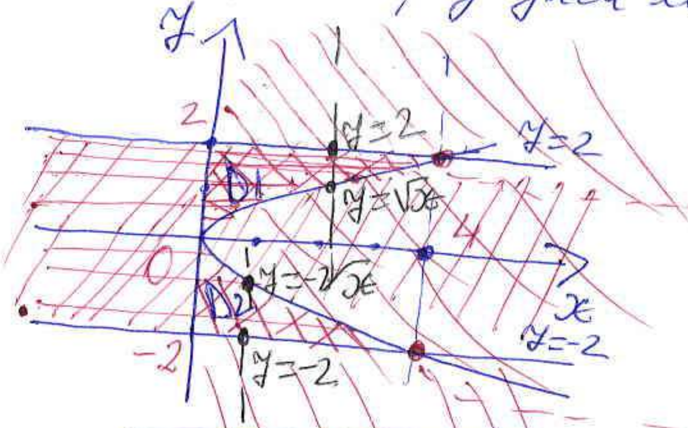
$x\to\infty\Rightarrow t\to\frac{1}{\infty}=0$

$-x=\ln t\Rightarrow x=-\ln t\Rightarrow dx=-\frac{1}{t}\,dt$

$$\Rightarrow \int_1^0 t^2(1-t)^2\frac{(-1)}{t}dt = \int_0^1 t(1-t)^2 dt = \int_0^1 t^{2-1}(1-t)^{3-1}dt$$
(cu −)

$$= B(2,3) = \frac{\Gamma(2)\Gamma(3)}{\Gamma(2+3)} = \frac{1!\cdot 2!}{4!} = \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{12}$$

b) Reprezentăm în sistemul de axe xOy dreptele de ecuație $y=-2$, $y=2$ și graficele lui ($y=\sqrt{x}$ și respectiv $y=-\sqrt{x}$).



hașurăm cu / partea $-2\le y\le 2$

$\sqrt{x}=2 \Rightarrow x=4$

$-\sqrt{x}=-2 \Rightarrow x=4$

hașurăm cu \ partea $x\geq 0$

Dacă $y\in[0,2] \Rightarrow y\geq\sqrt{x}$

hașurăm cu — partea $y\geq\sqrt{x}$

Dacă $y\in[-2,0] \xrightarrow{\text{Analog}} \Delta_2$.

x și y impare!

Δ_1 simetric față de Δ_2 !

Integrala de calculat devine

$$I=\iint_\Delta xy\,dxdy = \iint_{\Delta_1} xy\,dxdy + \iint_{\Delta_2} xy\,dxdy$$

unde $\Delta_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 2, \sqrt{x}\le y\le 2\}$

$\Delta_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 2, -2\le y\le -\sqrt{x}\}$.

Așadar

$$I = \int_0^2\left(\int_{\sqrt{x}}^2 xy\,dy\right)dx + \int_0^2\left(\int_{-2}^{-\sqrt{x}} xy\,dy\right)dx =$$

$$= \int_0^2 x\,\frac{y^2}{2}\Big|_{y=\sqrt{x}}^{2}dx + \int_0^2 x\,\frac{y^2}{2}\Big|_{y=-2}^{y=-\sqrt{x}}dx =$$

$$= \int_0^2 x\left(\frac{2^2}{2}-\frac{(\sqrt{x})^2}{2}\right)dx + \int_0^2 x\left(\frac{(-\sqrt{x})^2}{2}-\frac{(-2)^2}{2}\right)dx = 0$$

Sol II $I = \int_{-2}^{2}\left(\int_0^{y^2} xy\,dx\right)dy = 0$ (domeniul este deja explicitat!)

Subiectul IV (2,5 puncte)

(0,75 pct) 1) Definiți, într-un spațiu topologic, noțiunea de punct interior al unei mulțimi.

(1 pct.) 2) Enunțați criteriul Raabe-Duhamel pentru convergența seriilor numerice cu termeni pozitivi.

(0.75 pct) 3) Fie $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ notăm cu $f(x,y)$ valoarea funcției în $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, definiți derivata parțială de ordinul întâi a lui f în raport cu variabila y în punctul (a,b).

Soluție

1) Fie $(X,\mathcal{T})$ spațiu topologic și $A \subset X$. Punctul $x \in X$ se numește punct interior al mulțimii A dacă există o vecinătate $V \in \mathcal{V}_x(\mathcal{T})$ cu $V \subset A$.

2) Fie $\sum a_n$ serie numerică cu termeni pozitivi.

Dacă $l^* = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$ $l_* = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$

Atunci:

1) Dacă $l^* < 1 \Rightarrow$ seria este divergentă;
2) Dacă $l_* > 1 \Rightarrow$ seria este convergentă;
3) Dacă $l_* \leq 1 \leq l^*$ atunci nu putem decide cu acest criteriu.

3) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y)$. Derivata parțială de ord I a lui f în raport cu variabila y în (a,b) este dată de limita

$$\lim_{y\to b} \frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b} \in \mathbb{R}$$ dacă există. Aceasta se notează cu $f'_y(a,b)$.

BAREM GENERAL

Subiectul I

a) calcul w: 0,25p
Det. $x \in (-R, R)$: 0,25p
Capete $x = -R$ și $x = R$: 0,25p

b) calcul $S(x)$: 0,5p;
calcul $f_n(x)$ resp. a_n: 0,25p
stud. conv. resp. calcul sumă 0,25p.

Subiect II

a) Calcul deriv. part. ord 1: 0,25p;
rez. sistem 0,5p
Calcul deriv. part. ord 2: 0,25p
matr. hessiană resp. diff. 0,5p.

b) Calc. deriv. part. de ord 1 respectiv scriere modul sau șiruri 0,25p
Calcul deriv. part. ord 2 resp. inegalități 0,25p;
scriere diff. 0,25p;
rez. final 0,25p;

Subiect III

a) Schimb. var. 0,25p; rez. integrală 0,25p;
b) Desen 0,75p; rez. int. 0,75p.

Subiect IV

Se punctează enunțuri parțiale cu 0,25p