Varianta A - iunie 2014. Extras din lucrare

Rezolv: Student Buleandră Andreea.

Subiectul I (2 puncte) Se consideră seria de puteri

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n} x^n$$

pentru $x \in \mathbb{R}$.

(1. pct.) a) Să se determine mulțimea de convergență a seriei.

(1. pct.) b) Dacă $S(x)$ e suma seriei de puteri iar $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, e un șir de funcții definit prin $f_n(x) = (4-x^n)^2 \cdot S(x^n)$ atunci să se studieze convergența uniformă a șirului $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ pe $[0,1]$

Soluție

a) $R_0 = ?$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{x}{4}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot y^n \text{ unde } \begin{cases} a_n = n \\ y = \frac{x}{4} \end{cases}$$

Considerând seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot y^n \Rightarrow \omega = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n+1}{n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$

$\Rightarrow R_0 = \frac{1}{\omega} = 1$; deci:

seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot y^n$ este — convergentă pe intervalul $(-1,1)$

— divergentă pe mulțimea $(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$

• $y = -1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot y^n = \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n \Rightarrow \begin{cases} = \infty & \text{dacă } n = 2k \\ = -\infty & \text{dacă } n = 2k+1 \end{cases}$

deci în cazul acesta, seria nu are sumă.

• $y = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot y^n = \sum_{n=1}^{\infty} n(\cdot 1)^n = \infty$, deci nu e convergentă.

Deci, mulțimea de convergență pentru $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot y^n$ este $(-1,1)$.

Revenim la notație, pentru a determina mulțimea de convergență a seriei inițiale:

$-1 < y < 1 \Leftrightarrow -1 < \frac{x}{4} < 1 \Leftrightarrow -4 < x < 4 \Rightarrow C = (-4,4)$.

b) $S(x)$ e suma seriei de puteri

$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$; $f_n = (4-x^n)^2 \cdot S(x^n)$.

Recurgem la aceeași notație $y = \frac{x}{4} \Rightarrow$ seria $\sum_{n=1}^{\infty} n y^n$; $y \in (-1,1)$

$f(y)=\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot y^n$. (2)

Considerăm seria geometrică $\sum_{n=1}^{\infty} y^n = y+y^2+y^3+\dots = s_k + \underbrace{y^{k+1}+y^{k+2}+\dots}_{R_k}$

$= y\cdot\frac{y^k-1}{y-1} + R_k$.

Cum $y\in(-1,1) \Rightarrow y^k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, $R_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, deci egalitatea devine: $\sum_{n=1}^{\infty} y^n = \frac{y}{1-y}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} y^n = \frac{y}{1-y} \;\Big|\; (\;)' \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n y^{n-1} = \frac{1}{(1-y)^2} \;\Big|\cdot y \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n y^n = \frac{y}{(1-y)^2}$$

$\Rightarrow f(y)=\frac{y}{(1-y)^2} \Rightarrow$ suma seriei este: $S(x)=f\left(\frac{x}{4}\right)=\frac{x}{4}\cdot\frac{1}{\frac{(4-x)^2}{16}}=$

$=\frac{x}{4}\cdot\frac{16}{16-8x+x^2}=\frac{4x}{x^2-8x+16}$

$\Rightarrow f_n(x)=(4-x^n)^2\cdot\frac{4\cdot x^n}{(4-x^n)^2}=4x^n$, $x\in[0,1]$.

Observăm că $x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ pentru $x\in[0,1)$

și

Așadar $x^n=1$ pentru $x=1$

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{punctual}} g(x)=\begin{cases} 0 & \text{pentru } x\in[0,1) \\ 4 & \text{pentru } x=1 \end{cases}$$

Pe de altă parte

$$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} g(x)=0\neq g(1)$$

și deci g este discontinuă în 1 $\Rightarrow f_n(x)$ nu converge uniform pe $[0,1]$. (Vezi teorema Curs 4 paragraf n4.2.n)

<u>Soluție II</u> $h(x)=x^n$ continuă pe $[0,1]$, $S(x)$ continuă pe $[0,1]$ $\Rightarrow (S\circ h)(x)$ continuă $\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty}(4-x^n)^2 S(x^n) \longrightarrow \begin{cases}(4-0)^2 S(0) & \text{dacă } x\in[0,1) \\ (4-1)^2 S(1) & \text{dacă } x=1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}(4-0)^2\cdot 0 & \text{dacă } x\in[0,1) \\ 3^2\cdot\frac{4\cdot1}{(4-1)^2} & \text{dacă } x=1\end{cases} = \begin{cases}0 & \text{dacă } x\in[0,1) \\ 4 & \text{dacă } x=1\end{cases} \Rightarrow f_n \text{ nu converge uniform pe } [0,1].$$

Subiectul II (2,5 puncte) a) Determinați punctele de extrem local ale funcției $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, 3

$$f(x,y,z) = xyz + \frac{16}{x} + \frac{16}{y} + \frac{16}{z}$$

(1 pct) b) Fie $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = e^{2x+y}$, calculați $d^2 f(2,1)$.

Soluție

Pas 1: determin punctele critice

$$\begin{cases} (f(x,y,z))'_x = 0 \\ (f(x,y,z))'_y = 0 \\ (f(x,y,z))'_z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yz - \frac{16}{x^2} = 0 & (1) \\ yz - \frac{16}{y^2} = 0 & (2) \Rightarrow z = \frac{16}{y^2 \cdot x} \quad (4) \\ xy - \frac{16}{z^2} = 0 & (3) \end{cases}$$

din (1) și (4) $\Rightarrow \frac{16y}{y^2 \cdot x} - \frac{16}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{16}{yx} - \frac{16}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 16x^2 = 16xy \Leftrightarrow x^2 = xy \Rightarrow$
$y = x$ (5). Înlocuind în sistem, obținem:

$$\begin{cases} xz - \frac{16}{x^2} = 0 \\ x^2 - \frac{16}{z^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xz = \frac{16}{x^2} \\ x^2 = \frac{16}{z^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 \cdot z = 16 \\ x^2 z^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow x^3 z = x^2 z^2$$

$\Rightarrow z = x$ (6)

din (5), (6) $\Rightarrow x^2 - \frac{16}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^4 = 16 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow$ avem 2 puncte critice $(-2,-2,-2)$ și $(2,2,2)$

Pas 2: verific dacă punctele critice sunt puncte de extrem

Caz I: $(-2,-2,-2)$

notăm $H_f(x,y,z)$ hessiana funcției f

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{y^2} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{32}{x^3} & z & y \\ z & \frac{32}{y^3} & x \\ y & x & \frac{32}{z^3} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow H_f(-2,-2,-2) = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ -2 & -4 & -2 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = -4 < 0$

$\Delta_2 = 16 - 4 = 12 > 0$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -4 & -2 & -2 \\ -2 & -4 & -2 \\ -2 & -2 & -4 \end{vmatrix} \xlongequal{C_1 - C_2 - C_3} \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 4 & -4 & -2 \\ 4 & -2 & -4 \end{vmatrix} \xlongequal{C_2 - C_3}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & -2 \\ 4 & 2 & -4 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -2(8+8) = -32$$

$\Rightarrow \Delta_3 < 0$, deci $(-2,-2,-2)$ este punct de extrem local, și anume de maxim

Caz II: $(2,2,2)$

$$H_f(2,2,2) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = 4 > 0$

$\Delta_2 = 16 - 4 = 12 > 0$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal{C_1 - C_2 - C_3} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -4 & 4 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal{C_2 - C_3} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \\ -4 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 2(8+8) = 32 > 0$$

$\Rightarrow$ punctul $(2,2,2)$ e punct de minim.

b) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = e^{2x+y}$

$d^2 f(2,1) = ?$

$f'(x,y)_{|x} = 2e^{2x+y}$ $\qquad f''_{y^2} = e^{2x+y}$

$f'(x,y)_{|y} = e^{2x+y}$ $\qquad f''_{yx} = 2e^{2x+y}$

$f''_{x^2} = 4e^{2x+y}$

$f''_{xy} = 2e^{2x+y}$

$$d^2 f(a,b) = f''_{x^2}(a,b) \cdot (x-a)^2 + \left(f''_{xy}(a,b) + f''_{yx}(a,b)\right)(x-a)(y-b) + f''_{y^2}(a,b)(y-b)^2$$

$$\Rightarrow d^2 f(2,1) = f''_{x^2}(2,1) \cdot (x-2)^2 + \left(f''_{xy}(2,1) + f''_{yx}(2,1)\right)(x-2)(y-1) + f''_{y^2}(2,1)(y-1)^2$$

$$\Leftrightarrow d^2 f(2,1) = 4e^5 (x-2)^2 + (2e^5 + 2e^5)(x-2)(y-1) + e^5 (y-1)^2 \Leftrightarrow$$

$$d^2 f(2,1) = 4e^5 (x-2)^2 + 4e^5 (x-2)(y-1) + e^5 (y-1)^2$$

Subiectul III (2 puncte)

(0,5 pct.) a) Calculați $\int_{-\infty}^{-1} \frac{(x+1)^3}{9} e^{\frac{x+1}{3}} dx$

(1,5 pct.) b) Desenați domeniul $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le y,\ 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$ și calculați $\iint_\Delta \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy$.

Soluție.

a) În primul rând, realizăm schimbarea de variabilă $x+1=y$

$x+1=y \mid (\ )'$

$dx = dy$ $\Rightarrow J(y) = \int_{-\infty}^{0} \frac{y^3}{9} e^{\frac{y}{3}} dy$

$x=-1 \Rightarrow y=0$

$x \to -\infty \Rightarrow y \to -\infty$

Realizăm o altă schimbare de variabilă:

$\frac{y}{3} = -t \mid (\ )' \Rightarrow dy = -3\, dt$.

$y=-t \mid (\ )^3 \Rightarrow \frac{y^3}{27} = -t^3 \Rightarrow \frac{y^3}{9} = -3t^3$

$y=0 \Rightarrow t=0$

$y \to -\infty \Rightarrow t \to \infty$ $\Rightarrow J(t) = -\int_0^\infty -3t^3 \cdot e^{-t}(-3)\, dt = -\int_0^\infty 9t^3 \cdot e^{-t} dt =$

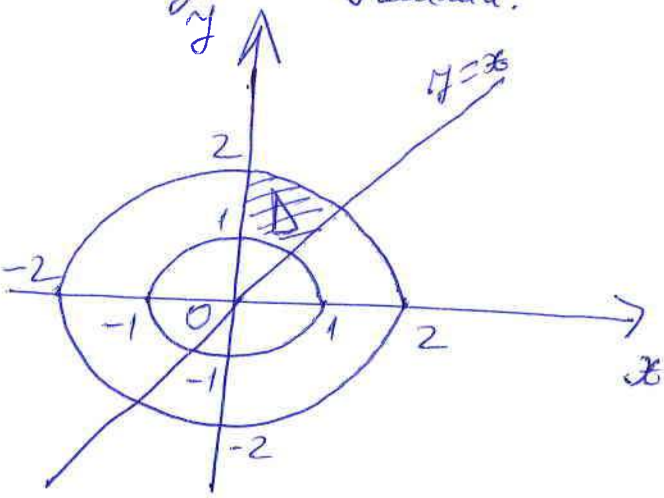
$= -9\int_0^\infty t^3 e^{-t} dt = -9\Gamma(4)$ unde Γ e integrala Gamma.

$\Rightarrow -9\Gamma(4) = -9 \cdot 3! = -9 \cdot 6 = -54$.

b) Reprezentăm dreapta $y=x$.

Valorile căutate se află în stânga dreptei $y=x$ și până la axa Oy

$1 \le x^2+y^2 \le 4$: se definește un cerc cu raza $r \in [1,2]$.



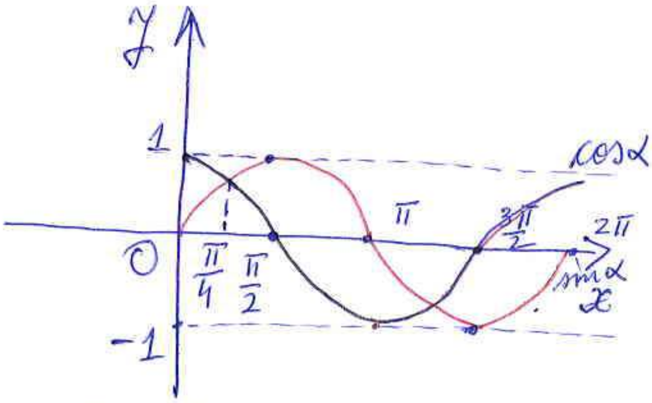
Hașurăm domeniul în desen. Cum acesta este un disc, vom face trecerea la coordonate polare.

$x = r\cos\alpha$
$y = r\sin\alpha$ $\Rightarrow x^2+y^2 = r^2\cos^2\alpha + r^2\sin^2\alpha = r^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha) = r^2$

$1 \le x^2+y^2 \le 4$

$\Rightarrow 1 \le r^2 \le 4$, $r>0$ $\Rightarrow r \in [1,2]$

$\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha \ge 0 \\ \sin\alpha \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$



$x \le y \Rightarrow \cos\alpha \le \sin\alpha \Rightarrow$

$\alpha \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

Jacobianul transformării este r

$\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le y,\ 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$

$\Rightarrow \Delta^* = \{(r,\alpha) \in \mathbb{R}^2 \mid r \in [1,2],\ \alpha \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]\}$

$$\iint_\Delta \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint_{\Delta^*} f(r\cos\alpha, r\sin\alpha)\cdot r\,dr\,d\alpha =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi/2}\left(\int_1^2 r\cdot\sqrt{r^2\cos^2\alpha + r^2\sin^2\alpha}\,dr\right)d\alpha =$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2}\left(\int_1^2 r^2\,dr\right)d\alpha = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi/2}\frac{r^3}{3}\Big|_1^2 d\alpha = \int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{8-1}{3}\,d\alpha = \int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{7}{3}\,d\alpha$$

$$= \frac{7}{3}\alpha\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{7}{3}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12}.$$

Subiectul IV (2,5 puncte)

(0,75 pct) 1) Definiți, într-un spațiu topologic, noțiunea de punct de acumulare al unei mulțimi.

(0,75 pct) 2) Definiți noțiunea de punct de maxim local pentru funcția $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, notând cu (a,b) punctul de maxim local.

(1 pct.) 3) Enunțați teorema lui Abel privind raza de convergență a seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$.

Soluție

1) Fie $(X,\mathcal{T})$ spațiu topologic, $A \subset X$ și $x \in X$. x se numește punct de acumulare pentru mulțimea A $(x \in A')$ dacă $\forall$ ar fi o vecinătate $V \in \mathcal{V}_x(\mathcal{T})$ avem că $V \cap (A \setminus \{x\}) \ne \emptyset$.

2) Fie $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Punctul $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ se numește punct de maxim local pentru funcția f dacă există o vecinătate V a lui (a,b) astfel încât $f(x,y) \le f(a,b)$ $\forall (x,y) \in V$.

3) Fie seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ și $R_0 \in \mathbb{R}$ raza de convergență.

- pe intervalul $(-R_0, R_0)$ seria este absolut convergentă;
- pe mulțimea $(-\infty, -R_0) \cup (R_0, \infty)$ seria este divergentă;
- pe intervalul $[-r, r]$ seria este uniform convergentă unde $0 < r < R_0$, real.

BAREM GENERAL

Subiectul I

a) calcul w: 0,25p
Det. $x \in (-R, R)$: 0,25p
Capete $x=-R$ și $x=R$: 0,25p

b) calcul $S(x)$: 0,5p;
calcul $f_n(x)$ resp. a_n: 0,25p
stud. conv. resp. calcul sumă 0,25p.

Subiect II

a) Calcul deriv. part. ord 1: 0,25p;
rez. sistem 0,5p
Calcul deriv. part. ord 2: 0,25p
matr. hessiană resp. diff. 0,5p.

b) Calc. deriv. part. de ord 1 respectiv scriere modul sau șiruri 0,25p
Calcul deriv. part. ord 2 resp. inegalități 0,25p;
scriere diff. 0,25p;
rez. final 0,25p;

Subiect III

a) Schimb. var. 0,25p; rez. integrală 0,25p;
b) Desen 0,75p; rez. int. 0,75p.

Subiect IV

Se punctează enunțuri parțiale cu 0,25p