Consultatie 2

Tuesday, May 31, 2022 2:07 PM

Determinați aproximanta în sensul celor mai mici pătrate

$$\varphi(t) = \frac{c_1}{1+t} + \frac{c_2}{(1+t)^2}, \quad t \in [0,1]$$

a funcției $f(t) = e^{-t}$, luând $d\lambda(t) = dt$ on $[0,1]$. Determinați numărul de condiționare $cond_\infty A = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$ al matricei A a coeficienților ecuațiilor normale. Calculați eroarea $f(t) - \varphi(t)$ în $t = 0$, $t = 1/2$, și $t = 1$.

(Indicație: Integrala

$$\int_1^\infty t^{-m} e^{-xt} dt = E_m(x) = E_i(m,x)$$

se numește a „m-a integrală exponențială". Exprimați rezultatul cu ajutorul acestei funcții)

$$\tilde{u}_1(t) = \frac{1}{1+t}, \quad \tilde{u}_2(t) = \frac{1}{(1+t)^2}$$

$$\min_{c_1,c_2 \in \mathbb{R}} \underbrace{\| f - (c_1\tilde{u}_1 + c_2\tilde{u}_2)\|^2}_{E(c_1,c_2)} = ?$$

$$\|g\| = \left(\int_0^1 g^2(t)\, dt\right)^{\frac{1}{2}}, \quad g:[0,1]\to\mathbb{R}$$ cont.

$$E(c_1,c_2) = \int_0^1 \left(e^{-t} - \frac{c_1}{1+t} - \frac{c_2}{(1+t)^2}\right)^2 dt$$

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial c_1} = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial c_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = ? \\ c_2 = ? \end{cases}$$

(12) curs log

$$\begin{cases} \langle \tilde{u}_1,\tilde{u}_1\rangle c_1 + \langle \tilde{u}_1,\tilde{u}_2\rangle c_2 = \langle \tilde{u}_1, f\rangle = e\left(Ei(-2) - Ei(-1)\right) \\ \langle \tilde{u}_2,\tilde{u}_1\rangle c_1 + \langle \tilde{u}_2,\tilde{u}_2\rangle c_2 = \langle \tilde{u}_2, f\rangle = e\left(Ei(-1) - Ei(-2)\right) + 1 - \frac{1}{2e} \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+t} dt \overset{x=1+t}{\underset{t=x-1}{=}} \int_{-1}^{0} \frac{e^{1-x}}{x} dx = e \cdot \int_{-1}^{0} \frac{e^{-x}}{x} dx$$

$$\int_1^\infty t^{-m} e^{-xt} dt = E_m(x) = \underbrace{E_i(m,x)}, \quad x>0$$

$$\| y = xt$$

$$\int_x^\infty \left(\frac{y}{x}\right)^{-m} e^{-y} dy = x^m \int_x^\infty y^{-m} e^{-y} dy$$

$$Ei(x) = -\int_{-x}^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt = \frac{1}{x} \underbrace{Ei(1,-x)}_{(-x)^1 \int_{-x}^\infty y^{-1} e^{-y} dy}$$

$$\boxed{Ei(x) = \frac{1}{x} Ei(1,-x)}$$

Se consideră intervalul $[a,b] = [-1,1]$ și subdiviziunea sa $\Delta : x_1 = -1 < x_2 = 0 < x_3 = 1$ și fie $f(x) = \cos\frac{\pi}{2}x$, $x \in [-1,1]$.

(a) Determinați spline-ul cubic natural al lui f pe Δ.

(b) Ilustrați teorema de minimalitate pentru funcții spline naturale, alegând $g(x) = (L_2 f)(x; -1, 0, 1)$ și $g(x) = f(x)$.

(d) Aceeași problemă pentru interpolantul cubic natural f pe Δ' și alegerile $g(x) = (L_3 f)(x; -1, 0, 1, 1)^1$ și $g(x) = f(x)$.

(a) $$S_3(x) = \begin{cases} p_1 = c_{10} + c_{11}x + c_{12}x^2 + c_{13}x^3, & x \in [-1,0] \\ p_2 = c_{20} + c_{21}x + c_{22}x^2 + c_{23}x^3, & x \in [0,1] \end{cases}$$

$$S_3(-1) = f(-1) = 0 \Rightarrow 1 - c_{11} + c_{12} - c_{13} = 0$$

$$S_3(0) = f(0) = 1 \Rightarrow \boxed{c_{10} = 1} \quad \boxed{c_{20} = 1} \quad (*)$$

$$S_3(1) = f(1) = 0 \Rightarrow 1 + c_{21} + c_{22} + c_{23} = 0 \quad \Big| +$$

$$p_1'(0) = p_2'(0) \Rightarrow c_{11} = c_{21}$$

$$2 + 2c_{12} - 2c_{13} = 0$$

$$p_1''(0) = p_2''(0) \Rightarrow c_{12} = c_{22}$$

$$c_{12} - c_{13} = -1$$

$$p_1''(-1) = 0 \Rightarrow 2c_{12} - 6c_{13} = 0$$

$$p_2''(1) = 0 \Rightarrow 2c_{22} + 6c_{23} = 0 \quad \Big| -$$

$$6(c_{23} + c_{13}) = 0 \qquad c_{23} + c_{13} = 0$$

$$(*) \overset{\text{scadem}}{\rightsquigarrow} 2c_{11} = 0 \Rightarrow \boxed{c_{11} = 0} \Rightarrow \boxed{c_{21} = 0}$$

$$\begin{cases} c_{12} - c_{13} = -1 \\ c_{12} - 3c_{13} = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{c_{13} = -\frac{1}{2}} \quad \boxed{c_{12} = -\frac{3}{2}}$$

$$\begin{cases} c_{22} + c_{23} = -1 \\ c_{22} + 3c_{23} = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{c_{23} = \frac{1}{2}} \quad \boxed{c_{22} = -\frac{3}{2}}$$

$$\Delta_3(x) = \begin{cases} p_1 = 1 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3, & x \in [-1, 0] \\ p_2 = 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3, & x \in [0, 1] \end{cases}$$

```
>> p1=1-sym(3)/2*x^2-sym(1)/2*x^3
p1 = (sym)

     3      2
    x    3*x
  - -- - ---- + 1
    2     2

>> int1=simplify(int(diff(p1,x,2)^2,x,-1,0))
int1 = (sym) 3
>> p2=1-sym(3)/2*x^2+sym(1)/2*x^3
p2 = (sym)

   3      2
  x    3*x
  -- - ---- + 1
  2     2

>> int2=simplify(int(diff(p2,x,2)^2,x,0,1))
int2 = (sym) 3

>> nodes=sym([-1 0 1])
nodes = (sym) [-1  0  1]  (1x3 matrix)
>> values=cos(sym(pi)/2*nodes)
values = (sym) [0  1  0]  (1x3 matrix)
>> L=lagrange_sym(nodes,values,x)
L = (sym)

       2
  1 - x

>> intL=simplify(int(diff(L,x,2)^2,x,-1,1))
intL = (sym) 8
```

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} \left(\Delta_3''(t)\right)^2 dt = 6.$$

$$\int_{-1}^{1} \left(L_2''(t)\right)^2 dt = 8$$

$g(\xi) = \xi$ $\qquad$ $g'(\xi) \neq 1$

Presupunem că (1) ξ este un punct fix al funcţiei g, (2) g este de două ori continuu derivabilă într-o vecinătate a lui ξ, şi (3) $g'(\xi) \neq 1$. Considerăm metoda iterativă definită prin:

$$z_{i+1} = g(g(z_i)) - \frac{[g(g(z_i)) - g(z_i)]^2}{g(g(z_i)) - 2g(z_i) + z_i}.$$

(a) Dezvoltând $g(z_i)$ şi $g(g(z_i))$ cu formula lui Taylor în jurul lui ξ, arătaţi că

(a1) ξ este limita lui (z_n).

(a2) Convergenţa este pătratică.

$$g(x) = g(\xi) + \frac{g'(\xi)}{1!}(x - \xi) + R_\xi(x)$$

$$g(x) \simeq \xi + g'(\xi)(x - \xi)$$

$$g(g(x)) \simeq g(\xi + g'(\xi)(x-\xi)) \simeq \xi + (g'(\xi))^2 (x - \xi)$$

(a1) $$z_{i+1} \simeq \xi + (g'(\xi))^2 (z_i - \xi) - \frac{\cancel{(z_i - \xi)}^2 \cdot (g'(\xi))^2 \cancel{(g'(\xi) - 1)^2}}{\cancel{(z_i - \xi)} \underbrace{\left(1 + (g'(\xi))^2 - 2g'(\xi)\right)}_{\cancel{(g'(\xi) - 1)^2}}}$$

$$z_{i+1} \simeq \xi$$

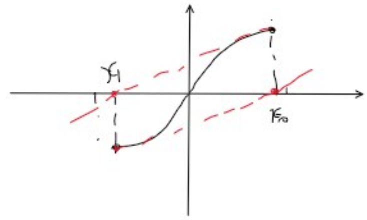
(a2) $$\varphi(x) = g(g(x)) - \frac{[g(g(x)) - g(x)]^2}{g(g(x)) - 2g(x) + x}$$ $\qquad \boxed{\varphi(\xi) = \xi}$

$$z_{i+1} = \varphi(z_i) \longrightarrow \xi$$

$$\varphi'(x) = \dots$$ $\qquad$ $$\varphi'(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{\varphi(x) - \xi}{x - \xi}$$

$$\varphi'(\xi) = 0 \ ?$$

Problema 1.2. Să se aplice metoda lui Newton ecuaţiei $\sin x = 0$ pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, dacă x_0 este soluţia nenulă a ecuaţiei $\text{tg}x = 2x$. Ce ar trebui să se întâmple şi ce se întâmplă în realitate?



Example. $f(x) = \sin x$, $|x| < \frac{1}{2}\pi$. There is exactly one root in this interval, the trivial root $\alpha = 0$. Newton's method becomes

$$x_{n+1} = x_n - \tan x_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{4.58}$$

It exhibits the following amusing phenomenon (cf. Fig. 4.3). If $x_0 = x^*$, where

$$\tan x^* = 2x^*, \tag{4.59}$$

then $x_1 = -x^*$, $x_2 = x^*$, that is, after two steps of Newton's method we end up where we started. This is called a *cycle*.

For this starting value, Newton's method does not converge, let alone to $\alpha = 0$. It does converge, however, for any starting value x_0 with $|x_0| < x^*$, generating a sequence of alternately increasing and decreasing approximations x_n converging necessarily to $\alpha = 0$. The value of the critical number x^* can itself be computed by Newton's method applied to (4.59). The result is $x^* = 1.16556\ldots$. In a sense, we have here an example of *local convergence*, since convergence cannot hold for all $x_0 \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$. (If $x_0 = \frac{1}{2}\pi$, we even get thrown off to ∞.)

1 Calcul numeric

Problema 1.1. (a) Scrieţi formula de interpolare Hermite pentru $f \in C^4[-1,1]$ şi nodurile $x_0 = -1$ simplu, $x_1 = 0$ dublu şi $x_2 = 1$ simplu.

(b) Determinaţi o formulă de cuadratură de tip interpolator integrând formula precedentă termen cu termen.

(c) Transformaţi formula precedentă într-o formulă pe $[a, b]$. Este aceasta o formulă cunoscută?

Problema 1.2. Să se aplice metoda lui Newton ecuaţiei $\sin x = 0$ pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, dacă x_0 este soluţia nenulă a ecuaţiei $\text{tg}x = 2x$. Ce ar trebui să se întâmple şi ce se întâmplă în realitate?

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \simeq \underbrace{\int_{-1}^{1} H_3 f(x; -1, 0, 1)\,dx}_{\frac{1}{3}f(-1) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1)}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}(y+1)+a\right)\cdot\frac{b-a}{2}\,dy$$

$a \to -1$

$b \to 1$

$$\simeq \left(\frac{1}{3}f(a) + \frac{4}{3}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{3}f(b)\right)\frac{b-a}{2} = \frac{b-a}{6}\cdot\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{y+1}{1+1} \Rightarrow \boxed{y = \frac{2(x-a)}{b-a} - 1}$$

$$\Rightarrow x = \frac{b-a}{2}(y+1) + a$$

$\Downarrow$

Simpson!