Varianta A

Subiectul I (2 puncte)

1) Se consideră seria de puteri

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^{2013}+1}{n^{2015}4^n}(x-1)^n$$

pentru $x \in \mathbb{R}$.

Să se determine mulțimea de convergență a seriei.

2) Să se determine suma seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2015 \frac{2015^n}{n!\,2016^n}$$

Soluție

Notăm $a_n = \frac{2n^{2013}+1}{n^{2015}\cdot 4^n}$ și $x-1=y$.

observăm că

$$w = \overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{2(n+1)^{2013}+1}{(n+1)^{2015}4^{n+1}} \frac{n^{2015}4^n}{2n^{2013}+1} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{2n^{2013}\left[(1+\frac{1}{n})^{2013}+\frac{1}{n}\right]n^{2015}}{n^{2015}(1+\frac{1}{n})^{2015}\cdot 4\cdot n^{2013}\left(2+\frac{1}{n^{2013}}\right)}$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{2n^{2013+2015}\left[(1+\frac{1}{n})^{2013}+\frac{1}{n}\right]}{n^{2015+2013}(1+\frac{1}{n})^{2015}4\left(2+\frac{1}{n^{2013}}\right)} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{2\left[(1+\frac{1}{n})^{2013}+\frac{1}{n}\right]}{(1+\frac{1}{n})^{2015}4\left(2+\frac{1}{n^{2013}}\right)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Astfel că, raza de convergență pentru seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y^n$ este $R = \frac{1}{w} = 4$ și deci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y^n$ este convergentă pe $(-4,4)$.

Verificăm convergența în capetele intervalului.

Pentru $y=4$ seria devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^{2013}+1}{n^{2015}\cdot 4^n}\cdot 4^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^{2015}+1}{n^{2015}}$.

Fie $c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serie convergentă.

Evaluăm $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^{2013}+1}{n^{2015}} n^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^{2015}+n^2}{n^{2015}} = 2 \in (0,\infty)$

Cum $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este serie convergentă deducem din Criteriul la limită al Comparației că $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^{2015}+1}{n^{2015}}$ este și ea convergentă.

Pentru $y=-4$ seria devine $\sum_{n=1}^{\infty} (-4)^n \frac{2n^{2013}+1}{n^{2015}\cdot 4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^{2013}+1}{n^{2015}}$ adică o serie alternată.

Observăm că

$$b_{n+1}-b_n=\frac{2(n+1)^{2013}+1}{(n+1)^{2015}}-\frac{2n^{2013}+1}{n^{2015}}=\frac{2}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^{2015}}-\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^{2015}}=$$

$$=\underbrace{\frac{2}{(n+1)^2}-\frac{2}{n^2}}_{<0}+\underbrace{\frac{1}{(n+1)^{2015}}-\frac{1}{n^{2015}}}_{<0}<0$$

$\Rightarrow b_n$ este șir descrescător

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$ rezultă din Criteriul lui Leibniz că seria este convergentă.

Am demonstrat că intervalul de convergență pentru seria de puteri $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n y^n$ este $[-4,4]$ și ca atare $x-1\in[-4,4] \Rightarrow -4\le x-1\le 4 \Leftrightarrow$

$-3\le x\le 5$ sunt valorile lui x pentru care seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^{2013}+1}{n^{2015}4^n}(x-1)^n$ este convergentă. În concluzie mulțimea de convergență este $[-3,5]$.

2) Observăm că

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2015\,\frac{2015^n}{n!\,2016^n}=2015\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{2015}{2016}\right)^n}{n!}=2015\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{2015}{2016}\right)^n}{n!}-1\right)=$$

$$=2015\left(e^{2015/2016}-1\right)$$

Subiectul II (3 puncte)

(2.pct) a) Determinați punctele de extrem condiționat ale funcției $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, utilizând metoda multiplicatorilor lui Lagrange

$$f(x,y)=xy+x+y+1, \text{ cu restricția } xy+2x+2y=-2$$

(1.pct) b) Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\sqrt{|y|}}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

Să se arate că este funcție continuă.

<u>Soluție</u>

Notăm $F(x,y)=xy+2x+2y+2$

Considerăm funcția lui Lagrange

$$L(x,y;\lambda)=f(x,y)+\lambda F(x,y)=xy+x+y+1+\lambda xy+2\lambda x+2\lambda y+2\lambda$$

Determinăm punctele critice

$$\begin{cases}L'_x=0\\ L'_y=0\\ F(x,y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y+1+\lambda y+2\lambda=0\\ x+1+\lambda x+2\lambda=0\\ xy+2x+2y+2=0\end{cases}\overset{\lambda\neq-1}{\Leftrightarrow}\begin{cases}y=-\dfrac{1+2\lambda}{1+\lambda}\\ x=-\dfrac{1+2\lambda}{1+\lambda}\\ \left(\dfrac{1+2\lambda}{1+\lambda}\right)^2+2\left(-\dfrac{1+2\lambda}{1+\lambda}\right)+2\left(-\dfrac{1+2\lambda}{1+\lambda}\right)+2=0\end{cases}$$

Ultima ecuație o rescriem astfel

$$z^2 - 4z + 2 = 0 \quad \text{unde } z = \frac{1+2\lambda}{1+\lambda}$$

ce are soluțiile $z_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2}$

$$z_1 = \frac{4+\sqrt{8}}{2}$$

$$z_2 = \frac{4-\sqrt{8}}{2}$$

Pentru $z_1 = \frac{4+\sqrt{8}}{2} = 2+\sqrt{2}$ rezolvăm

$$\frac{1+2\lambda}{1+\lambda} = 2+\sqrt{2} \Leftrightarrow 1+2\lambda = (2+\sqrt{2})(1+\lambda) \Leftrightarrow (2-2-\sqrt{2})\lambda = 2+\sqrt{2}-1 \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{1+\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - 1}$$

Pentru $z_2 = 2-\sqrt{2}$ rezolvăm

$$\frac{1+2\lambda}{1+\lambda} = 2-\sqrt{2} \Leftrightarrow 1+2\lambda = (2-\sqrt{2})(1+\lambda) \Leftrightarrow (2-2+\sqrt{2})\lambda = 2-\sqrt{2}-1 \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \Rightarrow \boxed{\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1}$$

Am obținut punctele critice

$(x_1, y_1) = (-2-\sqrt{2}, -2-\sqrt{2})$ pentru $\lambda_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - 1$

$(x_2, y_2) = (-2+\sqrt{2}, -2+\sqrt{2})$ pentru $\lambda_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$

Caz $\lambda = -1$ nu convine

Scriem matricea hessiană

$$H_L(x,y) = \begin{pmatrix} L''_{x^2} & L''_{xy} \\ L''_{yx} & L''_{y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1+\lambda \\ 1+\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

Apelăm la diferențiala de ordin doi

$$d^2L(x,y;\lambda) = 2(1+\lambda)\,dx\,dy$$

Diferențiem legătura

$F'_x(x,y)dx + F'_y(x,y)dy = 0$ și o evaluăm în punctul (x_i, y_i) $i = \overline{1,2}$

sau echivalent $(y+2)dx + (x+2)dy = 0$

Pentru λ_1 și (x_1, y_1) avem $(-2-\sqrt{2}+2)dx + (-2-\sqrt{2}+2)dy = 0 \Leftrightarrow$

$-\sqrt{2}\,dx - \sqrt{2}\,dy = 0 \Rightarrow dx = -dy$

În concluzie $d^2L(x,y;x_1,y_1) = 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(-dy)\,dy > 0 \quad \forall y \neq -2-\sqrt{2}$

și în concluzie $(x_1, y_1) = (-2, -\sqrt{2}, -2-\sqrt{2})$ este punct de minim local condiționat.

Pentru x_2 și (x_2, y_2) avem

$$(-2+\sqrt{2}+2)dx + (-2+\sqrt{2}+2)dy = 0 \Rightarrow dx = -dy$$

În concluzie $d^2L(x,y;x_2,y_2) = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(-dy)dy < 0 \quad \forall y \neq -2+\sqrt{2}$

și în concluzie $(x_2,y_2) = (-2+\sqrt{2}, -2+\sqrt{2})$ este punct de maxim local condiționat.

b) Evaluăm

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left|\frac{x\sqrt{|y|}}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right| = \left|\frac{x\sqrt{|y|}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|.$$

Cum $x^2+y^2 \geq x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{x^2} = |x|$. Folosind această observație

$$\left|\frac{x\sqrt{|y|}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \frac{|x|\sqrt{|y|}}{|x|} = \sqrt{|y|} \quad \text{de unde}$$

$$\underbrace{-\sqrt{|y|}}_{\xrightarrow{(x,y)\to(0,0)}\ 0} \leq \underbrace{\frac{x\sqrt{|y|}}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\downarrow\ 0} \leq \underbrace{\sqrt{|y|}}_{\xrightarrow{(x,y)\to(0,0)}\ 0}$$

Subiectul III (1,5 puncte)

Rezolvați ecuația diferențială

$$4y'' - 4y' + y = 6xe^{2x}.$$

Soluție Rezolvăm ecuația omogenă

$$4y'' - 4y' + y = 0$$

Scriem ecuația caracteristică

$$4r^2 - 4r + 1 = 0$$

$\Delta = 16 - 16 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$ și $m_r = 2$.

De unde, $y_{geo} = c_1 x^{1-1} e^{(1/2)x} + c_2 x^{2-1} e^{(1/2)x} = c_1 e^{\frac{x}{2}} + c_2 x e^{\frac{x}{2}}$ cu $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Determinăm o soluție particulară a ecuației neomogene. Căutăm soluția particulară de forma

$$y_{par}(x) = (ax+b)e^{2x} \text{ cu } a,b \in \mathbb{R} \text{ ce se vor determina.}$$

Calculăm

$$y'_{par}(x) = a e^{2x} + 2(ax+b)e^{2x} = e^{2x}(a + 2ax + 2b)$$

$$y''_{par}(x) = 2e^{2x}(a+2ax+2b) + 2ae^{2x} = e^{2x}(2a + 4ax + 4b + 2a)$$

Înlocuim în ecuația $4y''-4y'+y=0$ și obținem

$$4(2a+4ax+4b+2a)-4(a+2ax+2b)+ax+b=6x$$

iar prin identificarea coeficienților

$$\begin{cases} 16a-8a+a=6 \\ 8a+16b+8a-4a-8b+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a=6 & \Rightarrow a=\frac{6}{9}=\frac{2}{3} \\ 12a+9b=0 & \Rightarrow {}^{4}\cancel{12}\cdot\frac{2}{\cancel{3}}+9b=0 \Rightarrow b=-\frac{8}{9} \end{cases}$$

iar $y_{par}(x)=\left(\frac{2}{3}x-\frac{8}{9}\right)e^{2x}$.

Soluția generală a ecuației neomogene este

$$y(x)=y_{ao}+y_{par}=C_1e^{\frac{x}{2}}+C_2xe^{\frac{x}{2}}+\left(\frac{2}{3}x-\frac{8}{9}\right)e^{2x}.$$

Subiectul IV

(1 pct.) a) Calculați $\int_0^{\infty} x^5 e^{-\frac{x^3}{3}}dx$.

(1,5 pct.) b) Desenați domeniul $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / 2x^2\le y\le -2x+4\}$ și calculați $\iint_D y\,dx\,dy$.

Soluție

a) Efectuăm schimbarea de variabilă

$$\frac{x^3}{3}=t \Rightarrow x=\sqrt[3]{3t} \Rightarrow dx=3^{-\frac{2}{3}}t^{-\frac{2}{3}}dt$$

Se schimbă limitele de integrare

$$x\to 0 \Rightarrow t\to 0$$
$$x\to\infty \Rightarrow t\to\infty$$

Integrala de calculat devine

$$\int_0^{\infty} x^5e^{-\frac{x^3}{3}}dx=\int_0^{\infty}3^{\frac{5}{3}}t^{\frac{5}{3}}e^{-t}\cdot 3^{-\frac{2}{3}}t^{-\frac{2}{3}}dt=3\int_0^{\infty}te^{-t}dt=3\int_0^{\infty}t^{2-1}e^{-t}dt$$
$$=3\Gamma(2)=3\cdot(2-1)!=3.$$

b) Reprezentăm parabola

$y=2x^2$

$x=1 \Rightarrow y=2$

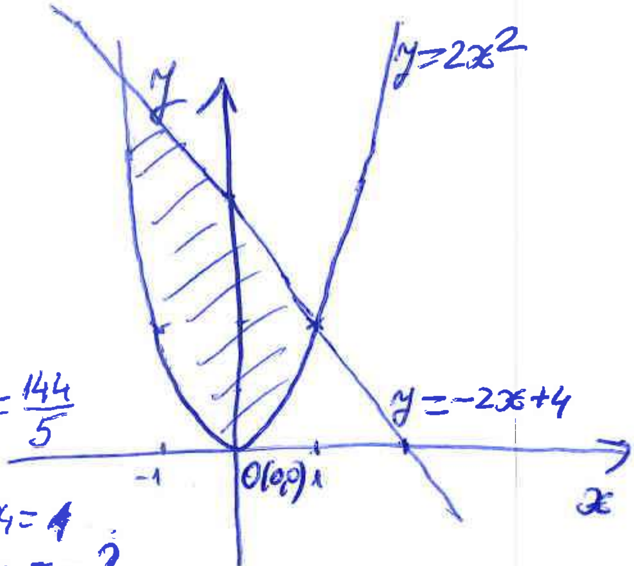
$y=-2x+4$

$x=0 \Rightarrow y=4 \Rightarrow A(0,4)$

$y=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow B(2,0)$

Avem

$$\iint_D y\,dx\,dy=\int_{-2}^{1}\int_{2x^2}^{-2x+4} y\,dy\,dx$$
$$=\int_{-2}^{1}\frac{y^2}{2}\Big|_{2x^2}^{-2x+4}dx$$
$$=\int_{-2}^{1}\left[\frac{(-2x+4)^2}{2}-\frac{4x^4}{4}\right]dx=\frac{144}{5}$$



Intersecția dintre dreaptă și parabolă $2x^2=-2x+4 \Rightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-2 \end{cases}$

Varianta B

Subiectul I (2 puncte)

1) Se consideră seria de puteri

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{6n^2+1}\right)^n(x-1)^n$$

pentru $x\in\mathbb{R}$.
Să se determine mulțimea de convergență a seriei.

2) Să se determine suma seriei

$$\sum_{n=0}^{\infty}2\,\frac{2015^n}{2016^{n+1}}$$

Soluție

1) Notăm $a_n=\left(\frac{n^2+n+1}{6n^2+1}\right)^n$ și $y=x-1$.

Calculăm

$$\omega=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n^2+n+1}{6n^2+1}=\frac{1}{6}$$

Raza de convergență este $R=\frac{1}{\omega}=6$ iar intervalul de convergență pentru $\sum_{n=1}^{\infty}a_ny^n$ este $(-6,6)$.

Pentru $y=6$ seria devine

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{6n^2+1}\right)^n6^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6n^2+6n+6}{6n^2+1}\right)^n$$

Observăm că

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6n^2+6n+6}{6n^2+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{6n+5}{6n^2+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{6n+5}{6n^2+1}\right)^{\frac{6n^2+1}{6n+5}}\right]^{\frac{6n+5}{6n^2+1}\cdot n}=e$$

și deci $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ este divergentă.

Pentru $y=-6$ seria devine $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{6n^2+1}\right)^n(-6)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{6n^2+6n+6}{6n^2+1}\right)^n$

observăm că

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6n^2+6n+6}{6n^2+1}\right)^n(-1)^n=\begin{cases}e & \text{dacă } n=2k\to\infty\\ -e & \text{dacă } n=2k+1\to\infty\end{cases}$$

②

și, deci $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ este divergentă.

Intervalul de convergență pentru seria ce depinde de x este obținut din $-6 < x-1 < 6$ sau echivalent $-5 < x < 7$ de unde $c=(-5,7)$.

2) observăm că

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2\,\frac{2015^n}{2016^{n+1}} = \frac{2}{2016}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2015}{2016}\right)^n = \frac{2}{2016}\,\frac{1}{1-\frac{2015}{2016}} = \frac{2}{2016}\,\frac{2016}{2016-2015} = 2$$

unde am folosit

$$\sum_{n=0}^{\infty} a q^n = a\sum_{n=0}^{\infty} q^n = a\,\frac{1}{1-q} \iff |q|<1,\ q\neq 0.$$

Subiectul II (2 p)

(2 pct) a) Determinați punctele de extrem condiționat ale funcției $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, utilizând metoda multiplicatorilor lui Lagrange

$$f(x,y) = xy + x \text{ cu restricția } xy+2x+y=-1.$$

(1 pct) b) Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^3}{x^4+2y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ \alpha, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

Să se arate că nu este continuă în $(0,0)$.

Soluție

Notăm $F(x,y) = xy+2x+y+1$.

Scriem funcția Lagrange

$$L(x,y;\lambda) = f(x,y)+\lambda F(x,y) = xy+x+\lambda xy+2\lambda x+\lambda y+\lambda$$

Determinăm punctele critice

$$\begin{cases} L'_x(x,y;\lambda)=0\\ L'_y(x,y;\lambda)=0\\ F(x,y)=0\end{cases} \iff \begin{cases} y+1+\lambda y+2\lambda=0\\ x+\lambda x+\lambda=0\\ xy+2x+y+1=0\end{cases} \overset{\lambda\neq -1}{\iff} \begin{cases} y=-\dfrac{1+2\lambda}{1+\lambda}\\ x=-\dfrac{\lambda}{1+\lambda}\\ \dfrac{\lambda(1+2\lambda)}{(1+\lambda)^2}+2\left(-\dfrac{\lambda}{1+\lambda}\right)-\dfrac{1+2\lambda}{1+\lambda}+1=0\end{cases}$$

Rezolvăm ecuația trei a sistemului

$$\frac{2\lambda^2+\lambda-(1+\lambda)(1+4\lambda)+\lambda^2+2\lambda+1}{(1+\lambda)^2}=0 \iff \frac{2\lambda^2+\lambda-1-5\lambda-4\lambda^2+\lambda^2+2\lambda+1}{(1+\lambda)^2}=0 \Rightarrow$$

$$-\lambda^2-2\lambda=0 \Rightarrow \lambda(\lambda+2)=0 \Rightarrow \begin{cases}\lambda=0\\ \text{sau}\\ \lambda=-2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(x_1,y_1)=(0,-1)\\ (x_2,y_2)=(-2,-3)\end{cases}$$

$-2+(-2)\cdot(-2)-2=0.$

Caz $\lambda=-1$ nu convine.

Scriem matricea hessiană

$$H_L(x,y)=\begin{pmatrix} L''_{x^2} & L''_{xy} \\ L''_{yx} & L''_{y^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1+\lambda \\ 1+\lambda & 0\end{pmatrix}$$

Matricea bordată a matricei hessiene este

$$\overline{H_L(x,y)}=\begin{pmatrix} 0 & -F'_x(x,y) & -F'_y(x,y) \\ -F'_x(x,y) & 0 & 1+\lambda \\ -F'_y(x,y) & 1+\lambda & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -(y+2) & -(x+1) \\ -(y+2) & 0 & 1+\lambda \\ -(x+1) & 1+\lambda & 0\end{pmatrix}$$

cu $\det \overline{H_L(x,y)}=2(y+2)(1+\lambda)(x+1)$.

Observăm că

i) Pentru $\lambda=0$, $(x_1,y_1)=(0,-1)$ avem

$(-1)^1\det\overline{H_L(0,-1)}=-2<0 \Rightarrow (0,-1)$ punct de maxim local condiționat

ii) Pentru $\lambda=-2$, $(x_2,y_2)=(-2,-3)$ avem

$(-1)^1\det\overline{H_L(-2,-3)}=+2>0 \Rightarrow (-2,-3)$ punct de minim local condiționat

b) Considerăm șirul $(x_n,y_n)=\left(\frac{1}{n},\frac{\alpha}{n}\right)$ cu $\alpha\in\mathbb{R}$. Când $n\to\infty$ avem $(x_n,y_n)\to(0,0)$ și

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{2\frac{1}{n}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^3}{\left(\frac{1}{n}\right)^4+2\left(\frac{\alpha}{n}\right)^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\alpha^3}{1+\alpha^4}=\frac{2\alpha^3}{1+\alpha^4}.$$ Cum $\alpha\in\mathbb{R}$

este arbitrar $\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nu există și în concluzie f nu este continuă în $(0,0)$.

Subiectul III (1,5 puncte)

Rezolvați ecuația diferențială

$$y''-5y'+6y=3e^{4x}\sin 2x.$$

Soluție

Rezolvăm ecuația diferențială omogenă

$$y''-5y'+6y=0.$$

Scriem ecuația caracteristică

$$r^2-5r+6=0,\quad \Delta=25-24=1\Rightarrow\begin{cases} r_1=\frac{5-1}{2}=2,\ m_{r_1}=1 \\ r_2=\frac{5+1}{2}=3,\ m_{r_2}=1\end{cases}$$

Avem două rădăcini reale, ambele au ordinul de multiplicitate 1.
Conform teoriei, soluția generală a ecuației omogene este

$$y_{geo}(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} \quad \text{cu } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Căutăm o soluție particulară a ecuației diferențiale neomogene de forma

$$y_{par}(x) = e^{4x}(a\cos 2x + b\sin 2x).$$

Calculăm

$$y'_{par}(x) = 4e^{4x}(a\cos 2x + b\sin 2x) + e^{4x}(-2a\sin 2x + 2b\cos 2x)$$
$$= e^{4x}\left[(4a+2b)\cos 2x + (4b-2a)\sin 2x\right]$$

$$y''_{par}(x) = 4e^{4x}\left[(4a+2b)\cos 2x + (4b-2a)\sin 2x\right] + e^{4x}\left[-2(4a+2b)\sin 2x + 2(4b-2a)\cos 2x\right]$$
$$= e^{4x}\left\{\left[4(4a+2b)+2(4b-2a)\right]\cos 2x + \left[4(4b-2a)-2(4a+2b)\right]\sin 2x\right\}$$

Înlocuim datele în ecuația propusă spre rezolvare

$$\underline{(16a+8b+8b-4a)\cos 2x} + (16b-8a-8a-4b)\sin 2x - \underline{5[(4a+2b)\cos 2x} +$$
$$(4b-2a)\sin 2x] + \underline{6(a\cos 2x} + b\sin 2x) = 3\sin 2x$$

Obținem sistemul

$$\begin{cases} 16a + 8b + 8b - 4a - 20a - 10b + 6a = 0 \\ 16b - 8a - 8a - 4b - 20b + 10a + 6b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + 6b = 0 \\ -6a - 2b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{9}{20} \\ b = -\frac{3}{20} \end{cases}$$

Soluția generală a ecuației diferențiale neomogene este

$$y(x) = y_{geo}(x) + y_{par}(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} - \frac{9}{20} e^{4x}\cos 2x - \frac{3}{20} e^{4x}\sin 2x$$

Subiectul IV (2,5 puncte)

(1 pct.) a) Calculați $\int_0^\infty x^{\frac{1}{4}}(1+\sqrt{x})^{-4}\,dx$

(1,5 pct.) b) Desenați domeniul $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y \le x \le 0,\ 4 \le x^2+y^2 \le 9\}$
și calculați $\iint_\Delta \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$.

Soluție

a) Efectuăm schimbarea de variabilă $y = \sqrt{x} \Rightarrow x = y^2 \Rightarrow dx = 2y\,dy$
se schimbă limitele de integrare $x \to 0 \Rightarrow y \to 0$
$x \to \infty \Rightarrow y \to \infty$

Integrala de calculat devine

$$\int_0^\infty x^{\frac{1}{4}}(1+\sqrt{x})^{-4}dx = \int_0^\infty \frac{(y^2)^{\frac{1}{4}}}{(1+y)^4}\,2y\,dy = 2\int_0^\infty \frac{y^{\frac{1}{2}}}{(1+y)^4}\,y\,dy$$

$$= 2\int_0^\infty \frac{y^{\frac{3}{2}}}{(1+y)^4}dy = 2\int_0^\infty \frac{y^{\frac{5}{2}-1}}{(1+y)^{\frac{5}{2}+\frac{3}{2}}}dy = 2B\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$$

$$= 2\frac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{5}{2}+\frac{3}{2})} = 2\frac{(\frac{5}{2}-1)\Gamma(\frac{3}{2})\cdot(\frac{3}{2}-1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(4)}$$

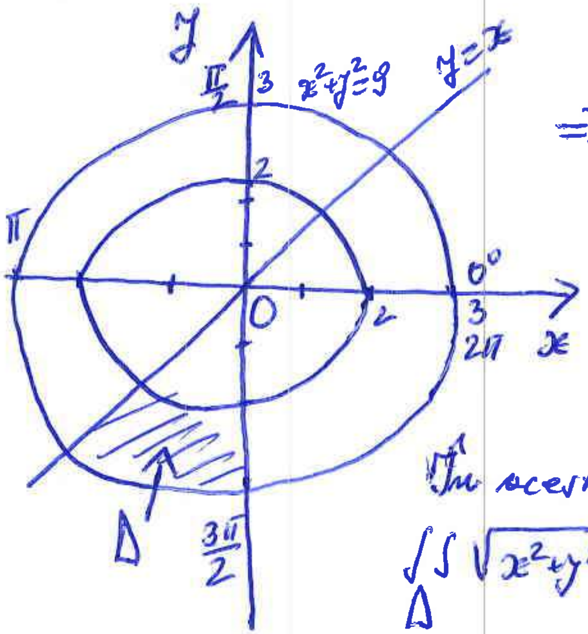
$$= 2\frac{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}-1)\Gamma(\frac{1}{2})\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}}{(4-1)!} = 2\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{3!} = 2\frac{\frac{3\cdot\pi}{8}}{6} = 2\cdot\frac{\pi}{16} = \frac{\pi}{8}$$

b) Efectuăm schimbarea de variabilă

$$T: \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$x^2+y^2 = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) = r^2 \Rightarrow 4 \le r^2 \le 9 \Rightarrow$

$2 \le r \le 3 \Rightarrow r\in[2,3]$.



$\Rightarrow \varphi\in\left[\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right]$

Domeniul Δ se transformă prin transformarea T în

$$\Delta' = \left\{(r,\varphi)\in\mathbb{R}^2 \mid r\in[2,3] \text{ și } \varphi\in\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]\right\}$$

În aceste condiții avem

$$\iint_\Delta \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_2^3\left(\int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} r^2\,d\varphi\,dr\right) = \int_2^3 r^2\varphi\Big|_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}}dr$$

$$= \int_2^3 r^2\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{5\pi}{4}\right)dr = \frac{\pi}{4}\,\frac{r^3}{3}\Big|_{r=2}^{r=3} = \left(\frac{3^3}{3}-\frac{2^3}{3}\right)\frac{\pi}{4} = \frac{3^3-2^3}{3}\cdot\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{27-8}{12}\pi = \frac{19\pi}{12}$$

Varianta C

Subiectul I (2 puncte)

(1.pct.) 1) Se consideră seria de puteri

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^{2014}+1}{n^{2016}}(x-1)^n$$

pentru $x \in \mathbb{R}$.

Să se determine mulțimea de convergență a seriei.

(1.pct.) 2) Să se determine suma seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2016 \frac{2016^n}{n!\, 2017^n}$$

Soluție

1) Notăm $a_n = \frac{2n^{2014}+1}{n^{2016}}$ și $y = x-1$.

Calculăm

$$w = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{2(n+1)^{2014}+1}{(n+1)^{2016}} \cdot \frac{n^{2016}}{2n^{2014}+1}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{2(n+1)^{2014}+1}{2n^{2014}+1} \cdot \frac{n^{2016}}{(n+1)^{2016}}\right|$$

$= \frac{2}{2}$ deoarece coeficientului lui $n^{2016+2014}$ de la numărător este 2

iar coeficientul lui $n^{2016+2014}$ de la numitor este 2.

Din Teorema Abel: pentru $y \in (-1,1)$ seria este convergentă

pentru $y \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$ seria este divergentă

Pentru $y=1$ seria devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^{2014}+1}{n^{2016}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^{2014}}{n^{2016}} + \frac{1}{n^{2016}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^{2016}}\right) < \infty$

deoarece $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2016}}$ sunt serii armonice convergente ($\alpha = 2 > 1$ și $\alpha = 2016 > 1$)

Pentru $y=-1$ seria devine $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^{2014}+1}{n^{2016}}$, adică o serie alternată.

Folosim faptul că o serie absolut convergentă este și convergentă și evaluăm

$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{2n^{2014}+1}{n^{2016}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^{2014}+1}{n^{2016}}$ care este o serie convergentă din cazul $y=1$.

Am demonstrat că $y \in [-1,1]$ sunt valorile pentru care seria este convergentă.

Mai mult, $-1 \le x-1 \le 1 \Rightarrow x \in [0,2]$ și mulțimea de convergență este

$C = [0,2]$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} 2016 \frac{2016^n}{n!\, 2017^n} = 2016\left(\sum \frac{\frac{2016^n}{2017^n}}{n!} - 1\right) = 2016\left(e^{2016/2017} - 1\right)$

Subiectul II (3 puncte) ②

(2.pct.) a) Determinați punctele de extrem condiționat ale funcției $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, utilizând metoda multiplicatorilor lui Lagrange

$$f(x,y)=xy+y \text{ cu restricția } xy+x+2y=-1$$

(1.pct.) b) Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\begin{cases}(2x+3y)\sin\dfrac{1}{2x^2+y^2} & \text{dacă } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dacă } (x,y)=(0,0).\end{cases}$

Să se arate că este funcție continuă în $(0,0)$

Soluție Fie $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $F(x,y)=xy+x+2y+1$. Considerăm funcția lui Lagrange

$$L(x,y;\lambda)=f(x,y)+\lambda F(x,y)=xy+y+\lambda xy+\lambda x+2\lambda y+\lambda.$$

Determinăm punctele critice condiționate

$$\begin{cases}L'_x(x,y)=0\\ L'_y(x,y)=0\\ F(x,y)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y+\lambda y+\lambda=0\\ x+1+\lambda x+2\lambda=0\\ xy+x+2y+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y(1+\lambda)=-\lambda\\ x(1+\lambda)=-1-2\lambda\\ xy+x+2y+1=0\end{cases}$$

$$\overset{\lambda\neq-1}{\Rightarrow}\begin{cases}y=-\dfrac{\lambda}{1+\lambda}\\ x=-\dfrac{2\lambda+1}{1+\lambda}\\ xy+x+2y+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-\dfrac{\lambda}{1+\lambda}\\ x=-\dfrac{2\lambda+1}{1+\lambda}\\ \dfrac{\lambda(2\lambda+1)}{(1+\lambda)^2}-\dfrac{2\lambda+1}{1+\lambda}-\dfrac{2\lambda}{1+\lambda}+1=0\ /(1+\lambda)^2\end{cases}\Rightarrow$$

$$-\lambda^2-2\lambda=0\Rightarrow\lambda^2+2\lambda=0\Rightarrow\lambda(\lambda+2)=0$$

$$\Rightarrow\ \lambda_1^*=0\Rightarrow y_1^*=0,\ x_1^*=-1 \quad (\text{Caz } 1.)$$

$$\lambda_2^*=-2\Rightarrow y_2^*=-2,\ x_2^*=-3 \quad (\text{Caz } 2)$$

Pentru $\lambda=-1\Rightarrow y(1+\lambda)=y\cdot0\neq-\lambda=1$ (verificăm întrucât am împărțit prin $(1+\lambda)$)

Calculăm matricea hessiană

$$L''_{x^2}(x,y)=(L'_x(x,y))'_x=(y+\lambda y+\lambda)'_x=0$$

$$L''_{xy}(x,y)=(L'_x(x,y))'_y=(y+\lambda y+\lambda)'_y=1+\lambda=L''_{yx}(x,y)$$

$$L''_{y^2}(x,y)=(L'_y(x,y))'_y=(x+1+\lambda x+2\lambda)'_y=0$$

de unde

Matricea bordată a matricei hessiene este

$$\overline{H_L(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & F'_x(x,y) & F'_y(x,y) \\ F'_x(x,y) & 0 & 1+\lambda \\ F'_y(x,y) & 1+\lambda & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & y+1 & x+2 \\ y+1 & 0 & 1+\lambda \\ x+2 & 1+\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

Observăm că

Caz 1. Pentru $\lambda = 0$, $x_1^* = -1$, $y_1^* = 0$ avem

$$\overline{H_L(-1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ și } \det \overline{H_L(-1,0)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4.$$

Cum $(-1)^1 \det \overline{H_L(-1,0)} = -4 < 0 \Rightarrow (-1,0)$ punct de maxim local condiționat

Caz 2. Pentru $\lambda_2^* = -2$, $x_2^* = -3$, $y_2^* = -2$ avem

$$\overline{H_L(-3,-2)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ și } \det \overline{H_L(-3,-2)} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2.$$

Cum $(-1)^1 \det \overline{H_L(-3,-2)} = 2 > 0 \Rightarrow (-3,-2)$ punct de minim local condiționat.

b) f continuă în $(0,0) \Leftrightarrow f(0,0) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

$$0 \le \underbrace{\left|(2x+3y)\sin\frac{1}{2x^2+y^2}\right|}_{\to 0} \le |2x+3y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

de unde $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (2x+3y)\sin\frac{1}{2x^2+y^2} = 0 = f(0,0) \Rightarrow f$ continuă în $(0,0)$.

Subiectul III (1,5 puncte) Rezolvați ecuația diferențială

$$9y'' - 6y' + y = 12xe^{-x}.$$

Soluție

Rezolvăm ecuația omogenă: $9r^2 - 6r + 1 = 0$

$$\Delta = 36 - 4\cdot 9 = 0 \Rightarrow r_{1,2}: \; r_1 = \frac{6+0}{18} = \frac{1}{3}, \; r_2 = \frac{6-0}{18} = \frac{1}{3} \Rightarrow r_1 = r_2 = \frac{1}{3} \text{ și } m_r = 2.$$

$\Rightarrow y_{gen} = c_1 x^{1-1} e^{1/3\, x} + c_2 x^{2-1} e^{1/3\, x} = c_1 e^{\frac{1}{3}x} + c_2 x e^{\frac{1}{3}x}$; c_1, c_2 constante $\in \mathbb{R}$.

Determinăm o soluție particulară a ecuației neomogene. Căutăm soluția particulară de forma

$$y_{par}(x) = (ax+b)e^{-x}, \quad a,b \in \mathbb{R}$$

Calculăm

$$y'_{par}(x) = -e^{-x}(ax+b) + a e^{-x} = (a-b)e^{-x} - axe^{-x}$$

$$y''_{par}(x) = -ae^{-x} + e^{-x}(ax+b) - ae^{-x} = -2ae^{-x} + e^{-x}(ax+b).$$

Înlocuim în ecuația $9y'' - 6y' + y = 12xe^{-x}$ și obținem

$$-18ae^{-x} + 9e^{-x}(ax+b) - 6ae^{-x} + 6e^{-x}(ax+b) + (ax+b)e^{-x} = 12xe^{-x} \,/ : e^{-x}$$

și rezultă

$$-18a + 9(ax+b) - 6a + 6(ax+b) + (ax+b) = 12x$$

de unde

$$16ax + 16b - 24a = 12x \Rightarrow \begin{cases} 16a = 12 \\ 16b - 24a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a = 3 \\ 2b - 3a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = \frac{9}{8} \end{cases}$$

iar $y_{par}(x) = \left(\frac{3}{4}x + \frac{9}{8}\right)e^{-x}$.

Conform teoriei soluția generală a ecuației neomogene este

$$y(x) = y_{o} + y_{par} = C_1 e^{\frac{1}{3}x} + C_2 x e^{\frac{1}{3}x} + \left(\frac{3}{4}x + \frac{9}{8}\right)e^{-x}.$$

Subiectul IV (2,5 puncte)

(1. pct.) a) Calculați $\displaystyle\int_0^\infty x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

(1,5 pct.) b) Desenați domeniul $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 3x^2 \le y \le 3x + 18\}$ și calculați $\displaystyle\iint_\Delta x\,dxdy$

Soluție

a) Notăm $\frac{x^2}{2} = t \Rightarrow x^2 = 2t \Rightarrow 2xdx = 2dt \Rightarrow xdx = dt$, $x = \sqrt{2t}$. Prin schimbarea de variabilă se schimbă limitele de integrare

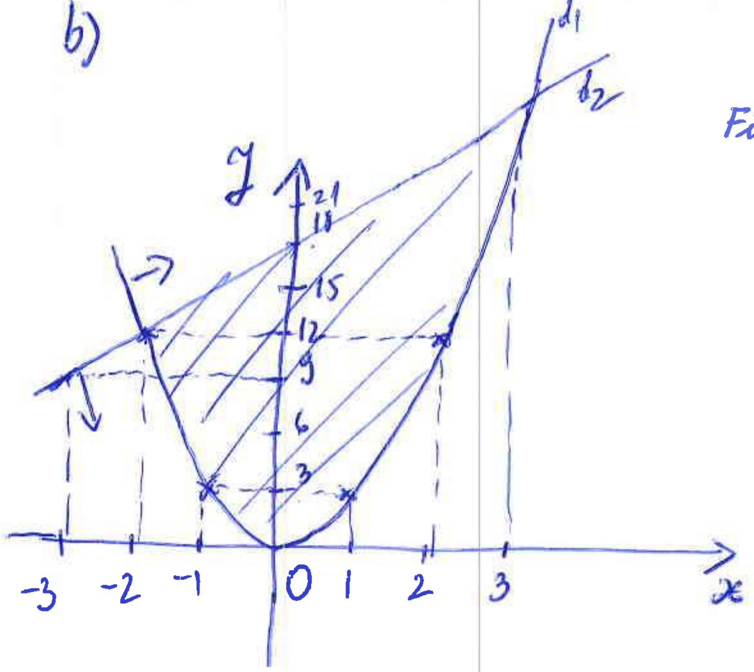
x	0	∞
y	0	∞

Integrala de calculat devine

$$\int_0^\infty x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \int_0^\infty (\sqrt{2t})^3 e^{-t}dt = 2\sqrt{2}\int_0^\infty t^{\frac{3}{2}}e^{-t}dt = 2\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{2\pi}$$

deoarece $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$.

b)



Fie $d_1: 3x^2 = y$

x	0	± 1	± 2	± 3
y	0	3	12	27

$d_2: y = 3x+18$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	12	15	18	21	24	27

Fie $O(0,0)$: $y \le 3x+18$ (A)
$0 \le 0+18$

Fie $A(1,0)$: $3x^2 \le y$ (F)
$3 \le 0$

$d_1 \cap d_2 = \{B, C\}$, $B(-2,12)$, $C(3,27)$

$(3x^2 = 3x+18 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) = 0)$

$$\Rightarrow \Delta' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, -2 \le x \le 3,\ 3x^2 \le y \le 3x+18\}$$

$$I = \iint_{\Delta} x \, dx\, dy = \int_{-2}^{3} \left(\int_{3x^2}^{3x+18} x \, dy \right) dx = \int_{-2}^{3} \left(x \int_{3x^2}^{3x+18} 1 \, dy \right) dx$$

$$I = \int_{-2}^{3} \left(x \cdot y \Big|_{3x^2}^{3x+18} \right) dx = \int_{-2}^{3} \left[x(3x+18-3x^2) \right] dx = \int_{-2}^{3} (-3x^3+3x^2+18x)\, dx$$

$$= \left(-\frac{3}{4}x^4 + x^3 + 9x^2 \right) \Big|_{-2}^{3} = -\frac{3}{4} \cdot 81 + 27 + 81 + \frac{3}{4} \cdot 16 + 8 - 9 \cdot 4 = 80 - \frac{195}{4} = \frac{125}{4}.$$

Varianta Δ

Subiectul I (2 puncte)

1) Se consideră seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n^2+4n+6}{8n^2+2}\right)^n\left(\frac{x}{3}-1\right)^n$

pentru $x\in\mathbb{R}$.

Să se determine mulțimea de convergență a seriei.

2) Să se determine suma seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2\,\frac{2016^n}{2017^{n+1}}$$

Soluție

1) Notăm $a_n=\left(\frac{4n^2+4n+6}{8n^2+2}\right)^n$ și $y=\frac{x}{3}-1$.

Calculăm

$$\omega=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+4n+6}{8n^2+2}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$

Raza de convergență este $R=\frac{1}{\omega}=2$ iar intervalul de convergență pentru $\sum_{n=1}^{\infty}a_n y^n$ este $(-2,2)$.

Pentru $y=2$ seria devine $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n^2+4n+6}{8n^2+2}\right)^n 2^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{8n^2+8n+12}{8n^2+2}\right)^n$

Observăm că

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{8n^2+8n+12}{8n^2+2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{8n+10}{8n^2+2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{8n+10}{8n^2+2}\right)^{\frac{8n^2+2}{8n+10}}\right]^{n\frac{8n+10}{8n^2+2}}=e$$

și deci $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{8n^2+8n+12}{8n^2+2}\right)^n$ este divergentă.

Pentru $y=-2$ seria devine $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n^2+4n+6}{8n^2+2}\right)^n(-2)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{8n^2+8n+12}{8n^2+2}\right)^n$

Observăm că

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{8n^2+8n+12}{8n^2+2}\right)^n(-1)^n=\begin{cases} e & \text{dacă } n=2k\to\infty\\ -e & \text{dacă } n=2k+1\to\infty\end{cases}$$

și, deci $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{8n^2+8n+12}{8n^2+2}\right)^n$ este divergentă.

Intervalul de convergență pentru seria ce depinde de x este obținut din $-2<\frac{x}{3}-1<2$ sau echivalent $-1<\frac{x}{3}<3$ de unde $C=(-3,9)$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{2016^n}{2017^n}=\frac{2}{2017}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2016}{2017}\right)^n=\frac{2}{2017}\frac{2016}{2017}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2016}{2017}\right)^n$ adică o serie geometrică cu rația $q=\frac{2016}{2017}$. În concluzie

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{2016^n}{2017^n}=\frac{2}{2017}\frac{2016}{2017}\frac{1}{1-\frac{2016}{2017}}=\frac{2}{2017}\frac{2016}{2017}\cdot 2017=\frac{4032}{2017}.$$

Subiectul II (3 puncte)

(2 pct) a) Determinați punctele de extrem condiționat ale funcției $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, utilizând metoda multiplicatorilor lui Lagrange

$$f(x,y)=xy+2x+y+2 \text{ cu restricția } xy+3x+2y=-4.$$

(1 pct) b) Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\begin{cases}\frac{3|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ \beta, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, $\beta\in\mathbb{R}$.

Să se arate că funcția nu este continuă în $(0,0)$.

Soluție

Notăm $F(x,y)=xy+3x+2y+4$.

Scriem funcția Lagrange:

$$L(x,y;\lambda)=f(x,y)+\lambda F(x,y)=xy+2x+y+2+\lambda xy+3\lambda x+2\lambda y+4\lambda$$

Aflăm punctele critice

$$\begin{cases}L'_x(x,y;\lambda)=0\\ L'_y(x,y;\lambda)=0\\ F(x,y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y+2+\lambda y+3\lambda=0 & \lambda\neq-1\\ x+1+\lambda x+2\lambda=0\\ xy+3x+2y+4=0\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}y=\frac{-2-3\lambda}{1+\lambda}\\ x=\frac{-1-2\lambda}{1+\lambda}\\ \frac{(2+3\lambda)(1+2\lambda)}{(1+\lambda)^2}-3\frac{1+2\lambda}{1+\lambda}-2\frac{2+3\lambda}{1+\lambda}+4=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{6\lambda^2+7\lambda+2}{(1+\lambda)^2}-\frac{12\lambda+7}{1+\lambda}+4=0\Leftrightarrow\frac{6\lambda^2+7\lambda+2-12\lambda^2-19\lambda-7}{(1+\lambda)^2}+4=0$$

$$\Rightarrow\frac{-6(1+\lambda)^2+1}{(1+\lambda)^2}+4=0\Leftrightarrow\frac{1}{(1+\lambda)^2}=2\Rightarrow\frac{1}{1+\lambda}=\pm\sqrt{2}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=\frac{1}{\sqrt{2}}-1\\ \lambda_2=\frac{-1}{\sqrt{2}}-1\end{cases}$$

Observăm că $\lambda=-1$ nu convine

Scriem matricea hesiană ③

$$H_L(x,y)=\begin{pmatrix} L''_{x^2} & L''_{xy} \\ L''_{yx} & L''_{y^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1+\lambda \\ 1+\lambda & 0\end{pmatrix}.$$

Matricea bordată a matricei hessiene este

$$\overline{H_L(x,y)}=\begin{pmatrix} 0 & -(F'_x(x,y)) & (-F'_y(x,y)) \\ -(F'_x(x,y)) & 0 & 1+\lambda \\ -(F'_y(x,y)) & 1+\lambda & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -(y+3) & -(x+2) \\ -(y+3) & 0 & 1+\lambda \\ -(x+2) & 1+\lambda & 0\end{pmatrix}$$

cu $\det \overline{H_L(x,y)} = 2(y+3)(1+\lambda)(x+2)$.

Cum $y+3=\frac{-2-3\lambda}{1+\lambda}+3=\frac{1}{1+\lambda}$ și $x+2=\frac{-1-2\lambda+2+2\lambda}{1+\lambda}=\frac{1}{1+\lambda}$

deducem că

$$\det \overline{H_L(x,y)} = 2\,\frac{1}{1+\lambda}(1+\lambda)\cdot\frac{1}{1+\lambda}=\frac{2}{1+\lambda}.$$

Astfel că, pentru

$$\lambda_1=\frac{1}{\sqrt2}-1 \Rightarrow \begin{cases} y_1=\frac{-2-3\left(\frac{1}{\sqrt2}-1\right)}{\sqrt2}=(\sqrt2)\left[-2-3\left(\frac{1}{\sqrt2}-1\right)\right]=\sqrt2-3 \\ x_1=(\sqrt2)\left[-1-2\left(\frac{1}{\sqrt2}-1\right)\right]=\sqrt2-2\end{cases}$$

$$(-1)^1\det \overline{H_L(x_1,y_1)}=-2\sqrt2<0$$

de unde concluzia că (x_1,y_1) este punct de maxim local.

În cazul secund $\lambda_2=-\frac{1}{\sqrt2}-1$ obținem

$$x_2=-(\sqrt2)\left[-1-2\left(-\frac{1}{\sqrt2}-1\right)\right]=-\sqrt2-2$$

$$y_2=-(\sqrt2)\left[-2-3\left(-\frac{1}{\sqrt2}-1\right)\right]=-\sqrt2-3$$

$$(-1)^1\det \overline{H_L(x_2,y_2)}=+2\sqrt2<0$$

de unde concluzia că (x_2,y_2) este punct de minim local.

b) Luăm două șiruri x_n și y_n astfel $(x_n,y_n)=\left(\frac{1}{n},\frac{\alpha}{n}\right)$ cu $\alpha\in\mathbb{R}$.

Când $n\to\infty$ avem $(x_n,y_n)\to(0,0)$ și limita devine:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot\left|\frac{1}{n}\right|}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{\alpha^2}{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\left|\frac{1}{n}\right|}{\left|\frac{1}{n}\right|\sqrt{1+\alpha^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\alpha^2}}\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n)$$ nu

există și în concluzie $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nu există. Am demonstrat că funcția nu este continuă în $(0,0)$.

Subiectul III (1,5 puncte)

Rezolvați ecuația diferențială

$$y''-7y'+12y=2e^{2x}\cos 3x.$$

Soluție. Rezolvăm ecuația diferențială omogenă

$$y''-7y'+12y=0.$$

Scriem ecuația caracteristică

$$r^2-7r+12=0$$

$$\Delta=7^2-4\cdot 12=1 \Rightarrow r_{1,2}=\frac{7\pm 1}{2} \begin{cases} r_1=4, & m_{r_1}=1 \\ r_2=3, & m_{r_2}=1. \end{cases}$$

Avem două rădăcini reale, ambele cu ordinul de multiplicitate 1. Conform teoriei, soluția generală a ecuației omogene este

$$y_{geo}(x)=c_1e^{3x}+c_2e^{4x} \quad \text{cu } c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

Căutăm o soluție particulară a ecuației diferențiale neomogene de forma

$$y_{par}(x)=e^{2x}(a\cos 3x+b\sin 3x).$$

Calculăm

$$y'_{par}(x)=2e^{2x}(a\cos 3x+b\sin 3x)+e^{2x}(-3a\sin 3x+3b\cos 3x)$$
$$=e^{2x}[(2a+3b)\cos 3x+(2b-3a)\sin 3x]$$

$$y''_{par}(x)=2e^{2x}[(2a+3b)\cos 3x+(2b-3a)\sin 3x]+e^{2x}[-3(2a+3b)\sin 3x+3(2b-3a)\cos 3x]$$
$$=e^{2x}[(4a+6b+6b-9a)\cos 3x+(4b-6a-6a-8b)\sin 3x].$$

Înlocuim datele în ecuația propusă spre rezolvare:

$$(-5a+12b)\cos 3x+(-5b-12a)\sin 3x-7(2a+3b)\cos 3x-7(2b-3a)\sin 3x+12a\cos 3x+$$
$$+12b\sin 3x=2\cos 3x$$

obținem sistemul

$$\begin{cases} -5a+12b-14a-21b+12a=2 \\ -5b-12a-14b+21a+12b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7a-8b=2 \\ 9a-7b=0 \end{cases} \Rightarrow a=-\frac{7}{65} \text{ și } b=-\frac{9}{65}$$

Soluția generală a ecuației diferențiale neomogene este

$$y(x)=y_{geo}(x)+y_{par}(x)=c_1e^{3x}+c_2e^{4x}+\left(-\frac{7}{65}e^{2x}\cos 3x-\frac{9}{65}e^{2x}\sin 3x\right)$$

Subiectul IV (2,5 puncte)

(1 pct.) a) Calculați $\int_0^\infty \sqrt{x}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{-8}dx$

(1,5 pct.) b) Desenați domeniul $\Delta=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x\le y\le 0,\ 1\le x^2+y^2\le 4\}$ și calculați $\iint_\Delta (x^2+y^2)\,dx\,dy$.

Efectuăm schimbarea de variabilă:

$x^{\frac{1}{4}} = y \Rightarrow x = y^4 \Rightarrow dx = 4y^3 dy$

$x \to 0 \Rightarrow y \to 0$

$x \to \infty \Rightarrow y \to \infty$

Integrala de calculat devine

$$I = \int_0^\infty \frac{y^2}{(1+y)^8} 4y^3 dy = 4 \int_0^\infty \frac{y^5}{(1+y)^8} dy.$$

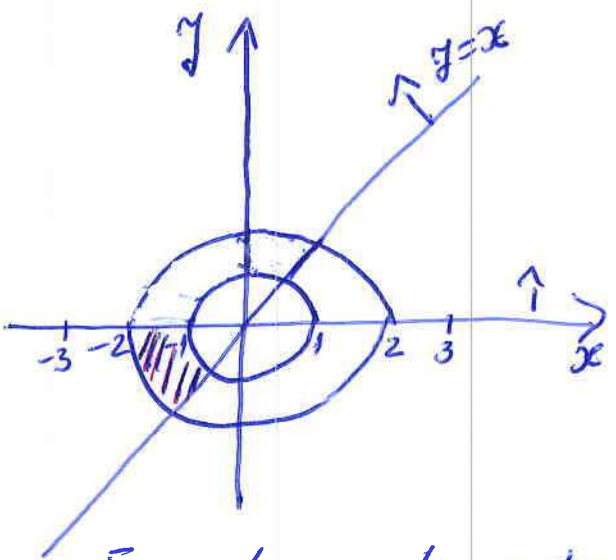
Identificăm

$p-1 = 5 \Rightarrow p = 6$

$p+q = 8 \Rightarrow q = 2$

Astfel că

$$I = 4\beta(6,2) = 4\frac{\Gamma(6)\cdot\Gamma(2)}{\Gamma(8)} = 4\frac{5!\cdot 1!}{7!} = \frac{4}{6\cdot 7} = \frac{4}{42} = \frac{2}{21}$$



Desenăm cercurile $x^2+y^2=1^2$ şi $x^2+y^2=2^2$

dreapta $y=x$

Pentru $x \le y$, luăm punctul $(1,0) \Rightarrow 1 \le 0$ (F) $\Rightarrow$ va fi partea de deasupra dreptei.

Ţinem cont că $y \le 0$. Astfel, D va fi partea haşurată.

Facem trecerea la coordonate polare

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$ unde $r \in [1,2]$ şi $\varphi \in [\pi, \pi + \frac{\pi}{4}] = [\pi, \frac{5\pi}{4}]$

Rescriem integrala sub forma

$$I = \int_1^2 \left(\int_\pi^{5\pi/4} (r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)\cdot r\, d\varphi \right) dr = \int_1^2 \left(\int_\pi^{5\pi/4} r^3 d\varphi \right) dr$$

$$= \int_1^2 r^3 \varphi \Big|_\pi^{5\pi/4} dr = \int_1^2 r^3 \frac{\pi}{4} dr = \frac{r^4}{4}\frac{\pi}{4}\Big|_1^2 = \left(\frac{2^4}{4} - \frac{1}{4}\right)\frac{\pi}{4} = \frac{15}{16}\pi$$