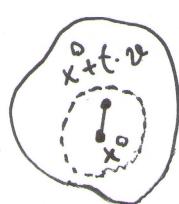


5. Derivate parțiale și diferențială

În cadrul paragrafului considerăm $A \subseteq \mathbb{R}^m$ multime deschisă



A

$\forall x^0 \in A : \exists r > 0$ a.î. $B(x^0, r) \subseteq A$

$\Rightarrow \forall u \in \mathbb{R}^m : x^0 + t \cdot u \in A$ pentru $t \in \mathbb{R}$, $|t| < 1$.

Def: Fie $f = f(x_1, \dots, x_m) : A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție, $x^0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in A$ un punct și $i \in \{1, \dots, m\}$.

a) Dacă există limită

$$(1) \quad \lim_{x_i \rightarrow x_i^0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, \dots, x_m^0)}{x_i - x_i^0}$$

ea se numește derivata parțială a lui f în x^0 în raport cu variabila x_i . Se notează cu $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$ sau $f'_{x_i}(x^0)$.

b) Dacă limita (1) există și este număr finit atunci spunem că f este derivabilă parțial în x^0 în raport cu variabila x_i .

c) Dacă f este derivabilă parțial în punctul x^0 în raport cu fiecare variabilă x_1, \dots, x_m atunci spunem că f este derivabilă parțial în x^0 .

Notând $x_i - x_i^0 = t$ limita (1) se scrie astfel

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i^0 + t, x_{i+1}^0, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, \dots, x_m^0)}{t} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x^0 + t \cdot e^i) - f(x^0)}{t}, \text{ unde } e^i = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0)$$

Considerăm funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) = f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x, x_{i+1}^0, \dots, x_m^0)$$

$$\Rightarrow g'(x_i^0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(x_i^0 + t) - g(x_i^0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$$

Obs: Calculul derivatei parțiale în raport cu o variabilă se poate efectua utilizând regulile de derivare obișnuite, păstrând celelalte variabile ale funcției ca parametri constanti.

Ex: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = (x_1)^2 \cdot x_2 + x_1$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2x_1 x_2 + 1, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = (x_1)^2.$$

Def: Fie $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție, $x^0 \in A$ și $v \in \mathbb{R}^m$. Dacă există limita

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x^0 + t \cdot v) - f(x^0)}{t}$$

ea se numește derivata lui f în x^0 după direcția vectorului v și se notează cu $f'_v(x^0)$. Dacă limita este finită atunci spunem că f este derivabilă în x^0 după direcția vectorului v .

Se observă $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = f'_{e_i}(x^0), \quad i = \overline{1, m}$

Obs: Derivatele partiiale ale unei functii sunt cosuri particulare ale derivatei după direcția unui vector, sau ale după direcția vectorilor canoni.

Idef: Fie $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ o functie derivabila partial intr-un punct $x^0 \in A$.

a) Vectorul

$$\nabla f(x^0) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(x^0) \right) \in \mathbb{R}^m$$

se numeste gradientul functiei f în x^0 .

b) Aplicatie lineară $df(x^0): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$df(x^0)(u) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) \cdot u_i, \quad \forall u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m$$

se numeste diferentiala functiei f în x^0 (de argument u)

$$\text{Obs: } df(x^0)(u) = \nabla f(x^0) \cdot u, \quad \forall u \in \mathbb{R}^m$$

Interpretare geometrică:

Fie $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f = f(x, y)$ și $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

(5): $z = f(x, y)$ este ecuația unei suprafețe în \mathbb{R}^3 .

(P): $z - f(x_0, y_0) = df(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0)$ este ecuația planului tangent la suprafața S în punctul $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Ex: Fie $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{(x_1)^2 \cdot x_2}{(x_1)^4 + (x_2)^2}, & (x_1, x_2) \neq 0_2 \\ 0, & (x_1, x_2) = 0_2 \end{cases}$$

f nu este continuă în 0_2 deoarece $\nexists \lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)} f(x_1, x_2)$,

dar f este derivabilă parțial în 0_2 , și ar derivabilă după orice direcție în acest punct. (la semință)

Obs: Derivabilitatea parțială nu reprezintă o extindere satisfăcătoare a noțiunii de derivabilitate de pe axa reală.

Def: O funcție $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ se numește de clasă C^1 în punctul $x^0 \in A$ dacă

1. $\exists r > 0$ a.ș. f este derivabilă parțial în orice punct al mulțimii $B(x^0, r) \cap A$.

2. Funcțiile $\frac{\partial f}{\partial x_i}: B(x^0, r) \cap A \rightarrow \mathbb{R}$ sunt continue în x^0 ,

$\forall i = \overline{1, m}$.

Prop: Dacă $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție de clasă C^1 în punctul $x^0 \in A$, atunci au loc afirmațiile:

1. f este continuă în x^0 .

2. f este derivabilă după orice direcție în x^0 și are loc

$$\forall v \in \mathbb{R}^m, \quad f'_v(x^0) = df(x^0)(v).$$

T (derivarea parțială a funcțiilor compuse)

Fie $m, p \in \mathbb{N}^*$, $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $B \subseteq \mathbb{R}^p$ multimi deschise, $x^0 \in A$, $f = (f_1, \dots, f_p): A \rightarrow \mathbb{R}^p$ o funcție vectorială areând proprietățile $f(A) \subseteq B$ și f_1, \dots, f_p sunt funcții de clasă C^1 în punctul x^0 , iar $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^1 în punctul $u^0 = f(x^0)$. Atunci funcția compusă $g \circ f: A \rightarrow \mathbb{R}$ este de clasă C^1 în x^0 și are loc formula

$$(*) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} (g \circ f)(x^0) = \sum_{k=1}^p \frac{\partial g}{\partial u_k} (f(x^0)) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_i} (x^0), \quad i = \overline{1, m}$$

unde $f = f(x_1, \dots, x_m)$ și $g = g(u_1, \dots, u_p)$.

Def.: Cu notările din teorema anterioară, matricea

$$J(f)(x^0) \stackrel{\text{mat}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} (x^0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} (x^0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} (x^0) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_m} (x^0) \end{pmatrix}$$

se numește matricea Jacobi a funcției f în punctul x^0 .

Obs.: Formula $(*)$ se scrie matricial astfel

$$\nabla(g \circ f)(x^0) = \nabla g(f(x^0)) \cdot J(f)(x^0)$$

Ca particular $m=p=1$: $(g \circ f)'(x^0) = g'(f(x^0)) \cdot f'(x^0)$

Def: Fie $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție, $x^0 \in A$ și $i, j \in \{1, \dots, m\}$

a) Dacă $\exists r > 0$ a.î. f este derivabilă parțial în raport cu variabila x_i în orice punct al mulțimii $B(x^0, r) \cap A$, iar funcția $\frac{\partial f}{\partial x_i}: B(x^0, r) \cap A \rightarrow \mathbb{R}$ este la rândul ei derivabilă parțial în raport cu variabila x_j în punctul x^0 , atunci spunem că f este de două ori derivabilă parțial în raport cu variabilele (x_i, x_j) în punctul x^0 și notăm

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (x^0) \stackrel{\text{mat}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} (x^0) = f''_{x_i x_j} (x^0).$$

b) Spunem că f este de două ori derivabilă parțial în punctul x^0 dacă toate cele m^2 deriveate parțiale de ordinul doi $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, $i, j = \overline{1, m}$, există și sunt finite în x^0 .

c) Spunem că f este de două c² în punctul x^0 dacă $\exists r > 0$ a.î. f este de două ori derivabilă parțial în orice punct al mulțimii $B(x^0, r) \cap A$, iar funcția $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}: B(x^0, r) \cap A \rightarrow \mathbb{R}$

sunt continue în x^0 , $\forall i, j = \overline{1, m}$.

Natural: $i \neq j$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} (x^0)$ - derivata parțială mixtă în x^0

$$i = j, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} (x^0) \stackrel{\text{mat}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} (x^0) = f''_{x_i x_i} (x^0).$$

Ex: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = (x_1)^2 \cdot x_2 + x_1$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2x_1 x_2 + 1, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = (x_1)^2.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) = (2x_1 x_2 + 1)'_{x_1} = 2x_2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) = ((x_1)^2)'_{x_2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = ((x_1)^2)'_{x_1} = 2x_1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) = (2x_1 x_2 + 1)'_{x_2} = 2x_1$$

T (criteriul lui Schwarz)

Dacă $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție de două cîtătinu în punctul $x^* \in A$,

atunci

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x^*) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^*), \quad \forall i, j = \overline{1, m}, \quad i \neq j$$

Def: Fie $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de două variabile diferențială parțială într-un punct $x^* \in A$.

a) Funcția $d^2 f(x^*): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$d^2 f(x^*)(u) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x^*) \cdot u_i \cdot u_j, \quad \forall u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m$$

se numește diferențială de ordinul doi a funcției f în x^* .

b) Matricea pătrată

$$H(f)(x^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x^0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x^0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1}(x^0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x^0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x^0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_2}(x^0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m}(x^0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_m}(x^0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}(x^0) \end{pmatrix}$$

se numește matricea hessiană a funcției f în punctul x^0 .

Obs: În ipotezele criteriului lui Schwarz avem că matricea $H(f)(x^0)$ este simetrică și diferențială de ordinul doi derivă

$$d^2 f(x^0)(u) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x^0) \cdot u_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0) \cdot u_i \cdot u_j$$

casuri particulare:

$$f = f(x, y), \quad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2.$$

$$d^2 f(x, y)(u_1, u_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \cdot u_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \cdot u_2^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \cdot u_1 \cdot u_2$$

$$f = f(x, y, z), \quad (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3.$$

$$d^2 f(x, y, z)(u_1, u_2, u_3) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) \cdot u_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) \cdot u_2^2 +$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) \cdot u_3^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) \cdot u_1 \cdot u_2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z) \cdot u_1 \cdot u_3 +$$

$$+ 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z) \cdot u_2 \cdot u_3$$