Integrare numerică

Radu T. Trîmbiţaş

27 aprilie 2020

1 Formule repetate

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabilă pe $[a, b]$, $n \in \mathbb{N}$, $h = (b-a)/n$ şi nodurile echidistante $x_k = a + kh$, $k = 0, 1, \dots, n$.

Formula repetată a trapezului:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right] + R_1(f),$$

unde

$$R_1(f) = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$

Formula repetată a lui Simpson:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6m}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{m-1} f(x_{2k}) + 4\sum_{k=1}^{m} f(x_{2k-1})\right] + R_2(f),$$

unde $n = 2m$; $h = (b-a)/(2m)$; $x_k = a + kh$; $k = 0, 1, ..., 2m$, iar

$$R_2(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880m^4}.$$

Formula dreptunghiurilor:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right) + R_1(f)$$

unde

$$R_1(f) = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$

2 Cuadraturi adaptive

Fie met(a, b, f, n) be a composite formula. o formulă repetată oarecare. Ideea este de a împărţi $[a, b]$ în subintervale şi de a folosi un număr mic de noduri pe subintervalele pe care oscilaţia lui f este lentă şi un număr mai mare de puncte pe subintervalele pe care oscilaţia lui f este mai rapidă. Algoritmul este de tip divide and conquer:

```
function adaptquad(a, b:real; f:funct; tol:real):real;
    if |met(a, b, f, m)-met(a, b, f, 2m)|<tol
        then adaptquad:=met(a, b, f, 2 * m)
        else adaptquad:=adaptquad(a, (a + b)/2, f, tol)+
                 adaptquad((a + b)/2, b, f, tol);
    end
```

Cantitatea m este o constantă convenabilă (4 sau 5).

3 Metoda lui Romberg

Se bazează pe metoda trapezelor şi pe extrapolarea Richardson. Fie $h_1 = b - a$. Vom utiliza formulele

$$
\begin{aligned}
R_{1,1} &= \frac{h_1}{2}[f(a) + f(b)] = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)] \\
R_{k,1} &= \frac{1}{2}\left[R_{k-1,1} + h_{k-1}\sum_{i=1}^{2^{k-2}} f\left(a + \left(i - \frac{1}{2}\right)h_{k-1}\right)\right], \quad k = \overline{2, n} \\
R_{k,j} &= \frac{4^{j-1}R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}}{4^{j-1} - 1}, \quad k = \overline{2, n} \\
h_k &= \frac{h_{k-1}}{2} = \frac{b-a}{2^{k-1}}.
\end{aligned}
$$

Examplu. Aproximaţi $\int_0^\pi \sin x dx$ prin metoda lui Romberg, $\varepsilon = 10^{-2}$.
Soluţie.

$$I = \int_0^\pi \sin x dx = 2$$

$$R_{1,1} = \frac{\pi}{2}(0 + 0) = 0$$

$$R_{2,1} = \frac{1}{2}\left(R_{1,1} + \pi \sin\frac{\pi}{2}\right) = 1.571$$

$$R_{2,2} = 1.571 + (1,571 - 0)/3 = 2.094$$
$$(R_{2,2} - R_{1,1}) > 0.01$$
$$R_{3,1} = \frac{1}{2}\left[R_{2,1} + \frac{\pi}{2}\left(\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4}\right)\right] = 1.895$$
$$R_{3,2} = 1,895 + \frac{1.895 - 1.571}{3} = 2.004$$
$$R_{3,3} = 2.004 + (2.004 - 2.094)/15 = 1.999$$
$$|R_{3,3} - R_{2,2}| < 0.1$$

Valoarea exactă a integralei este $I = 2$. Pentru formula trapezelor cu acelaşi număr de argumente se obţine $I \approx 1,895$,

iar pentru formula repetată a lui Simpson cu 4 noduri, $I \approx 2.005$.

Calculele se pot realiza în mod tabelar.

$$\begin{array}{lllll}
R_{1,1} & & & & \\
R_{2,1} & R_{2,2} & & & \\
R_{3,1} & R_{3,2} & R_{3,3} & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
R_{n,1} & R_{n,2} & R_{n,3} & \dots & R_{n,n}
\end{array}$$

Un posibil criteriu de oprire este $|R_{n,n} - R_{n-1,n-1}| < \varepsilon$.

4 Cuadraturi adaptive II

Coloana a doua din metoda lui Romberg corespunde aproximării prin metoda lui Simpson. Notăm
$$S_{k,1} = R_{k,2}.$$
Coloana a treia este deci o combinaţie a două aproximante de tip Simpson:
$$S_{k,2} = S_{k,1} + \frac{S_{k,1} - S_{k-1,1}}{15} = R_{k,2} + \frac{R_{k,2} - R_{k-1,2}}{15}.$$
Relaţia
$$S_{k,2} = S_{k,1} + \frac{S_{k,1} - S_{k-1,1}}{15}, \tag{1}$$
va fi folosită la elaborarea unui algoritm de quadratură adaptivă. Fie $c = (a+b)/2$. Formula elementară a lui Simpson este
$$S = \frac{h}{6}\left(f(a) + 4f(c) + f(b)\right).$$

Pentru două subintervale se obţine

$$S_2 = \frac{h}{12}\left(f(a) + 4f(d) + 2f(c) + 4f(e) + f(b)\right),$$

unde $d = (a+c)/2$ şi $e = (c+b)/2$. Cantitatea Q se obţine aplicând (1) celor două aproximante:

$$Q = S_2 + (S_2 - S)/15.$$

Putem să dam acum un algoritm recursiv pentru aproximarea integralei. Funcţia *adquad* evaluează integrandul aplicând regula lui Simpson. Ea apelează recursiv *quadstep* şi aplică extrapolarea. Descrierea se dă în algoritmul 1.

Algorithm 1 Cuadratură adaptivă bazată pe metoda lui Simpson şi extrapolare

Intrare: funcţia f, intervalul $[a, b]$, eroarea ε
Ieşire: Valoarea aproximativă a integralei

```
function adquad(f, a, b, ε) : real
c := (a + b)/2;
fa = f(a); fb := f(b); fc := f(c);
Q := quadstep(f, a, b, ε, fa, fc, fb);
return Q;
function quadstep(f, a, b, ε, fa, fc, fb) : real
h := b − a; c := (a + b)/2;
fd := f((a + c)/2); fe := f((c + b)/2);
Q1 := h/6 ∗ (fa + 4 ∗ fc + fb);
Q2 := h/12 ∗ (fa + 4 ∗ fb + 2 ∗ fc + 4 ∗ fe + fb);
if |Q1 − Q2| < ε then
   Q := Q2 + (Q2 − Q1)/15;
else
   Qa := quadstep(f, a, c, ε, fa, fd, fc);
   Qb := quadstep(f, c, b, ε, fc, fe, fb);
   Q := Qa + Qb;
end if
return Q;
```

5 Probleme

1. Implementaţi formula repetată a trapezului, dreptunghiului şi a lui Simpson.
2. Concepeţi o reprezentare grafică intuitivă pentru formula trapezelor şi formula repetată a lui Simpson (facultativ).
3. Implementaţi o metoda de cuadratură adaptivă pentru formula repetata a lui Simpson, una pentru metoda trapezelor şi una pentru metoda dreptunghiurilor.
4. Implementaţi metoda lui Romberg.
5. Implementaţi adquad.

6 Probleme practice

1. Generaţi formule Newton-Cotes închise pentru un număr de noduri dat.
2. Testaţi rutinele de integrare de la această temă pentru diverse funcţii a caror primitivă nu este exprimabilă prin funcţii elementare şi comparaţi rezultatele cu cele furnizate de funcţiile MATLAB `quad` şi `integral`.