Seminarul 4

1. Considerăm vectorul aleatoar discret (X, Y) cu distribuţia dată sub formă tabelară:

$X \backslash Y$	-2	1	2
1	0,2	0,1	0,2
2	0,1	0,1	0,3

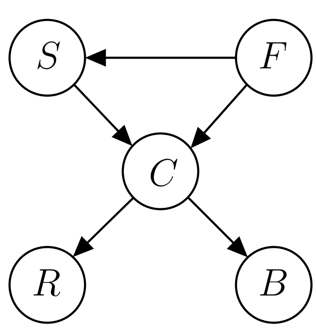
a) Să se determine distribuţiile de probabilitate ale variabilelor aleatoare X şi Y.
b) Calculaţi probabilitatea ca $|X - Y| = 1$, ştiind că $Y > 0$.
c) Sunt evenimentele $X = 2$ şi $Y = 1$ independente?
d) Sunt variabilele aleatoare X şi Y independente?
e) Sunt evenimentele $X = 1$ şi $Y = 1$ condiţional independente, cunoscând $X + Y = 2$?
f) Este variabila aleatoare X condiţional independentă de Y, cunoscând $X + Y$?
g) Calculaţi valoarea medie a variabilei aleatoare $2X + Y^2$.

R: a) $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$, $Y \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.
b) $P(|X - Y| = 1 \big| Y > 0) = \frac{P(|X-Y|=1, Y>0)}{P(Y>0)} = \frac{P(X=1,Y=2)+P(X=2,Y=1)}{P(Y>0)} = \frac{0{,}3}{0{,}7} = \frac{3}{7}$.
c) $P(X = 2, Y = 1) = 0{,}1 = 0{,}5 \cdot 0{,}2 = P(X = 2) \cdot P(Y = 1) \implies X = 2$ şi $Y = 1$ sunt independente.
d) $P(X = 2, Y = 2) = 0{,}3 \neq 0{,}25 = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = P(X = 2) \cdot P(Y = 2) \implies X$ şi Y nu sunt independente.
e) $P(X = 1, Y = 1 | X + Y = 2) = 1 = P(X = 1 | X + Y = 2) \cdot P(Y = 1 | X + Y = 2) \implies X = 1$ şi $Y = 1$ sunt condiţional independente, cunoscând $X + Y = 2$.
f) $P(X = 1, Y = 2 | X + Y = 3) = \frac{P(X=1,Y=2)}{P(X+Y=3)} = \frac{0{,}2}{0{,}3} \neq \frac{0{,}2}{0{,}3} \cdot \frac{0{,}2}{0{,}3} = P(X = 1 | X + Y = 3) \cdot P(Y = 2 | X + Y = 3) \implies$ X şi Y nu sunt condiţional independente, cunoscând $X + Y$.
g) $E(2X + Y^2) = 2E(X) + E(Y^2) = 2(1 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 0{,}5) + (-2)^2 \cdot 0{,}3 + 1^2 \cdot 0{,}2 + 2^2 \cdot 0{,}5 = 6{,}4$.

2. Considerăm următoarele variabile aleatoare care indică anumite situaţii (1=`da` şi 0=`nu`), pe care le avem în vedere pentru o persoană într-o seară:

- F indică dacă filmul care rulează la cinema este în premieră sau nu.
- S indică dacă biletul de intrare la film este scump sau nu.
- C indică dacă persoana vizionează filmul la cinema sau nu.
- R indică dacă persoana ia cina la un restaurant sau nu.
- B indică dacă persoana bea un cocteil la un bar sau nu.

Variabilele aleatoare de mai sus depind unele de altele conform unei reţele Bayes cu probabilităţile condiţinate date mai jos.



$P(F = 1)$	$P(F = 0)$
0,8	0,2

S	$P(S = ...\|F = 1)$	$P(S = ...\|F = 0)$
1	0,9	0,6
0	0,1	0,4

C	$P(C = ...\|S = 1, F = 1)$	$P(C = ...\|S = 1, F = 0)$	$P(C = ...\|S = 0, F = 1)$	$P(C = ...\|S = 0, F = 0)$
1	0,6	0,2	0,9	0,4
0	0,4	0,8	0,1	0,6

R	$P(R = ...\|C = 1)$	$P(R = ...\|C = 0)$
1	0,3	0,5
0	0,7	0,5

B	$P(B = ...\|C = 1)$	$P(B = ...\|C = 0)$
1	0,5	0,8
0	0,5	0,2

Calculaţi probabilităţile următoarelor evenimente:

a) Persoana bea un cocteil la un bar, ştiind că nu vizionează filmul care rulează în premieră la cinema, biletul de intrare la film fiind scump.

b) Persoana vizionează un film care nu e în premieră la cinema.

c) Persoana vizionează filmul la cinema.

d) Persoana ia cina la un restaurant.

R: a)

$$P(B=1|F=1,S=1,C=0)=P(B=1|C=0)=0{,}8=80\%.$$

b)

$$P(C=1,F=0)=P(C=1,F=0,S=1)+P(C=1,F=0,S=0)$$
$$=P(C=1|S=1,F=0)\cdot P(S=1|F=0)\cdot P(F=0)+P(C=1|S=0,F=0)\cdot P(S=0|F=0)\cdot P(F=0)$$
$$=0{,}2\cdot 0{,}6\cdot 0{,}2+0{,}4\cdot 0{,}4\cdot 0{,}2=0{,}056=5{,}6\%.$$

c)

$$P(C=1)=\sum_{i,j\in\{0,1\}}P(C=1,S=i,F=j)=\sum_{i,j\in\{0,1\}}P(C=1|S=i,F=j)\cdot P(S=i|F=j)\cdot P(F=j)$$
$$=0{,}6\cdot 0{,}9\cdot 0{,}8+0{,}2\cdot 0{,}6\cdot 0{,}2+0{,}9\cdot 0{,}1\cdot 0{,}8+0{,}4\cdot 0{,}4\cdot 0{,}2=0{,}56=56\%.$$

d)

$$P(R=1)=P(R=1|C=1)\cdot P(C=1)+P(R=1|C=0)\cdot P(C=0)$$
$$=0{,}3\cdot 0{,}56+0{,}5\cdot 0{,}44=0{,}388=38{,}8\%.$$

3. Un sistem electronic are 80 de componente care funcţionează independent unele de altele. Fiecare componentă funcţionează cu probabilitatea 0,75. Fie X variabila aleatoare care indică numărul de componente funcţionale ale sistemului. Determinaţi distribuţia lui X şi apoi calculaţi valoarea sa medie.

R: $X=X_1+\cdots+X_{80}\sim \text{Bino}(80,0{,}75)$, $X_i\sim \text{Bernoulli}(0{,}75)$ indică funcţionarea componentei i, $i=\overline{1,80}$. $E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=80\cdot\frac{3}{4}=60$.

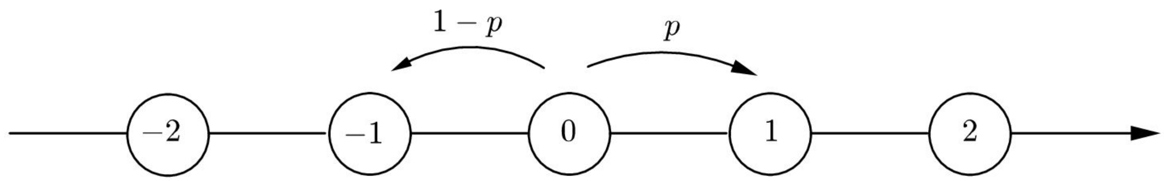
4. Un mesaj este transmis printr-un canal de comunicare cu perturbări. Probabilitatea ca mesajul să fie recepţionat este 10%. Dacă mesajul nu este recepţionat, atunci se reia transmisia mesajului, independent de transmisiile anterioare. Fie X variabila aleatoare care indică numărul de transmisii până la prima transmisie în care este recepţionat mesajul. Determinaţi valoarea medie a lui X.

R.: Observăm că $X\sim \text{Geo}(p)$, $p=\frac{1}{10}$. Pe baza criteriului raportului, seria cu termeni pozitivi $\sum\limits_{k=0}^{\infty}kp(1-p)^k$ este convergentă.

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}kp(1-p)^k=(1-p)\sum_{k=1}^{\infty}kp(1-p)^{k-1}$$
$$\overset{k=j+1}{=\!=}(1-p)\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)p(1-p)^j=(1-p)\sum_{j=0}^{\infty}jp(1-p)^j+(1-p)\sum_{j=0}^{\infty}p(1-p)^j$$
$$=(1-p)E(X)+(1-p)\Longrightarrow E(X)=\frac{1-p}{p}$$

$\Longrightarrow E(X)=\frac{\frac{9}{10}}{\frac{1}{10}}=9$, deci vor fi în medie 9 transmisii eşuate până la recepţionarea mesajului.

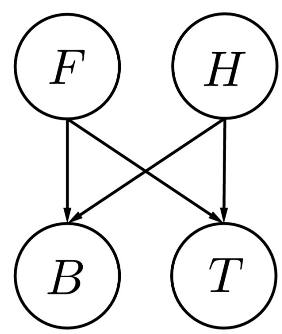
6. Un punct material se deplasează pe axa reală dintr-un nod spre un nod vecin, la fiecare pas, cu probabilitatea $p \in (0, 1)$ la dreapta şi cu probabilitea $1 - p$ la stânga. Nodurile sunt centrate în numerele întregi:



Fie X variabila aleatoare care indică poziţia finală a punctului material după $n \in \mathbb{N}$ paşi ai unei deplasări ce porneşte din nodul 0. Determinaţi distribuţia şi valoarea medie lui X.

R: Dacă Y_i reprezintă pasul i, atunci $Y_i \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix} \implies Y_i = 2X_i - 1$ cu $X_i \sim Bernoulli(p)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. $X = Y_1 + \ldots + Y_n = (2X_1 - 1) + \ldots + (2X_n - 1)$, $X_1 + \ldots + X_n \sim Bino(n, p) \implies X \sim \begin{pmatrix} 2k - n \\ C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \end{pmatrix}_{k=\overline{0,n}}$ şi $E(X) = 2np - n$.

Temă: Următoarele variabile aleatoare indică decizia unui parior sportiv de a paria sau nu (`1=da`, `0=nu`) într-o zi pe anumite tipuri de meciuri: fotbal F, handbal H, baschet B şi tenis T. Pariorul ia deciziile conform reţelei Bayes alăturate, cu următoarele probabilităţi:



$P(F = 1) = P(H = 1) = 0{,}6$;
$P(B = 1|F = 1, H = 1) = P(B = 1|F = 0, H = 0) = 0{,}5$;
$P(T = 1|F = 1, H = 1) = P(T = 1|F = 0, H = 0) = 0{,}9$;
$P(B = 1|F = 0, H = 1) = P(B = 1|F = 1, H = 0) = 0{,}2$;
$P(T = 1|F = 0, H = 1) = P(T = 1|F = 1, H = 0) = 0{,}3$.

Calculaţi probabilităţile următoarelor evenimente:

a) Pariorul nu pariază pe niciun tip de meci.

b) Pariorul alege meciuri de fotbal şi baschet, ştiind că nu alege niciun meci de handbal.

c) Pariorul alege meciuri de baschet.