Seminarul 1

Noţiuni de combinatorică

1. *Principiul fundamental de numărare:* numărul de perechi de obiecte în care primul obiect poate fi ales în m moduri şi al doilea în n moduri $(m, n \in \mathbb{N})$ este $m \cdot n$.
Exemplu: În câte moduri poate o persoană să îmbrace 2 cămăşi distincte şi 3 blugi diferiţi? R: $2 \cdot 3 = 6$.

2. *Aranjamente de n luate câte k* $(k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*, n \geq k)$: alegeri de k obiecte distincte şi ordonate din n obiecte distincte date.

$$\begin{aligned} A_n^k &= \text{“numărul de aranjamente de } n \text{ obiecte luate câte } k\text{”} \\ &= n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}. \end{aligned}$$

Exemplu: Câte coduri cu 3 cifre distincte se pot forma folosind cifrele: 0, 1, 2, 3, 4? R: $A_5^3 = \frac{5!}{2!}$.

3. *Permutări de n* $(n \in \mathbb{N})$: aranjamente de n luate câte n.

$$P_n = \text{“numărul de permutări de } n \text{ obiecte”} = A_n^n = n!.$$

Observaţie: Prin convenţie, $0! = 1$.
Exemplu: În câte moduri se pot aşeza 3 persoane pe o bancă? R: $P_3 = 3!$.

4. *Combinări de n luate câte k* $(k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*, n \geq k)$: alegeri de k obiecte distincte şi neordonate din n obiecte distincte date, i.e. alegeri de submulţimi de k elemente ale unei mulţimi de n elemente.

$$\begin{aligned} C_n^k &= \text{“numărul de combinări de } n \text{ elemente luate câte } k\text{”} \\ &= \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \end{aligned}$$

Exemplu: Câte echipe de handbal se pot forma dintr-un grup de 8 persoane? R: $C_8^7 = C_8^1$.

5. *Numărul de funcţii* de la o mulţime A cu k elemente la o mulţime B cu n elemente $(k, n \in \mathbb{N}^*)$ este n^k.
Observaţie: O funcţie de la A la B poate fi identificată cu k alegeri de obiecte, nu neapărat distincte (i.e. un obiect poate fi ales de mai multe ori), ordonate, din n obiecte distincte date. Astfel, putem spune că funcţiile sunt *aranjamente cu repetiţii.*
Exemplu: În câte moduri se pot împărţi o portocală, un kiwi şi o banană la 4 copii? Un copil poate primi mai multe fructe, chiar toate.
R: Funcţiile $f : \{\text{“portocală”}, \text{“kiwi”}, \text{“banană”}\} \to \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ se pot construi în 4^3 moduri.

6. *Permutări cu repetiţii:* Considerăm n obiecte care pot fi împărţite în k grupuri $(n, k \in \mathbb{N}^*, k \leq n)$. Primul grup are n_1 obiecte identice, al 2-lea grup are n_2 obiecte identice,..., al k-lea grup are n_k obiecte identice $(n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}, n_1 + \ldots + n_k = n)$. Două obiecte alese arbitrar sunt distincte dacă şi numai dacă provin din grupuri diferite. Numărul de permutări ale acestor n obiecte este

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}.$$

Exemple: 1) Câte anagrame ale cuvântului “MISSISSIPPI” sunt posibile? R: $\frac{11!}{1!4!4!2!}$.
2) Într-o urnă sunt trei bile albe şi patru bile roşii. În câte moduri se pot aranja aceste bile într-un rând? R: $\frac{7!}{3!4!}$.

7. *Combinări cu repetiţii de n luate câte k* ($n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N}$): alegeri de k obiecte, nu neapărat distincte (i.e. un obiect poate fi ales de mai multe ori), neordonate, din n obiecte distincte date (i.e. aranjamente cu repetiţii în care neglijăm ordinea). Numărul lor este

$$C_{n+k-1}^{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

Exemplu: O cofetărie are 7 sortimente de îngheţată. În câte moduri poate un client să îşi aleagă sortimentele pentru 3 cornete? (fiecare cornet are câte un glob de îngheţată!) R: $\frac{9!}{3!6!}$.

8. *Definiţia clasică a probabilităţii:* într-un experiment în care cazurile posibile, finite la număr, au aceleaşi şanse de a se realiza, probabilitatea unui eveniment E este

$$P(E) = \frac{\text{numărul cazurilor favorabile lui } E}{\text{numărul cazurilor posibile}}.$$

Probleme - Seminarul 1

1. În câte moduri se pot aşeza pe un raft 5 culegeri de matematică, 3 culegeri de informatică şi 4 romane, ştiind că fiecare carte are un autor diferit, astfel încât:

a) cărţile de acelaşi tip să fie alăturate?

b) doar romanele să fie neapărat alăturate?

c) doar culegerile de matematică, respectiv de informatică, să fie neapărat alăturate?

R: a) $5!3!4!3!$; b) $4!(5+3+1)!$; c) $5!3!(1+1+4)!$.

2. Câte coduri binare sunt formate din 4 biţi egali cu 1 şi 6 biţi egali cu 0 şi nu au doi biţi alăturaţi egali cu 1?

R: punem în linie 0-urile cu spaţii între ele: _0_0_0_0_0_0_, apoi alegem 4 spaţii pe care să punem 1-urile $\Longrightarrow$ există C_7^4 astfel de coduri.

3. a) Câte soluţii $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^* \times \cdots \times \mathbb{N}^*$ are ecuaţia $x_1 + \ldots + x_k = n$ ($k, n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq k$)?

R: C_{n-1}^{k-1}.

M1: Considerăm un şir cu n "beţe" şi $n-1$ spaţii între ele $|\ |\ |\ \cdots\ |\ |$. Dacă pe spaţii se pun $k-1$ simboluri + şi se şterg spaţiile libere, atunci şirul de "beţe" va fi împărţit în k grupe de aceste simboluri. Fie x_i=numărul de "beţe" din al i-lea grup, $i = \overline{1,k}$. Cum nu există două simboluri + consecutive, avem $x_i \in \mathbb{N}^*$, $i = \overline{1,k}$. Din modul de construcţie obţinem $x_1 + \ldots + x_k = n$. Există C_{n-1}^{k-1} moduri în care se pot pune $k-1$ simboluri + pe $n-1$ spaţii.

Exemplu: $n = 6, k = 3$, $|\ |\ |\ |\ |\ |$; $k-1 = 2$; $||+|||+|$ (3 grupe de "beţe", separate prin 2 simboluri +) $\Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 1$, iar $x_1 + x_2 + x_3 = 6$; în acest caz, există C_5^2 soluţii $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

M2: Considerăm un şir de n zerouri şi $n-1$ spaţii între ele: 0_0_$\cdots$_0. Înlocuim $k-1$ spaţii cu 1-uri şi ştergem spaţiile rămase neocupate. Fie x_i numărul de zerouri consecutive până la al i-lea 1, pentru $i \in \{1, \ldots, k-1\}$, iar x_k numărul de zerouri după ultimul 1. $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^* \times \cdots \times \mathbb{N}^*$ este o soluţie a ecuaţiei date. Fiecare soluţie a ecuaţiei poate fi reprezentată printr-o astfel de secvenţă binară. Obţinem C_{n-1}^{k-1} soluţii, reprezentând numărul de alegeri ale celor $k-1$ poziţii pentru 1.

b) Câte soluţii $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}$ are ecuaţia $x_1 + \ldots + x_k = n$ ($k, n \in \mathbb{N}^*$)?

R: C_{n+k-1}^{k-1}.

Fiecare soluţie $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}$ a ecuaţiei $x_1 + \ldots + x_k = n$ corespunde în mod unic unei soluţii $(y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{N}^* \times \cdots \times \mathbb{N}^*$ a ecuaţiei $y_1 + \ldots + y_k = n + k$ şi vice versa, alegând $y_i = x_i + 1$, pentru $i \in \{1, \ldots, k\}$. Cf. a), există C_{n+k-1}^{k-1} soluţii.

4. Se aruncă două zaruri. Determinaţi probabilităţile următoarelor evenimente:

a) A:"se obţine o dublă".

b) B:"suma numerelor este un număr par."

c) C:“suma numerelor este cel mult egală cu 10.”

R: a) $P(A)=\frac{1}{6}$; b) $P(B)=\frac{3^2+3^2}{36}$; c) $P(C)=1-\frac{3}{36}$.

5. 7 căluşari: $c_1, c_2, \ldots, c_7$ se aşează în cerc, într-o ordine aleatoare. Care este probabilitatea ca c_1 şi c_7 să fie vecini?

R: $\frac{2!5!}{\frac{7!}{7}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

6. La un concurs de şah participă 5 băieţi şi 5 fete. Se formează aleator 5 perechi de jucători. Care este probabilitatea ca fiecare băiat să joace împotriva unei fete?

R: $p=\frac{n_f}{n_p}$, unde numărul cazurilor favorabile este $n_f=5!$, iar numărul cazurilor posibile este $n_p=\frac{C_{10}^2\cdot C_8^2\cdot\ldots\cdot C_2^2}{5!}$, pentru că ordinea perechilor (echipelor) nu contează.

7. În câte moduri se pot aşeza în cerc caracterele următoare: A, A, A, B, B, 0, 0, 0, 1?

R: $\frac{1}{9}\cdot\frac{9!}{3!2!3!1!}$.

8. În câte moduri se pot distribui m bile identice în n cutii distincte ($m, n \in \mathbb{N}^*$)?

R: $C_{m+n-1}^m = C_{m+n-1}^{n-1}$ combinări cu repetiţie.

9. Câte coduri binare sunt formate din 10 cifre şi nu au două cifre alăturate egale cu 1?

R: $1+C_{10}^1+C_9^2+\ldots+C_6^5$.

Dacă în codul binar sunt k biţi egali cu 1, atunci codul are $10-k$ biţi egali cu 0. Punem în linie 0-urile şi spaţiile pe care putem să punem 1-urile, la fel ca în **Pb. 2**: _0_0_…_0_. Deci avem $11-k$ spaţii libere pe care vrem să punem k biţi egali cu 1, rezultă C_{11-k}^k alegeri posibile. k poate să ia valorile $0, 1, \ldots$, până la maxim 5, deoarece pentru $k>5$ numărul de spaţii libere este mai mic decât numărul de biţi egali cu 1.

10. Fie A şi B două mulţimi finite.

a) Dacă A are $k \in \mathbb{N}^*$ ($k \geq 3$) elemente şi B are 3 elemente, câte funcţii surjective se pot defini de la A la B?

R: a) Fie $A=\{a_1, a_2, ..., a_k\},\ B=\{b_1, b_2, b_3\}$. Definim

$$F_i=\{f:\{a_1, a_2, ..., a_k\}\to\{b_1, b_2, b_3\} \mid \forall a \in A\ f(a)\neq b_i\}, i\in\{1,2,3\}.$$

Notăm cu $\#(M)$ numărul de elemente ale unei mulţimi M. Numărul funcţiilor care nu sunt surjective este

$$\begin{aligned}\#(F_1\cup F_2\cup F_3) &= \#(F_1)+\#(F_2)+\#(F_3)\\ &\quad -\#(F_1\cap F_2)-\#(F_2\cap F_3)-\#(F_1\cap F_3)+\#(F_1\cap F_2\cap F_3)\\ &= C_3^1(3-1)^k-C_3^2(3-2)^k+C_3^3(3-3)^k=3\cdot 2^k-3.\end{aligned}$$

Numărul funcţiilor care sunt surjective este $3^k-3\cdot 2^k+3$.

b) Dacă A are $k \in \mathbb{N}^*$ elemente şi B are $n \in \mathbb{N}^*$ ($k \geq n$) elemente, câte funcţii surjective se pot defini de la A la B? [*Indiciu:* Se aplică principiul includerii şi excluderii!]

R: b) $n^k-C_n^1(n-1)^k+C_k^2(n-2)^k-\ldots+(-1)^{k-2}C_k^{n-2}2^k+(-1)^{k-1}C_k^{n-1}$.

11. Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$, $m \geq n$. În câte moduri se pot îmbarca m persoane într-un tren cu n vagoane astfel încât niciun vagon să nu fie gol?

R: $n^m-C_n^1(n-1)^m+C_m^2(n-2)^m-\ldots+(-1)^{m-2}C_m^{n-2}2^m+(-1)^{m-1}C_m^{n-1}$.