# Sisteme liniare iterative

$$Ax^* = b, \qquad x^* = ?$$
$$x^{(k)} \to x^*, k \to \infty$$

$$\boxed{x^{(k+1)} = c + T \cdot x^{(k)} \to x^*, k \to \infty, \qquad T = ? \quad c = ? \qquad x^{(0)} = ?}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - \displaystyle\sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j\right) \\ \vdots \\ x_i = \dfrac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\right) \\ \vdots \\ x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}\left(b_n - \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j\right) \end{cases}$$

1) Jacobi: $$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

2) Gauss-Seidel: $$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

3) SOR : $$x_i^{(k+1)} = \omega\frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) + (1-\omega)x_i^{(k)}, \quad \boxed{\omega \in (0,2)}$$

$$\boxed{\omega = 1 \Rightarrow \text{Gauss-Seidel}}$$

$A = M - N$, $M$ inversabilă

$Ax^* = b \Leftrightarrow (M-N)x^* = b \Leftrightarrow M^{-1} \cdot |\ Mx^* = b + Nx^*$

$\Leftrightarrow x^* = c + Tx^*$, $\boxed{c = M^{-1}b = M\backslash b, \qquad T = M^{-1}N = M\backslash N, \qquad N = M - A,}$

$M = ?$

1) Jacobi: *M=diag(diag(A))*
2) Gauss-Seidel: *M=tril(A)*
3) SOR: $M = \frac{1}{\omega} \cdot diag(diag(A)) + tril(A,-1)$

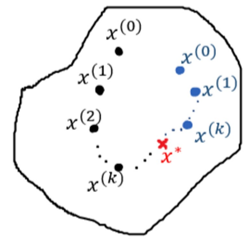
$$\boxed{x^{(k+1)} = c + T \cdot x^{(k)} \to x^*, k \to \infty}$$

**Observație**: Dacă raza spectrală $\rho_T = max\left(abs\left(eig(T)\right)\right) < 1$, atunci are loc convergența.

Dacă $\|T\|_p = norm(T, p) < 1$, pentru un $p \in [1, \infty]$, atunci $\rho_T < 1$.

---

Teorema de punct fix a lui Banach:
Dacă $\|Tx - Ty\| \leq M\|x - y\|, \forall x, y$ vectori, unde $M \in (0,1)$ este fixat,
atunci șirul $x^{(k+1)} = c + Tx^{(k)} \to x^*, k \to \infty$,
pentru orice vector inițial $x^{(0)}$, iar $x^*$ este unic (nu depinde de alegerea lui $x^{(0)}$).




**Observație**: Dacă $\|T\|_p = norm(T,p) < 1$, atunci:
criteriul de oprire este dat de inegalitatea: $\left\|x^{(k+1)} - x^*\right\|_p \leq \frac{\|T\|_p}{1-\|T\|_p} \cdot \left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\|_p$.
$x^*$ e necunoscut $\Rightarrow$ criteriul de oprire este $\frac{\|T\|_p}{1-\|T\|_p} \cdot \left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\|_p \leq \varepsilon$ și se returnează $x^{(k+1)}$.

**Exemplu** de matrice reală $A$ pentru care metodele de mai sus converg:
- $a_{ii} > 0$, $i = 1, \dots, n$;
- $A$ simetrică: $A$ = transpusa($A$);
- $A$ strict diagonal dominantă: $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$, $i = 1, \dots, n$.

Dacă, în plus, $A$ este tridiagonală, atunci putem alege, în metoda SOR:

$$\boxed{\omega_{optim} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho\left(T_J\right)^2}}},$$

unde $\rho\left(T_J\right)$ este raza spectrală pentru T din metoda Jacobi.