Geometrie pentru informaticieni
Seminarul 12: Transformări geometrice în spaţiu

Paul A. Blaga

Probleme rezolvate

Problema 1. Determinaţi matricea unei rotaţii de unghi $\pi/6$, în jurul axei Oy, urmate de translaţia $\mathrm{Trans}(1,-1,2)$.

Soluţie. Reamintim că matricea rotaţiei de unghi θ în jurul unei axe de versor $\mathbf{u}$ şi care trece prin punctul Q se poate scrie, în formă bloc,

$$\mathrm{Rot}(Q,\mathbf{u},\theta)=\begin{pmatrix}\mathrm{Rot}(\mathbf{u},\theta) & (I_3-\mathrm{Rot}(\mathbf{u},\theta))\cdot\mathbf{Q}\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

unde

$$\mathrm{Rot}(\mathbf{u},\theta)=\cos\theta\cdot I_3+(1-\cos\theta)(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})+\sin\theta\cdot(\mathbf{u}\times -),$$

iar

$$\mathbf{u}\times - = \begin{pmatrix}0 & -u_3 & u_2\\ u_3 & 0 & -u_1\\ -u_2 & u_1 & 0\end{pmatrix}.$$

În cazul nostru concret (rotaţie în jurul axei Oy), $Q=(0,0,0)$, $\mathbf{u}=\mathbf{j}$. Avem

$$\mathbf{j}\otimes\mathbf{j}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

în timp ce

$$\mathbf{j}\times - = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}.$$

Astfel,

$$\mathrm{Rot}\left(\mathbf{j},\frac{\pi}{6}\right)=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&0&0\\0&\frac{\sqrt{3}}{2}&0\\0&0&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1-\frac{\sqrt{3}}{2}&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\0&0&0\\-\frac{1}{2}&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&1&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}.$$

Aceasta înseamnă că matricea omogenă a rotaţie în jurul axei Oy este

$$\mathrm{Rot}\left(O,\mathbf{j},\frac{\pi}{6}\right)=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&0&\frac{1}{2}&0\\0&1&0&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{\sqrt{3}}{2}&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Matricea translaţiei este

$$\mathrm{Trans}(1,-1,2)=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Matricea T a transformării pe care o căutăm este produsul celor două matrici de transformare, executându-se, mai întâi rotaţia, apoi translaţia, adică avem

$$T = \mathrm{Trans}(1,-1,2)\cdot \mathrm{Rot}\left(O,\mathbf{j},\frac{\pi}{6}\right) = \begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&0&\frac{1}{2}&0\\0&1&0&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{\sqrt{3}}{2}&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&0&\frac{1}{2}&1\\0&1&0&-1\\-\frac{1}{2}&0&\frac{\sqrt{3}}{2}&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

□

Problema 2. Determinaţi matricea rotaţiei de unghi $\pi/4$ în jurul dreptei determinate de punctele $P(2,1,5)$ şi $Q(4,7,2)$.

Soluţie. Procedăm ca şi la problema precedentă. Începem prin a determina versorul dorector al axei de rotaţie. Un vector director al dreptei este vectorul $\overrightarrow{PQ}(2,6,3)$, deci un versor director este

$$\mathbf{u} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|} = \left(\frac{2}{7},\frac{6}{7},\frac{3}{7}\right).$$

Atunci

$$\mathbf{u}\otimes\mathbf{u} = \frac{1}{49}\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&6&3\end{pmatrix} = \frac{1}{49}\begin{pmatrix}4&12&6\\12&36&18\\6&18&9\end{pmatrix},$$

iar

$$\mathbf{u}\times - = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}0&-3&6\\3&0&-2\\-6&2&0\end{pmatrix}.$$

Astfel,

$$\mathrm{Rot}\left(\mathbf{u},\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&0&0\\0&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\0&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix} + \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{49}\begin{pmatrix}4&12&6\\12&36&18\\6&18&9\end{pmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{14}\begin{pmatrix}0&-3&6\\3&0&-2\\-6&2&0\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{98}\begin{pmatrix}45\sqrt{2}+8&-33\sqrt{2}+24&36\sqrt{2}+12\\9\sqrt{2}+24&13\sqrt{2}+72&-32\sqrt{2}+36\\-48\sqrt{2}+12&-4\sqrt{2}+36&40\sqrt{2}+18\end{pmatrix}.$$

Pe de altă parte,

$$\mathrm{Rot}\left(\mathbf{u},\frac{\pi}{4}\right)\cdot[P] = \frac{1}{98}\begin{pmatrix}45\sqrt{2}+8&-33\sqrt{2}+24&36\sqrt{2}+12\\9\sqrt{2}+24&13\sqrt{2}+72&-32\sqrt{2}+36\\-48\sqrt{2}+12&-4\sqrt{2}+36&40\sqrt{2}+18\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix} = \frac{1}{98}\begin{pmatrix}237\sqrt{2}+100\\-129\sqrt{2}+300\\100\sqrt{2}+150\end{pmatrix}$$

Prin urmare, matricea 4-dimensională a transformării în coordonate omogene este

$$\mathrm{Rot}\left(P, \mathbf{u}, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{98}\begin{pmatrix} 45\sqrt{2}+8 & -33\sqrt{2}+24 & 36\sqrt{2}+12 & 237\sqrt{2}+100 \\ 9\sqrt{2}+24 & 13\sqrt{2}+72 & -32\sqrt{2}+36 & -129\sqrt{2}+300 \\ -48\sqrt{2}+12 & -4\sqrt{2}+36 & 40\sqrt{2}+18 & 100\sqrt{2}+150 \\ 0 & 0 & 0 & 98 \end{pmatrix}.$$

□

Problema 3. Determinaţi matricea reflexiei faţa de planul $2x - y + 2z - 2 = 0$. Determinaţi imaginea prin reflexie a tetraedrului $ABCD$, cu vărfurile $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(0,1,0)$ şi $D(0,0,1)$.

Soluţie. Determinăm, mai întâi, versorul vectorului normal la plan. Dacă notăm cu $\mathbf{N}(2,-1,2)$ vectorul normal la plan, atunci versorul corespunzător este vectorul $\mathbf{n}\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Un punct din plan este punctul $Q(0,-2,0)$. Deci planul nostru este planul care trece prin Q şi are ca versor normal vectorul $\mathbf{n}$. După cum ştim de la curs, matricea bloc a reflexiei se scrie sub forma

$$\mathrm{Mirror}(Q,\mathbf{n}) = \begin{pmatrix} I_3 - 2(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}) & 2(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n})\cdot Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Avem, înainte de toate

$$\mathbf{n}\otimes\mathbf{n} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Prin urmare,

$$I_3 - 2(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 \\ 4 & 7 & 4 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

în timp ce

$$2(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n})\cdot[Q] = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Prin urmare, matricea reflexiei este

$$\mathrm{Mirror}(Q,\mathbf{n}) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 & 8 \\ 4 & 7 & 4 & -4 \\ -8 & 4 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Vârfurile tetraedrului obţinut prin reflexie vor fi

$$\begin{pmatrix} A' & B' & C' & D' \end{pmatrix} = \mathrm{Mirror}(Q,\mathbf{n})\cdot\begin{pmatrix} A & B & C & D \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 & 8 \\ 4 & 7 & 4 & -4 \\ -8 & 4 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & 1 & \frac{4}{3} & 0 \\ -\frac{4}{9} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{8}{9} & 0 & \frac{4}{3} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Astfel, vârfurile tetraedrului obţinut prin reflexie vor fi

$$A'\left(\frac{8}{9}, -\frac{4}{9}, \frac{8}{9}\right),\ B'(1,0,0),\ C'\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right),\ D'(0,0,1).$$

□

Problema 4. Fie $A(1,2,2)$, $B(2,4,3)$ şi $C(4,3,2)$. Determinaţi imaginea triunghiului ABC prin forfecarea de unghi 30°, relativ la planul $x-y-z-1=0$, în direcţia vectorului $\mathbf{v}(1,1,0)$.

Soluţie. Ştim de la curs că matricea forfecării de unghi θ, relativ la un plan π, în direcţia unui vector $\mathbf{v}$ este dată de

$$\mathrm{Shear}(Q,\mathbf{n},\mathbf{u},\theta) = \begin{pmatrix} I_3 + \operatorname{tg}\theta \cdot (\mathbf{n}\otimes\mathbf{u}) & -\operatorname{tg}\theta\cdot(\mathbf{n}\otimes\mathbf{u})\cdot Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

unde Q este un punct oarecare din plan, $\mathbf{n}$ este versorul normalei la plan, iar $\mathbf{u}$ este versorul vectorului $\mathbf{v}$.

În cazul nostru concret, după cum se poate verifica cu uşurinţă, putem lua $Q(1,0,0)$, $\mathbf{n}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $\mathbf{u}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ (se observă uşor că vectorul $\mathbf{v}$, deci şi vectorul $\mathbf{u}$, îndeplineşte condiţia de a fi paralel cu planul π).

Vom determina acum blocurile matriciale care intră în componenţa matricii forfecării. Începem prin a calcula produsul tensorial. Avem

$$\mathbf{n}\otimes\mathbf{u} = [\mathbf{u}]\cdot[\mathbf{n}]^t = \frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\end{pmatrix} = \frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Acum, primul bloc al matricii de transformare este

$$I_3 + \operatorname{tg}\theta\cdot(\mathbf{n}\otimes\mathbf{u}) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}3\sqrt{2}+1 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 3\sqrt{2}-1 & -\sqrt{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Al doilea bloc al matricii este

$$-\operatorname{tg}\theta\cdot(\mathbf{n}\otimes\mathbf{u})\cdot Q = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

Astfel, matricea de transformare se obţine, în final, sub forma

$$\mathrm{Shear}\left(Q,\mathbf{n},\mathbf{u},\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}3\sqrt{2}+1 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -1\\ \sqrt{2} & 3\sqrt{2}-1 & -\sqrt{2} & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$$

Imaginea triunghiului ABC prin forfecarea considerată se obţine înmulţind matricea transformării cu matricea coordonatelor omogene ale vârfurilor triunghiului:

$$\begin{pmatrix} A' & B' & C' \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3\sqrt{2}+1 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{2} & 3\sqrt{2}-1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{1-\sqrt{2}}{6} & \frac{3+7\sqrt{2}}{6} \\ \frac{-3+5\sqrt{2}}{6} & \frac{-5+11\sqrt{2}}{6} & \frac{-4+11\sqrt{2}}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Prin urmare, imaginile prin forfecare ale vârfurilor triunghiului iniţial sunt

$$A'\left(-\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{-3+5\sqrt{2}}{6}, \frac{1}{3}\right),\ B'\left(\frac{1-\sqrt{2}}{6}, \frac{-5+11\sqrt{2}}{6}, \frac{1}{2}\right),\ C'\left(\frac{3+7\sqrt{2}}{6}, \frac{-4+11\sqrt{2}}{6}, \frac{1}{3}\right).$$

□

Probleme propuse

În această secţiune, ABC este triunghiul de vârfuri $A(1,2,2)$, $B(2,4,3)$, $C(4,3,2)$.

Problema 5. Determinaţi imaginea triunghiului ABC printr-o rotaţie de $45°$ în jurul dreptei care trece prin punctele $P(2,2,1)$ şi $Q(1,1,1)$.

Problema 6. Determinaţi imaginea triunghiului ABC printr-o rotaţie de $30°$ în jurul dreptei

$$(\Delta):\ \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{0} = \frac{z-2}{2}.$$

Problema 7. Determinaţi imaginea triunghiului ABC printr-o rotaţie de $60°$ în jurul dreptei

$$(\Delta):\ \begin{cases} x-y+z-1=0, \\ 2x+y=0. \end{cases}$$

Problema 8. Determinaţi imaginea triunghiului ABC printr-o scalare simplă neuniformă, relativ la punctul $Q(2,5,3)$, de factori de scală $(2,1,3)$.

Problema 9. Determinaţi imaginea triunghiului ABC printr-o scalare neuniformă generală, relativ la punctul $Q(2,5,3)$, de factor de scală $s=1$, în direcţia vectorului $\mathbf{v}(1,3,2)$.

Problema 10. Determinaţi imaginea triunghiului ABC prin reflexia faţă de planul $x-y+2z-1=0$.

Problema 11. Determinaţi imaginea triunghiului ABC prin reflexia faţă de planul care trece prin punctele $O(0,0,0), P(1,1,1), Q(1,3,2)$.

Problema 12. Determinaţi imaginea triunghiului ABC prin forfecarea de unghi $30°$, relativ la planul care trece prin punctele $O(0,0,0), P(1,1,1), Q(1,3,2)$, în direcţia vectorului $\mathbf{v}(1,-1,0)$.