

Problema 1 Fie $(\pi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ polinoamele ortogonale Legendre monice.

(a) Arătați că polinoamele

$$\pi_k^+(t^2) = \pi_{2k}(t)$$

sunt ortogonale monice pe $[0, 1]$ în raport cu ponderea $w(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$. (1p)

(b) Stabiliți formula de cuadratură

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} f(x) dx = 2 \sum_{k=1}^n A_k f(t_k^2) + R_n(f),$$

unde A_k și t_k , $k = 1, \dots, 2n$ sunt coeficienții și respectiv nodurile formulei de cuadratură Gauss-Legendre cu $2n$ noduri. (2p)

(c) Implementați o formulă de cuadratură de tip Gauss pentru integrala $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} f(x) dx$ folosind ideea de la punctul (b). (2p)

(d) Folosind formula de la punctul (c) calculați $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} dx$ cu 8 zecimale exacte. (1p)

Problema 2 Dorim să calculăm $\frac{1}{\sqrt{a}}$, pentru $a > 0$.

(a) Pornind de la o ecuație convenabilă și folosind metoda lui Newton, deduceți o metodă pentru calculul lui $\frac{1}{\sqrt{a}}$. (1p)

(b) Pentru ce valori ale lui x_0 metoda converge? (1p)

(c) Folosiți iterația de la (a) pentru a da o metodă de calcul al radicalului fără împărțiri. (1p).