Varianta Δ – iunie 2014

Extras din Lucrare

Rezolv.: Student Bizeu Mădălina-Laviniia

Subiectul I (2 puncte)

Se consideră seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,2^n}(2x-8)^n$ pentru $x \in \mathbb{R}$.

(1.pct.) a) Să se determine mulțimea de convergență a seriei.

(1.pct.) b) Dacă $S(x)$ e suma seriei de puteri iar $\{a_n\}_{n\geq 0}$ e un șir de numere reale definit prin $a_n = S(n)+1$ atunci să se determine suma seriei numerice: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Soluție

a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\cdot 2^n}(2x-8)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-2x+8}{2}\right)^n\cdot\frac{1}{n!}$$

Notăm $y = \frac{-2x+8}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n!}$. $a_n = \frac{1}{n!}$, $R_0 = \frac{1}{w}$

$$w = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!\,(n+1)} =$$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$. $R_0 = \frac{1}{w} = \frac{1}{0} = \infty$. R_0 = raza de convergență a seriei $\Rightarrow M = (-\infty,\infty)$ – mulțimea de convergență a seriei depinzând de y, întrucât orice $y \in (-\infty,\infty)$

$y = \frac{-2x+8}{2} \Rightarrow x \in (-\infty,\infty) \Rightarrow$ Mulțimea de convergență pentru seria depinzând de x este $M = (-\infty,\infty)$.

b) $S(x)$ = suma seriei. Se cunoaște că $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$. În cazul nostru seria fiind de forma $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n!} \Rightarrow e^y = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!} \Rightarrow e^y = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n!}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n!} = e^y - 1$

Înlocuind pe y cu $\frac{-2x+8}{2}$ $\Bigg| \Rightarrow S(x) = e^{\frac{-2x+8}{2}} - 1$.

$a_n = S(n)+1$

$$S(x) = e^{\frac{-2x+8}{2}} - 1 \Rightarrow S(n) = e^{\frac{-2n+8}{2}} - 1 \Rightarrow a(n) = S(n)+1 = e^{\frac{-2n+8}{2}} - 1 + 1 = e^{-n+4} \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n+4} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}e^4 = e^4\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} = \underbrace{e^0 + e^{-1} + \dots + e^{-k}}$ $\Rightarrow$ serie geometrică cu rația $\frac{1}{e}$.

Considerăm șirul sumelor parțiale

$$S(n)=\sum_{k=0}^{n} e^{-k}=e^{0}+e^{-1}+\dots+e^{-n}=1+\frac{1}{e}+\dots+\frac{1}{e^{n}} \Rightarrow$$

Suma unei serii geometrice este: $S=b_1\cdot\frac{q^{n}-1}{q-1}$, unde

b_1 = primul termen din șirul $b_1, b_2, \dots, b_n$

q = rația.

$$\Rightarrow S(n)=1\cdot\frac{\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{e}-1}=\xrightarrow[n\to\infty]{} 1\cdot\frac{-1}{\frac{1}{e}-1}=\frac{e}{e-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\cdot e^{-4}\right)$$

Astfel că suma seriei numerice $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ este $\frac{e}{e-1}\cdot e^{4}=\frac{e^{5}}{e-1}$

Subiectul II (2,5 puncte)

1,5 pct. a) Determinați punctele de extrem local ale funcției $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=2x+y-2z$ condiționate de legătura: $x^2+y^2+z^2=9$.

(1 pct.) b) Studiați continuitatea funcției $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Soluție

a) Funcția lui Lagrange

$$F(x,y,z,\lambda)=2x+y-2z+\lambda(x^2+y^2+z^2-9).$$

Determinăm punctele staționare:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F(x,y,z,\lambda)}{\partial x}=2+2\lambda x=0\\ \dfrac{\partial F(x,y,z,\lambda)}{\partial y}=1+2\lambda y=0\\ \dfrac{\partial F(x,y,z,\lambda)}{\partial z}=-2+2\lambda z=0\\ \dfrac{\partial F(x,y,z,\lambda)}{\partial \lambda}=x^2+y^2+z^2-9=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{2}{2\lambda}=-\dfrac{1}{\lambda}\\ y=-\dfrac{1}{2\lambda}\\ z=\dfrac{2}{2\lambda}=\dfrac{1}{\lambda}\\ x^2+y^2+z^2=9\end{cases}$$

Înlocuim x,y,z în ultima ecuație și obținem:

$$\left(-\frac{1}{\lambda}\right)^2+\left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^2+\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2=9 \Leftrightarrow \frac{{}^{4/}1}{\lambda^2}+\frac{1}{4\lambda^2}+\frac{{}^{4/}1}{\lambda^2}=9$$

$$\frac{4+1+4}{4\lambda^2}=9 \Rightarrow \frac{9}{4\lambda^2}=9 \Rightarrow \frac{1}{4\lambda^2}=1 \Rightarrow 4\lambda^2=1 \Rightarrow \lambda^2=\frac{1}{4} \Rightarrow \lambda_1=\frac{1}{2},\ \lambda_2=-\frac{1}{2}$$

Pentru $\lambda=\frac{1}{2} \Rightarrow x=-\frac{1}{\frac{1}{2}}=-2;\ y=-\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}=-1;\ z=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2.$

$F(x,y,z,\frac{1}{2}) = 2x+y-2z+\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2-9) \stackrel{not}{=\!=} \bar{F}(x,y,z)$

Determinăm matricea Hessiană

$$H_{\bar{F}(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \bar{F}(x,y,z)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \bar{F}(x,y,z)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \bar{F}(x,y,z)}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 \bar{F}(x,y,z)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 \bar{F}(x,y,z)}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 \bar{F}(x,y,z)}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \bar{F}(x,y,z)}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 \bar{F}(x,y,z)}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 \bar{F}(x,y,z)}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{F}(x,y,z)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(2+2\lambda x) = 2\lambda = 2\cdot\frac{1}{2} = 1.$$

$$\frac{\partial^2 \bar{F}(x,y,z)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(1+2\lambda y) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \bar{F}(x,y,z)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(2+2\lambda x) = 0$$

$$\Rightarrow H_{\bar{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{F}(x,y,z)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(1+2\lambda y) = 2\lambda = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$$

$$\frac{\partial^2 \bar{F}(x,y,z)}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(-2+2\lambda z) = 0 = \frac{\partial^2 \bar{F}(x,y,z)}{\partial z \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{F}(x,y,z)}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}(-2+2\lambda z) = 2\lambda = 2\cdot\frac{1}{2} = 1.$$

$$\frac{\partial^2 \bar{F}(x,y,z)}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}(-2+2\lambda z) = 0 = \frac{\partial^2 \bar{F}(x,y,z)}{\partial z \partial y}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0;\ \Delta_1 = 1 > 0.$$

$\left.\begin{matrix} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \Delta_3 > 0 \end{matrix}\right| \Rightarrow$ pentru $\lambda = \frac{1}{2}$ funcția are punct de minim local condiționat în punctul $(x,y,z) = (-2,-1,2)$.

Pentru $\lambda = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{-\frac{1}{2}} = 2$; $y = \frac{-1}{2\cdot(-\frac{1}{2})} = 1$; $z = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$

$\Rightarrow F(x,y,z,-\frac{1}{2}) = 2x+y-2z-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2-9) = \bar{F}(x,y,z).$

Absolut analog avem $H_{\bar{F}}(-2,-1,2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

$$\Delta_1 = -1 < 0$$

$\Rightarrow \Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0 \Rightarrow$ pentru $\lambda = -\frac{1}{2}$ funcția are punct de maxim local condiționat, în punctul $(x,y,z) = (2, 1, -2)$.

b) În punctele $(x,y) \neq (0,0)$ funcția este continuă ca funcție elementară. Rămâne de studiat continuitatea în $(0,0)$.
Alegem 2 subșiruri: $x_n = \frac{1}{n}$; $y_n = \frac{k}{n}$; $k \neq 0$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4} = \lim_{\substack{x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\ y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}} \frac{x_n^2 \cdot y_n^2}{x_n^4 + y_n^4} = \lim_{\substack{x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\ y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}} \frac{\frac{1}{n^2} \cdot \frac{k^2}{n^2}}{\frac{1}{n^4} + \frac{k^4}{n^4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{k^2}{n^4} \cdot \frac{n^4}{1+k^4} =$$

$= \frac{k^2}{1+k^4}$ ce depinde de $k \Rightarrow f$ nu este continuă în $(0,0)$.

Generalizare: Studiați continuitatea funcției

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^p \cdot y^p}{x^q + y^q}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

unde $2p = q$ iar $p, q \in (0, \infty)$. Indicație: Absolut analog.

Subiectul III (2 puncte)

(0,5 pct.) a) Calculați $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[6]{x^5 - x^6}}\, dx$.

(1,5 pct.) b) Desenați domeniul $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq x - 2, y \geq x^2 - x - 2\}$ și calculați $\displaystyle\iint_D dx\, dy$.

Soluție

a) $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[6]{x^5-x^6}}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{(x^5-x^6)^{\frac{1}{6}}}\, dx = \int_0^1 (x^5-x^6)^{-\frac{1}{6}} = \int_0^1 [x^5(1-x)]^{-\frac{1}{6}} dx$$

$$= \int_0^1 (x^5)^{-\frac{1}{6}} (1-x)^{-\frac{1}{6}} dx = \int_0^1 x^{-\frac{5}{6}} (1-x)^{-\frac{1}{6}} dx =$$

$$= \int_0^1 x^{\frac{1}{6}-1} \cdot (1-x)^{\frac{5}{6}-1} dx = B\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right)$$

$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ – Integrala Betta.

$B(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin(p\cdot\pi)} = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi.$

b) $y = x^2 - x - 2$ ecuație de gradul 2, graficul va fi o parabolă convexă cu vârful în $A\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$
$\Delta = b^2 - 4ac = 4$ $\Rightarrow A\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right) \Rightarrow$

Completare

Cum țin minte?

$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow y'(x) = 2ax + b$

$y'(x) = 0 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{b}{2a}}$ → Punct critic.

$y\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\cdot\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c =$
$= a\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = -\frac{b^2-4ac}{2a} = -\frac{\Delta}{2a}$

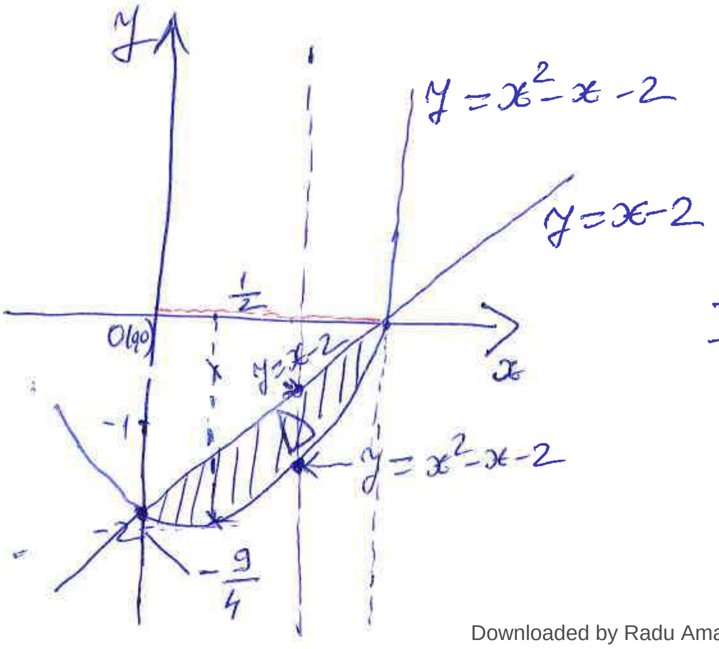
$y''(x) = 2a$ dacă $a>0 \Rightarrow$ grafic convex (ține apă)

dacă $a<0 \Rightarrow$ grafic concav nu ține apă.

De ce nu ați întrebat?

$y = x - 2$ ecuația unei drepte. Punctele de intersecție ale celor două grafice sunt date de
$\begin{cases} y = x^2 - x - 2 \\ y = x - 2 \end{cases} \Rightarrow B(0,-2)$ și $C(2,0)$
$(x-2 = x^2-x-2) \Rightarrow x_1 = , x_2 =$

Domeniul Δ este:



Considerăm domeniul Δ simplu convex în raport cu axa Oy:

Integrala de calculat devine:

$$I = \int_0^2\left(\int_{x^2-x-2}^{x-2} dy\right)dx = \int_0^2 (x-2-x^2+x+2)\,dx$$
$$= \int_0^2 (2x - x^2)\,dx =$$
$$= \left(2\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = 2^2 - \frac{2^3}{3} = \frac{4}{3}$$

Notă: Conform teoriei integrala de calculat reprezintă chiar aria domeniului Δ.

Subiectul IV (2,5 puncte)

(0,75 pct) 1) Definiți, într-un spațiu topologic, noțiunea de punct frontieră al unei mulțimi.

(0,75 pct.) 2) Definiți noțiunea de punct fix al funcției $f: X \to X$, unde X este un spațiu metric.

(1 pct.) 3) Enunțați criteriul lui Schwarz privind derivatele parțiale mixte de ordinul doi.

Soluție

1). Fie spațiul topologic $(X, \mathcal{T})$ și $A \subseteq X$. Punctul $x \in X$ se numește punct frontieră pentru A dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}_x(\mathcal{T})$ avem $V \cap A \neq \emptyset$ și $V \cap CA \neq \emptyset$. Notăm $x \in Fr(A)$.

CA = complementara lui A.

2) Fie spațiul metric (X, d). Numim punct fix al funcției $f: X \to X$ punctul $x \in X$ ce îndeplinește condiția $f(x) = x$.

3) Fie $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \in Int(A)$. Dacă f are derivate parțiale de ordinul 2 în orice $a \in Int(A)$ și dacă toate derivatele parțiale de ordinul 2 ale funcției f (în cazul nostru cele mixte) sunt continue în $a \in \overset{\circ}{A}$, atunci

$$\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial y \partial x} \text{ unde } a = (a_1, a_2),\ f(x,y) = f.$$