

CURS 9

Arbori binari. SET, SETQ, SETF. Exemple

Cuprins

1. Arbori binari.....	1
2. SET, SETQ, SETF	2
3. Exemple	4

1. Arbori binari

Un arbore binar se poate memora sub forma unei liste, în următoarele două moduri:

V1 Un arbore având

- rădăcină,
- subarborii subarbore-stâng și subarbore-drept

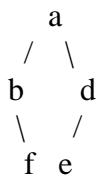
se va reprezenta sub forma unei liste neliniare de forma

(rădăcină lista-subarbore-stâng lista-subarbore-drept)

unde

- lista-subarbore-stâng reprezintă lista asociată (în memorarea sub forma V1) a subarborelui stâng al nodului rădăcină
- lista-subarbore-drept reprezintă lista asociată (în memorarea sub forma V1) a subarborelui drept al nodului rădăcină

De exemplu arborele



se reprezintă, în varianta **V1** sub forma listei (a (b () (f)) (d (e)))

Reprezentarea V1 este cea mai potrivită pentru reprezentarea sub formă de listă a unui arbore cu rădăcină, fiind adecvată definiției recursive a unui arbore (binar).

V2 Un arbore având

- rădăcină,
- nr-arbori subarbori
- subarborii subarbore-stâng și subarbore-drept

se va reprezenta sub forma unei liste liniare de forma

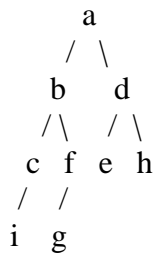
(rădăcină nr-subarbori lista-subarbore-stâng lista-subarbore-drept)

unde

- lista-subarbore-stâng reprezintă lista asociată (în memorarea sub forma V2) a subarborelui stâng al nodului rădăcină
- lista-subarbore-drept reprezintă lista asociată (în memorarea sub forma V2) a subarborelui drept al nodului rădăcină

Dezavantajul reprezentării V2 este dat faptul că nu este potrivită pentru un arbore ordonat (de ex., în cazul arborelui binar nu se face distincție între subarborile stâng și cel drept).

De exemplu arborele



se reprezintă, în varianta V2 sub forma listei (a 2 b 2 c 1 i 0 f 1 g 0 d 2 e 0 h 0)

Observație. Reprezentările V1 și V2 pot fi generalizate pentru arbori n -ari, varianta V1 fiind cea mai potrivită.

2. SET, SETQ, SETF

Pentru a da valori simbolurilor în Lisp se folosesc funcțiile cu efect secundar SET și SETQ.

Acțiunea prin care o funcție, pe lângă calculul valorii sale, realizează și modificări ale structurilor de date din memorie se numește *efect secundar*.

(SET $s_1 f_1 \dots s_n f_n$): e

- se evaluează argumentele și apoi se trece la evaluarea funcției
- efect:
 - valorile argumentelor de rang par (f_i) devin valorile argumentelor de rang impar corespunzătoare evaluate în prealabil la simboluri (s_i)
- rezultatul întors valoarea ultimei forme evaluate (f_n)

(SETQ $s_1 f_1 \dots s_n f_n$): e

- se evaluează doar formele f_1, \dots, f_n
- efect:
 - valorile argumentelor de rang par (f_i) devin valorile argumentelor de rang impar corespunzătoare neevaluate (s_i)

- în acest moment A se evaluează la (B X D)
- în acest moment X se evaluează la Y
- (SETQ X '(A B)) X se evaluează la (A B)
- (SETQ Y '(A B)) Y se evaluează la (A B)
- (SETF (CAR X) 'C) X se evaluează la (C B), dar și Y se va evalua tot la (C B)

În principiu funcțiile primitive sunt suficiente pentru orice gen de operații la nivel de liste, însă procedeele se complică mult odată cu creșterea complexității structurii acestora. De aceea, orice sistem Lisp prevede un set de funcții mai puternice de prelucrare de liste, funcții definite pe baza primitivelor și pe baza setului deja definit. Acest set se numește setul funcțiilor de sistem. Diversitatea acestui set stă la baza diversității sistemelor Lisp și a relativei lipse de portabilitate a limbajului.

3. Exemple

EXEMPLU 3.1 Se dă o mulțime reprezentată sub forma unei liste liniare. Se cere să se determine lista (mulțimea) submulțimilor listei.

(subm '(1 2)) → (() (2) (1) (1 2))

Idee: Dacă lista e vidă, submulțimea sa e lista vidă. Pentru determinarea submulțimilor unei liste [E|L], care are capul E și coada L, vom proceda în felul următor:

- determină o submulțime a listei L
- plasează elementul E pe prima poziție într-o submulțime a listei L

Vom folosi o funcție auxiliară **insPrimaPoz**(*e*, *l*) care are ca parametri un element *e* și o listă *l* de liste liniare și returnează o copie a listei *l* în ale cărei liste se inserează *e* pe prima poziție.

(insPrimaPoz '3 '(() (2) (1) (1 2)) → ((3) (3 2) (3 1) (3 1 2))

; *l* este o listă de liste liniare

; se inserează *e* pe prima poziție, în fiecare listă din *l*, și se returnează rezultatul

insPrimaPoz(*e*, *l*₁ *l*₂ ... *l*_{*n*})

$$= \begin{cases} \emptyset & \text{daca lista } e \text{ vida} \\ (e, l_1) \oplus \text{insPrimaPoz}(e, \text{insPrimaPoz}(l_1, l_2 \dots l_n)) & \text{altfel} \end{cases}$$

(defun insPrimaPoz(e l)

```

(cond
  ((null l) nil)
  (t (cons (cons e (car l)) (insPrimaPoz e (cdr l)))))
)

```

; l este o mulțime reprezentată sub forma unei liste liniare

$$subm(l_1 l_2 \dots l_n) = \begin{cases} (\emptyset) & \text{daca lista e vida} \\ subm(l_2 \dots l_n) \oplus insPrimaPoz(l_1, subm(l_2 \dots l_n)) & \text{altfel} \end{cases}$$

```

(defun subm(l)
  (cond
    ((null l) (list nil))
    (t (append (subm (cdr l)) (insPrimaPoz (car l) (subm (cdr l)))))
  )
)

```

În codul Lisp scris anterior observăm faptul că apelul recursiv `(subm (cdr l))` din cea de-a doua clauză COND se repetă, ceea ce evident, nu este eficient din perspectiva complexității timp. O soluție pentru evitarea acestui apel repetat va fi folosirea unei funcții anonime LAMBDA (se va discuta în **Cursul 10**).

De asemenea, în **Cursul 11** vom discuta despre simplificarea implementării funcției `subm`, renunțând la utilizarea funcției auxiliare.

EXEMPLU 3.2 Se dă o mulțime reprezentată sub forma unei liste liniare. Se cere să se determine lista (mulțimea) permutărilor listei inițiale.

$$(PERMUTĂRI \ ' (1 \ 2 \ 3)) \rightarrow ((1 \ 2 \ 3) (1 \ 3 \ 2) (2 \ 1 \ 3) (2 \ 3 \ 1) (3 \ 1 \ 2) (3 \ 2 \ 1))$$

Idee: Dacă lista e vidă, lista permutărilor sale este lista vidă. Pentru determinarea permutărilor unei liste $[E|L]$, care are capul E și coada L , vom proceda în felul următor:

1. determină o permutare $L1$ a listei L ;
2. plasează elementul E pe toate pozițiile listei $L1$ și produce în acest fel lista X care va fi o permutare a listei inițiale $[E|L]$.

Vom folosi câteva funcții auxiliare:

- 1) o funcție care returnează lista obținută prin inserarea unui element E pe o anumită poziție N într-o listă L ($1 \leq N \leq \text{lungimea listei } L+1$).

$$\begin{aligned} (INS \ 'B \ 2 \ '(A \ C \ D)) &= (A \ B \ C \ D) \\ (INS \ 'B \ 4 \ '(A \ C \ D)) &= (A \ C \ D \ B) \end{aligned}$$

Modelul recursiv

$$ins(e, n, l_1 l_2 \dots l_k) = \begin{cases} (e l_1 l_2 \dots l_k) & \text{daca } n = 1 \\ l_1 \oplus ins(e, n - 1, l_2 \dots l_k) & \text{altfel} \end{cases}$$

```
(DEFUN INS (E N L)
  (COND
    ((= N 1) (CONS E L))
    (T (CONS (CAR L) (INS E (- N 1) (CDR L)))))
  )
)
```

- 2) o funcție care să returneze mulțimea formată din listele obținute prin inserarea unui element **E** pe pozițiile **1, 2, ..., lungimea listei L+1** într-o listă **L**.

(INSERARE '1 '(2 3)) = ((2 3 1) (2 1 3) (1 2 3))

Observație: Se va folosi o funcție auxiliară (INSERT E N L) care returnează mulțimea formată cu listele obținute prin inserarea unui element pe pozițiile **lg+1, lg, lg-1, ..., N** în lista **L** (**lg** este lungimea listei **L**).

$$insert(e, n, l_1 l_2 \dots l_k) = \begin{cases} \emptyset & \text{daca } n = 0 \\ ins(e, n, l_1 l_2 \dots l_k) \oplus insert(e, n - 1, l_1 l_2 \dots l_k) & \text{altfel} \end{cases}$$

```
(DEFUN INSERT (E N L)
  (COND
    ((= N 0) NIL)
    (T (CONS (INS E N L) (INSERT E (- N 1) L))))
  )
)
```

$$inserare(e, l_1 l_2 \dots l_n) = insert(e, n + 1, l_1 l_2 \dots l_n)$$

```
(DEFUN INSERARE (E L)
  (INSERT E (+ (LENGTH L) 1) L)
)
```

Temă Continuați implementarea pentru funcția PERMUTĂRI.

EXEMPLU 3.3 Se dă un arbore binar reprezentat în V1 (a se vedea Secțiunea 1). Să se determine lista liniară a nodurilor obținute prin parcurgerea arborelui în inordine.

(inordine '(a (b () (f)) (d (e)))) = (b f a e d)

În reprezentarea unui AB în varianta V1, sub forma unei liste l de forma (rădăcină lista-subarbore-stâng lista-subarbore-drept), observăm următoarele

- (car l) – primul element al listei este rădăcina arborelui
- (cadr l) – al doilea element al listei, la nivel superficial, este subarborele stâng
- (caddr l) – al treilea element al listei, la nivel superficial, este subarborele stâng

Model recursiv

$$inordine(l_1 l_2 l_3) = \begin{cases} \emptyset & \text{daca } l \text{ e vida} \\ inordine(l_2) \oplus l_1 \oplus inordine(l_3) & \text{altfel} \end{cases}$$

```
(defun inordine(l)
  (cond
    ((null l) nil)
    (t (append (inordine (cadr l)) (list (car l)) (inordine (caddr l))))
  )
)
```

EXEMPLU 3.4 Se dă un arbore binar reprezentat în V2 (a se vedea Secțiunea 1). Să se determine lista nodurilor obținute prin parcurgerea arborelui în inordine.

În reprezentarea unui AB în V2, față de reprezentarea V1, nu este clar identificat subarborele stâng și subarborele drept, pentru ca AB să poată fi prelucrat recursiv.

Idee: Dacă am reuși să extragem lista corespunzătoare (reprezentării în V2) a subarborilor stâng și drept, problema s-ar reduce la cea prezentată în EXEMPLU 3.3.

Vom folosi o funcție auxiliară pentru a determina subarborele stâng al unui AB reprezentat în V2 (presupunem reprezentarea corectă).

(stang '(a 2 b 2 c 1 i 0 f 1 g 0 d 2 e 0 h 0)) = (b 2 c 1 i 0 f 1 g 0)

Vom folosi o funcție auxiliară, **parcurs_st**, care va parcurge lista începând cu al 3-lea element și care returnează subarborele stâng.

(parcurs_st '(b 2 c 1 i 0 f 1 g 0 d 2 e 0 h 0)) = (b 2 c 1 i 0 f 1 g 0)

$$stang(l_1 l_2 \dots l_n) = parcurs_st(l_3 \dots l_n, 0, 0)$$

$parcure_st(l_1 l_2 \dots l_k, nv, nm)$

$$= \begin{cases} \emptyset & \text{daca } l \text{ e vida} \\ \emptyset & \text{daca } nv = 1 + nm \\ l_1 \oplus l_2 \oplus parcure_st(l_3 \dots l_k, nv + 1, nm + l_2) & \text{altfel} \end{cases}$$

```
(defun parcure_st(arb nv nm)
  (cond
    ((null arb) nil)
    ((= nv (+ 1 nm)) nil)
    (t (cons (car arb) (cons (cadr arb) (parcure_st (cddr arb) (+ 1 nv) (+ (cadr arb) nm))))))
  )
)
```

```
(defun stang(arb)
  (parcure_st (cddr arb) 0 0)
)
```

Temă. Scrieți funcția pentru determinarea subarborelui drept. Pentru a reduce complexitatea timp, se poate defini o sigură funcție care determină atât subarboarele stâng, cât și cel drept.

(drept ' (a 2 b 2 c 1 i 0 f 1 g 0 d 2 e 0 h 0)) = (d 2 e 0 h 0)

Având funcțiile anterioare care determină subarboarele stâng și cel drept, lista nodurilor obținute prin parcurgerea arborelui în inordine se va face similar modelului recursiv descris în **EXEMPLU 3.3.**

$inordine(l_1 l_2 \dots l_n)$

$$= \begin{cases} \emptyset & \text{daca } l \text{ e vida} \\ inordine(stang(l_1 l_2 \dots l_n)) \oplus l_1 \oplus inordine(drept(l_1 l_2 \dots l_n)) & \text{altfel} \end{cases}$$

EXEMPLU 3.5. Se o listă liniară numerică. Să se determine lista sortată, folosind sortarea arborescentă (un ABC intermediar).

(sortare ' (5 1 4 6 3 2)) = (1 2 3 4 5 6)

Pentru sortarea arborescentă a unei liste, vom proceda astfel:

1. Construim un ABC intermediar cu elementele listei inițiale
 - pentru memorarea ABC vom face folosi o listă liniară – varianta V1 (Secțiunea 1)
 - pentru construirea ABC intermediar vom avea nevoie de inserarea unui element în arbore
2. Parcurgerea în inordine a arborelui construit anterior ne va furniza lista inițială ordonată.

Model recursiv – inserarea unui element în ABC

$$inserare(e, l_1 l_2 l_3) = \begin{cases} (e) & \text{daca } l \text{ e vida} \\ l_1 \oplus inserare(e, l_2) \oplus l_3 & \text{daca } e \leq l_1 \\ l_1 \oplus l_2 \oplus inserare(e, l_3) & \text{altfel} \end{cases}$$

```
(defun inserare(e arb)
  (cond
    ((null arb) (list e))
    ((<= e (car arb)) (list (car arb) (inserare e (cadr arb)) (caddr arb)))
    (t (list (car arb) (cadr arb) (inserare e (caddr arb)))))
  )
)
```

Model recursiv – construirea ABC din listă

$$construire(l_1 l_2 \dots l_n) = \begin{cases} \emptyset & \text{daca } l \text{ e vida} \\ inserare(l_1 construire(l_2 \dots l_n)) & \text{altfel} \end{cases}$$

```
(defun construire(l)
  (cond
    ((null l) nil)
    (t (inserare (car l) (construire (cdr l)))))
  )
)
```

; lista nodurilor unui ABC parcurs în inordine

```
(defun inordine (arb)
  (cond
    ((null arb) nil)
    (t (append (inordine (cadr arb)) (list (car arb)) (inordine (caddr arb)))))
  )
)
```

; sortarea arborescentă a listei

```
(defun sortare(l)
  (inordine (construire l))
)
```