Consultatie

Thursday, May 26, 2022 5:57 PM

Problema 2 (a) *Se consideră o formulă de cuadratură de tipul*

$$\int_0^1 f(x)dx = \alpha f(x_1) + \beta[f(1) - f(0)] + R(f). \qquad (1)$$

Să se determine α, β, x_1 astfel încât gradul de exactitate să fie cât mai mare posibil. Care este gradul de exactitate maxim care se poate atinge?

(b) *Utilizaţi interpolarea şi teorema lui Peano pentru a obţine o margine a lui $|R(f)|$ în funcţie de $\|f^{(r)}\|_\infty = \max_{0\le x\le 1} |f^{(r)}(x)|$, pentru un r adecvat.*

(c) *Adaptaţi (1), inclusiv delimitarea pentru $|R(f)|$, pentru a obţine o integrală de forma $\int_c^{c+h} f(t)dt$, unde c este o constantă şi $h > 0$.*

(d) *Aplicaţi rezultatul de la (c) pentru a obţine o formulă de cuadratură repetată pentru $\int_a^b f(t)dt$, subdivizând $[a,b]$ în n subintervale de lungime totală $h = \frac{b-a}{n}$. Găsiţi o margine a erorii totale.*

$$\int_0^1 p = \alpha p(x_1) + \beta(p(1) - p(0)), \quad \forall p \in \mathbb{P}_d \ (\text{gr.}\, p \le d) \quad \underbrace{R(p)=0}$$

$$\exists\, g \in \mathbb{P}_{d+1} \ \text{a.î.}\ R(g) \ne 0$$

$$\Downarrow$$

$$d = \text{gr. de exact.}$$

$$f(x) = \underbrace{x^0}_{=1} \Rightarrow \underbrace{\int_0^1 1\,dx}_{1} = \alpha\cdot 1 + \beta(1-1) \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 1}$$

$f(x) = 1, \forall x$

$$f(x) = x^1 \Rightarrow \underbrace{\int_0^1 x\,dx}_{\frac{1}{2}} = 1\cdot x_1 + \beta(1-0) \Leftrightarrow x_1 + \beta = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = x^2 \Rightarrow \underbrace{\int_0^1 x^2\,dx}_{\frac{1}{3}} = 1\cdot x_1^2 + \beta(1-0) \Leftrightarrow x_1^2 + \beta = \frac{1}{3}$$

$$x_1 - x_1^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow x_1^2 - x_1 + \frac{1}{6} = 0$$

```
>> int(x,0,1)
ans = (sym) 1/2
>> int(x^2,0,1)
ans = (sym) 1/3
>> syms x1
>> solve(x1^2-x1+sym(1)/6==0)
ans = (sym 2x1 matrix)

  [        ___]
  [1     \/ 3 ]
  [- - -----]
  [2      6   ]
  [           ]
  [           ]
  [  ___      ]
  [\/ 3    1]
  [----- + -]
  [  6     2]
```

$$\Leftrightarrow x_1 \in \left\{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right\} \Rightarrow \beta \in \left\{-\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right\}.$$

$$f(x) = x^3 \Rightarrow \underbrace{\int_0^1 x^3\,dx}_{\frac{1}{4}} = x_1^3 + \beta(1-0) \Leftrightarrow x_1^3 + \beta = \frac{1}{4}$$

```
>> X=solve(x1^2-x1+sym(1)/6==0)
>> (X(1)>0)&(X(1)<1)
ans = (sym) True
>> (X(2)>0)&(X(2)<1)
ans = (sym) True
```

```
>> x1=X(1)
x1 = (sym)

      ___
  1 \/ 3
  - - -----
  2     6

>> beta=sym(1)/2-x1
beta = (sym)

   ___
 \/ 3
 -----
   6

>> x1^3+beta==sym(1)/4
ans = (sym) False
```

```
>> x1=X(2)
x1 = (sym)

   ___
 \/ 3    1
 ----- + -
   6     2

>> beta=sym(1)/2-x1
beta = (sym)

   ___
 -\/ 3
 -------
    6

>> x1^3+beta==sym(1)/4
ans = (sym) False
```

$\Rightarrow$ gr. de exact. este 2.

Teorema 1 (Peano)

Fie L o funcţională reală, continuă, definită pe $H^n[a,b]$. Dacă $\mathrm{Ker}L = \mathbb{P}_{n-1}$ atunci

$n=3 \Leftarrow \mathbb{P}_2$

$$\overbrace{Lf}^{R(f)} = \int_a^b K(t) f^{(n)}(t)dt, \qquad (3)$$

unde

$$K(t) = \frac{1}{(n-1)!} L[(\cdot - t)_+^{n-1}] \quad \text{(nucleul lui Peano)}. \qquad (4)$$

$$\ker R = \mathbb{P}_2$$

$$\Rightarrow R(f) = \int_0^1 K(t)\cdot f^{(3)}(t)\,dt$$

$$|R(f)| \le \int_0^1 |K(t)|\cdot \underbrace{|f^{(3)}(t)|}\,dt \le \underbrace{\max_{x\in[0,1]} |f^{(3)}(x)|}_{\|f^{(3)}\|_\infty}$$

$$|R(f)| \le \|f^{(3)}\|_\infty \cdot \int_0^1 \frac{1}{2}\left|R\left((\cdot - t)_+^2\right)\right| dt$$

$$\ldots \quad t \in [0,1]$$

$|K(f)| \le \|f'''\|_\infty \int \ldots \underbrace{\ldots}_{\|f^{(3)}\|_\infty}$

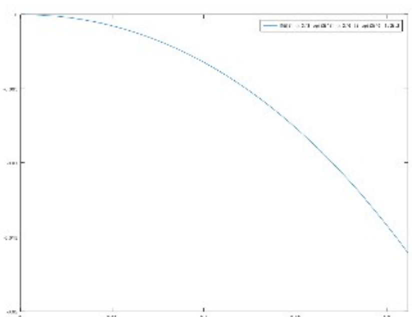
$\lambda_t = (\bullet - t)_+ \to$ funcție, $t \in [0,1]$

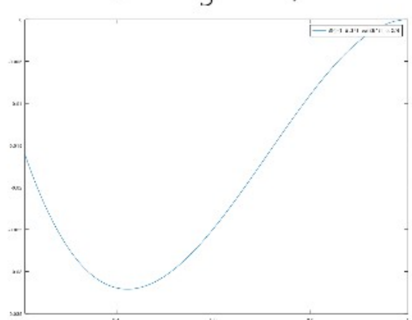
$\lambda_t : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad \lambda_t(x) = (x-t)_+ = \begin{cases} x-t, & x \ge t \\ 0, & x < t \end{cases}$

$$R\left((\cdot - t)_+^2\right) = \underbrace{\int_0^1 (x-t)_+^2\,dx}_{\int_0^t 0\,dx + \int_t^1 (x-t)^2\,dx} - \underbrace{\left[\alpha\cdot(x_1-t)_+^2 + \beta\left(\underbrace{(1-t)_+^2}_{(1-t)^2} - \underbrace{(0-t)_+^2}_{0}\right)\right]}_{(x_1-t)_+^2 + \beta(1-t)^2}$$

$$\int_t^1 (x-t)^2\,dx = \frac{(x-t)^3}{3}\Big|_t^1 = \frac{(1-t)^3}{3}$$

$$\Rightarrow K(t) = \frac{1}{2} R\left((\cdot - t)_+^2\right) = \frac{1}{2}\cdot\begin{cases} \frac{(1-t)^3}{3} - (x_1-t)^2 - \beta(1-t)^2, & t \le x_1 \\ \frac{(1-t)^3}{3} - \beta(1-t)^2, & t > x_1 \end{cases}$$





```
>> x1=X(1)
x1 = (sym)

  1   \/ 3
  - - -----
  2     6

>> beta=sym(1)/2-x1
beta = (sym)

  \/ 3
  -----
    6

>> E1=(1-t)^3/3-(x1-t)^2-beta*(1-t)^2

>> fplot(function_handle(E1),[0,eval(x1)])
```

```
>> E2=(1-t)^3/3-beta*(1-t)^2

>> fplot(function_handle(E2),[eval(x1),1])
```

$\Downarrow$ $K(t)$ păstrează semnul minus pe $[0,1]$

$\Downarrow$

putem aplica

Corolarul 3

Dacă K păstrează semn constant pe $[a,b]$ și $f^{(n)}$ este continuă pe $[a,b]$, atunci există $\xi \in [a,b]$ astfel încât

$n=3$

$$\overbrace{Lf}^{R(f)} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi) Le_n, \qquad (5)$$

unde $e_k(x) = x^k$, $k \in \mathbb{N}$.

$R^{(3)} \ldots$

$$R(f)=\frac{1}{3!}\cdot f^{(3)}(\xi)\cdot R(e_3),$$

unde $\xi\in[0,1]$

$$|R(f)|\le\frac{1}{6}\cdot\|f^{(3)}\|_\infty\cdot|R(e_3)|$$

$$|R(e_3)|=\left|\underbrace{\int_0^1 x^3dx}_{\frac{1}{4}}-\left[\alpha\cdot x_1^3+\underbrace{\beta(1^3-0^3)}_{x_1^3+\beta}\right]\right|=\left|\frac{1}{4}-(x_1^3+\beta)\right|$$

```
>> simplify(sym(1)/4-(x1^3+beta))
ans = (sym)

  -\/ 3
  -------
    36
```

b) $|R(f)|\le\frac{\sqrt{3}}{216}\|f^{(3)}\|_\infty,$

pt.

```
>> [x1,beta]
ans = (sym 1x2 matrix)

  [                 ]
  [1   \/ 3   \/ 3  ]
  [- - -----  ----- ]
  [2     6      6   ]
```

Problema 2 *(a) Se consideră o formulă de cuadratură de tipul*

$$\int_0^1 f(x)dx=\alpha f(x_1)+\beta[f(1)-f(0)]+R(f). \qquad (1)$$

Să se determine α, β, x_1 astfel încât gradul de exactitate să fie cât mai mare posibil. Care este gradul de exactitate maxim care se poate atinge?

(b) Utilizați interpolarea și teorema lui Peano pentru a obține o margine a lui $|R(f)|$ în funcție de $\|f^{(r)}\|_\infty=\max_{0\le x\le 1}|f^{(r)}(x)|$, pentru un r adecvat.

(c) Adaptați (1), inclusiv delimitarea pentru $|R(f)|$, pentru a obține o integrală de forma $\int_c^{c+h}f(t)dt$, unde c este o constantă și $h>0$.

(d) Aplicați rezultatul de la (c) pentru a obține o formulă de cuadratură repetată pentru $\int_a^b f(t)dt$, subdivizând $[a,b]$ în n subintervale de lungime totală $h=\frac{b-a}{n}$. Găsiți o margine a erorii totale.

$$\int_c^{c+h}f(t)dt \underset{\substack{t=s+c\\ dt=ds}}{\overset{s=t-c}{=}} \int_0^h f(s+c)ds \underset{\substack{s=xh\\ ds=hdx}}{\overset{x=\frac{s}{h}}{=}} \int_0^1 f(xh+c)\,h\,dx$$

$$(1)\Rightarrow \int_c^{c+h}f(t)dt=\int_0^1\underbrace{f(xh+c)\cdot h}_{g(x)}dx=\int_0^1 g(x)dx$$

$$\simeq\underbrace{\alpha g(x_1)+\beta(g(1)-g(0))}_{1\cdot f(x_1h+c)\cdot h+\beta\cdot h(f(h+c)-f(c))}$$

c)

$$\Rightarrow \int_c^{c+h}f(t)dt\simeq f(x_1h+c)\cdot h+\beta h(f(h+c)-f(c))$$

$$|R(f)|=|R(g)|\le\frac{\sqrt{3}}{216}\cdot\|g^{(3)}\|_\infty=\frac{\sqrt{3}}{216}\cdot h^4\cdot\|f^{(4)}\|_\infty$$

$$|R(f)| = |R(g)| \le \frac{\sqrt{3}}{216} \cdot \|g^{(3)}\|_\infty = \frac{\sqrt{3}}{216} \cdot h^4 \cdot \|f^{(3)}\|_\infty$$

$$g(x) = h\, f(xh + c) \Rightarrow g'(x) = h f'(xh+c) \cdot \underbrace{(xh+c)'}_{}|_x$$

$$= h^2 f'(xh+c)$$

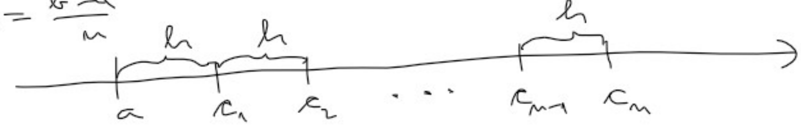
$$g''(x) = h^3 f''(xh+c)$$

$$g^{(3)}(x) = h^4 f^{(3)}(xh+c), \quad x \in [0,1]$$
$$xh + c \in [c, c+h]$$

d) $$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{c_{i-1}}^{c_{i-1}+h} f(x)\,dx$$

Dw.: $a = c_0 < c_1 = a + h < c_2 = a + 2h < \dots < c_n = a + nh = b$

$h = \frac{b-a}{n}$



$$c) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(x_1 h + c_{i-1}) \cdot h + \beta h \left(f(h + c_{i-1}) - f(c_{i-1})\right)}_{f(x_1 h + a(i-1)h) \cdot h + \beta h \left(f(a + ih) - f(a + (i-1)h)\right)}$$

$$\left|R_{[a,b]}(f)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} R_{[c_{i-1}, c_i]}(f)\right| \le \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left|R_{[c_{i-1}, c_{i-1}+h]}(f)\right|}_{}$$

$$\underset{c)}{\le} \frac{\sqrt{3}}{216} \cdot h^4 \left\|f|_{[c_{i-1}, c_{i-1}+h]}^{(3)}\right\|_\infty$$

$$\Rightarrow \left|R_{[a,b]}(f)\right| \le \frac{\sqrt{3}}{216} \cdot h^4 \cdot \|f^{(3)}\|_\infty .$$