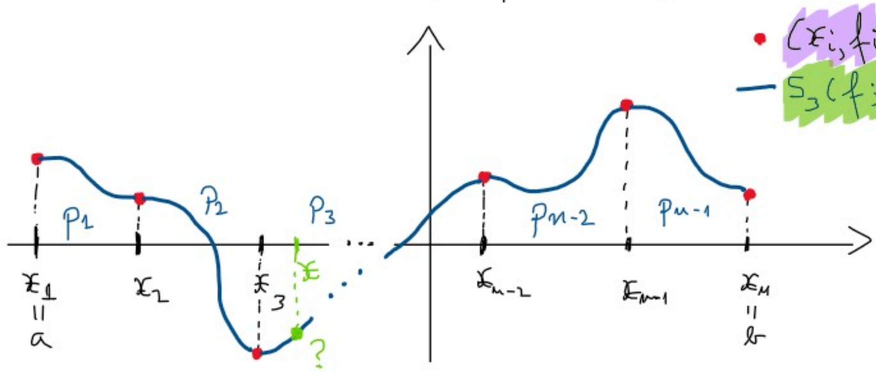
Lab 8

Monday, April 11, 2022 2:47 PM

Interpolare cubică spline (de cls. C^2)

„trece prin pcte" „grad ≤ 3" „pol. pe porțiuni" „deriv. de 2 ori cu deriv. 2 cont."



• (x_i, f_i)

— $S_3(f;\cdot)$

$$S_3(f;x) = \begin{cases} p_1(x), & x \in [x_1, x_2] \\ p_2(x), & x \in [x_2, x_3] \\ \vdots & \\ p_{n-1}(x), & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

$S_3(f;\cdot) \in C^2[a,b]$

$(S_3(f;\cdot), S_3'(f;\cdot), S_3''(f;\cdot)$ cont.$)$

$$p_i(x_i) = f_i,\quad p_i(x_{i+1}) = f_{i+1},\quad i = \overline{1, n-1}$$

$$p_i'(x_{i+1}) = p_{i+1}'(x_{i+1}),\quad i = \overline{1, n-2}$$

$$p_i''(x_{i+1}) = p_{i+1}''(x_{i+1}),\quad i = \overline{1, n-2}$$

$$p_i(x) = c_{i,0} + c_{i,1}(x - x_i) + c_{i,2}(x - x_i)^2 + c_{i,3}(x - x_i)^3,\quad i = \overline{1, n-1}$$

Nr. de coef. necunosc.: $4(n-1) = 4n - 4$

Nr. de cond./ec.: $2(n-1) + n - 2 + n - 2 = 4n - 6$

Adăugăm 2 cond./ec. care dau tipul spline-ului:

- complet: $p_1'(x_1) = f'(a)$, $p_{n-1}'(x_n) = f'(b)$
- natural: $p_1''(x_1) = p_{n-1}''(x_n) = 0$
- deriv. secunde: $p_1''(x_1) = f''(a)$, $p_{n-1}''(x_n) = f''(b)$
- de Boor: $p_1'''(x_2) = p_2'''(x_2)$, $p_{n-2}'''(x_{n-1}) = p_{n-1}'''(x_{n-1})$

Interpolare cu spline cubice I

Funcțiile spline cubice sunt cele mai utilizate.
Vom discuta întâi problema interpolării pentru $s \in \mathbb{S}_3^1(\Delta)$. Continuitatea derivatei de ordinul I pentru $s_3(f;\cdot)$ se poate realiza impunând valorile primei derivate în fiecare punct x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Astfel fie $m_1, m_2, \ldots, m_n$ numere arbitrare date și notăm

$$s_3(f;\cdot)|_{[x_i,x_{i+1}]} = p_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{13}$$

Realizăm $s_3'(f;x_i) = m_i$, $i = \overline{1,n}$, luând fiecare bucată ca soluție unică a problemei de interpolare Hermite, și anume

$$\begin{aligned} &p_i(x_i) = f_i, \quad p_i(x_{i+1}) = f_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}, \\ &p_i'(x_i) = m_i, \quad p_i'(x_{i+1}) = m_{i+1} \end{aligned} \tag{14}$$

Interpolare cu spline cubice II

Vom rezolva problema folosind interpolarea Newton. Diferențele divizate sunt

$$\begin{array}{ccccc} x_i & f_i & m_i & \frac{f[x_i,x_{i+1}]-m_i}{\Delta x_i} & \frac{m_{i+1}+m_i-2f[x_i,x_{i+1}]}{(\Delta x_i)^2} \\ x_i & f_i & f[x_i,x_{i+1}] & \frac{m_{i+1}-f[x_i,x_{i+1}]}{\Delta x_i} & \\ x_{i+1} & f_{i+1} & m_{i+1} & & \\ x_{i+1} & f_{i+1} & & & \end{array}$$

$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $i = \overline{1, n-1}$

$f[x_i, x_{i+1}] = \dfrac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x_i}$

și deci forma Newton a polinomului de interpolare Hermite este

$$\begin{aligned} p_i(x) = f_i + (x - x_i)m_i + (x - x_i)^2 \frac{f[x_i, x_{i+1}] - m_i}{\Delta x_i} \\ + (x - x_i)^2 (x - x_{i+1}) \frac{m_{i+1} + m_i - 2f[x_i, x_{i+1}]}{(\Delta x_i)^2}. \end{aligned}$$

Interpolare cu spline cubice III

Forma Taylor a lui p_i pentru $x_i \le x \le x_{i+1}$ este

$$p_i(x) = c_{i,0} + c_{i,1}(x - x_i) + c_{i,2}(x - x_i)^2 + c_{i,3}(x - x_i)^3 \qquad (15)$$

și deoarece $x - x_{i+1} = x - x_i - \Delta x_i$, prin identificare avem

$$\begin{aligned} c_{i,0} &= f_i \\ c_{i,1} &= m_i \\ c_{i,2} &= \frac{f[x_i, x_{i+1}] - m_i}{\Delta x_i} - c_{i,3}\Delta x_i = \frac{3f[x_i, x_{i+1}] - 2m_i - m_{i+1}}{\Delta x_i} \\ c_{i,3} &= \frac{m_{i+1} + m_i - 2f[x_i, x_{i+1}]}{(\Delta x_i)^2} \end{aligned} \qquad (16)$$

Deci, pentru a calcula $s_3(f; x)$ într-un punct care nu este nod, trebuie în prealabil să localizăm intervalul $[x_i, x_{i+1}] \ni x$, să calculăm coeficienții cu (16) și să evaluăm spline-ul cu (15).
Vom discuta câteva alegeri posibile pentru $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

Spline cubice de clasă C^2 I

Cerem ca $s_3(f; \cdot) \in \mathbb{S}_3^2(\Delta)$, adică continuitatea derivatelor de ordinul al II-lea. Aceasta înseamnă, cu notația (13)

$$p''_{i-1}(x_i) = p''_i(x_i), \quad i = \overline{2, n-1}, \qquad (20)$$

care convertită în coeficienți Taylor (15) dă

$$2c_{i-1,2} + 6c_{i-1,3}\Delta x_{i-1} = 2c_{i,2}, \quad i = \overline{2, n-1}.$$

Înlocuind cu valorile explicite (16) pentru coeficienți se ajunge la sistemul liniar

$$\Delta x_i m_{i-1} + 2(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)m_i + (\Delta x_{i-1})m_{i+1} = b_i, \quad i = \overline{2, n-1} \qquad (21)$$

+ 2 ec. / cond. care dau tipul splinenului

unde

$$b_i = 3\{\Delta x_i f[x_{i-1}, x_i] + \Delta x_{i-1} f[x_i, x_{i+1}]\} \qquad (22)$$