Test

(P1) [1 punct] Fie $p, q \in PROP$. Verificaţi dacă următoarele formule sunt valide în clasa tuturor cadrelor Kripke pentru ML_0:

(i) $\Box(p \vee q) \rightarrow \neg\Diamond\neg(p \vee q)$.

(ii) $\Box\neg q \rightarrow \Diamond\neg q$.

Demonstraţie:

(i) Avem că $\neg\Diamond\neg(p \vee q) = \neg\neg\Box\neg\neg(p \vee q)$. Pentru orice model $\mathcal{M} = (W, R, V)$ şi orice stare w, avem că $\mathcal{M}, w \vDash \neg\neg\Box\neg\neg(p \vee q)$ ddacă $\mathcal{M}, w \vDash \Box\neg\neg(p \vee q)$ ddacă $\mathcal{M}, w \vDash \Box(p \vee q)$. Prin urmare, $\Box(p \vee q) \rightarrow \neg\Diamond\neg(p \vee q)$ este validă în clasa tuturor cadrelor.

(ii) Răspunsul este NU. Contraexemplul este cel din Exemplul 2.22.

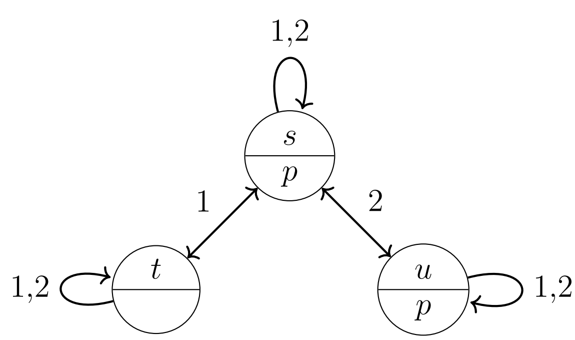
(P2) [0,5 puncte] Demonstraţi că pentru orice formule φ, ψ ale lui ML_0,

$$\vdash_{\boldsymbol{K}} \neg\varphi \rightarrow \neg\psi \quad \text{implică} \quad \vdash_{\boldsymbol{K}} \Box\psi \rightarrow \Box\varphi.$$

Demonstraţie: Prezentăm următoarea $\boldsymbol{K}$-demonstraţie:

(1)	$\vdash_{\boldsymbol{K}} \neg\varphi \rightarrow \neg\psi$	ipoteză
(2)	$\vdash_{\boldsymbol{K}} (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$	(Taut)
(3)	$\vdash_{\boldsymbol{K}} \psi \rightarrow \varphi$	(MP): (1), (2)
(4)	$\vdash_{\boldsymbol{K}} \Box\psi \rightarrow \Box\varphi$	Exemplul 2.31: (3)

(P3) [1 punct] Considerăm modelul Kripke $\mathcal{M} = (W, \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, V)$ pentru logica epistemică reprezentat astfel:



Verificaţi dacă următoarele afirmaţii sunt adevărate:

(i) $\mathcal{M}, s \Vdash K_2\neg\neg p$.

(ii) $\mathcal{M}, t \Vdash \neg K_2\neg K_1 p$.

Demonstraţie:

(i) Răspunsul este DA. Am demonstrat în curs (slide-ul 69) că $\mathcal{M}, s \Vdash K_2 p$ şi folosim faptul că, pentru orice formulă φ, $\neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi$ este validă în logica epistemică, deoarece este tautologie propoziţională.

(ii) Avem că

$$
\begin{array}{lll}
\mathcal{M}, t \Vdash \neg K_2 \neg K_1 p & \text{ddacă} & \mathcal{M}, t \nVdash K_2 \neg K_1 p \\
 & \text{ddacă} & \text{există } w \text{ astfel încât } \mathcal{K}_2 tw \text{ şi } \mathcal{M}, w \nVdash \neg K_1 p \\
 & \text{ddacă} & \mathcal{M}, t \nVdash \neg K_1 p \text{ (deoarece } \mathcal{K}_2 tw \text{ ddacă } w = t) \\
 & \text{ddacă} & \mathcal{M}, t \Vdash K_1 p \\
 & \text{ddacă} & \text{pentru orice } w,\ \mathcal{K}_1 tw \text{ implică } \mathcal{M}, w \Vdash p \\
 & \text{ddacă} & \mathcal{M}, t \Vdash p \text{ şi } \mathcal{M}, s \Vdash p \\
 & \text{ddacă} & p \in V(t) \text{ şi } p \in V(s),
\end{array}
$$

ceea ce este fals, deoarece $p \notin V(t)$.

(P4) [0,5 puncte] Fie $\mathcal{M}_c$ modelul epistemic care descrie jocul de cărţi, definit în curs. Să se demonstreze că $\mathcal{M}_c, (A, B) \Vdash K_1 \neg 2A$.

Demonstraţie: Avem că

$$
\begin{array}{lll}
\mathcal{M}_c, (A, B) \Vdash K_1 \neg 2A & \text{ddacă} & \text{pentru orice } (X, Y) \in W,\ \mathcal{K}_1(A, B)(X, Y) \text{ implică } \mathcal{M}_c, (X, Y) \Vdash \neg 2A \\
 & \text{ddacă} & \mathcal{M}_c, (A, B) \Vdash \neg 2A \text{ şi } \mathcal{M}_c, (A, C) \Vdash \neg 2A \\
 & & \text{(deoarece } \mathcal{K}_1(A, B)(X, Y) \text{ ddacă } (X, Y) \in \{(A, B), (A, C)\}) \\
 & \text{ddacă} & \mathcal{M}_c, (A, B) \nVdash 2A \text{ şi } \mathcal{M}_c, (A, C) \nVdash 2A \\
 & \text{ddacă} & (A, B) \notin V(2A) \text{ şi } (A, C) \notin V(2A),
\end{array}
$$

ceea ce este adevărat, deoarece $V(2A) = \{(B, A), (C, A)\}$.