Algebra liniară
Model de lucrare scrisă

1. a) Să se definească subspaţiul vectorial şi să se dea un exemplu de subspaţiu al $\mathbb{R}$-spaţiului vectorial $\mathbb{R}^2$.
b) Să se arate că intersecţia a unuei familii de subspaţii este subspaţiu vectorial.
c) Să se arate că $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\}$ este un subspaţiu al $\mathbb{R}$-spaţiului vectorial $\mathbb{R}^3$.

2. a) Să se definească liniar dependenţa şi să se dea un exemplu de trei vectori liniar dependenţi în $\mathbb{R}^3$.
b) Să se arate că un vector nenul al unui spaţiu vectorial este liniar independent.
c) Să se stabilească dacă

$$\mathbf{b} = ((1, 4, 2), (2, 3, 1), (3, 0, -1))^t$$

este o bază pentru $\mathbb{R}^3$ şi dacă da, să se determine coordonatele vectorului $v = (0, -7, -4)$ relativ la acestă bază.

3. a) Să se enunţe lema lui Steinitz.
b) Fie $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$ şi $T = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid -x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 = 2x_1 + x_2 + x_3\}$. Să se arate că $S, T \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$ şi că $S \oplus T = \mathbb{R}^3$.
c) Cu notaţiile de la b), să se găsescă câte o bază şi dimensiunea subspaţiilor S şi T, $S \cap T$ şi $S + T$.

4. a) Să se definească aplicaţia liniară şi să se dea un exemplu de aplicaţie $\mathbb{R}$-liniară de la $\mathbb{R}^2$ la $\mathbb{R}$.
b) Dacă $f : V \to W$ şi $g : W \to U$ sunt două aplicaţii K-liniare. să se arate că $g \circ f$ este de asemenesa K-liniară.
c) Fie $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dată prin

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (&x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4, -2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4, \\ &5x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 5x_4, x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4) \end{aligned}$$

Să se arate că f este o aplicaţie liniară şi să se determine câte o baza şi dimensiunea pentru $\mathrm{Ker}(f)$ şi $\mathrm{Im}(f)$.