Algebra liniară
Lucrare scrisă
Varianta A

1. a) Să se definească aplicaţia liniară şi să se dea un exemplu de aplicaţie liniară de la $\mathbb{R}^2$ la $\mathbb{R}$.
b) Fie V un K-spaţiu vectorial şi fie $U \subseteq V$. Să se arate că urmatoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) $\forall x, y \in U, \forall a \in K : x + y \in U$ şi $ax \in U$;

(ii) $\forall x, y \in U, \forall a, b \in K : ax + by \in U$.

c) Fie $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 0\}$. Să se arate că $S \leq \mathbb{R}^3$ şi să se găsească o bază pentru S.

2. a) Să se definească independenţa liniară şi să se dea un exemplu de doi vectori în $\mathbb{R}^3$ care sunt liniar independenţi.
b) Fie V un K-spaţiu vectorial şi $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3]^t \in V^{3\times 1}$. Să se arate că $\mathbf{b}$ este bază pentru V dacă şi numai dacă $\mathbf{b}$ este liniar independentă şi pentru orice $v \in V$ lista $[b_1, b_2, b_3, v]^t$ nu mai este liniar independentă.
c) Să se arate că

$$\mathbf{b} = (b_1 = (1, 3, 2), b_2 = (1, -2, 5), b_3 = (-2, 1, -1))^t$$

este o bază pentru $\mathbb{R}^3$ şi să se determine $[x]_{\mathbf{b}}$, unde $x = (0, 1, 3)$.

3. a) Fie V un K-spaţiu vectorial şi $S, T \leq_K V$, cu proprietatea $S \cap T = \{0\}$. Să se arate că dacă $\{y_1, \ldots, y_n\}$ este o bază pentru S şi $\{z_1, \ldots, z_m\}$ este o bază pentru T atunci $\{y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_m\}$ este o bază pentru $S + T$.
b) Se consideră subspaţiile lui $\mathbb{R}^4$:

$$S = \langle s_1 = (1, -1, 3, 1), s_2 = (2, 0, 5, 3), s_3 = (1, -1, 2, 2), s_4 = (1, 1, 1, 3)\rangle$$

şi

$$T = \langle t_1 = (1, -3, 3, 0), t_2 = (1, -1, 4, 1), t_3 = (1, 1, 5, 2)\rangle.$$

Să se determine câte o bază şi dimensiunea pentru S, T $S + T$ şi $S \cap T$.

4. a) a) Să se definească imaginea unei aplicaţii liniare şi să se găsescă un exemplu de aplicaţie liniară $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cu $\mathrm{Im} f \neq \mathbb{R}^2$.
b) Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3, 3x_2 + x_3, 2x_1 + x_2 + 5x_3)$. Să se arate că f este liniară şi să se determine câte o bază şi dimensiunea pentru $\mathrm{Ker} f$ şi $\mathrm{Im} f$.

Algebra liniară
Lucrare scrisă
Varianta B

1. a) Să se definească spaţiul vectorial şi să se dea exemplu de un $\mathbb{C}$-spaţiu vectorial.
b) Fie $f : V \to W$ o funcţie între două K-spaţii vectoriale V şi $W \subseteq V$. Să se arate că urmatoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) $\forall x, y \in U, \forall a \in K : f(x + y) = f(x) + f(y)$ şi $f(ax) = af(x)$;

(ii) $\forall x, y \in U, \forall a, b \in K : f(ax + by) = af(x) + bf(y)$.

c) Fie $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}$. Să se arate că $S \leq \mathbb{R}^3$ şi să se găsească o bază pentru S.

2. a) Să se definească baza unui spaţiu vectorial şi să se dea un exemplu de bază în $\mathbb{R}^2$ (peste $\mathbb{R}$).
b) Fie V un K-spaţiu vectorial. Să se arate că $[b_1, b_2]^t \in V^{2\times1}$ este bază pentru V dacă şi numai dacă $V = \langle b_1, b_2\rangle$ şi $\langle b_i\rangle \neq V$, pentru orice $i \in \{1, 2\}$.
c) Să se arate că

$$\mathbf{b} = (b_1 = (1, 1, -2), b_2 = (3, -2, 1), b_3 = (2, 5, -1))^t$$

este o bază pentru $\mathbb{R}^3$ şi să se determine $[x]_{\mathbf{b}}$, unde $x = (3, 2, -1)$.

3. a) Fie $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ unde V şi W sunt două K-spaţii vectoriale. Să se arate că dacă f este injectivă şi $\{x_1, x_2 \dots, x_n\}$ este o bază în V atunci $\{f(x_1), f(x_2) \dots, f(x_n)\}$ este o bază în $\mathrm{Im} f$.
b) Se consideră subspaţiile lui $\mathbb{R}^4$:

$$S = \langle s_1 = (1, -2, 3, 1), s_2 = (2, 0, -1, 3), s_3 = (3, 2, 0, -2), s_4 = (0, -2, 1, 3)\rangle$$

şi

$$T = \langle t_1 = (1, -3, 2, 0), t_2 = (1, -1, 3, 1), t_3 = (0, 2, 1, 1)\rangle.$$

Să se determine câte o bază şi dimensiunea pentru S, T $S + T$ şi $S \cap T$.

4. Să se definească nucleul unei aplicaţii liniare şi să se găsescă un exemplu de aplicaţie liniară $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cu $\mathrm{Ker} f \neq \{0\}$.
b) Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2, 2x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)$. Să se arate că f este liniară şi să se determine câte o bază şi dimensiunea pentru $\mathrm{Ker} f$ şi $\mathrm{Im} f$.