# Algebră

## Model lucrare 1

1. a) Definiți noțiunile și dați un exemplu: partiție a unei mulțimi, element minimal, grup comutativ.

b) Se consideră o funcție $f: A \to B$. Să se arate că $f \circ 1_A = f$, unde $1_A : A \to A$ este funcția identică.

c) Fie $(A, \leq)$ o mulțime ordonată cu proprietatea că orice submulțime $B \subseteq A$, $B \neq \emptyset$ are un elem. minimal. Să se arate că dacă $B \subseteq A$ este o mulțime care satisface proprietățile:

(a) $B$ conține toate elementele minimale din $A$

(b) Pt orice $a \in A$ avem $\{x \in A \mid x < a\} \subseteq B \Rightarrow a \in B$

atunci $B = A$.

2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și $g: (0, \infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 3x-2 & \text{pt. } x \leq 2 \\ x^2 & \text{pt. } x > 2 \end{cases} \qquad g(x) = x^2 - 4x + 3$$

a) Să se studieze injectivitatea și surjectivitatea pt. $f$ și $g$.

b) Dacă există să se determine inversele acestor funcții.

c) Dacă sunt definite să se calculeze $f \circ g$ și $g \circ f$.

d) Există două funcții $h_1, h_2$ astfel încât $g \circ h_1$ și $g \circ h_2$ să fie definite, $g \circ h_1 = g \circ h_2$ dar $h_1 \neq h_2$?

Dacă da să se găsească un exemplu.

3. a) Arătați că relația $(\mathbb{C}, \mathbb{C}, \equiv)$ este o echivalență, unde

$x \equiv y$ ddacă $|x| = |y|$.

b) Să se determine $\mathbb{C}/\equiv$ unde $\equiv$ este definită la a).

c) Să se arate că $(\mathbb{N}, \vdots)$ definită prin

$$a \vdots b \iff \exists\, x \in \mathbb{N} \text{ a.î. } bx = a$$

este o rel. de ordine.

4. a) Arătați că $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 \neq 0 \right\}$ este un subgrup în $GL_2(\mathbb{R})$.

b) Găsiți un izomorfism de grupuri $f: \mathbb{C}^* \longrightarrow G$ unde $G$ este definit ca la a).

c) Să se arate că dacă $(G, \cdot)$ este un grup cu prop. că $(xy)^2 = x^2 \cdot y^2$, $\forall x, y \in G$ atunci $G$ este abelian.