SEMINARUL 1

Algebră vectorială

Problema 1.1. Se dă un tetraedru $ABCD$. Găsiţi sumele vectorilor:

1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}$;

2) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC}$;

3) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CD}$.

Problema 1.2. Se dă o piramidă cu vârful în S şi baza un paralelogram $ABCD$ ale cărui diagonale se intersectează în punctul O. Să se demonstreze egalitatea vectorială:

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}.$$

Problema 1.3. Fie $ABCD$ un tetraedru. Demonstraţi că $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}$. Este adevărată această afirmaţie pentru orice patru puncte din spaţiu?

Problema 1.4. Punctul O este centrul unui hexagon regulat $ABCDEF$. Determinaţi descompunerile vectorilor $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, în funcţie de vectorii $\mathbf{p} = \overrightarrow{OE}$ şi $\mathbf{q} = \overrightarrow{OF}$.

Problema 1.5. Demonstraţi că dacă M, N, P, Q sunt mijloacele laturilor unui patrulater $ABCD$, atunci $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} = 0$.

Problema 1.6. Punctele E şi F sunt mijloacele diagonalelor unui patrulater $ABCD$. Demonstraţi că

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}).$$

Problema 1.7. Fie E şi F mijloacele laturilor AB şi CD ale unui patrulater $ABCD$. Demonstraţi că

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$$

şi utilizaţi această proprietate pentru a demonstra teorema liniei mijlocii într-un trapez.

Problema 1.8. Se dă un hexagon regulat $C_1C_2C_3C_4C_5C_6$. Demonstraţi că

$$\overrightarrow{C_1C_2} + \overrightarrow{C_1C_3} + \overrightarrow{C_1C_4} + \overrightarrow{C_1C_5} + \overrightarrow{C_1C_6} = 3\overrightarrow{C_1C_4}.$$

Problema 1.9. În triunghiul ABC se duce bisectoarea AD a unghiului A. Determinaţi descompunerea vectorului $\overrightarrow{AD}$ în funcţie de vectorii $\mathbf{c} = \overrightarrow{AB}$ şi $\mathbf{b} = \overrightarrow{AC}$.

Problema 1.10. Coardele AB şi CD ale unui cerc de centru O se intersectează ortogonal în punctul P. Să se demonstreze relaţia

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{PO}.$$

Problema 1.11. Se dă un trapez $ABCD$ în care baza AB este de k ori ($k > 1$) mai mare decât baza mică CD. Fie M şi N mijloacele bazelor. Găsiţi descompunerile vectorilor $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ şi $\overrightarrow{BC}$ în funcţie de vectorii $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ şi $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$.

Problema 1.12. Fie A', B', C' mijloacele laturilor unui triunghi oarecare ABC şi un punct oarecare O în planul triunghiului. Să se demonstreze relaţia

$$\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

Problema 1.13. Presupunem că punctele M, N, P sunt, respectiv, mijloacele laturilor AB, BC, CA ale triunghiului ABC. Să se determine vectorii $\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CM}$ în funcţie de vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$.

Problema 1.14. În paralelipipedul $ABCDEFGH$ fie $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{AD}$ şi $\mathbf{w} = \overrightarrow{AE}$. Să se exprime vectorii $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{HB}$ şi $\overrightarrow{DF}$ în funcţie de vectorii $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ şi $\mathbf{w}$.

Problema 1.15. Se cunosc coordonatele vârfurilor A, B, C ale paralelogramului $ABCD$, faţă de un reper oarecare. Să se determine coordonatele celui de-al patrulea vârf (D), în fiecare dintre situaţiile următoare:

1) $A(2,3), B(1,4), C(0,-2)$;

2) $A(-2,-1), B(3,0), C(1,-2)$.

Problema 1.16. Se cunosc coordonatele vârfurilor A şi B şi coordonatele centrului de greutate G al triunghiului ABC. Determinaţi coordonatele vârfului C al triunghiului în fiecare dintre următoarele situaţii:

1) $A(4,1), B(3,-2), G(0,2)$;

2) $A(3,5), B(-1,-3), G(1,-1)$.

Problema 1.17. Se dau, în plan, trei vectori, prin componentele lor relativ la o bază oarecare: $\mathbf{a}(4,-2)$, $\mathbf{b}(3,5)$, $\mathbf{c}(-2,-12)$. Exprimaţi vectorul $\mathbf{c}$ ca o combinaţie liniară a vectorilor $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$.

Problema 1.18. Se dau vectorii necoliniari $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$. Demonstraţi că sistemul de vectori $\mathbf{m} = 3\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{n} = 2\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{p} = \mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ este liniar dependent, iar vectorii $\mathbf{n}, \mathbf{p}$ sunt necoliniari. Exprimaţi vectorul $\mathbf{m}$ în funcţie de vectorii $\mathbf{n}, \mathbf{p}$.