Exerciţii (curs final 2023-2024)

1. Fie vectorul $U = [1, 2, 3, 1, 2, 4, 1, 2, 2, 4]$ şi vectorul de date aleatore alese
1) cu returnare din U: $X = [U_{i_1}, ..., U_{i_5}]$;
2) fără returnare din U: $Y = [U_{j_1}, U_{j_2}, U_{j_3}]$.
Fie Z variabila aleatoare care indică de câte ori apare 1 în vectorul X.
a) Determinaţi: $P(Z = 3)$, $P(\{Z < 3\} \cup \{Z > 4\})$, $P(Z < 3|Z \geq 1)$, $P(Y = [1, 2, 3])$, $P(Y(2)$ este un număr par$)$.
b) Să se scrie distribuţia de probabilitate a variabilei aleatoare Z.

2. Fie $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 3, x_4 = 2, x_5 = 0, x_6 = 1, x_7 = 4, x_8 = 5$ date statistice pentru caracteristica X, care are următoarea distribuţie:

$$P(X = k) = p(1 - p)^k \text{ pentru } k \in \{0, 1, 2, \dots\},$$

iar $p \in (0, 1)$ este parametru necunoscut. Folosind metoda verosimilităţii maxime, estimaţi valoarea parametrului necunoscut p.

3. V.a. X are funcţia de densitate $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{a^2}, \text{dacă } x \in [0, a], \\ 0, \text{ dacă } x \notin [0, a], \end{cases}$$

unde $a > 0$ este parametru necunoscut.

(a) Să se calculeze: funcţia de repartiţie a lui X, $P\left(X < \frac{a}{2}\right)$ şi $P\left(|X - \frac{a}{2}| < \frac{a}{4}\right)$.

(b) Să se determine a, astfel încât $E(X^2) = 2$.

(c) Să se estimeze cu ajutorul metodei momentelor parametrul a, folosind datele statistice $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = x_4 = 2$.

4. Timpul T (în minute) de așteptare a unui autobus este o variabilă aleatoare care are funcția de densitate $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\delta}, & t \in [a, a + \delta] \\ 0, & t \notin [a, a + \delta] \end{cases},$$

unde $a \geq 0$ și $\delta > 0$ sunt parametri necunoscuți. Varianța lui T este $V(T) = \frac{3}{4}$.
a) Calculați în funcție de a și δ: $E(T)$, $E(T^2)$.
b) Determinați valoarea lui δ.
c) Pentru 75 de timpi independenți de așteptare ai lui T s-a obținut media de selecție 1,5 (minute). Să se determine valoarea intervalului de încredere bilateral cu nivelul de încredere 95% pentru valorea medie a lui T, folosind tabelul următor:

$norm.ppf(0.975, 0, 1)$	$norm.ppf(0.05, 0, 1)$	$t.ppf(0.975, 74)$	$chi2.ppf(0.025, 74)$	$chi2.ppf(0.975, 74)$
1,96	$-1{,}65$	2	52	100

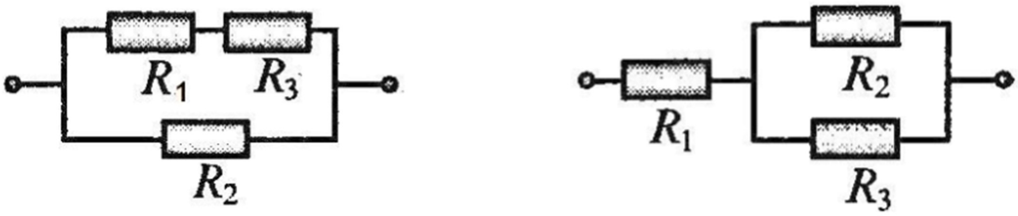

Figura 1: Pentru Problema 5

5. Fie $X_i \sim Bernoulli(p_i), i \in \{1,2,3\}$ v.a. independente; $X_i = 1$: R_i este funcţională; $X_i = 0$: R_i nu este funcţională, $i \in \{1,2,3\}$. Să se calculeze probabilitatea de funcţionare a circuitului (pentru cele două cazuri din Figura 1). Valori numerice: $p_1 = 0.8, p_2 = 0.7, p_3 = 0.9$.

6. Pentru transmisia unui mesaj se alege aleator unul din cele 3 canale de transmisie disponibile:

$$\text{3 canale posibile} \longrightarrow \left[\begin{array}{l} \xrightarrow{p_1=0.4} \text{prin canalul 1, timpul de transmisie este } T_1 \sim Unif[1,5]\ (ms), \\ \xrightarrow{p_2=0.4} \text{prin canalul 2, timpul de transmisie este } T_2 \sim Unif[1,3]\ (ms), \\ \xrightarrow{p_3=0.2} \text{prin canalul 3, timpul de transmisie este } T_3 \sim Unif[1,4]\ (ms). \end{array}\right.$$

Pentru timpul T de transmisie a mesajului să se calculeze $P(T > 2)$, $P(T = 2)$ şi $P(T < 2)$.

7. O tombolă are 4 bilete câştigătoare şi 8 bilete necâştigătoare. Se extrag succesiv 3 bilete (fără returnare).
a) $P($"nu s-a extras niciun bilet câştigător"$) =?$
b) Fie X v.a. care indică numărul de bilete câştigătoare extrase. Să se calculeze $E(X)$.