Seminarul 6

1. Într-un joc, se aruncă trei monede. Un jucător câștigă 1 euro pentru fiecare apariție a unui cap și pierde 8 euro în cazul apariției a trei pajuri. Calculați pentru suma de bani a jucătorului: funcția de repartiție, valoarea medie și deviația standard.

A: Fie N numărul de capete apărute în joc și X suma de bani a jucătorului. Atunci $N \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \Longrightarrow$ $X \sim \begin{pmatrix} -8 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$. Funcția de repartiție $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ este dată de $F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -8) \\ \frac{1}{8}, & x \in [-8, 1) \\ \frac{4}{8}, & x \in [1, 2) \\ \frac{7}{8}, & x \in [2, 3) \\ 1, & x \in [3, \infty) \end{cases}$.

$E(X) = (-8) \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = 0.5$. $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = (-8)^2 \cdot \frac{1}{8} + 1^2 \cdot \frac{3}{8} + 2^2 \cdot \frac{3}{8} + 3^2 \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = \frac{64+3+12+9-1}{8} = \frac{87}{8} \Longrightarrow Std(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{87}{8}} \approx 3{,}3$.

2. Un jucător de darts ocheşte discul roşu (denumit "bullseye") cu centrul în centrul ţintei şi diametru 1 cm. La o aruncare, distanţa dintre centrul ţintei şi punctul nimerit de săgeata jucătorului urmează distribuţia uniformă pe intervalul $[a, b]$, unde $0 \leq a < b$, cu valoarea medie $\frac{3}{2}$ cm şi deviaţia standard $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm. Aruncările jucătorului sunt independente. Determinaţi:

a) probabilitatea ca jucătorul să nimerească discul roşu;

b) probabilitatea ca jucătorul să nimerească de 2 ori discul roşu din 10 aruncări.

Funcţia de densitate pentru distribuţia uniformă $Unif[a, b]$ este $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$.

R: a) X=distanţa de la săgeată la centru $\Longrightarrow$ $f_X = f$ este funcţie de densitate pentru X $\Longrightarrow$ $E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{a+b}{2} = \frac{3}{2}$, $Std(X)^2 = V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{a^2+b^2-2ab}{12} = \frac{3}{4}$. Avem: $\begin{cases} a + b = 3 \\ ab = 0 \end{cases} \Longrightarrow$ $a = 0, b = 3$. p=probabilitatea de a nimeri discul roşu $\Longrightarrow$ $p = P(X \leq \frac{1}{2}) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{6}$.

b) Z=numărul de reuşite din 10 aruncări $\Longrightarrow$ $Z \sim Bino(10, p)$ $\Longrightarrow$ $P(Z = 2) = C_{10}^2 p^2 (1 - p)^8 = 45 \cdot \frac{5^8}{6^{10}} \approx 29\%$.

3. Fie $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$ și Ω spațiul de selecție. Fie $(X_n)_n$ un şir de variabile aleatoare independente definite pe Ω, care au aceeaşi distribuţie ca X.

a) Fie, pentru $n \in \mathbb{N}^*$, v.a. $Y_n(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } X_n(\omega) \leq 3 \\ 0, & \text{dacă } X_n(\omega) > 3 \end{cases}$, $\omega \in \Omega$.

Ce distribuţie are Y_n? Spre ce valoare converge a.s. şirul $\left(\frac{1}{n}(Y_1 + ... + Y_n)\right)_n$?

R.: $Y_n \sim Bernoulli(P(X \leq 3))$. $\frac{1}{n}(Y_1 + ... + Y_n) \xrightarrow{a.s.} E(Y_1) = P(X \leq 3) = 0.6$, folosind LTNM pentru şirul $(Y_n)_n$, care este un şir de v.a. independente.

b) Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, fie

$$Z_n : \Omega \to [0, 1] \qquad Z_n(\omega) = \frac{\#\{i \in \{1, \ldots, n\} : X_i(\omega) \leq 3\}}{n}.$$

Ce relație avem între $Y_1 + ... + Y_n$ și Z_n? Folosind a), determinați limita a.s. pentru $(Z_n)_n$.

R: $\frac{1}{n}(Y_1(\omega) + ... + Y_n(\omega)) = Z_n(\omega)$ $\forall \omega \in \Omega$. Deci, conform a), $Z_n \xrightarrow{a.s.} 0.6$.

4. Durata (în minute) a unei plăţi pentru o factură la un ghişeu într-o bancă urmează distribuţia continuă $Unif[1, 3]$. Ştiind că duratele oricăror plăţi sunt independente, demonstraţi că:

i) media aritmetică a duratelor plăţilor a n facturi converge a.s. la 2 minute, când $n \to \infty$.

ii) media geometrică a duratelor plăţilor a n facturi converge a.s. la $\frac{3\sqrt{3}}{e}$ minute, când $n \to \infty$.

iii) media armonică a duratelor plăţilor a n facturi converge a.s. la $\frac{2}{\ln 3}$ minute, când $n \to \infty$.

R: Fie X_n durata plăţii celei de a n-a facturi. $(X_n)_n$ este un şir de variabile aleatoare independente care urmează disitribuţia $Unif[1,3]$.

i) LTNM implică $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{a.s.} E(X_1) = \int_1^3 \frac{x}{2}\,dx = 2.$

ii) LTNM implică $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} X_i} = e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i} \xrightarrow{a.s.} e^{E(\ln X_1)} = e^{\int_1^3 \frac{\ln x}{2}dx} = \frac{3\sqrt{3}}{e} \approx 1,91.$

iii) LTNM implică $\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i}} = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i}} \xrightarrow{a.s.} \frac{1}{E(\frac{1}{X_1})} = \frac{1}{\int_1^3 \frac{1}{2x}dx} = \frac{2}{\ln 3} \approx 1{,}82.$

5. Un computer este conectat la două imprimante: I_1 and I_2. Computerul trimite printarea unui document lui I_1 cu probabilitatea 0,4, respectiv lui I_2 cu probabilitatea 0,6. Ştiind că a fost aleasă imprimanta I_1, un poster $A2$ este printat în T_1 secunde, unde T_1 are distribuţia $Exp(\frac{1}{5})$. Ştiind că a fost aleasă imprimanta I_2, un poster $A2$ este printat în T_2 secunde, unde T_2 are distribuţia uniformă $Unif[4,6]$. Un inginer solicită printarea unui poster A2 de pe computer.

a) Calculaţi probabilitatea ca timpul de printare a posterului să fie mai mică decât 5 secunde.

b) Calculaţi valoarea medie pentru timpul (în secunde) de printare a posterului.

R.: T=timpul de printare a posterului; F_T=funcţia de repartiţie a lui T; fie evenimentele A: computerul este conectat la imprimanta I_1; $\bar{A}$: computerul este conectat la imprimanta I_2; fie f_{T_i} funcţia de densitate pentru T_i, $i = 1, 2$.

a) Formula probabilităţii totale $\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} P(T \le 5) &= P(A)P(T \le 5|A) + P(\bar{A})P(T \le 5|\bar{A}) = 0{,}4 \cdot P(T_1 \le 5) + 0{,}6 \cdot P(T_2 \le 5) \\ &= 0{,}4\int_0^5 \frac{1}{5}e^{-\tau/5}d\tau + 0{,}6\int_4^5 \frac{1}{6-4}d\tau = 0{,}4\cdot(1-e^{-1}) + 0{,}6\cdot 0{,}5 \approx 0{,}55. \end{aligned}$$

b) Formula probabilităţii totale $\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} F_T(t) &= P(T \le t) = P(A)P(T \le t|A) + P(\bar{A})P(T \le t|\bar{A}) \\ &= 0{,}4 \cdot P(T_1 \le t) + 0{,}6 \cdot P(T_2 \le t) = 0{,}4\int_{-\infty}^{t} f_{T_1}(\tau)d\tau + 0{,}6\int_{-\infty}^{t} f_{T_2}(\tau)d\tau,\ t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Deci, $f_T(t) = F'(t) = 0{,}4 f_{T_1}(t) + 0{,}6 f_{T_2}(t), t \in \mathbb{R}$, este funcţie de densitate pentru $T \Longrightarrow E(T) = \int_{-\infty}^{\infty} t f_T(t)dt =$ $0{,}4\int_0^{\infty}\frac{1}{5}te^{-\frac{t}{5}}dt + 0{,}6\int_4^6 \frac{t}{2}dt = 0{,}4\cdot 5 + 0{,}6\cdot 5 = 5$ (secunde).

6. Fie v.a. $U \sim Unif[1,3]$. Să se calculeze $E(U^2)$. Folosind rezultatul obţinut, să se justifice de ce U^2 *nu* urmează distribuţia $Unif[1,9]$!

R.: Fie $Y \sim Unif[1,9]$. Folosind calculele de la Problema 1-Seminar 6 şi faptul că $U \sim Unif[1,3]$, avem $E(U) = \frac{1+3}{2} = 2, E(Y) = \frac{1+9}{2} = 5$. Dar,

$$E(U^2) = \int_1^3 t^2 \frac{1}{3-1}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^3}{3}\Big|_1^3 = \frac{13}{3} \Longrightarrow E(U^2) \ne E(Y)$$

$\Longrightarrow U^2$ şi Y nu pot avea aceeaşi distribuţie.

7. Fie v.a. independente $U_1, U_2 \sim Unif[0,3]$. Să se calculeze $V(U_1 + U_2)$. Folosind rezultatul obţinut, să se justifice de ce $U_1 + U_2$ *nu* urmează distribuţia $Unif[0,6]$!

R.: Fie $Z \sim Unif[0,6]$. Folosind calculele de la Problema 1-Seminar 6 şi faptul că $U_1, U_2 \sim Unif[0,3]$, avem $V(U_1) = V(U_2) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}, V(Z) = \frac{36}{12} = 3$. Dar,

$$V(U_1+U_2) = V(U_1) + V(U_2)\ (U_1, U_2 \text{ sunt independente}) \Longrightarrow V(U_1+U_2) \ne V(Z)$$

$\Longrightarrow U_1 + U_2$ şi Z nu pot avea aceeaşi distribuţie.

8. Timpii de funcţionare (în ore) a două baterii sunt două variabile aleatoare independente $X \sim Unif[0,2]$ şi $Y \sim Exp(1)$. Fie $T = \min\{X, Y\}$ timpul de funcţionare a bateriilor legate în serie. Calculaţi: $P(X < 0{,}5)$, $P(T > 1)$, $P(T < 1|X \geq 1)$.

R.: $P(X < 0{,}5) = \displaystyle\int_0^{0{,}5} \frac{1}{2} dx = \frac{0{,}5}{2} = 0{,}25$

$P(T > 1) = P(X > 1)P(Y > 1) = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{2} dx \cdot \int_1^\infty e^{-x} dx = \frac{e^{-1}}{2}$.

$P(T < 1|X \geq 1) = \dfrac{P(\{T < 1\} \cap \{X \geq 1\})}{P(X \geq 1)} = \dfrac{P(Y < 1)P(\{X \geq 1\})}{\frac{1}{2}} = 1 - e^{-1}$.