Seminarul 5

1. O variabilă aleatoare continuă X are funcţia de densitate $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ cxe^{-x}, & x > 0. \end{cases}$

Determinaţi $c \in \mathbb{R}$ şi apoi calculaţi:

a) funcţia de repartiţie a lui X;

b) probabilitatea evenimentului $\{|X-3| > 2\}$;

c) probabilitatea evenimentului $\{X < 3\}$, ştiind că are loc evenimentul $\{X > 1\}$.

R: $1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = c\int_{0}^{\infty} xe^{-x}dx = c \implies c = 1.$

a) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \int_0^x te^{-t}\,dt = 1-(x+1)e^{-x}, & x > 0. \end{cases}$

b) $P(|X-3| > 2) = P((X-3 < -2) \cup (X-3 > 2)) = P((X < 1) \cup (X > 5)) = F(1) + (1 - F(5)) = 1 - 2e^{-1} + 6e^{-5} \approx 0.3.$

c) $P(X < 3|X > 1) = \frac{P(1<X<3)}{P(X>1)} = \frac{F(3)-F(1)}{1-F(1)} = \frac{1-4e^{-3}-1+2e^{-1}}{2e^{-1}} = 1 - 2e^{-2} \approx 0{,}73.$

Valoarea medie a unei v.a. continue X, care are funcţia de densitate f, este

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)dt, \text{ dacă } \int_{-\infty}^{\infty} |t|f(t)dt < \infty.$$

2. Timpul (în secunde) de descărcare completă a unui condensator este o variabilă aleatoare T care are distribuția exponențială cu parametrul $\lambda > 0$: $T \sim Exp(\lambda)$. Determinați parametrul λ, știind că $E(T) = 5$ (secunde), apoi calculați probabilitatea evenimentului E: “condensatorul se descarcă complet după cel puțin 4 secunde”.

R: T are funcţia de densitate

$$f_T(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}.$$

$E(T) = \int_{-\infty}^{\infty} tf_T(t)dt = \int_0^{\infty} \lambda te^{-\lambda t}dt = -te^{-\lambda t}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}dt = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda} = 5 \implies \lambda = \frac{1}{5}.$

$P(T \geq 4) = 1 - P(T < 4) = 1 - \int_{-\infty}^4 f_T(t)dt = 1 - \int_0^4 \lambda e^{-\lambda t}dt = 1 - (-e^{-\lambda t})\Big|_0^4 = e^{-\frac{4}{5}} \approx 0{,}45.$

3. Un circuit are trei condensatoare, care funcţionează independent unele de altele. Timpul de descărcare completă a fiecărui condensator are distribuţia exponenţială cu valoarea medie de 3 secunde. Ştiind că cele trei condensatoare sunt grupate în circuit aşa cum indică
a) figura A (în paralel),
b) figura B (în serie),
determinaţi valoarea medie a timpului de funcţionare a circuitului.

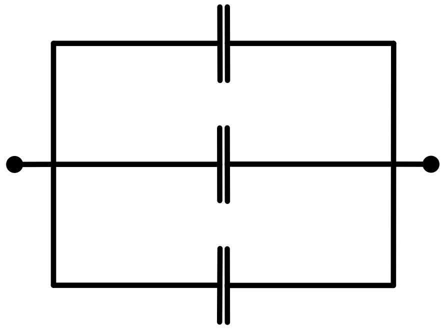

Figura A

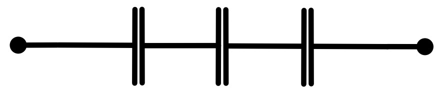

Figura B

R: O v.a. X care are **distribuţia exponenţială** cu parametrul $\lambda > 0$ are funcţia de densitate

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}.$$

Deducem că:

i) $F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$, unde F_X este funcţia de repartiţie a lui X.

ii) $P(X > x) = 1 - F_X(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$.

iii) $E(X) = \displaystyle\int_0^\infty \lambda t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$ (folosind integrarea prin părţi).

Fie T timpul de funcţionare a circuitului şi fie T_i v.a. care indică timpul de funcţionare a condensatorului i, $i = 1, 2, 3$. Fiecare T_i urmează legea exponenţială cu parametrul $\frac{1}{3}$. Aceste variabile aleatoare sunt independente.

a) $F_T(t) = P(\max\{T_1, T_2, T_3\} \leq t) = P(\bigcap_{i=1}^3 (T_i \leq t)) = \prod_{i=1}^3 P(T_i \leq t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ (1 - e^{-\frac{t}{3}})^3, & t > 0 \end{cases}$ unde am folosit i). Deci $f_T(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ (1 - e^{-\frac{t}{3}})^2 e^{-\frac{t}{3}}, & t > 0 \end{cases}$ şi $E(T) = \displaystyle\int_0^\infty t e^{-\frac{1}{3}t} - 2te^{-\frac{2}{3}t} + te^{-t} dt = 9 - \frac{9}{2} + 1 =$ 5,5 secunde, unde am folosit iii).

b) $F_T(t) = P(\min\{T_1, T_2, T_3\} \leq t) = 1 - P(\min\{T_1, T_2, T_3\} > t) = 1 - P(\bigcap_{i=1}^3 (T_i > t)) = 1 - \prod_{i=1}^3 P(T_i > t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1 - e^{-t}, & t > 0 \end{cases}$, unde am folosit ii). Deci $f_T(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ e^{-t}, & t > 0 \end{cases}$ deci $T \sim Exp(1)$ şi $E(T) = 1$ secundă.

4. Ce probabilitate estimează valoarea p din codul de mai jos? Calculaţi probabilitatea teoretică corespunzătoare.

[ ]:
```
from scipy.stats import randint, uniform
N=10000
u = randint.rvs(0,10,size=N)
y = uniform.rvs(loc=0,scale=3,size=N)*(u<=3)+uniform.rvs(loc=3,scale=6,size=N)*(u>3)
p = sum((y>=2)&(y<=5))/N
```

Observaţie: Toate metodele `rvs` din codul de mai sus generează valori pentru variabile aleatoare independente.

R: Programul generează valori aleatoare, prin metodele `rvs`, pentru v.a. U, X_1, X_2, apoi pentru v.a Y:
▶ Fie $Z \sim Unid(10)$, $U = Z - 1 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 9 \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \dots & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$, $X_1 \sim Unif[0,3]$, $X_2 \sim Unif[3,9]$; v.a. U, X_1, X_2 le considerăm a fi independente.
▶ Dacă $U \leq 3$, atunci $Y = X_1$. Dacă $U > 3$, atunci $Y = X_2$. Deci, p estimează următoarea probabilitate teoretică

$$\begin{aligned} P(2 \leq Y \leq 5) &= P(2 \leq Y \leq 5 | U \leq 3) P(U \leq 3) + P(2 \leq Y \leq 5 | U > 3) P(U > 3) \\ &= P(2 \leq X_1 \leq 5 | U \leq 3) P(U \leq 3) + P(2 \leq X_2 \leq 5 | U > 3) P(U > 3) \\ &= P(2 \leq X_1 \leq 5) P(U \leq 3) + P(2 \leq X_2 \leq 5) P(U > 3) \\ &= \frac{4}{10} \cdot \int_2^3 \frac{1}{3-0} dt + \frac{6}{10} \cdot \int_3^5 \frac{1}{9-3} dt = \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{6}{10} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Am folosit formula probabilităţilor totale şi independenţa v.a. U, X_1, X_2.
Se poate calcula şi astfel:

$$\begin{aligned} P(2 \leq Y \leq 5) &= P(\{2 \leq Y \leq 5\} \cap \{U \leq 3\}) + P(\{2 \leq Y \leq 5\} \cap \{U > 3\}) \\ &= P(\{2 \leq X_1 \leq 5\} \cap \{U \leq 3\}) + P(\{2 \leq X_2 \leq 5\} \cap \{U > 3\}) \\ &= P(2 \leq X_1 \leq 5) P(U \leq 3) + P(2 \leq X_2 \leq 5) P(U > 3) \\ &= \frac{4}{10} \cdot \int_2^3 \frac{1}{3-0} dt + \frac{6}{10} \cdot \int_3^5 \frac{1}{9-3} dt = \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{6}{10} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

unde m folosit independenţa v.a. U, X_1, X_2.

5. Fie vectorul aleator continuu (X, Y) cu funcţia de densitate $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-x-2y}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Determinaţi:
a) funcţia de repartiţie a vectorului aleator (X, Y);
b) funcţiile de repartiţie ale variabilelor aleatoare X şi Y;
c) funcţii de densitate ale variabilelor aleatoare X şi Y;
d) dacă variabilele aleatoare X şi Y sunt independente sau dependente.

R: a) $F_{(X,Y)}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v)\, du\, dv = \begin{cases} 0, & (x,y) \in (-\infty, 0] \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times (-\infty, 0] \\ \int_0^x \int_0^y 2e^{-u} e^{-2v}\, du\, dv, & (x,y) \in (0,\infty) \times (0,\infty) \end{cases} =$
$\begin{cases} 0, & (x,y) \in (-\infty, 0] \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times (-\infty, 0] \\ (1-e^{-x})(1-e^{-2y}), & (x,y) \in (0,\infty) \times (0,\infty). \end{cases}$
b) $F_X(x) = \lim_{y \to \infty} F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1-e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$. $F_Y(y) = \lim_{x \to \infty} F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ 1-e^{-2y}, & y > 0 \end{cases}$.
c) $f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$ şi $f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ 2e^{-2y}, & y > 0 \end{cases}$.
d) X şi Y sunt independente, pentru că $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$.

6. Funcţia de repartiţie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a unei variabile aleatoare continue X are expresia:

$$F(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & 0 \le x < 2 \\ d, & x < 0 \\ e, & x \ge 2. \end{cases}$$

Determinaţi $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$, dacă: i) $P(1 < X < 2) = \dfrac{1}{2}$; ii) $E(X) = 1$.

R: $0 = \lim_{x \to -\infty} F(x) = d$, $1 = \lim_{x \to \infty} F(x) = e$. $c = F(0) = \lim_{x \nearrow 0} F(x) = d = 0$, $1 = e = F(2) = \lim_{x \nearrow 2} F(x) = 4a + 2b + c = 4a + 2b$.
i) $P(1 < X < 2) = F(2) - F(1) = e - a - b - c = 1 - a - b = \frac{1}{2}$. Deci $a = 0, b = \frac{1}{2}, c = 0, d = 0, e = 1$.
ii) Funcţia de densitate este $f(x) = \begin{cases} 2ax + b, & x \in (0,2) \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$. Avem: $1 = E(X) = \displaystyle\int_0^2 2ax^2 + bx\, dx = \frac{16}{3}a + 2b$. Deci $a = 0, b = \frac{1}{2}, c = 0, d = 0, e = 1$.