

Seminarul 1

Noțiuni de combinatorică

1. Principiul fundamental de numărare: numărul de perechi de obiecte în care primul obiect poate fi ales în m moduri și al doilea în n moduri ($m, n \in \mathbb{N}$) este $m \cdot n$.

Exemplu: În câte moduri poate o persoană să îmbrace 2 cămăși distincte și 3 blugi diferiți? R: $2 \cdot 3 = 6$.

2. Aranjamente de n luate câte k ($k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*, n \geq k$): alegeri de k obiecte distincte și ordonate din n obiecte distincte date.

$$\begin{aligned} A_n^k &= \text{“numărul de aranjamente de } n \text{ obiecte luate câte } k\text{”} \\ &= n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}. \end{aligned}$$

Exemplu: Câte coduri cu 3 cifre distincte se pot forma folosind cifrele: 0, 1, 2, 3, 4? R: $A_5^3 = \frac{5!}{2!}$.

3. Permutări de n ($n \in \mathbb{N}$): aranjamente de n luate câte n .

$$P_n = \text{“numărul de permutări de } n \text{ obiecte”} = A_n^n = n!.$$

Observație: Prin convenție, $0! = 1$.

Exemplu: În câte moduri se pot așeza 4 persoane pe o bancă? R: $P_4 = 4!$.

4. Combinări de n luate câte k ($k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*, n \geq k$): alegeri de k obiecte distincte și neordonate din n obiecte distincte date, i.e., alegeri de submulțimi de k elemente ale unei mulțimi de n elemente.

$$\begin{aligned} C_n^k &= \text{“numărul de combinații de } n \text{ elemente luate câte } k\text{”} \\ &= \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \end{aligned}$$

Exemplu: Câte echipe de handbal se pot forma dintr-un grup de 9 persoane? R: $C_9^7 = C_9^2$.

5. Numărul de funcții de la o mulțime A cu k elemente la o mulțime B cu n elemente este n^k ($k, n \in \mathbb{N}^*$).
Observație: O funcție poate fi identificată cu k alegeri de obiecte nu neapărat distincte (i.e., un obiect poate fi ales de mai multe ori), dar ordonate, din n obiecte distincte date. Astfel, putem spune că *funcțiile sunt aranjamente cu repetiții*.

Exemplu: În câte moduri se pot împărți o portocală, un kiwi și o banană la 4 copii? Un copil poate primi mai multe fructe, chiar toate.

R: Funcțiile $f: \{\text{“portocală”, “kiwi”, “banană”}\} \rightarrow \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ se pot construi în $4^3 = 64$ moduri.

6. Permutări cu repetiții: Considerăm n obiecte care pot fi împărțite în k grupuri ($n, k \in \mathbb{N}^*, k \leq n$). Primul grup are n_1 obiecte identice, al 2-lea grup are n_2 obiecte identice, ..., al k -lea grup are n_k obiecte identice ($n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}, n_1 + \dots + n_k = n$). Două obiecte alese arbitrar sunt distincte dacă și numai dacă provin din grupuri diferite. Numărul de permutări ale acestor n obiecte este

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}.$$

Exemple: 1) Într-o urnă sunt trei bile albe și patru bile roșii. În câte moduri se pot aranja aceste bile într-un rând? R: $\frac{7!}{3!4!} = 35$.

2) Câte anagrame ale cuvântului “MISSISSIPPI” sunt posibile? R: $\frac{11!}{1!4!4!2!} = 34650$.

7. Combinări cu repetiții de n luate câte k ($n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N}$): alegeri de k obiecte, nu neapărat distincte (i.e., un obiect poate fi ales de mai multe ori), neordonate, din n obiecte distincte date (i.e., aranjamente cu repetiții în care neglijăm ordinea). Numărul lor este

$$C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

Exemplu: 1) În câte moduri se pot împărți 5 bile identice la 3 copii (C1, C2, C3)? (Un copil poate primi o bilă/mai multe bile/niciuna.) R: Exemple de distribuire a bilelor copiilor (“o” reprezintă o *bilă*):

C1	C2	C3
oo		ooo
o	o	ooo
ooo	oo	
		ooooo

Identificăm configurațiile mai sus cu șiruri de 5 biți, unde 0 reprezintă o bilă, 1 reprezintă separatorul dintre două grupuri de bile (unele grupuri pot fi vide) pe care le au doi copii succesivi:

0011000
0101000
0001001
1100000

Astfel, reformulăm întrebarea: în câte moduri se pot distribui 5 cifre egale cu 0 și 2 cifre egale cu 1 pe 7 poziții? R: $C_7^5 = C_7^2 = \frac{7!}{5!2!} = 21$.

2) O cofetărie are 7 sortimente de înghețată. În câte moduri poate un client să își aleagă sortimentele pentru 3 cornete? (Fiecare cornet are câte un glob de înghețată.) R: $\frac{9!}{3!6!} = 84$.

8. Definiția clasică a probabilității: într-un experiment în care cazurile posibile, finite la număr, au aceleași șanse de a se realiza, probabilitatea unui eveniment E este

$$P(E) = \frac{\text{numărul cazurilor favorabile lui } E}{\text{numărul cazurilor posibile}}.$$

Probleme

1. În câte moduri se pot așeza pe un raft 5 culegeri de matematică, 3 culegeri de informatică și 4 romane, știind că fiecare carte are un autor diferit, astfel încât:

- a) cărțile de același tip să fie alăturate?
b) doar romanele să fie neapărat alăturate?
c) doar culegerile de matematică, respectiv de informatică, să fie neapărat alăturate?

R: a) $5!3!4!3!$ b) $4!(5+3+1)!$ c) $5!3!(1+1+4)!$

2. a) Câte coduri cu 5 caractere care conțin exact 3 cifre și 2 majuscule se pot tasta pe o tastatură engleză?
Exemple: 01DD0, A21Z0, 999XX.

b) Câte coduri cu 5 caractere care conțin exact 3 cifre distincte 2 câte 2 și 2 majuscule diferite se pot tasta pe o tastatură engleză? Exemplu: A21Z0.

A: a) Alege pozițiile pentru cifre în C_5^3 moduri. Numărul de alegeri ale cifrelor pe pozițiile alese este 10^3 . Numărul de alegeri ale literelor pe pozițiile rămase este 26^2 . Deci, răspunsul este $C_5^2 \cdot 10^3 \cdot 26^2 = 6\,760\,000$.

b) Similar, considerând aranjamentele, obținem: $C_5^2 \cdot A_{10}^3 \cdot A_{26}^2 = 4\,680\,000$.

3. X participă la un spectacol alături de un grup de prieteni format din m fete și n băieți ($m, n \in \mathbb{N}^*$, $m \geq 2$). X și prietenii săi au primit bilete pe un singur rând, pe care îl vor ocupa în întregime. Biletele lor au fost distribuite aleator. Care este probabilitatea ca X să aibă două vecine?

R: $\frac{(m+n-1)A_m^2(m+n-2)!}{(m+n+1)!}$, unde $m+n-1$ este numărul de alegeri ale locului pentru X (nu poate ocupa locurile din capetele rândului), A_m^2 este numărul de alegeri ale vecinilor lui X (se ține cont de ordinea alegerii pentru partea stângă, resp. partea dreaptă, lui X), $(m+n-2)!$ este numărul de alegeri ale locurilor pentru celelalte persoane.

4. În câte moduri se pot așeza în linie caracterele următoare: A, A, A, B, B, 0, 0, 0, 1? Dar în cerc?

R: Avem permutări cu repetiții: $\frac{9!}{3!2!3!1!}$. Orice așezare în cerc poate fi identificată cu 9 permutări circulare distincte ale unei așezări în linie (sunt distincte pentru că 1 se află după fiecare permutare circulară pe o altă poziție). Deci numărul așezărilor în linie este de 9 ori mai mare decât numărul așezărilor în cerc \Rightarrow numărul așezărilor în cerc este $\frac{1}{9} \cdot \frac{9!}{3!2!3!1!}$.

5. Câte plăcuțe de înmatriculare cu 7 caractere sunt posibile în România? Grupurile 00 și 000 nu sunt permise, Q nu este permis și orice grup de 3 litere care începe cu O sau I nu este permis. Exemple: CJ-01-YYR, IF-12-XYZ, B-101-ABC.

A: Avem 41 de județe, pentru care avem $41 \cdot 99 \cdot 23 \cdot 25 \cdot 25 = 58.348.125$ de plăcuțe de înmatriculare posibile. Pentru București avem $999 \cdot 23 \cdot 25 \cdot 25 = 14.360.625$. Total: $58.348.125 + 14.360.625 = 72.708.750$.

6. 7 călușari, c_1, c_2, \dots, c_7 , se așează în cerc, într-o ordine aleatoare. Care este probabilitatea ca c_1 și c_7 să fie vecini?

$$\text{R: } \frac{2!5!}{\frac{7!}{7}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

7. a) Câte soluții $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^* \times \dots \times \mathbb{N}^*$ are ecuația $x_1 + \dots + x_k = n$ ($k, n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq k$)?

$$\text{R: } C_{n-1}^{k-1}.$$

Considerăm un șir cu n bețe și $n - 1$ spații între ele: $| \ | \ | \ \cdots \ | \ |$. Dacă pe $k - 1$ spații se pun $k - 1$ simboluri $+$ și se șterg spațiile libere, atunci cele n bețe vor fi împărțite în k grupuri de aceste simboluri. Fie x_i =numărul de bețe din al i -lea grup, $i = \overline{1, k}$. Cum nu există două simboluri $+$ consecutive, avem $x_i \in \mathbb{N}^*$, $i = \overline{1, k}$. Avem $x_1 + \dots + x_k = n$. Există C_{n-1}^{k-1} moduri în care se pot pune $k - 1$ simboluri $+$ pe $n - 1$ spații.

Exemplu: $n = 6, k = 3, | | | | |, + +$. În reprezentarea $| | + | | | + |$ avem 3 grupe de bețe, separate prin 2 simboluri $+$, deci $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 1$, în sistemul de numerație zecimal: $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ sau în sistemul de numerație unar: $| | + | | | + | = 6$. Există C_5^2 soluții $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ ale ecuației $x_1 + x_2 + x_3 = 6$.

b) Câte soluții $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}$ are ecuația $x_1 + \dots + x_k = n$ ($k, n \in \mathbb{N}^*$)?

$$\text{R: } C_{n+k-1}^{k-1}.$$

Fiecare soluție $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}$ a ecuației $x_1 + \dots + x_k = n$ corespunde în mod unic unei soluții $(y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{N}^* \times \dots \times \mathbb{N}^*$ a ecuației $y_1 + \dots + y_k = n + k$ și vice versa, alegând $y_i = x_i + 1$, pentru

$i \in \{1, \dots, k\}$. Cf. a), există C_{n+k-1}^{k-1} soluții.

8. Câte coduri binare sunt formate din 10 cifre și nu au două cifre alăturate egale cu 1?

R: $1 + C_{10}^1 + C_9^2 + \dots + C_6^5$.

Dacă în codul binar sunt k biți egali cu 1, atunci codul are $10 - k$ biți egali cu 0. Punem în linie biții nuli și spațiile pe care putem să punem biții egali cu 1: _0_0_..._0_. Avem $11 - k$ spații libere pe care vrem să punem k biți egali cu 1, rezultă C_{11-k}^k coduri posibile. k poate să ia valorile $0, 1, \dots, 5$, deoarece pentru $k > 5$ numărul de spații libere este mai mic decât numărul de biți egali cu 1.