1. Spaţii euclidiene

Exerciţiul 1. *În spaţiile liniare precizate se definesc aplicaţiile de mai jos. Să se precizeze care din ele sunt produse scalare :*

a) $(\mathbb{R}^2,+,\cdot,\mathbb{R}), \forall \mathbf{x}=(x_1,x_2),\ \mathbf{y}=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2 :< \mathbf{x},\mathbf{y} >= x_1y_1+2x_1y_2+10x_2y_2;$

b) $(\mathbb{R}^2,+,\cdot,\mathbb{R}), \forall \mathbf{x}=(x_1,x_2),\ \mathbf{y}=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2 :< \mathbf{x},\mathbf{y} >= 9x_1y_1-3x_1y_2-3x_2y_1+x_2y_2;$

c) $(\mathbb{R}^2,+,\cdot,\mathbb{R}), \forall \mathbf{x}=(x_1,x_2)\ ,\ \mathbf{y}=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2 :< \mathbf{x},\mathbf{y} >= x_1^2y_1^2+x_2^2y_2^2$.

d) $(\mathbb{R}^3,+,\cdot,\mathbb{R}), \forall \mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)\ ,\ \mathbf{y}=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3 :< \mathbf{x},\mathbf{y} >= 4x_1y_1+2x_1y_2+2x_2y_1+x_3y_2-x_2y_3+x_3y_3$

e) $(\mathbb{R}^n,+,\cdot,\mathbb{R}), \forall \mathbf{x}=(x_1,...,x_n)\ ,\ \mathbf{y}=(y_1,...,y_n)\in\mathbb{R}^n :< \mathbf{x},\mathbf{y} >= x_1y_1+2x_2y_2+3x_3y_3+...+nx_ny_n,$

f) $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),+,\cdot,\mathbb{R})\ ,\forall \mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : < \mathbf{A},\mathbf{B} >= Tr(\mathbf{A}^T\mathbf{B})$, *unde* $Tr(\mathbf{A})=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii};$

Să se demonstreze că

$\left(Tr(\mathbf{A}^T\mathbf{B})\right)^2\le Tr(\mathbf{A}^T\mathbf{A})Tr(\mathbf{B}^T\mathbf{B}).$

g) $(\mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R}),+,\cdot,\mathbb{R})\ ,\forall \mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R}) : < \mathbf{A},\mathbf{B} >= \det(\mathbf{AB}).$

g) $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \det(A)\neq0, (\mathbb{R}^n,+,\cdot,\mathbb{R}), \forall \mathbf{x}=(x_1,...,x_n)\ ,\ \mathbf{y}=(y_1,...,y_n)\in\mathbb{R}^n :< \mathbf{x},\mathbf{y} >= xAA^Ty^T.$

Exemplul 1. *Să se demonstreze că următoarele aplicaţii definesc câte o normă:*

a) pentru $x\in R^n : \|x\|_1=\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$.

b) norma euclidiană $\|x\|_2=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2},\quad \forall x\in\mathbb{R}^n.$

c) norma maxim $\|x\|_\infty=\max\limits_i|x_i|, \forall x\in\mathbb{R}^n.$

Exerciţiul 2. *Fie spaţiul liniar euclidian* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *dotat cu produsul scalar definit astfel:*

$\forall \mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{13} & a_{14}\end{pmatrix}, \mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{13} & b_{14}\end{pmatrix}, \mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) :$

$\langle A,B\rangle = a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22}=Tr(\mathbf{A}^T\mathbf{B}).$

În acest spaţiu cu produsul scalar să se arate că matricele

$\mathbf{C}_1=\frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \mathbf{C}_2=\frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix} -1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}, \mathbf{C}_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

formează un sistem de vectori ortonormat.

Exerciţiul 3. *Să se calculeze* $\|\|_1, \|\|_2, \|\|_\infty$ *pentru vectorii* $u=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & -2\end{pmatrix}$, $v=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$. *Să se determine distanţa dintre* u *şi* v *în cele trei norme.*

Exerciţiul 4. *Să se deseneze sferele unitate pentru normele* $\|\|_1, \|\|_2, \|\|_\infty$ *în spaţiul cu două dimensiuni.*

Exerciţiul 5. *Să se explice de ce* $\|u-v\| = \|v-u\|$ *în oricare dintre cele trei norme prezentate.*

Exerciţiul 6. *(***Inegalitatea triunghiulară***) Să se demonstreze că oricare ar fi* u, v *doi vectori din-un spaţiu euclidian*

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Exerciţiul 7. *(***Egalitatea paralelogramului***)Să se demonstreze că oricare ar fi* u, v *doi vectori din-un spaţiu euclidian*

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right).$$

Exerciţiul 8. *Să se demonstreze că oricare ar fi* u, v *doi vectori din-un spaţiu euclidian*

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\|u+v\|^2 - \frac{1}{4}\|u-v\|^2.$$

Exerciţiul 9. *(***Teorema lui Pitagora***) Să se demonstreze că oricare ar fi* u, v *doi vectori din-un spaţiu euclidian*

$$u \perp v \Leftrightarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Exerciţiul 10. *Să se demonstreze că oricare ar fi* u, v *doi vectori din-un spaţiu euclidian*

$$|\|u\| - \|v\|| \leq \|u-v\|.$$

Exerciţiul 11. *Să se demonstreze că oricare ar fi* u, v *doi vectori din-un spaţiu euclidian*

$$u \perp v \Leftrightarrow \|u+v\| = \|u-v\|.$$

Exerciţiul 12. *Să se demonstreze că oricare ar fi* u, v *doi vectori din-un spaţiu euclidian*

$$(u+v) \perp (u-v) \Leftrightarrow \|u\| = \|v\|.$$

Exerciţiul 13. *Fie un spaţiu liniar euclidian* $(\mathbb{X}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *demonstraţi că:*

a) $< a, u >= 0, \forall u \in \mathbb{X} \Leftrightarrow a = \theta$.

b) *Arătaţi că* $< a, u >=< b, u >, \forall x \in \mathbb{X} \Leftrightarrow a = b$.

Exerciţiul 14. *Fie spaţiul euclidian* $\mathbb{R}^3$ *dotat cu produsul scalar uzual şi norma euclidiană.*
a) *Calculaţi unghiul dintre vectorii* $\mathbf{x} = (1, 1, -1), \mathbf{y} = (\sqrt{6}, 1, 1)$ *;*
b) *Arătaţi că vectorii* $\mathbf{x} = (1, 1, 2), \mathbf{y} = (1, 1, -1)$ *sunt ortogonali ;*
c) *Arătaţi că vectorul* $\mathbf{x} = (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ *este un versor .*

Exerciţiul 15. *În spaţiul euclidian* $(\mathbf{C}([0,1], \mathbb{R}), < \cdot, \cdot >)$ *cu produsul scalar standard, să se ortonormeze sistemul de funcţii* (f_1, f_2, f_3) *unde* $f_1(x) = 2$, $f_2(x) = 2 + x$, $f_3(x) = (2 + x)^2$.

Exerciţiul 16. *Să se arate că mulţimea* $S = (f_1(x) = 1, f_2(x) = x, f_3(x) = (3x^2 - 1)/2)$ *este o multime ortogonala în* $(\mathbf{C}([-1, 1], \mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$ *în raport cu produsul scalar definit.*

Exerciţiul 17. *Să se arate că sistemul de funcţii* $S = (f_1, f_2, .., f_n)$ *din* $(\mathbf{C}([0, 1], \mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$ *unde* $f_1(x) = \sin \pi x, f_2(x) = \sin 2\pi x, .., f_n(x) = \sin n\pi x$, *este ortogonal.*

Exerciţiul 18. *Să se arate că sistemul de funcţii* $S = (f_0, f_1, f_2, .., f_n)$ *din* $(\mathbf{C}([-\pi, \pi], \mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$ *unde* $f_0(x) = 1, f_1(x) = \sin x, f_2(x) = \cos x, .., f_{2n-1}(x) = \sin nx, f_{2n}(x) = \cos nx$ *este ortogonal. Să se ortonormeze sistemul.*

Exerciţiul 19. *Se consideră spaţiul liniar* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \mathbb{R})$ *pe care este definit produsul scalar standard. Se consideră baza* $S = (f_1 = (1, -2, 2), f_2 = (-1, 0, -1), f_3 = (5, -3, -7))$. *Determinaţi o bază ortonormată plecând de la baza dată.*

Exerciţiul 20. *Să se ortonormeze, folosind procedeul Gram-Schmidt următorele sisteme de vectori pe spaţiile liniare euclidiene cu produsul scalar standard:*
a) $(\mathbf{v}_1 = (3, 4), \mathbf{v}_2 = (-4, 3))$ *în* $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$,
b) $(\mathbf{u}_1 = (2, 1, 2), \mathbf{u}_2 = (1, 2, -2), \mathbf{u}_3 = (2, -2, 1))$ *în* $(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle)$,
c) $(\mathbf{u}_1 = (1, 2, 2 - 1), \mathbf{u}_2 = (1, 1, -5, 3), \mathbf{u}_3 = (3, 2, 8, -7), \mathbf{u}_4 = (1, 0, 0, 0))$ *în* $(\mathbb{R}^4, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.
c) $(\mathbf{u}_1 = (1, 0, 01), \mathbf{u}_2 = (1, 2, 0, -1), \mathbf{u}_3 = (3, 1, 1, -1))$ *în* $(\mathbb{R}^4, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Exerciţiul 21. *Se considera spatiul vectorial real* $(\mathbb{R}^4, +, \cdot, \mathbb{R})$ *dotat cu produsul scalar standard. Sa se determine vectorul* $x \in \mathbb{R}^4$ *de norma 1, care împreuna cu vectorii* $a = (1, 0, 1, -1)$ *şi* $b = (0, 1, 1, 1)$ *formeaza un sistem ortogonal.*

Exerciţiul 22. *Folosind procedeul de ortonormare Gram Schmidt sa se ortonormeze sistemele de vectori liniar independenti de mai jos:*
a) $(v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (2, 1, -3), v_3 = (-1, 1, 0))$ *din* $\mathbb{R}^3$;

b) $(v_1 = (1,0,1,0), v_2 = (0,1,0,1), v_3 = (1,-1,0,1), v_4 = (1,1,1,-1))$ *din* $\mathbb{R}^4$*;*
c) $(v_1 = (1,-2,2), v_2 = (-1,0,-1), v_3 = (5,-3,-7))$ *din* $\mathbb{R}^3$*,*
$(v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,2,0), v_3 = (3,0,0))$ *din* $\mathbb{R}^3$*;*
d) $(v_1 = (2,1), v_2 = (1,1))$ *din* $\mathbb{R}^2$*.*

Exerciţiul 23. *Să se realizeze factorizările* LU *şi* QR *ale matricei:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Factorizarea LU :

$$L_1A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_2L_1A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$L_3L_2L_1A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = U,$$

$$L_3L_2L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = (L_3L_2L_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Factorizarea QR

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1\rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1\rangle}\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1\rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1\rangle}\mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2\rangle}{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2\rangle}\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{-\frac{4}{3}}{\frac{24}{9}}\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{q}_1 = \tfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{q}_2 = \tfrac{3}{2\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{q}_3 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{v}_1 = r_{11}\mathbf{q}_1 \Rightarrow \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{q}_1\rangle = \langle r_{11}\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_1\rangle \Rightarrow r_{11} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{q}_1\rangle = \sqrt{3}$,

$\mathbf{v}_2 = r_{12}\mathbf{q}_1 + r_{22}\mathbf{q}_2 \Rightarrow \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{q}_1\rangle = \langle r_{12}\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_1\rangle + \langle r_{22}\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1\rangle \overset{\langle \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1\rangle = 0}{\Rightarrow}$
$r_{12} = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{q}_1\rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}}$,

$\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{q}_2\rangle = \langle r_{12}\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\rangle + \langle r_{22}\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_2\rangle \Rightarrow r_{22} = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{q}_2\rangle \overset{\langle \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1\rangle = 0}{\Rightarrow} \frac{4}{\sqrt{6}}$,

$\mathbf{v}_3 = r_{13}\mathbf{q}_1 + r_{23}\mathbf{q}_2 + r_{33}\mathbf{q}_3 \Rightarrow \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{q}_1\rangle = \langle r_{13}\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_1\rangle + \langle r_{23}\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1\rangle + \langle r_{33}\mathbf{q}_3, \mathbf{q}_1\rangle$
$\Rightarrow r_{13} = \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{q}_1\rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}}$,

$\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{q}_2\rangle = \langle r_{13}\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\rangle + \langle r_{23}\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_2\rangle + \langle r_{33}\mathbf{q}_3, \mathbf{q}_3\rangle \Rightarrow r_{23} = \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{q}_2\rangle = -\frac{2}{\sqrt{6}}$,

$\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{q}_3\rangle = \langle r_{13}\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_3\rangle + \langle r_{23}\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\rangle + \langle r_{33}\mathbf{q}_3, \mathbf{q}_3\rangle \Rightarrow r_{33} = \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{q}_3\rangle = \sqrt{2}$,

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{4}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exerciţiul 24. *Să se realizeze descompunerile QR ale matricelor:*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Exercitii suplimentare

Exerciţiul 25. *Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice simetrică pozitiv definită $((\forall)\, x \in \mathbb{R}_n \setminus \{\theta\}$, $x^T Ax > 0)$. Să se demonstrze că aplicaţia $(x, y) = (Ax, y)$ defineşte un produs scalar.*

Exerciţiul 26. *Fie $(X, \langle ., . \rangle)$ un spaţiu euclidian de dimnesiune n şi fie $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$ o bază ortonormată. Să se demonstreze că dacă $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ atunci $\sum\limits_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 = \|x\|^2$. (***Egalitatea lui Parseval***).*

Exerciţiul 27. *Fie $(X, \langle ., . \rangle)$ un spaţiu euclidian de dimnesiune n şi fie $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$ o bază ortonormată. ă se demonstreze că dacă $k \leq n$ şi $x = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i e_i$ atunci $\sum\limits_{i=1}^{k} |\alpha_i|^2 \leq \|x\|^2$. (***Inegalitatea lui Bessel***)*

Indicaţie. Se pleacă de la $\left\| x - \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i e_i \right\|^2 \geq 0$.

Exerciţiul 28. *Fie mulţimea $\mathbb{V} = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \,|\, \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2 \text{ convergentă} \right\}$.*

a) Să se arate că $\mathbb{V}$ are structură de spaţiu liniar real în raport cu legile:
$+ : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$
$\forall\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{V} : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$
$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$
$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \lambda\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
b) Fie : $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{V}$ şi definim

$$\left\langle (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

Să se arate că $\left\langle (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \right\rangle$ este un produs scalar.
Fie $x_n = 2^{1-n}, y_n = 3^{1-n}, n \geq 1$. Determinaţi unghiul dintre x şi y .

Exerciţiul 29. *Fie* l_2 *spaţiul liniar al şirurilor reale* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *cu proprietatea că seria* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ *este convergentă.*

a) Să se arate că pentru orice $\alpha > 1$ *şirul cu termenul general* $x_n(\alpha) = \frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{\alpha})^n} \in l_2$.

b) Să se calculeze suma seriei $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2(\alpha)$.

c) Să se arate că aplicaţia
$\langle\cdot,\cdot\rangle : l_2 \times l_2 \to \mathbb{R}$
$(\forall)\,((x_n)_{n\in\mathbb{N}},(y_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in l_2 \times l_2 : \langle(x_n)_{n\in\mathbb{N}},(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ *este un produs scalar.*

d) Calculaţi unghiul dintre $(x_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}, (x_n(\beta))_{n\in\mathbb{N}}$.