1. Geometrie analitică în spaţiu

Exerciţiul 1. *Se consideră vectorii*
$\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} - 5\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$. *Se cere:*
a) unghiul dintre vectorii $\overrightarrow{u}$ *şi* $\overrightarrow{v}$*;*
b) proiecţia vectorului $\overrightarrow{u}$ *pe direcţia lui* $\overrightarrow{v}$;
c) înălţimea corespunzătoare bazei $\overrightarrow{u}$ *a paralelogramului construit pe suporturile vectorilor* $\overrightarrow{u}$ *şi* $\overrightarrow{v}$.

Exerciţiul 2. *Se dau vectorii* $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{c} = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$. *Să se calculeze:*
a) versorul vectorului $\overrightarrow{a}$;
b) $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{b}.\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})$,
c) aria paralelogramului construit cu vectorii $\overrightarrow{a}$ *şi* $\overrightarrow{b}$;
d) volumul tetraedrului construit pe vectorii $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ *şi* $\overrightarrow{c}$;
e) înălţimile paralelogramului construit pe vectorii $\overrightarrow{a}$ *şi* $\overrightarrow{c}$;
f) înălţimile paralelipipedului construit pe vectorii $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ *şi* $\overrightarrow{c}$;
g) vectorul bisector al unghiului format de vectorii $\overrightarrow{a}$ *şi* $\overrightarrow{c}$.

Exerciţiul 3. *Să se determine al patrulea vârf al tetraedrului* $ABCD$ *cu* $A(4, -2, 2)$, $B(3, 1, 1)$, $C(4, 2, 0)$ *ştiind că* $D \in Oz$ *şi că volumul tetraedrului este egal cu 4. Să se determine lungimea înălţimii coborâte din* D.

Exerciţiul 4. *Se dau dreptele*
$(d_1) : \frac{x-1}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{2}$, $(d_2) : \begin{cases} 2x + y - z + 1 = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$.
a) Să se determine vectorii directori ai celor două drepte şi câte un punct pe fiecare dintre ele.
b) Să se determine poziţia relativă a celor două drepte(coplanare, perpendiculare, paralele).
c) Să se determine coordonatele puctului care este proiecţia originii pe dreapta (d_2).
d) Să se determine coordonatele simetricului punctului O *faţă de dreapta* (d_2) *şi distanţa de la* O *la* (d_2).

Exerciţiul 5. *Să se determine ecuaţiile perpendicularei coborâte din* $M(2, 3, 1)$ *pe dreapta* $(d) : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-2}{3}$.

Exerciţiul 6. *Să se calculeze unghiul dintre dreptele* $(d_1) : \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z}{1}$, $(d_2) : \frac{x}{-1} = \frac{y}{8} = \frac{z}{1}$ *şi să se scrie ecuaţia planului determinat de ele, dacă este posibil.*

Exerciţiul 7. *Să se scrie ecuaţia planului care conţine punctul $P(1, 3, -2)$ şi este perpendicular pe dreapta determinată de punctele $A(2, 5, 1)$ şi $B(0, 1, -3)$.*

Exerciţiul 8. *Să se determine ecuaţiile dreptei proiecţie a dreptei*

$$(d) : \begin{cases} 2x + y - z + 1 = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

pe planul $(P) : x + y + 2z = 0$.

Exerciţiul 9. *Să se scrie ecuaţia planului (π) paralel cu planul $(P_1) : 3x - y + z - 6 = 0$ şi care trece prin mijlocul segmentului determinat de punctele $M_1(1, 3, 2)$ şi $M_2(1, -5, -4)$.*

Exerciţiul 10. *Să se scrie ecuaţia planului (π) care trece prin mijlocul segmentului $[M_1M_2]$, unde $M_1(1, -1, 2)$ şi $M_2(4, -3, 1)$, este paralel cu dreapta $(d) : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z}{1}$ şi este perpendicular pe planul $(P_1) : x - 2y - z - 1 = 0$.*

Exerciţiul 11. *Să se scrie ecuaţia planului care trece prin origine şi este perpendicular pe planele*

$(P) : 2x - y + 3z - 1 = 0,$

$(Q) : x + 2y + z = 0.$

Exerciţiul 12. *Să se scrie ecuaţia planului care trece prin dreapta de intersecţie a planelor $x - y + z - 3 = 0$ şi $x + y - z + 1 = 0$ şi e paralel cu axa Ox.*

Exerciţiul 13. *Fie dreapta*

$$(d) : \begin{cases} x - y - 3z + 2 = 0 \\ 2x + y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$$

şi planul $(P) : x + y + z + 1 = 0$. Se cere:

a) să se scrie ecuaţia planului ce conţine dreapta (d) şi e perpendicular pe planul (P);

b) să se scrie ecuaţiile dreptei simetrice dreptei (d) faţă de planul (P).

Exerciţiul 14. *Sa se determine ecuaţia planului care trece prin intersectia planelor: $(P) : x + 5y + z = 0$ şi $(Q) : x - z + 4 = 0$ şi care formeaza cu planul $(R) : x - 4y - 8z + 12 = 0$ un unghi de masură $\frac{\pi}{4}$.*

Exerciţiul 15. *Se consideră punctul $M(2, 1, -3)$, dreapta $(d) : x - 2 = y = 2z + 1$ şi planul $(P) : x + 2y - 3z + 4 = 0$.*

a) Să se afle distanţele de la punctul M la (P) şi la dreapta (d).

b) Să se afle unghiul dintre dreaptă şi plan.

Exerciţiul 16. *Să se determine condiţia ca planele de ecuaţii* $(P_1): x - cy - bz = 0$ *şi respectiv* $(P_2): y - az - cx = 0, (P_3): z - bx - ay = 0$ *să treacă prin aceeaşi dreaptă.*

Exerciţiul 17. *Să se scrie ecuaţia planului care conţine punctul* $P(1, 3, -2)$ *şi este perpendicular pe dreapta determinată de punctele* $A(2, 5, 1)$ *şi* $B(0, 1, -3)$.

Exerciţiul 18. *Să se scrie ecuaţia planului care conţine dreptele de ecuaţii:*

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 + 2\alpha \\ z = 4 + \alpha \end{cases}, \begin{cases} x = 1 + 4\beta \\ y = 3 + 2\beta \\ z = 4 + 2\beta \end{cases}.$$

Exerciţiul 19. *Să se scrie ecuaţia planului care conţine dreptele de ecuaţii:*

$$\begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 3 - 2\alpha \\ z = -2 + 2\alpha \end{cases}, \begin{cases} x = 4 + \beta \\ y = 2 - 2\beta \\ z = -1 + 2\beta \end{cases}.$$

Exerciţiul 20. *Fie dreapta*

Exerciţiul 21. $(d): \begin{cases} x - y - 3z + 2 = 0 \\ 2x + y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$

şi planul $(P): x + y + z + 1 = 0$. *Se cere:*

a) să se scrie ecuaţia planului ce conţine dreapta (d) *şi e perpendicular pe planul* (P);

b) să se scrie ecuaţia planului care conţine dreapta (d) *şi face un unghi de* 60^0 *cu planul* (P);

c) să se scrie ecuaţia planului care conţine dreapta (d) *şi face un unghi de* 30^0 *cu dreapta*

$$(d_1): \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$$

d) să se scrie ecuaţiile dreptei simetrice dreptei (d) *faţă de planul* (P).

Exerciţiul 22. *Se dau punctele* $A(3, -1, 3), B(5, 1, 1), C(0, 4, -3), D(1, -2, 5)$, *dreptele*

$$(d_1): \begin{cases} x + 2y + 3z - 1 = 0 \\ 2x - y - z - 3 = 0 \end{cases}$$

$$(d_2): \left\{ \frac{x-4}{1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z+1}{3} \right.$$

$$(d_3): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t - 1 \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$

şi planele $(\mathcal{P}) : 2x-y-z-2=0, (\mathcal{Q}) : x+2y+2z+1=0, (\mathcal{R}) : x+7y+7z+\lambda = 0, \lambda \in \mathbf{R}$. *Se cer:*

a) ecuaţiile carteziene, parametrice şi ecuaţia vectorială a dreptelor determinate de punctele A, B *şi respectiv* A, C;

b) ecuaţia carteziană şi vectorială a planului ce conţine punctul C *şi este perpendiculară pe dreapta determinată de punctele* A, B;

c) ecuaţia carteziană a planului ce trece prin punctul C *şi este perpendicular pe dreapta* AB;

d) locul geometric al punctelor egal depărtate de A*şi* B;

e) ecuaţia carteziană şi vectorială a planului ce conţine punctul A *şi este paralel cu dreptele* (d_1) *şi* (d_2);

f) coordonatele simetricului punctului D *faţă de dreapta* $(d_4) = (\mathcal{P}) \cap (\mathcal{Q})$;

g) coordonatele simetricului punctului D *faţă de planul* $(\mathcal{Q})$;

h) ecuaţiile carteziene ale proiecţiei ortogonale a dreptei (d_2) *pe planul* $(\mathcal{P})$;

i) ecuaţiile carteziene ale simetricei dreptei (d_2) *faţă de planul* $(\mathcal{P})$;

j) ecuaţiile carteziene ale simetricului planului $(\mathcal{P})$ *faţă de planul* $(\mathcal{Q})$;

k) distanţa dintre planele obţinute la punctele b) şi c);

l) distanţa de la punctul D *la planul* $(\mathcal{Q})$;

m) măsura unghiului dintre dreptele AB *şi* AC;

n) măsura unghiului dintre planele $(\mathcal{P})$ *şi* $(\mathcal{Q})$;

o) măsura unghiului dintre drepta (d_1) *şi planul* $(\mathcal{Q})$;

p) valoarea lui λ *pentru care* $(\mathcal{P}), (\mathcal{Q})$ *şi* $(\mathcal{R})$ *se intersectează după o dreaptă.*

2. Probleme rezolvate

Exemplul 1. *Să se scrie ecuaţia vectorială şi ecuaţia generală a planului* (π) *care conţine punctul* $M_0(-3, 1, 4)$ *şi are normala* $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}$.

Rezolvare. Ecuaţia vectorială. Fie $M(x, y, z)$ un punct din plan.

$\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM}_0 = (x+3)\overrightarrow{i} + (y-1)\overrightarrow{j} + (z-4)\overrightarrow{k}$.

Ecuaţia vectorială: $\left\langle \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}, (x+3)\overrightarrow{i} + (y-1)\overrightarrow{j} + (z-4)\overrightarrow{k} \right\rangle = 0$.

Ecuaţia generală: $1 \cdot (x+3) + 2 \cdot (y-1) - 3 \cdot (z-4) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 3z + 13 = 0$.

Exerciţiul 23. *Să se scrie ecuaţia planului care trece prin mijlocul segmentului determinat de punctele* $M_1(1, 3, 2)$ *şi* $M_2(1, -5, -4)$ *şi paralel cu planul* $3x-y+z-6=0$.

Rezolvare. Coordonatele punctului P, mijlocului segmentului M_1M_2, sunt $(1, -1, -1)$. Planul trece prin acest punct.

Din condiţia că planul căutat este paralel cu cu planul $3x - y + z - 6 = 0$ rezultă că o normalele la plan sunt aceleaşi, $\overline{N} = 3\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}$.

Scriem ecuaţia planului care trece printr-un punct dar şi are o direcţie normală dată. $3x - y + z + D = 0$, $P(1, -1, -1)$ se găseşte pe plan $3 \cdot 1 - (-1) + (-1) + D = 0 \Rightarrow D = -3 \Rightarrow 3x - y + z - 3 = 0$.

Exerciţiul 24. *Să se scrie ecuaţiile canonice şi parametrice ale dreptei*
$$(d) : \begin{cases} 2x - y - z + 3 = 0 \\ x + 4y - 5z - 3 = 0 \end{cases}.$$

Rezolvare. Dreapta este dată ca intersecţie de două plane. Direcţia dreptei este dată de $\overline{u} = \overline{N_1} \times \overline{N_2}$, unde $\overline{N_1}, \overline{N_2}$ sunt vectori normali ai planelor care determină dreapta.
$$\overline{u} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -5 \end{vmatrix} = -9\overline{i} + 9\overline{j} + 9\overline{k}$$
Considerăm un punct de pe dreaptă luând, de exemplu, $z = 0$ rezultă $x = -1, y = 1$. Ecuaţiile canonice ale dreptei vor fi
$$\frac{x+1}{-9} = \frac{y-1}{9} = \frac{z}{9} \Leftrightarrow \frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}.$$
Ecuaţiile parametrice ale dreptei sunt:
$$\frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1} = \lambda \Rightarrow \begin{cases} x = -\lambda - 1 \\ y = \lambda + 1 \\ z = \lambda \end{cases}.$$

Exerciţiul 25. *Fie (d_1) şi (d_2) două drepte paralele cu vectorii $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}$, respectiv $\overrightarrow{u_2} = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$. Să se scrie ecuaţiile parametrice ale dreptei perpendiculare simultan pe (d_1) şi (d_2) şi care trece prin punctul $A(2, 3, 0)$.*

Rezolvare. Fie $\overrightarrow{u}$ direcţia dreptei (d) ceruta prin enunţ. $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{u_2} \Rightarrow \overrightarrow{u}$ este coliniar cu $\overrightarrow{u_1} \times \overrightarrow{u_1}$,
$$\overrightarrow{u_1} \times \overrightarrow{u_1} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}.$$
Fie $M(x, y, z) \in (d)$, $\overrightarrow{AM} = \alpha\left(\overrightarrow{u_1} \times \overrightarrow{u_1}\right) \Rightarrow (x-2)\overrightarrow{i} + (y-3)\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k} = \alpha\left(-\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}\right)$
$$\begin{cases} x = 2 - \alpha \\ y = 3 - 3\alpha \\ z = \alpha \end{cases}.$$

<u>**Facultativ**</u>

3. Conice şi cuadrice

Exerciţiul 26. *Să se determine intersecţia elipsei*
$3x^2 + 8y^2 = 35$ *cu dreapta* $x + 2y - 5 = 0$.

Exerciţiul 27. *Să se arate că ecuaţia*
$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 9 = 0$
reprezintă ecuaţia unui cerc şi să se scrie ecuaţiile tangentelor duse din origine la acest cerc.

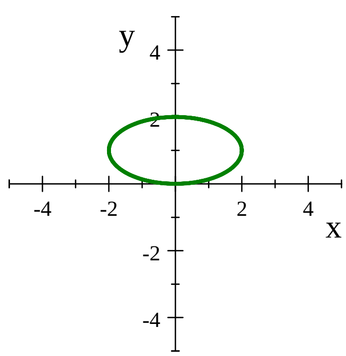
Exerciţiul 28. *Să se determine ecuaţiile tangentelor duse prin punctul* $M(3, 2)$ *la curba de ecuaţie* $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$.

Exerciţiul 29. *Ce valoare trebuie să aibă* λ *pentru ca dreapta* $x - y + \lambda = 0$ *să fie tangentă la curba* $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + 1 = 0$? *După determinarea lui* λ *să se afle coordonatele punctelor de contact al tangentei.*

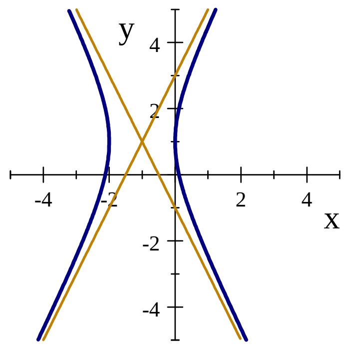
Exerciţiul 30. *Să se determine punctele de intersecţie al parabolei* $y^2 = 18x$ *cu dreapta* $6x + y - 6 = 0$.

Exerciţiul 31. *Să se traseze graficele conicelor:*
a) $x^2 + 4y^2 - 8y = 0$, b) $x^2 - 4y^2 + 8y = 0$,
c) $4x^2 - y^2 + 8x + 2y = 1$,
d) $4x^2 - y^2 - 16x + 2y + 15 = 0$,
e) $y^2 - 6x - 2y = 0$, f) $y^2 + 6x + 2y = 0$,
g) $x^2 + 6x - y = 0$, h) $x^2 + 4x + y + 4 = 0$,
i) $y^2 - x - 2y = 0$,
j) $y^2 + x + 2y + 2 = 0$.

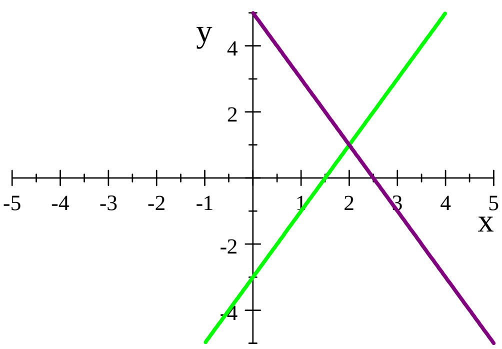
Soluţie. a) $x^2 + 4y^2 - 8y = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4\left(y^2 - 2y + 1\right) - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4\left(y - 1\right)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow$
$\frac{x^2}{4} + \left(y - 1\right)^2 - 1 = 0$ elipsa cu centrul în $(0, 1)$, $a = 2, b = 1$



c) $4x^2 - y^2 + 8x + 2y = 1 \Leftrightarrow 4(x^2 + 2x + 1) - (y^2 - 2y + 1) - 4 = 0 \Leftrightarrow 4(x+1)^2 - (y-1)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 - \frac{(y-1)^2}{4} - 1 = 0$ hiperbolă cu centrul în $(-1, 1)$, $a = 1, b = 2$. Asimptotele hiperbolei $(x+1)^2 - \frac{(y-1)^2}{4} = 0 \Leftrightarrow 4(x+1)^2 - (y-1)^2 = 0 \Leftrightarrow y - 1 = \pm 2(x+1)$

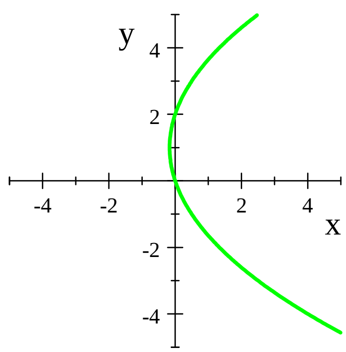


d) $4x^2 - y^2 - 16x + 2y + 15 = 0 \Leftrightarrow 4(x^2 - 4x + 4) - (y^2 - 2y + 1) = 0 \Leftrightarrow 4(x-2)^2 - (y-1)^2 = 0 \Leftrightarrow y - 1 = \pm 2(x-2)$ două drepte secante



e) $y^2 - 6x - 2y = 0 \Leftrightarrow (y^2 - 2y + 1) = 6x + 1 \Leftrightarrow (y-1)^2 = 6\left(x + \frac{1}{6}\right)$

Parabolă cu vârful în $\left(-\frac{1}{6}, 1\right)$, $p = 3$

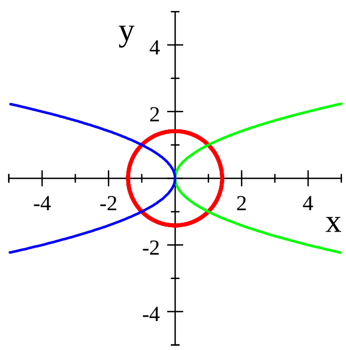


.

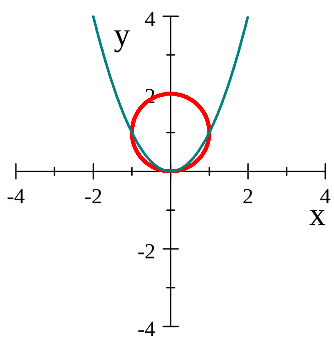
Exerciţiul 32. *Să se reprezinte grafic următoarele domenii:*

a) $\mathcal{D} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq -2x\}$;
b) $\mathcal{D} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4, x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1, x \geq 0\}$;
c) $\mathcal{D} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2, x \leq y^2, x \geq -y^2, y \leq 0\}$;
d) $\mathcal{D} = \{(x, y) | x^2 \geq y^2, x \leq y, 0 \leq y \leq 1\}$;
e) $\mathcal{D} = \{(x, y) | y^2 \geq x^2, y \leq 2x + 3\}$;
f) $\mathcal{D} = \{(x, y) | x^2 + (y - 1)^2 \leq 1, y \leq x^2, x \geq 0\}$.

Soluţie. c) $\mathcal{D} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2, x \leq y^2, x \geq -y^2, y \leq 0\}$
$x^2 + y^2 = 2$ cerc cu centrul în origine şi rază $\sqrt{2}$
$x = y^2, x = -y^2$ parabole
Domeniul este: intersecţia dintre interiorul cercului, exteriorul parabolelor, cadranele trei şi patru.



f) $\mathcal{D} = \{(x, y) | x^2 + (y - 1)^2 \leq 1, y \leq x^2, x \geq 0\}$
$x^2 + (y - 1)^2 = 1$ cerc cu centrul în $(0, 1)$ şi raza 1
$y = x^2$ parabola



Domeniul este intersecţia dintre interiorul cercului şi exteriorul parabolei aflată în cadranul I.

Exerciţiul 33. *Să se recunoască următoarele curbe din plan:*

a) $x^2+y^2-2x+2y=0$, *b)* $y^2-9x^2=0$.
c) $2x^2+y^2+4y-2=0$; *d)*$\dfrac{x^2}{49}+\dfrac{y^2}{9}=0$,
e) $\dfrac{x^2}{8}-y^2-\dfrac{1}{2}=0$, *f)* $\dfrac{x^2}{8}-y=0$,
g) $x^2+y^2-2y+2=0$, *h)* $y-20x^2=0$.

Soluţie. a) $x^2+y^2-2x+2y=0 \Rightarrow (x-1)^2+(y+1)^2-2=0$
Cerc $C(1,-1), R=\sqrt{2}$
b) $y^2-9x^2=0 \Rightarrow (y-3x)(y+3x)=0$ două plane secante
c) $2x^2+y^2+4y-2=0 \Rightarrow 2x^2+(y+2)^2-6=0 \Rightarrow$
$\frac{x^2}{3}+\frac{(y+2)^2}{6}-1=0$ elipsă
d)$\dfrac{x^2}{49}+\dfrac{y^2}{9}=0 \Leftrightarrow x=0, y=0$.

Exerciţiul 34. *Să se recunoască suprafeţele în spaţiu:*
a) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{25}-1=0$, *b)* $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=z$,
c) $x^2+y^2=2z$, *d)* $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}-1=0$,
e) $x^2+y^2-z^2+2z=0$, *f)* $x-z+2y+3=0$,
g) $x^2-y^2+z^2+2y=0$, *h)* $x^2-y^2=2z$,
i) $-\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{25}-1=0$, *j)* $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=2z$,
k) $\dfrac{x^2}{1}+\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{z^2}{4}=0$, *l)* $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{z^2}{25}-1=0$,
m) $\dfrac{x^2}{1}+\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{z^2}{4}-1=0$, *n)* $\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{z^2}{25}=0$,
o) $\dfrac{x^2}{1}+\dfrac{y^2}{16}-2z=0$, *p)* $\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{z^2}{25}-1=0$,
r) $x^2-y^2-z^2=0$, *s)* $x^2+y^2=2z$,
t) $\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{16}=4-x^2$, *u)*$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}+z^2+1=0$.

Soluţie. a) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{25}-1=0$ elipsoid
b) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=z \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{\frac{9}{2}}=2z$ paraboloid hiperbolic
c) $x^2+y^2=2z$ paraboloid eliptic
d) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}-1=0$ cilindru eliptic

e) $x^2 + y^2 - z^2 + 2z = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - (z^2 - 2z + 1) + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - (z-1)^2 + 1 = 0$ hiperboloid cu două pânze

f) $x - z + 2y + 3 = 0$, plan

r) $x^2 - y^2 - z^2 = 0$ suprafaţă conică