1. Transformări liniare

Exerciţiul 1. *Fie spaţiul liniar* $(\mathbb{R}^3,+,\cdot\mathbb{R})$ *şi funcţia* $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3, \forall\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3, \mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$:

a) $T(\mathbf{x})=\mathbf{a}$, $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^3$ *fixat;* **b)** $T(\mathbf{x})=\mathbf{x}+\mathbf{a}$, $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^3$ *fixat ;*

c) $T(\mathbf{x})=\lambda\mathbf{a}$, $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^3$ *fixat;* **d)** $T(\mathbf{x})=(x_1,x_2,x_3^2)$*;*

e) $T(\mathbf{x})=(x_3,x_1,x_2+3)$*;* **f)** $T(\mathbf{x})=(x_1,\cos x_2,\sin x_3)$*;* $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$*;*

g) $T(\mathbf{x})=(x_1+2x_2-3x_3,3x_1-x_2,x_3)$.

Care din funcţiile de mai sus sunt transformări liniare?

Exerciţiul 2. *Pe mulţimea polinoamelor de gard cel mult* n *cu coeficienţi reali, notată* $\mathbb{R}_n[x]$, *definim aplicaţiile:*

$$T:\mathbb{R}_n[x]\to\mathbb{R}_{n-1}[x], \forall p\in\mathbb{R}_n[x], p(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k,$$

$$T(p)(x)=\frac{d}{dx}(p(x)),$$

$$S:\mathbb{R}_{n-1}[x]\to\mathbb{R}_n[x], \forall q\in\mathbb{R}_{n-1}[x], q(x)=\sum_{k=0}^{n-1}b_kx^k,$$

$$S(q)(x)=\int_0^x q(t)dt.$$

Să se demonstreze că cele două aplicaţii sunt transformări liniare. Să se determine matricele celor două transformări considerând bazele canonice din spaţiile respective. Să se arate că cele două aplicaţii sunt operaţii inverse (diferenţierea este inversa la stânga a integrării) .

Exerciţiul 3. *Fie funcţia* $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$,*definită prin* $\forall\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3,\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$:

$T(\mathbf{x})=(x_1+x_2,2x_1+3x_2-x_3,x_1-x_3)$.

a) Să se demonstreze că T *este o transformare liniară.*

b) Fie $C=(\mathbf{e}_1=(1,0,0),\mathbf{e}_2=(0,1,0),\mathbf{e}_3=(0,0,1))$ *baza canonică*

$B=(\mathbf{v}_1=(1,1,0),\mathbf{v}_2=(1,0,1),\mathbf{v}_3=(0,1,1))$ *o altă bază în* $(\mathbb{R}^3,+,\cdot,\mathbb{R})$.

Să se determine matricele transformarei liniare ${}_C(T)_C$, ${}_B(T)_B$, ${}_C(T)_B$, ${}_B(T)_C$.

c) Să se determine $\ker(T)$, $\operatorname{Im}(T)$, *să se precizeze o bază în ele. Să se studieze injectivitatea şi surjectivitatea lui* T.

Exerciţiul 4. *Fie spaţiile liniare reale* $(\mathbb{R}^3,+,\cdot,\mathbb{R})$ *şi* $(\mathbb{R}^4,+,\cdot,\mathbb{R})$.

Se definesc aplicaţiile:

$T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $\forall\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3), T(\mathbf{x})=(x_1-x_2+x_3,x_1+x_3)$,

$S:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $\forall\mathbf{y}=(y_1,y_2), S(\mathbf{y})=(y_1,y_1-y_2,y_2)$.

a) Să se verifice că T *şi* S *sunt transformări liniare.*

b) Să se determine $T\circ S$ *şi* $S\circ T$ *şi să se verifice că sunt transformări liniare.*

c) Să se demonstreze că :
${}_B(S\circ T)_B = {}_{B'}(S)_B \cdot {}_B(T)_{B'}$;
${}_{B'}(T\circ S)_{B'} = {}_B(T)_{B'} \cdot {}_{B'}(S)_B$,
unde $\circ$ *este operaţia de compunere a funcţiilor, iar* $\cdot$ *este operaţia de înmultire a matricelor,* B *este baza canonică din* $\mathbb{R}^3$*, iar* B' *este baza canonică din* $\mathbb{R}^2$.

Exerciţiul 5. *Fie spaţiul vectorial real* $\mathbb{V}$ *a funcţiilor de forma* $f(x)=(a_1+a_2x)\sin x+(a_3+a_4x)\cos x$.

Fie aplicaţia $T:\mathbb{V}\to\mathbb{V}, T(f)(x)=x\dfrac{df}{dx}(x)-xf(x+\dfrac{\pi}{2})$.
a) Să se demonstreze că $B=(\sin x, x\sin x, \cos x, x\cos x)$ *este o bază în* $\mathbb{V}$.
b) Să se demonstreze că T *este o aplicaţie liniară.*
c) Să se determine ${}_B(T)_B$.

Exerciţiul 6. *Fie* $\mathbb{R}_n[x]$ *spaţiul liniar al polinoamelor de grad* $\le n$*. Fie*
$T:\mathbb{R}_n[x]\to\mathbb{R}_n[x], T(f)(x)=xf'(x)+f(x)$.
a) Să se demonstreze că T *este o aplicaţie liniară.*
b) Să se determine ${}_B(T)_B$ *, unde* B *este baza canonică din* $\mathbb{R}_n[x]$.

Exerciţiul 7. *Fie* $T\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^4)$ *o transformare liniară definită astfel*
$T(\mathbf{x})=(x_2+x_3, -x_1-x_2+x_4, x_1+x_2-x_4, -x_1+x_3+x_4)$.
Să se arate că $\ker(T)=\mathrm{Im}(T)$.

Exerciţiul 8. *Fie* $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}^3, (T(p))(x)=\begin{pmatrix} p(0) & p(1) & p(2)\end{pmatrix}, \forall p\in\mathbb{R}_2[x]$, *unde* $p(x)=a+bx+cx^2$, $a,b,c\in\mathbb{R}$.
a) Să se demonstreze că este o transformare liniară.
b) Fie $B_1=(1,x,x^2)$ *baza standard din* $\mathbb{R}_2[x]$ *şi*
$B_2=(e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1))$ *baza standard din* $\mathbb{R}^3$*. Să se determine matricea lui* T *de la baza* B_1 *la baza* B_2.
c) Să se stabilească dacă este această aplicaţie un izomorfism (justificare).

Exerciţiul 9. *Se dau subspaţiile liniare* $U=\{x=(x_1,x_2,x_3)\mid x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{R}^3$ *şi* $V=\{y=(y_1,y_2)\mid y_1,y_2\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{R}^2$*. Să se definească o transformare liniară*
$T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$
astfel încât $\ker(T)=U$ *şi* $\mathrm{Im}(T)=W$.

Exerciţiul 10. *Fie spaţiile liniare reale* $(\mathbb{R}^3,+,\cdot,\mathbb{R})$ *şi* $(\mathbb{R}^4,+,\cdot,\mathbb{R})$.
Se definesc transformările liniare :
$T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$, $\forall\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$,
$T(\mathbf{x})=(x_1+x_2, 2x_1-x_2+x_3, -x_1+2x_3, 3x_3)$,

$S:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$, $\forall\mathbf{y}=(y_1,y_2,y_3,y_4)$,
$S(\mathbf{y})=(y_1+y_2-y_3-y_4,2y_2-3y_4,y_1-y_3+2y_4)$.
Să se determine nucleele şi imaginile aplicaţiilor T şi S. Să se determine transformările compuse $T\circ S$ şi $S\circ T$. Să se verifice că matricea transformării compuse este egală cu produsul matricelor celor două transformări în bazele canonice corespunzătoare.

Exerciţiul 11. *Fie spaţiul liniar real $(\mathbb{R}^2,+,\cdot,\mathbb{R})$. Se defineşte funcţia*
$T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $\forall\mathbf{x}=(x_1,x_2)$, $T(\mathbf{x})=(x_1-2x_2,x_2-x_1)$,
a) Să se verifice că T este transformare liniară.
b) Să se studieze dacă T este inversabilă şi, dacă da, să se arate că T^{-1} este liniară.
c) Să se verifice dacă ${}_B\left(T^{-1}\right)_B=\left({}_B(T)_B\right)^{-1}$, unde B este baza canonică din $\mathbb{R}^3$

Exerciţiul 12. *Notăm cu $(\mathbb{R}_n[x],+,\cdot,\mathbb{R})$ spaţiul liniar al polinoamelor de grad cel mult n.*
Fie spaţiul liniar real $(\mathbb{R}_2[x],+,\cdot,\mathbb{R})$. Se defineşte funcţia
$T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_2[x]$, $\forall\mathbf{p}(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$, $(T\mathbf{p})(x)=a_1-(a_0+a_2)x+(a_1+a_2)x^2$.
a) Să se arate că T este transformare liniară şi să se determine matricea asociată transformării liniare în raport cu bazele $B=(1,x,x^2)$ şi $B'=(x+1,x-1,x^2+1)$.
b) Să se verifice că T este injectivă şi să se demonstreze că ${}_{B'}\left(T^{-1}\right)_B=\left({}_B(T)_{B'}\right)^{-1}$.

Exerciţiul 13. *Fie spaţiile liniare reale $(\mathbb{R}_4[x],+,\cdot,\mathbb{R})$ şi $(\mathbb{R}_3[x],+,\cdot,\mathbb{R})$. Să se determine matricea asociată transformării liniare $T:\mathbb{R}_4[x]\to\mathbb{R}_3[x]$ definită prin $\forall\mathbf{p}\in\mathbb{R}_4[x]$, $T\mathbf{p}=\mathbf{p}'$ ($\mathbf{p}'$ este derivata funcţiei polinomiale $\mathbf{p}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ataşată polinomului $\mathbf{p}$) în raport cu bazele $B=(1,x,x^2,x^3,x^4)$ în $(\mathbb{R}_4[x],+,\cdot,\mathbb{R})$ şi $B'=(1,x,x^2,x^3)$ în $(\mathbb{R}_3[x],+,\cdot,\mathbb{R})$.*

Exerciţiul 14. *Fie $T:\mathbb{R}_3[x]\to\mathbb{R}_3[x]$, $T(\mathbf{p})=\mathbf{p}'-\mathbf{p}$, ($\mathbf{p}'$ este derivata funcţiei polinomiale $\mathbf{p}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ataşată polinomului $\mathbf{p}$). Să se arate că T este un izomorfism şi că $T^{-1}(\mathbf{p})=-\mathbf{p}-\mathbf{p}'-\mathbf{p}''-\mathbf{p}'''$.*

Exerciţiul 15. *Fie $(\mathbb{V},+,\cdot,\mathbb{R})$ un spaţiu liniar real, $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{V}=n$ şi T un endomorfism astfel încât $T^n(x)=\theta$, $T^{n-1}(x)\neq\theta$ pentru un $x\in\mathbb{V}$.*
a) Să se demonstreze că $B=\left(x,T(x),T^2(x),...,T^{n-1}(x)\right)$ formează o bază în $\mathbb{V}$.
b) Să se scrie matricea lui T în baza B.

Exerciţiul 16. *Fie $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ o transformare liniară a cărei matrice în raport cu baza canonică din $\mathbb{R}^3$ este* $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1&1&2\\3&3&4\\2&1&1\end{pmatrix}$.

a) *Să se determine matricea lui T în raport cu baza*
$S = (f_1 = (1, 1, -1), f_2 = (1, 0, 1), f_3 = (1, 1, 0))$.

b) *Să se afle* $\ker(T), \mathrm{Im}(T), def(T), rang(T)$ *şi să se studieze injectivitatea şi surjectivitatea.*

c) *Să se verifice că* $def(T) + rang(T) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$.

Exerciţiul 17. *Fie* $(\mathbb{V}, +, \cdot, \mathbb{R})$, $(\mathbb{W}, +, \cdot, \mathbb{R})$ *şi* $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$. *Să se demonstreze că:*

a) Dacă T este injectivă atunci $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{V} \leq \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{W}$.

b) Dacă T este surjectivă atunci $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{V} \geq \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{W}$.

c) Dacă T este bijectivă atunci $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{V} = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{W}$.

Exerciţiul 18. *Fie* $\mathbb{R}_n[x]$ *mulţimea polinoamelor de grad cel mult n şi*
$D : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_{n-1}[x], D(p)(x) = p'(x)$,
$M : \mathbb{R}_{n-1}[x] \to \mathbb{R}_n[x], M(p)(x) = xp(x)$.

a) Să se demonstreze că D şi P sunt transformări liniare.

b) Să se demonstreze că $\mathrm{Im}(D) = \mathbb{R}_{n-1}[x], \mathrm{Im}(M) \neq \mathbb{R}_n[x]$.

c) Să se demonstreze că D nu este injectivă, iar M este injectivă.

d) Să se demonstreze că $(D \circ M)(p) - (M \circ D)(p) = p, \forall p \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$.

Exerciţiul 19. *Fie spaţiul vectorial real $\mathbb{V}$ a funcţiilor de forma* $f(x) = (a_1 + a_2 x)\sin x + (a_3 + a_4 x)\cos x$.

Fie aplicaţia $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}, T(f)(x) = x\dfrac{df}{dx}(x) - xf(x + \dfrac{\pi}{2})$.

a) Să se demonstreze că $B = (\sin x, x\sin x, \cos x, x\cos x)$ *este o bază în* $\mathbb{V}$.

b) Să se demonstreze că T este o aplicaţie liniară.

c) Să se determine ${}_B(T)_B$.

Exerciţiul 20. *Să se determine transformarea liniară* $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, *dacă se cunoaşte:* $T(e_1) = (1, 0), T(e_2) = (0, 1), T(e_3) = (1, 1), T(e_4) = (1, -1)$, *unde* $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ *este baza canonică din* $\mathbb{R}^4$.

Exerciţiul 21. *Fie spaţiile liniare reale* $(\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$ *şi* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \mathbb{R})$. *Definim funcţia* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *prin* $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$,

$$T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_2 & x_3 \\ -x_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Să se demonstreze că T este o transformare liniară.

b) Fie $C = (\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1))$ *baza canonică din spaţiul liniar* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \mathbb{R})$ *şi* $C' = \left(\mathbf{E}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, ..., \mathbf{E}_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ *baza canonică din* *spaţiul liniar* $(\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$. *Să se determine matricele transformarei liniare în bazele propuse* ${}_{C}(T)_{C'}$.

c) Să se determine $\ker(T)$ *şi* $\operatorname{Im}(T)$, *să se precizeze o bază în ele. Să se studieze injectivitatea şi surjectivitatea lui* T.

Exerciţiul 22. *Pe spatiul liniar real al polinoamelor de grad cel mult* n , *notat cu* $\mathbb{R}_n[x]$, *se definesc functiile :*

$T_1 : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_{\ n+1}[x]$,$(T_1(\mathbf{p}))(x) = x\mathbf{p}(x), \forall \mathbf{p} \in \mathbb{R}_n[x]$.

$T_2 : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_1[x], (T_2(\mathbf{p}))(x) = x\int_0^1 t\mathbf{p}(t)dt, \forall \mathbf{p} \in \mathbb{R}_n[x]$.

a) Să se arate că T_1 *si* T_2 *sunt transformări liniare.*

b) Să se arate că T_1 *este injectivă si* T_2 *nu este surjectivă.*

c) Să se determine $\ker T_2$ *si* $\operatorname{Im} T_1$.

Exerciţiul 23. *Fie* $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *şi* $g : \mathbb{Y} \to \mathbb{Z}$ *transformările liniare definite peste spaţiile liniare* $\mathbb{X}$,$\mathbb{Y}$,$\mathbb{Z}$ *peste câmpul* $\mathbb{K}$ *astfel încât* $g \circ f = \theta$. *Să se arate că*

a) dacă f *surjectivă atunci* $g = \theta$,

b) dacă g *injectivă atunci* $f = \theta$.

Exerciţiul 24. *Să se arate că dacă* $f \in \mathcal{L}(\mathbb{X},\mathbb{X})$ *satisface* $f^2 - f + i_{\mathbf{X}} = \theta$ *atunci* f *este automorfism al lui* $\mathbb{X}$.

Exerciţiul 25. *Fie funcţiile* $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, $g : \mathbb{Y} \to \mathbb{Z}$. *Să se demonstreze că dacă* f, g *sunt bijective, atunci* $g \circ f$ *este bijectivă. Dacă* f *este bijectivă atunci* f^{-1} *este bijectivă.*

Exerciţiul 26. Aplicaţie în criptografie. *Considerăm că vrem să trimitem următorul mesaj unui prieten: NE INTILNIM LUNI LA NOUA.*

Pentru securitate prima codificare a alfabetului va fi

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

S	T	U	V	W	X	Y	Z
19	20	21	22	23	24	25	26

mesajul original va fi

14 5 9 14 20 9 12 14 9 13 12 21 14 9 12 1 14 15 21 1

Îl împărţim în cinci vectori

$$\begin{pmatrix} 14 \\ 5 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 9 \\ 12 \\ 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 13 \\ 12 \\ 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 9 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 15 \\ 21 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Îl codificăm mesajul codificat anterior conform transformării liniare (aleasă arbitrar, dar bijectivă!!!)

$T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$

$$T(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

A doua codificare a mesajului va fi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 5 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 107 \\ 79 \\ 65 \\ 23 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 9 \\ 12 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 130 \\ 95 \\ 75 \\ 26 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 13 \\ 12 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 155 \\ 109 \\ 100 \\ 33 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 9 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72 \\ 50 \\ 36 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 15 \\ 21 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 111 \\ 74 \\ 60 \\ 22 \end{pmatrix}$$

Putem trimite mesajul

107 79 65 23 130 95 75 26 155 109 100 33 72 50 36 13 111 74 60 22

Destinatarul cunoaşte matricea transformării liniare, calculează inversa sa

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

şi decodifică mesajul.

Decodificaţi următorul mesaj

82 55 36 6 83 51 46 13 167 123 103 39 77 56 35 9 132 88 76 23

1.1. Transformări liniare care apar în probleme de grafică pe calculator.

Exerciţiul 27. *Să se scrie transformarile liniare şi matricele lor în baza canonică care realizează simetria în plan a unui punct faţă de axele Ox, Oy şi faţă de prima bisectoare.*

simetria în plan a unui punct faţă de axele Ox $(x, y) \to (x, -y)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix},$$

simetria în plan a unui punct faţă de axele Ox $(x, y) \to (-x, y)$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

simetria în plan faţă de prima bisectoare $(x, y) \to (y, x)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

simetria faţă de origine $(x, y) \to (-x, -y)$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}.$$

Exerciţiul 28. *Să se determine coordonatele vârfurilor simetricului triunghiului cu vârfurile în punctele $(-1, 4), (3, 1), (2, 6)$ faţă de axele Ox, Oy, faţă de origine şi faţă de prima bisectoare.*

Exerciţiul 29. *Să se scrie transformarile liniare care realizează simetria în spaţiu a unui punct faţă de planele Oxy, Oyz, Oxz.*

simetria în spaţiu a unui punct faţă de planul Oxy $(x, y, z) \to (x, y, -z)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix}.$$

Exerciţiul 30. *Să se scrie transformarile liniare care realizează proiecţiile ortogonale în plan a unui punct pe axele Ox, Oy.*

proiecţia ortogonală în plan a unui punct pe axa Ox $(x, y) \to (x, 0)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

proiecţia ortogonală în plan a unui punct pe axa Oy $(x, y) \to (0, y)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}.$$

Exerciţiul 31. *Să se scrie transformarile liniare care realizează proiecţiile ortogonale în spaţiu a unui punct pe planele Oxy, Oyz, Oxz.*

proiecţiile ortogonală în spaţiu a unui punct pe planele Oxy $(x, y, z) \to (x, y, 0)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exerciţiul 32. *Să se scrie transformările liniare care realizează rotaţia în plan a unui punct în jurul originii de unghi α in sens direct trigonometric şi în sens contrar trigonometric.*

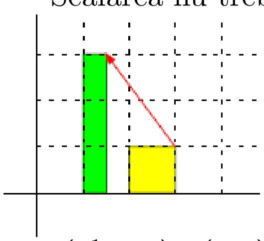
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Exerciţiul 33. *Fie triunghiul cu vârfurile în punctele $(-1, 4)$, $(3, 1)$, $(2, 6)$ Să se determine coordonatele vârfurilor triunghiului rotit în jurul originii cu un unghi de 90 grade. Analog cu un unghi de 45 grade.*

Exerciţiul 34. *Scalarea: matricea de scalare*

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\alpha \\ y\beta \end{pmatrix}$$

Scalarea nu trebuie sa fie uniforma. De exemplu:

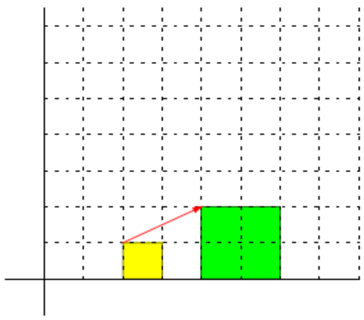


$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x \\ 3y \end{pmatrix}$$

Exerciţiul 35. *Descrieţi cum se transformă un pătrat de latura 1 cu vârfurile în $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$ prin aplicarea tuturor punctelor transformările liniare care au matricele în baza canonică date mai jos:*

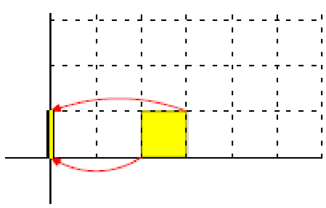
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

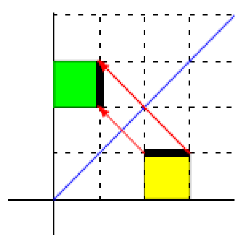
Exerciţiul 36. *Găsiţi transformarea liniară care realizează transformarea pătratului de latură 1, colorat in galben, în pătratul colorat în verde.*

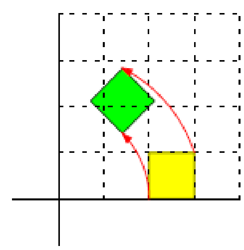


R:$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
Contracţie, $0 < k < 1$ şi dilatatre $k > 1$,
$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$.
Cazul $k < 0$ nu este altceva decât
$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}$

Exerciţiul 37. *Găsiţi transformarile liniare care realizează trecerea de la pătratele galbene la cele verzi, ilustrate prin figurile de mai jos?*







a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) simetrie faţă de prima bisectoare, c) rotaţie de unghi α

Exerciţiul 38. *Analizaţi cum se modifică pătratul de latura 1 cu vârfurile în* $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ *dacă aplicăm asupra punctelor lui transformarea liniară* $T(\mathbf{x}) = (x+y, y), \mathbf{x} = (x, y)$.

Exerciţiul 39. *Să se aplice dreptunghiurilor de mai jos următoarele transformări*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

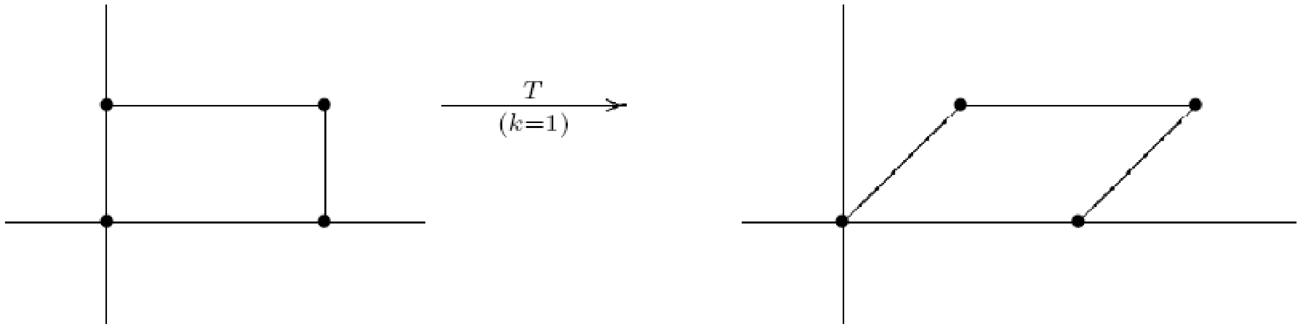
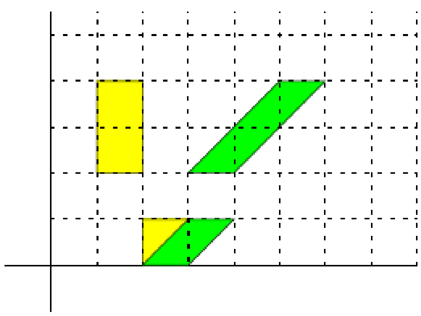


Figura 1:



.

Exerciţiul 40. *Explicaţi ce realizează transformarea a cări matrice în baza canonică din* $\mathbb{R}^2$ *este*

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pentru cazul $k = 1, k = -1$ *(forfecare).*

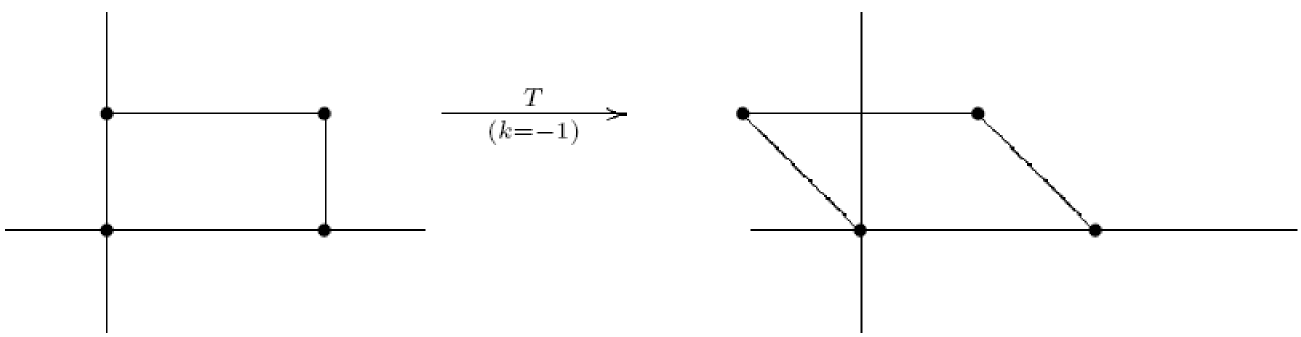


Figura 2: