Numele şi prenumele:
Data: 28.01.2021
Grupa:
Facultatea: Automatică şi Calculatoare
Partea I (funcţii de o variabilă reală)

1. Studiaţi convergenţa şirului dat prin $x_0 = 1$,

$$x_{n+1} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x_n}, n \in \mathbb{N}.$$

Soluţie: Pentru a rescrie expresia prin care este definit şirul vom utiliza formula:

$$arctgx + arctg\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2},\ \forall x > 0$$

Obţinem:

$$x_{n+1} = arctg\ x_n$$

Să identificăm câtiva termeni ai şirului propus spre analiză:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = arctg\ 1 = \dfrac{\pi}{4} < 1 \end{cases}$$

Vom analiza în cele ce urmează monotonia şi mărginirea şirului:

- **Monotonia:** Analizăm:
  $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{arctg\ x_n}{x_n}$ Definim $f : [0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = x - arctg\ x$. Se obţine:

  $$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2+1} = \frac{x^2}{1+x^2} > 0$$

  Deci $f(x) \geq f(0) = 0 \to x \geq arctg\ x$. Prin urmare:

  $$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 \to a_{n+1} \leq a_n$$

  deci şirul este descrescător.

- **Mărginirea:** Fiind un şir de numere naturale descrescător:

  $$0 < a_n \leq 1.$$

  Pentru a afla limita trecem la limită în relaţia de recurenţă. Fie $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \to l = arctg\ l \to l = 0$.

2. a) Utilizând criteriile de convergenţă, să se determine natura seriilor:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n^{2020}}{n^{2022}+2021}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)(\ln\ln n)^{2021}}.$$

Soluţie: Vom utliza pentru prima serie faptul că $\sin x \leq x \to \sin\left(\dfrac{n^{2020}}{n^{2022}+2021}\right) \leq \left(\dfrac{n^{2020}}{n^{2022}+2021}\right)$.

Deci vom folosi criteriul de comparaţie deoarece:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n^{2020}}{n^{2022}+2021}\right) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^{2020}}{n^{2022}+2021}\right) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

şi ultima serie are aceeaşi natură cu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ (C) deci şi seria iniţială va fi convergentă.

A doua serie: Având în expresie logaritmi vom aplica criteriul de condensare. Dacă $(u_n)_n$ este un şir descrescător atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n u_{2^n}$.
Vom considera:

$$a_n = \frac{1}{n(\ln n)(\ln \ln n)^{2021}}$$

şi ne propunem să analizăm raportul $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n(\ln\ n)(\ln \ln n)^{2021}}{(n+1)\ln(n+1)(\ln \ln(n+1))^{2021}} < 1 \to a_n \text{ descrescător} \tag{1}$$

Observăm mai întâi faptul că $lnxleqx - 1$:

$$\ln(\ln n)) \leq \ln(1 + \ln n - 1) \leq \ln n - 1 \leq n$$

În concluzie:

$$a_n := \frac{1}{n(\ln n)(\ln \ln n)^{2021}} \leq \frac{1}{n(\ln n)(\ln n)^{2021}} = \frac{1}{n(\ln n)^{2022}} := b_n$$

Observăm că b_n este descrescător şi că putem aplica criteriul de condensare pentru $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ mai uşor:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} 2^n b_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n(ln 2^n)^{2022}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln 2)^{2022} \cdot n^{2022}} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2022}}\ (C)$$

Am obţinut $a_n \leq b_n$ cu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(C)$ prin urmare conform CCI şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\ (C)$.
b) Aflaţi mulţimea de convergenţă şi calculaţi suma seriei de puteri $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} x^{2n}$.
Soluţie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y^n,\ y = x^2,\ a_n = \frac{3^n}{n}$$

Vom identifica mai întâi raza de convergenţă:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{3^n}\right)} = \frac{1}{3}$$

Se obţine că seria propusă este (AC) pentru $|y| < \frac{1}{3}$ şi divergentă pentru $|y| > \frac{1}{3}$. Vom analiza acum situaţia în capetele $y = \pm\frac{1}{3}$.

- $y = \frac{1}{3}$ obţinem seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\ (D)$
- $y = \frac{-1}{3}$ nu este posibil. Prin urmare:

$$\begin{cases} (AC),\ |y| < \frac{1}{3} \\ (D),\ |y| \geq \frac{1}{3} \end{cases} \to \begin{cases} (AC), |x| < \frac{1}{\sqrt{3}} \\ (D),\ |x| \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Pentru a identifica suma seriei să observăm că:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} x^{2n} = -\ln(1 - 3x^2)$$

3. Arătaţi inegalitatea:

$$(e+x)^{e-x} > (e-x)^{e+x}, \quad \forall x \in (0,e).$$

Soluţie: Prin logaritmare inegalitatea devine

$$(e-x)\ln(e+x) > (e+x)\ln(e-x).$$

Avem astfel de arătat că $f(x) > 0$, oricare ar fi $x \in (0,e)$, unde

$$f:(0,e) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = (e-x)\ln(e+x) - (e+x)\ln(e-x).$$

Cum

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\ln(e-x) - \ln(x+e) - \frac{x-e}{x+e} - \frac{x+e}{x-e} \\ &= -\ln\left(e^2 - x^2\right) + 2\frac{e^2+x^2}{e^2-x^2} \\ &> -\ln\left(e^2\right) + 2 = 0, \end{aligned}$$

oricare ar fi $x \in (0,e)$, deducem că f este strict crescătoare pe $(0,e)$. Deci

$$\operatorname{Im} f = \left(\lim_{x\to 0} f(x), \lim_{x\to e} f(x)\right) = (0, +\infty)$$

sau $f(x) > 0$, oricare ar fi $x \in (0,e)$.

Partea a II-a (funcţii de mai multe variabile reale)

1. Se dă funcţia $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiaţi existenţa derivatelor parţiale şi diferenţiabilitatea lui f în punctul $(0,0)$.

Soluţie: Studiem mai întâi continuitatea: Din inegalitatea:

$$\left|\left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq x^2+y^2$$

rezultă prin trecere la limită că:

$$\lim_{x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

deci funcţia este continuă în origine.

Să observăm că:

$$\begin{cases} f(x,0) = x^2\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2}}, \ x \neq 0 \\ f(0,y) = y^2\sin\dfrac{1}{\sqrt{y^2}}, \ y \neq 0 \end{cases}$$

Folosim definiţia:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2}}}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{|x|} = 0 \tag{2}$$

deoarece $\left|\sin\dfrac{1}{|x|}\right| \leq 1$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{y^2\sin\dfrac{1}{\sqrt{y^2}}}{y} = \lim_{y\to 0} y\sin\frac{1}{|y|} = 0 \tag{3}$$

deoarece $\left|\sin\dfrac{1}{|y|}\right| \leq 1$.

Presupunem că f este diferenţiabilă în $(0,0)$ deci $df(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)dy = 0$.

Calculăm acum:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - df(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Deci funcţia este diferenţiabilă în $(0,0)$.

2. Considerăm funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = (x-2y)\cdot e^{-x^2-4y^2}$.

a) Calculaţi derivatele parţiale şi scrieţi formulele pentru diferenţialele de ordinul 1 şi 2 ale funcţiei f într-un punct oarecare din domeniul funcţiei.

Soluţie: Calculăm mai întâi diferenţialele de ordinul 1 şi 2.

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{-x^2-4y^2}\big(1-2x(x-2y)\big) = e^{-x^2-4y^2}(1-2x^2+4xy)$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{-x^2-4y^2}\big(-2-8y(x-2y)\big) = e^{-x^2-4y^2}\left(-2-8xy+16y^2\right)$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = e^{-x^2-4y^2}\big(-2x(1-2x^2+4xy)-4x+4y\big) = e^{-x^2-4y^2}(4x^3-8x^2y-6x+4y)$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = e^{-x^2-4y^2}(-8y(-2-8xy+16y^2)-8x+32y) = e^{-x^2-4y^2}(48y+64xy^2-128y^3-8x)$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = e^{-x^2-4y^2}(-8y(1-2x^2+4xy)+4x)) = e^{-x^2-4y^2}(16x^2y-32xy^2-8y+4x)$
- $\dfrac{\partial^f}{\partial y\partial x}(x,y) = e^{-x^2-4y^2}(-2x(-2-8xy+16y^2)-8y) = e^{-x^2-4y^2}(16x^2y-32xy^2+4x-8y)$

Diferenţialele de ordinul 1 şi 2.

- $$\begin{aligned} df(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy \\ &= e^{-x^2-4y^2}(1-2x^2+4xy)dx + e^{-x^2-4y^2}\left(-2-8xy+16y^2\right)dy \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} d^2f(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 \\ &= e^{-x^2-4y^2}(4x^3-8x^2y-6x+4y)dx^2 + 2e^{-x^2-4y^2}(16x^2y-32xy^2+4x-8y)dxdy \\ &+ e^{-x^2-4y^2}(48y+64xy^2-128y^2-8x)dy^2 \end{aligned}$$

b) Determinaţi punctele critice, calculaţi matricea hessiană în aceste puncte şi determinaţi punctele de extrem ale funcţiei f.

Soluţie: Punctele critice sunt soluţiile sistemului:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x^2+4xy = 0 \\ -2-8xy+16y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-4x^2+8xy = 0 \\ -2-8xy+16y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y^2-x^2 = 0 \\ -2-8xy+16y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2y-x)(2y+x) = 0 \\ -2-8xy+16y^2 = 0 \end{cases}$$

- **Cazul I** Dacă $x = 2y$ din a doua relaţie obţinem:

$$-2-16y^2+16y^2 = 0(F)$$

- **Cazul II** Dacă $x = -2y$ din a doua relaţie obţinem:

$$-2+32y^2 = 0 \to y^2 = \frac{1}{16} \to y = \pm\frac{1}{4}$$

Se obţine:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{4} \to x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{4} \to x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Avem două puncte critice:

$$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right), \ \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

Matricea hessiană va fi:

$$H_f(x,y) = e^{-x^2-4y^2} \begin{pmatrix} 4x^3 - 8x^2y - 6x + 4y & 16x^2y - 32xy^2 + 4x - 8y \\ 16x^2y - 32xy^2 + 4x - 8y & 48y + 64xy^2 - 128y^3 - 8x \end{pmatrix}$$

Vom scrie componenţa acestei matrice în punctele critice determinate anterior:

$$H_f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) = e^{\frac{1}{4} - \frac{4}{16}} \begin{pmatrix} -\frac{4}{8} + 8\frac{1}{4}\frac{1}{4} - \frac{6}{2} - \frac{4}{4} & -\frac{16}{16} - \frac{32}{32} + \frac{4}{2} + \frac{8}{4} \\ -\frac{16}{16} - \frac{32}{32} + \frac{4}{2} + \frac{8}{4} & -\frac{48}{4} + \frac{64}{32} + \frac{128}{64} - \frac{8}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -12 \end{pmatrix}$$

Observăm că $\Delta_1 = -4 < 0, \ \Delta_2 > 0$ deci $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ este un punct de maxim local.

$$H_f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = e^{\frac{1}{4} - \frac{4}{16}} \begin{pmatrix} \frac{4}{8} - \frac{8}{16} + \frac{6}{2} + \frac{4}{4} & \frac{16}{16} - \frac{32}{32} - \frac{4}{2} - \frac{8}{4} \\ \frac{16}{16} - \frac{32}{32} - \frac{4}{2} - \frac{8}{4} & \frac{48}{4} - \frac{64}{32} - \frac{128}{64} + \frac{8}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$$

Observăm că $\Delta_1 = 4 > 0, \ \Delta_2 > 0$ deci $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ este un punct de minim local.

Partea a III-a (integrabilitate)

1. Să se calculeze integralele nedefinite:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} \text{ şi } \int \frac{x^4 + 5x^2 - 7x + 3}{x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + x - 2}.$$

Soluţie:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} &= \int \frac{x^2 + 1 - x^2}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{1}{x^2+1} dx - \frac{1}{2} \int x \cdot \frac{2x}{(1+x^2)^2} dx \\ &= arctg\ x + \frac{1}{2} \int x \cdot \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' dx = arctg\ x + \frac{x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2} arctg\ x + \mathcal{C} \\ &= \frac{1}{2} arctg\ x + \frac{x}{2(1+x^2)} + \mathcal{C}. \end{aligned} \tag{4}$$

A doua integrală este o integrală din funcţii raţionale. Pentru a găsi valoarea acesteia vom descompune mai întâi polinomul de la numitor. Pentru aceasta căutăm mai întâi rădăcinile acestuia printre divizorii termenului liber şi anume:

$$\pm 1, \ \pm 2$$

Observăm că $x = 2$ este rădăcină a polinomului $x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + x - 2$ deci vom scrie acesta ca fiind un produs dintre $x - 2$ şi un alte polinom de ordin 4.

$$\begin{aligned} x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + x - 2 &= x^4(x-2) + 2x^2(x-2) + (x-2) \\ &= (x-2)(x^4 + 2x^2 + 1) = (x-2)(x^2+1)^2 \end{aligned} \tag{5}$$

Vom descompune acum fracţia de sub integrală în fracţii simple după cum urmează:

$$\frac{x^4 + 5x^2 - 7x + 3}{x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + x - 2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx + C}{x^2+1} + \frac{Dx + E}{(x^2+1)^2} = \frac{A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x^3 - 2x^2 + x - 2) + (Dx+E)(x-2)}{(x-2)(x^2+1)^2}$$

Avem de rezolvat următorul sistem de ecuaţii:

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ C - 2B = 0 \\ 2A + B - 2C + D = 5 \\ -2B + C - 2D + E = -7 \\ A - 2C - 2E = 3 \end{cases} \to \begin{cases} A = 1 \\ B = C = 0 \\ D = 3 \\ E = 1 \end{cases}$$

Integrala de calculat devine:

$$I = \int \left(\frac{1}{x-2} + \frac{3x}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{(x^2+1)^2} \right) dx = \ln|x-2| - \frac{3}{2}\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2} arctg\ x + \frac{x}{2(1+x^2)} + \mathcal{C} \tag{6}$$

2. Calculaţi integrala definită:

$$\int_2^3 \frac{dx}{x+\sqrt{6x-x^2-5}}$$

Soluţie: Vom analiza mai întâi cantitatea de sub radical pentru a efectua o schimbare de variabilă convenabilă. Avem $6x - x^2 - 5 = (5-x)(x-1)$. Putem alege să lucrăm cu schimbarea de variabilă:

$$\sqrt{6x-x^2-5} = t(x-1) \rightarrow 6x - x^2 - 5 = t^2(x^2-2x+1) \rightarrow t^2 = \frac{5-x}{x-1}$$

Avem că:

$$t^2(x-1) = 5 - x \rightarrow x(t^2+1) = 5 + t^2 \rightarrow x = \frac{5+t^2}{t^2+1}$$

Din relaţia precedentă:

$$dx = \frac{2t(t^2+1) - 2t(5+t^2)}{(t^2+1)^2} dt = \frac{-8t}{(t^2+1)^2} dt$$

Pentru capetele de integrare avem:

$$\begin{cases} x = 2 \rightarrow \sqrt{3} = t \\ x = 3 \rightarrow 2 = t(3-1) \rightarrow t = 1 \end{cases}$$

Integrala de calculat devine:

$$\begin{aligned} I &= -\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{\frac{5+t^2}{t^2+1} + t\left(\frac{5+t^2}{t^2+1} - 1\right)} \cdot \frac{-8t}{(t^2+1)^2} dt = -\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{-8t}{5+t^2+4t} \cdot \frac{1}{t^2+1} dt \\ &= \int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{8t}{(t^2+4t+5)(t^2+1)} \end{aligned} \tag{7}$$

Vom descompune fracţia de sub integrală în fracţii simple după cum urmează:

$$\frac{8t}{(t^2+4t+5)(t^2+1)} = \frac{At+B}{t^2+4t+5} + \frac{Ct+D}{t^2+1} = \frac{(At+B)(t^2+1) + (Ct+D)(t^2+4t+5)}{(t^2+4t+5)(t^2+1)}$$

Avem de rezolvat următorul sistem de ecuaţii:

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ B + 4C + D = 0 \\ A + 5C + 4D = 8 \\ B + 5D = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = -C \\ 4C - 4D = 0 \\ 4C + 4D = 8 \\ B = -5D \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 0 \\ C = D = 1 \end{cases}$$

Integrala de calculat devine:

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{8t}{(t^2+4t+5)(t^2+1)} = \int\limits_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{t}{t^2+4t+5} + \frac{t+1}{t^2+1} \right) dt \\ &= \int\limits_1^{\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{2}\frac{2t+4}{t^2+4t+5} + \frac{2}{(t+2)^2+1} + \frac{2t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{t^2+1} \right) dt \\ &= \left(-\frac{1}{2}\ln(t^2+4t+5) + 2arctg(t+2) + \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + arctgt \right) \Bigg|_1^{\sqrt{3}} \end{aligned} \tag{8}$$

3. Se dă functia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^{x^4} e^{\sqrt{t}} \sin t dt.$$

Calculaţi $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^8}$

Soluţie: Observăm că $e^{\sqrt{t}} \sin t$ este continuă pe orice interval $I \subset \mathbb{R}$ care în conţine pe 0. Rezultă că $f : I \to \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^{x^4} e^{\sqrt{t}} \sin t dt$ este derivabilă şi $f'(x) = e^{\sqrt{x}} \sin x,\ \forall t \in I$ şi $f(0) = 0$. Observăm că:

$$\int_0^{x^4} e^{\sqrt{t}} \sin t dt = F(x^4) - F(0),\ F'(t) = e^{\sqrt{t}} \sin t$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{x^8} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\int_0^{x^4} e^{\sqrt{t}} \sin t dt \right)'}{x^8} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{\sqrt{x^4}} \sin x^4 \cdot 4x^3}{8x^7} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} \cdot sin x^4}{2x^4} = \frac{1}{2} \tag{9}$$

Am utilizat faptul că:

$$\int\limits_{f(x)}^{g(x)} h(t)dt = H(g(x)) - H(f(x)),$$

Deci:

$$\left(\int\limits_{f(x)}^{g(x)} h(t)dt \right) = H'(g(x)) \cdot g'(x) = H'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Numele şi prenumele:
Data: 28.01.2021
Grupa:
Facultatea: Automatică şi Calculatoare

Examen la disciplina Analiză Matematică nr. 2

Partea I (funcţii de o variabilă reală)

1. Folosind teorema Cesaro-Stolz, calculaţi limitele:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n+1}}\right)^{2021}, \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)^{2021}}.$$

Soluţie: Amintim mai întâi faptul că:

$$\lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n=c$$

Dacă considerăm:

$$\begin{cases} a_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} \\ b_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n+1} \end{cases}$$

Observăm că $\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$ şi $b_{n+1}-b_n=\dfrac{1}{n+2}<1$ deci este unşir monoton şi nemărginit. Ne aflăm în ipotezele criteriului Cesaro-Stolz deci:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+2}}=1\to\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$$

Deci:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n+1}}\right)^{2021}=1^{2021}=1$$

Pentru a doua limită vom folosi consecinţa teoremei Cesaro Stolz care afirmă că dacă $\exists\lim\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=l\to\sqrt[n]{a_n}=l.$
Să observăm mai întâi că b_n de mai sus este chiar a_{n+1}. Deci în baza aceste consecinţe avem:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)^{2021}}=1.$$

2. a) Utilizând criteriile de convergenţă, să se determine natura seriilor:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\left(1-\frac{n^2}{n^2+n+1}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\operatorname{tg}\frac{1}{n}\right).$$

Soluţie: Se observă că este îndeplinită condiţia necesară de convergenţă.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\left(1-\frac{n^2}{n^2+n+1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}arctg\frac{n+1}{n^2+n+1} \tag{10}$$

Să observăm faptul că dacă considerăm:

$$\begin{cases} a_n=arctg\frac{n+1}{n^2+n+1} \\ b_n=\frac{n+1}{n^2+n+1} \end{cases}$$

atunci $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=1\in(0,\infty)$ deci din $CCIII$ avem $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sim\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}(D)$.
A doua serie: Pentru aceasta vom folosi faptul că:

$$\operatorname{tg}x-x\le\frac{x^3}{3}\to\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\operatorname{tg}\frac{1}{n}\right)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\ (C)$$

folosind criteriul de comparaţie.

b) Determinaţi mulţimea de convergenţă a seriei de puteri:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\operatorname{tg}\frac{1}{n}\right)\cdot x^n.$$

Soluţie: Vom calcula raza de convergenţă:

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}=1,\ a_n=\frac{1}{n}-\operatorname{tg}\frac{1}{n} \tag{11}$$

Rezultă că seria este (AC) pentru $|x|<1$ şi divergentă pentru $|x|>1$. Vom analiza situaţia în capetele intervalului:

- $x=1$ obţinem seria anterioară care este convergentă.
- $x=-1$ obţinem $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n}-\operatorname{tg}\frac{1}{n}\right)$. Avem $f(x)=x-tg\ x\to f'(x)=1-\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{-\sin^2 x}{\cos^2 x}<0\to$ f(x) descrescătoare şi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\operatorname{tg}\frac{1}{n}\right)=0$ din criteriul lui Leibniz este convergentă.

Deci seria este

$$\begin{cases}(AC),\ |x|\le 1\\ (D),\ |x|>1\end{cases}$$

3. Considerăm funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x+\frac{1}{x+1}$. Studiaţi monotonia şi convexitatea funcţiei. Arătaţi că, pentru orice numere pozitive a şi b, are loc relaţia

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}\ge f\left(\frac{a+b}{2}\right)\ge f(\sqrt{ab}).$$

Soluţie: Vom calcula derivata funcţiei:

$$f'(x)=1-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

Punctele critice se obţin prin rezolvarea ecuaţiei:

$$f'(x)=0\to x_1=0, x_2=-2$$

- Observăm că funcţia este crescătoare pe $(0,\infty)$
- Calculăm:

$$f''(x)=\frac{(2x+2)(x+1)^2-2(x+1)(x^2+2x)}{(x+1)^3}=\frac{2x^2+4x+2-2x^2-4x}{(x+1)^3}=\frac{2}{(x+1)^3}>0$$

  Deci $f(x)$ convexă pe $(0,\infty)$.

- Pentru a demonstra că $f(\sqrt{ab})\le\left(\frac{a+b}{2}\right)$ folosim faptul că media geometrică este mai mică decât media aritmetică şi că funcţia este crescătoare.
- Pentru $\frac{f(a)+f(b)}{2}\ge f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ vom folosi faptul că funcţia este convexă şi vom aplica Inegalitatea lui Jensen.

Partea a II-a (funcţii de mai multe variabile reale)

1. Se dă funcţia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definită prin

$$f(x,y)=\begin{cases}x^2+y^2\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\ne(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Studiaţi existenţa derivatelor parţiale şi diferenţiabilitatea lui f în punctul $(0,0)$.
Soluţie: Studiem mai întâi continuitatea: Din inegalitatea:

$$\left|\left(x^2+y^2\right)\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq x^2+y^2$$

rezultă prin trecere la limită că:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(x^2+y^2\right)\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

deci funcţia este continuă în origine.
Să observăm că:

$$\begin{cases} f(x,0)=x^2\cos\frac{1}{\sqrt{x^2}},\ x\neq 0\\ f(0,y)=y^2\cos\frac{1}{\sqrt{y^2}},\ y\neq 0\end{cases}$$

Folosim definiţia:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{\sqrt{x^2}}}{x}=\lim_{x\to 0}x\cos\frac{1}{|x|}=0 \tag{12}$$

Analog

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{y^2\cos\frac{1}{\sqrt{y^2}}}{y}=\lim_{y\to 0}y\cos\frac{1}{|y|}=0 \tag{13}$$

Analizăm acum:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0 \tag{14}$$

Deci funcţia este diferenţiabilă în $(0,0)$.
Observaţie: În limitele precedente am folosit faptul că funcţia trigonometrică cos este mărginită.

2. Considerăm funcţia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=\left(3x^2-y^2\right)e^{x+y}$.

a) Calculaţi derivatele parţiale şi scrieţi formulele pentru diferenţialele de ordinul 1 şi 2 ale funcţiei f într-un punct oarecare din domeniul funcţiei.
Soluţie: Vom calcula mai întâi derivatele parţiale:

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=e^{x+y}(3x^2-y^2+6x)$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=e^{x+y}(3x^2-y^2-2y)$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=e^{x+y}(3x^2-y^2+18x)$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=e^{x+y}(3x^2-y^2-6y)$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=e^{x+y}(3x^2-y^2+6x-2y)$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=e^{x+y}(3x^2-y^2-2y+6x)$

Putem scrie acum diferenţialele de ordinul 1 şi 2.

- $df(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy=e^{x+y}(3x^2-y^2+6x)dx+e^{x+y}(3x^2-y^2-2y)$
- $$\begin{aligned} d^2f(x,y)&=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdx+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2\\ &=e^{x+y}(3x^2-y^2+18x)dx^2+2e^{x+y}(3x^2-y^2-2y+6x)dxdy+e^{x+y}(3x^2-y^2-6y)dy^2\end{aligned}$$

b) Determinaţi punctele critice, calculaţi matricea hessiană în aceste puncte şi determinaţi punctele de extrem ale funcţiei f.
Soluţie: Punctele critice sunt soluţiile sistemului:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-y^2+6x=0 \\ 3x^2-y^2-2y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=-3x \\ 3x^2-y^2-2y=0 \end{cases}$$

Obţinem:

$$3x^2-9x^2+6x=0 \rightarrow x^2=1 \rightarrow x=\pm 1$$

Obţinem punctele critice:

$$(1,-3),\ (-1,3)$$

Vom scrie matricea hessiană în aceste puncte

$$H_f(x,y)=e^{x+y}\begin{pmatrix} 3x^2-y^2+18x & 3x^2-y^2-2y+6x \\ 3x^2-y^2-2y+6x & 3x^2-y^2-6y \end{pmatrix}$$

- $$H_f(1,-3)=e^{-2}\begin{pmatrix} 3-9+18 & 3-9+6+6 \\ 3-9+6+6 & 3-9+18 \end{pmatrix}=e^{-2}\begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$
  Observăm că $\Delta_1,\ \Delta_2>0$ deci $(1,-3)$ este un punct de minim local.
- $$H_f(-1,3)=e^{2}\begin{pmatrix} 3-9-18 & 3-9-6+6 \\ 3-9-6+6 & 3-9-18 \end{pmatrix}=e^{2}\begin{pmatrix} -24 & -6 \\ -6 & -24 \end{pmatrix}$$
  Observăm că $\Delta_1<0,\ \Delta_2>0$ deci $(-1,3)$ este un maxim local.

Partea a III-a (integrabilitate)

1. Să se calculeze integralele nedefinite:

$$\int \frac{dx}{(x^2+4)^2} \text{ şi } \int \frac{x^4+7x^2+2x+15}{x^5-x^4+8x^3-8x^2+16x-16}.$$

Soluţie:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2+4)^2} &= \frac{1}{4}\int \frac{4}{(x^2+4)^2}dx = \frac{1}{4}\int \frac{x^2+4-x^2}{(x^2+4)^2}dx = \frac{1}{4}\left(\int \frac{1}{x^2+4}dx+\frac{1}{2}\int x\cdot\left(\frac{1}{x^2+4}\right)' dx\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}arctg\frac{x}{2}+\frac{x}{2(x^2+4)}-\frac{1}{4}arctg\frac{x}{2}\right)+\mathcal{C} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}arctg\frac{x}{2}+\frac{x}{2(x^2+4)}\right)+\mathcal{C} \end{aligned} \tag{15}$$

Pentru a calcula a doua integrală vom descompune mai întâi polinomul de la numitorul raportului de sub integrală. Căutăm rădăcinile acestuia printre divizorii termenului liber şi anume:

$$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 4,\ \pm 8,\ \pm 16$$

Observăm că pentru $x=1$ avem $x^5-x^4+8x^3-8x^2+16x-16=0$ deci vom scrie acest polinom ca un produs dintre $x-1$ şi un polinom de gradul 4.

$$\begin{aligned} x^5-x^4+8x^3-8x^2+16x-16 &= x^4(x-1)+8x^2(x-1)+16(x-1)=(x-1)(x^4+8x^2+16) \\ &= (x-1)(x^2+4)^2 \end{aligned} \tag{16}$$

Vom descompune acum funcţia de sub integrală în fracţii simple:

$$\begin{aligned} \frac{x^4+7x^2+2x+15}{x^5-x^4+8x^3-8x^2+16x-16} &= \frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+4}+\frac{Dx+E}{(x^2+4)^2} \\ &= \frac{A(x^4+8x^2+16)+(Bx+C)(x^3+4x-4x^2-4)+(Dx+E)(x-1)}{x^5-x^4+8x^3-8x^2+16x-16} \end{aligned} \tag{17}$$

Avem de rezolvat următorul sistem de ecuaţii:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -4B+C=0 \\ 8A+4C-4B+D=7 \\ -4B+4C-D+E=2 \\ 16A-4C-E=15 \end{cases} \quad \rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=C=0 \\ D=-1 \\ E=1 \end{cases}$$

Integrala de calculat devine:

$$\int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{x}{(x^2+4)^2} + \frac{1}{(x^2+4)^2} \right) dx = \ln|x-1| + \frac{1}{2(x^2+4)} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} arctg \frac{x}{2} + \frac{x}{2(x^2+4)} \right) + \mathcal{C}. \tag{18}$$

2. Calculaţi valoarea integralei:

$$\int_{\sqrt[5]{7}}^{\sqrt[5]{26}} \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$$

Soluţie: Observăm că funcţia de sub integrală se poate rescrie sub forma $f(x) = x^{-1}(1+x^5)^{-\frac{1}{3}}$. Deci putem privi integrala din această funcţie ca pe o integrală binomă, adică o integrală de tipul:

$$\int x^m(ax^n+b)^p dx$$

Facem identificările:

$$\begin{cases} m=-1 \\ n=5 \\ p=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

Observăm că:

$$\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z} \rightarrow t = \sqrt[3]{x^5+1} = (x^5+1)^{\frac{1}{3}} \rightarrow x^5 = t^3-1 \rightarrow x = (t^3-1)^{\frac{1}{5}} \rightarrow dx = \frac{1}{5}(t^3-1)^{-\frac{4}{5}} \cdot 3t^2 dt$$

Pentru limitele de integrare avem:

$$\begin{cases} x=\sqrt[5]{7} \rightarrow t = \sqrt[3]{7+1} = 2 \\ x = \sqrt[5]{26} \rightarrow t = \sqrt[3]{27} = 3 \end{cases}$$

Integrala de calculat devine:

$$I = \int_2^3 (t^3-1)^{-\frac{1}{5}} \cdot t^{-1} \cdot \frac{1}{5}(t^3-1)^{-\frac{4}{5}} \cdot 3t^2 dt = \frac{3}{5}\int_2^3 \frac{t}{t^3-1} dt = \frac{1}{10}\left(-\ln(t^2+t+1) + 2\ln|1-t| + 2\sqrt{3} arctg \frac{2t+1}{2\sqrt{3}} \right) \Bigg|_2^3 \tag{19}$$

3. Se consideră functia $f:[0,1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$. Se notează cu V_{Ox} şi, respectiv, V_{Oy}, volumele corpurilor de rotaţie obţinute prin rotirea graficului funcţiei f în jurul axei Ox şi, respectiv, în jurul axei Oy. Calculaţi valoarea raportului $\dfrac{V_{Ox}}{V_{Oy}}$.

Soluţie: Volumul corpului obţinut prin rotaţia curbei $y = f(x), x \in [a,b]$, în jurul axei Ox este

$$\pi \int_a^b f^2(x) \,\mathrm{dx}.$$

Pentru $f = \sqrt{x}, x \in [0,1]$, avem

$$V_{Ox} = \pi \int_0^1 x \mathrm{dx} = \frac{\pi}{2}.$$

Volumul corpului obţinut prin rotaţia curbei $y = f(x), x \in [a,b]$, în jurul axei Ox este

$$\pi \int_a^b x^2(y) \,\mathrm{dy}.$$

Pentru $y = \sqrt{x}, x \in [0,1]$, avem $x(y) = y^2, y \in [0,1]$,

$$V_{Oy} = \pi \int_0^1 y^4 \mathrm{dy} = \frac{\pi}{5}.$$

Raportul celor două volume este 2.5.

Numele şi prenumele:
Data: 28.01.2021
Grupa:
Facultatea: Automatică şi Calculatoare

Examen la disciplina Analiză Matematică nr. 3

Partea I (funcţii de o variabilă reală)

1. Arătaţi că $a_n \to +\infty$, unde (a_n) este dat prin

$$a_n = \frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + \ldots + \frac{1}{n\ln n}, \quad n \geq 2.$$

Folosind apoi consecinţa teoremei Cesaro-Stolz, determinaţi $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

Soluţie: Fie şirul

$$a_n = \frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + \ldots + \frac{1}{n\ln n} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}.$$

Limita şirului (a_n) este o serie a cărei convergenţă o putem studia cu criteriul condensării. Astfel

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\ln k} \sim \sum_{k=2}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k \ln 2^k} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} (D).$$

Deci şirul (a_n) este divergent cu limita $+\infty$.

Criteriul rădăcinii afirmă că

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

dacă limita din dreapta există (finită sau nu) şi (a_n) are termenii strict pozitivi. Criteriul rădăcinii este o consecinţă a lemei lui Stolz-Cesaro. Cum

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2\ln 2} + \ldots + \frac{1}{n\ln n} + \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} + \frac{1}{(n+2)\ln(n+2)} - \frac{1}{2\ln 2} - \ldots - \frac{1}{n\ln n} - \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}}{\frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + \ldots + \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} - \frac{1}{2\ln 2} - \ldots - \frac{1}{n\ln n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+2)\ln(n+2)}}{\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\ln(n+1)}{(n+2)\ln(n+2)} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Prima egalitate de mai sus rezultă din aplicarea lemei Stolz-Cesaro.

2. a) Utilizând criteriile de convergenţă, să se determine natura seriilor:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2+n+1} \right)^{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln n}.$$

Soluţie: Vom verifica dacă este satisfăcută condiţia necesată de convergenţă:

$$\left(\frac{n^2+1}{n^2+n+1} \right)^{n^2} = \left(1 + \frac{n^2+1}{n^2+n+1} - 1 \right)^{n^2} = \left[\left(1 - \frac{n}{n^2+n+1} \right)^{-\frac{n^2+n+1}{n}} \right]^{-\frac{n^3}{n^2+n+1}} = 0 \tag{20}$$

Vom analiza valoarea limitei raportului:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^2+n+2} \right)^{(n+1)^2}}{\left(\frac{n^2+1}{n^2+n+1} \right)^{n^2}} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^2+n+2}}{\frac{n^2+1}{n^2+n+1}} \right)^{n^2} \cdot \left(\frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^2+n+2} \right)^{2n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+2n+2}{n^2+3n+3} \cdot \frac{n^2+n+1}{n^2+1} \right)^{n^2} \cdot \left(\frac{n^2+2n+2}{n^2+3n+3} \right)^{2n+1}
\end{aligned} \tag{21}$$

Considerăm separat limita:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n+2}{n^2+3n+3}\cdot\frac{n^2+n+1}{n^2+1}\right)^{n^2}\\
&=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{n^2+2n+2}{n^2+3n+3}\cdot\frac{n^2+n+1}{n^2+1}-1\right)^{\left(\frac{n^2+2n+2}{n^2+3n+3}\cdot\frac{n^2+n+1}{n^2+1}-1\right)^{-1}}\right]^{n^2\cdot\left(\frac{n^2+2n+2}{n^2+3n+3}\cdot\frac{n^2+n+1}{n^2+1}-1\right)}\\
&=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n^2\cdot\left(\frac{n^2+2n+2}{n^2+3n+3}\cdot\frac{n^2+n+1}{n^2+1}-1\right)}
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Să calculăm:

$$
\begin{aligned}
l&=\lim_{n\to\infty}n^2\cdot\left(\frac{n^2+2n+2}{n^2+3n+3}\cdot\frac{n^2+n+1}{n^2+1}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n^2\cdot\frac{(n^2+2n+2)(n^2+n+1)-(n^2+3n+3)(n^2+1)}{(n^2+3n+3)(n^2+1)}\\
&=\lim_{n\to\infty}n^2\cdot\frac{n^4+n^3+n+2n^3+2n^2+2n+2n^2+2n+2-n^4-n^2-3n^3-3n-3n^2-3}{(n^2+3n+3)(n^2+1)}=1
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Deci:

$$
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n+2}{n^2+3n+3}\cdot\frac{n^2+n+1}{n^2+1}\right)^{n^2}=e
$$

Mai avem de calculat:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n+2}{n^2+3n+3}\right)^{2n+1}&=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{n^2+2n+2}{n^2+3n+3}-1\right)^{\left(\frac{n^2+2n+2}{n^2+3n+3}-1\right)^{-1}}\right]^{(2n+1)\cdot\left(\frac{n^2+2n+2}{n^2+3n+3}-1\right)}\\
&=e^{\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)\cdot\left(\frac{n^2+2n+2}{n^2+3n+3}-1\right)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)\cdot\left(\frac{n^2+2n+2-n^2-3n-3}{n^2+3n+3}\right)}=\frac{1}{e^2}
\end{aligned}
\tag{24}
$$

În final:

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{e}<1\rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{ seria converge}
$$

A doua serie Fie $a>0$ şi $x_n=a^{\ln n}$, cu $n\in\mathbb{N}^*$. Dacă $a>1$, atunci $x_n\to\infty\neq 0$, deci din Corolarul privind divergenta seriilor, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ diverge. Dacă $a=1$, atunci $x_n=1$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, deci $x_n\nrightarrow 0$, de unde rezultă din nou că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ diverge. Presupunem că $a\in(0,1)$. Atunci, deoarece

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}a^{\ln(n+1)-\ln n}=a^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=a^0=1,
$$

nu putem aplica Criteriul raportului cu limită. Totuşi, formând limitele fundamentale $\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$, unde $a>0$ şi $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$, din Criteriul lui Raabe-Duhamel, cum

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)&=\lim_{n\to\infty}n\left(a^{\ln\frac{n}{n+1}}-1\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{a^{\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}-1}{\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}\,\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}{-\frac{1}{n+1}}\,\frac{n}{n+1}\right)=-\ln a,
\end{aligned}
$$

constatăm că seria considerată converge pentru $a<e^{-1}$ şi diverge pentru $a>e^{-1}$. Presupunem că $a=e^{-1}$. Atunci, termenul general devine $x_n=\frac{1}{e^{\ln n}}=\frac{1}{n}$, cu $n\in\mathbb{N}^*$, deci seria considerată diverge, fiind tocmai seria armonică $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. În

concluzie, seria studiată converge pentru $a \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ şi diverge pentru $a \in \left[\frac{1}{e}, \infty\right)$.
b) Determinaţi mulţimea de convergenţă a următoarei serii de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln(2021n)} \cdot x^n$.
Analizăm mai întâi raza de convergenţă

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = 1$$

a se vedea calculul anterior. Deci seria este (AC) pentru $|x| < 1$ şi divergentă pentru $|x| > 1$. Pentru $x = 1$ se obţine o serie similară cu cea de mai sus. Deci:

$$\begin{cases} (AC), |x| \leq 1 \\ (D),\ |x| > 1 \end{cases}$$

3. Arătaţi inegalităţile:

$$\frac{x}{x^{2021}+1} \leq \frac{\ln\left(1+x^{2021}\right)}{x^{2020}} \leq x, \quad \forall x > 0.$$

Soluţie: Considerăm prima inegalitate:

$$\frac{x}{x^{2021}+1} \leq \frac{\ln\left(1+x^{2021}\right)}{x^{2020}} \Leftrightarrow \frac{x^{2021}}{x^{2021}+1} \leq \ln(1+x^{2021})$$

COnsiderăm $f : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln(1+x^{2021}) - \dfrac{x^{2021}}{x^{2021}+1}$. Vom calcula derivata acesteia:

$$f'(x) = \frac{2021x^{2020}}{1+x^{2021}} - \frac{2021x^{2020}}{x^{2021}+1} + \frac{2021x^{4041}}{(x^{2021}+1)^2} \geq 0 \tag{25}$$

Deci f este crescătoare şi $f(x) \geq f(0) \to dfracx^{2021}x^{2021} + 1 \leq \ln(1+x^{2021})$.
Similar vom considera:

$$h : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ h(x) = x^{2021} - \ln(1+x^{2021})$$

Vom calcula derivata acesteia:

$$h'(x) = 2021x^{2020} - \frac{2021x^{2020}}{1+x^{2021}} = \frac{2021x^{4041}}{1+x^{2021}} \geq 0 \to h(x) \geq h(0)$$

Alternativ: putem considera $f : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln(1+y) - \dfrac{y}{y+1},\ h(y) = y - \ln(1+y).\ y = x^{2021}$.

Partea a II-a (funcţii de mai multe variabile reale)

1. Se dă funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \sin \dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiaţi existenţa derivatelor parţiale şi diferenţiabilitatea lui f în punctul $(0,0)$.
Soluţie: Studiem mai întâi continuitatea:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} xy \sin \frac{1}{x^2+y^2} = 0$$

deci este continuă. Să observăm că:

$$\begin{cases} f(x,0) = 0,\ x \neq 0 \\ f(0,y) = 0,\ y \neq 0 \end{cases}$$

Folosim definiţia:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = 0 \tag{26}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y-0} = 0 \tag{27}$$

Deci f este parţial derivabilă în $(0,0)$ deci $df(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)dy = 0$.
Calculăm acum:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - df(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \sin\frac{1}{x^2+y^2}$$
Avem sinus mărginit
$$\lim_{x\to 0,\ y\to mx} \frac{mx^2}{\sqrt{x^2+m^2x^2}} = 0$$
Prin urmare f diferenţiabilă în origine.

2. Considerăm funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = (5-2x+y)e^{x^2-y^2}$.

a) Calculaţi derivatele parţiale şi scrieţi formulele pentru diferenţialele de ordinul 1 şi 2 ale funcţiei f într-un punct oarecare din domeniul funcţiei.
Soluţie: Vom începe cu calcularea derivatelor parţiale:

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{x^2-y^2}(-2+2x(5-2x+y)) = e^{x^2-y^2}(-2+10x-4x^2+2xy)$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{x^2-y^2}(1-2y(5-2x+y)) = e^{x^2-y^2}(1-10y+4xy-2y^2)$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = e^{x^2-y^2}(-10+8x-2y+2x(-2+10x-4x^3+2xy)) = e^{x^2-y^2}(-10+4x-2y+20x^2-8x^3+4x^3y)$
- $\dfrac{\partial^f}{\partial y^2}(x,y) = e^{x^2-y^2}(-10+4x-4y-2y(1-10y+4xy-2y^2)) = e^{x^2-y^2}(-10+4x-6y+20y^2-8xy^2+4y^3)$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = e^{x^2-y^2}(2x-2y(-2+10x-4x^2+2xy) = e^{x^2-y^2}(2x+4y-20xy+8yx^2-4xy^2)$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = e^{x^2-y^2}(4y+2x(1-10y+4xy-2y^2)) = e^{x^2-y^2}(2x+4y-20xy+8yx^2-4xy^2)$

Se obţin diferenţialele de ordinul 1 şi 2

- $df(x,y) = e^{x^2-y^2}(-2+10x-4x^2+2xy)dx + e^{x^2-y^2}(1-10y+4xy-2y^2)dy$
- $$\begin{aligned} d^2f(x,y) = {} & e^{x^2-y^2}(-10+4x-2y+20x^2-8x^3+4x^3y)dx^2 + 2e^{x^2-y^2}(2x+4y-20xy+8yx^2-4xy^2)dxdy \\ & + e^{x^2-y^2}(-10+4x-6y+20y^2-8xy^2+4y^3)dy^2 \end{aligned}$$

b) Determinaţi punctele critice, calculaţi matricea hessiană în aceste puncte şi determinaţi punctele de extrem ale funcţiei f.
Soluţie: Punctele critice sunt soluţiile sistemului:
$$\begin{cases} -2+10x-4x^2+2xy = 0 \\ 1-10y+4xy-2y^2 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} -2y+10xy-4x^2y+2xy^2 = 0 \\ x-10yx+4x^2y-2xy^2 = 0 \end{cases}$$
Deci:
$$\begin{cases} x = 2y \\ -2+20y-16y^2+4y^2 = 0 \to 6y^2-10y+1 = 0,\ \Delta = 76 \end{cases}$$
Avem $y_{1,2} = \dfrac{10\pm\sqrt{76}}{12} = \dfrac{5\pm\sqrt{19}}{6} \to x_{1,2} = \dfrac{5\pm\sqrt{19}}{3}$. Am obţinut punctele critice:
$$\left(\frac{5+\sqrt{19}}{3}, \frac{5+\sqrt{19}}{6}\right),\ \left(-\frac{5+\sqrt{19}}{3}, -\frac{5+\sqrt{19}}{6}\right)$$
Matrice hessiană:
$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x^2-y^2}(-10+4x-2y+20x^2-8x^3+4x^3y) & e^{x^2-y^2}(2x+4y-20xy+8yx^2-4xy^2) \\ e^{x^2-y^2}(2x+4y-20xy+8yx^2-4xy^2) & e^{x^2-y^2}(-10+4x-6y+20y^2-8xy^2+4y^3) \end{pmatrix}$$

- $H_f\left(\frac{5+\sqrt{19}}{3}, \frac{5+\sqrt{19}}{6}\right) = e^{(5+\sqrt{19}^2/12}\begin{pmatrix} -10+\frac{7(5+\sqrt{19})}{3} & \frac{2(5+\sqrt{19})}{3} \\ \frac{2(5+\sqrt{19})}{3} & -10+\frac{2(5+\sqrt{19})}{3} \end{pmatrix}$ $\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0$ deci este un punct de minim local.
- $H_f\left(-\frac{5+\sqrt{19}}{3}, -\frac{5+\sqrt{19}}{6}\right) = e^{(5+\sqrt{19}^2/12}\begin{pmatrix} -10-\frac{7(5+\sqrt{19})}{3} & -\frac{2(5+\sqrt{19})}{3} \\ -\frac{2(5+\sqrt{19})}{3} & -10-\frac{2(5+\sqrt{19})}{3} \end{pmatrix}$ $\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0$ deci este un punct de maxim local.

Partea a III-a (integrabilitate)

1. Să se calculeze integralele nedefinite:

$$\int \frac{dx}{(x^2+3)^2} \text{ şi } \int \frac{x^4+9x^2-x+7}{x^5-x^4+6x^3-6x^2+9x-9}.$$

Soluţie:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^2+3)^2} &= \frac{1}{3}\int \frac{3}{(x^2+3)^2}dx = \frac{1}{3}\int \frac{x^2+3-x^2}{(x^2+3)^2}dx = \frac{1}{3}\left(\int \frac{1}{x^2+3}dx + \frac{1}{2}\int x\cdot\left(\frac{1}{x^2+3}\right)' dx\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{x}{2(x^2+3)} - \frac{1}{2\sqrt{3}}arctg\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + \mathcal{C}\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}arctg\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{x}{2(x^2+3)}\right) + \mathcal{C}\end{aligned} \tag{28}$$

Pentru a calcula a doua integrală vom descompune mai întâi polinomul de la numitorul raportului de sub integrală. Căutăm rădăcinile acestuia printre divizorii termenului liber şi anume:

$$\pm 1,\ \pm 3,\ \pm 9$$

Observăm că pentru $x=1$ avem $x^5-x^4+6x^3-6x^2+9x-9=0$ deci vom scrie acest polinom ca un produs dintre $x-1$ şi un polinom de gradul 4.

$$x^5-x^4+6x^3-6x^2+9x-9 = x^4(x-1)+6x^2(x-1)+9(x-1) = (x-1)(x^2+3)^2 \tag{29}$$

Vom descompune fracţia de sub integrală în fracţii simple:

$$\begin{aligned}\frac{x^4+9x^2-x+7}{x^5-x^4+6x^3-6x^2+9x-9} &= \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+3} + \frac{Dx+E}{(x^2+3)^2}\\ &= \frac{A(x^4+6x^2+9)+(Bx+C)(x^3+3x-x^2-3)+(Dx+E)(x-1)}{x^5-x^4+6x^3-6x^2+9x-9}\end{aligned} \tag{30}$$

Avem de rezolvat următorul sistem de ecuaţii:

$$\begin{cases} A=1\\ -B+C=0\\ 6A+3B-C+D=9\\ -3B+3C-D+E=-1\\ 9A-3C-E=7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A=1\\ B=C=0\\ D=3\\ E=2 \end{cases}$$

Integrala de calculat devine:

$$I = \int\left(\frac{1}{x-1} + 3\frac{x}{(x^2+3)^2} + 2\frac{1}{(x^2+3)^2}\right)dx = \ln|x-1| - \frac{3}{2(x^2+3)} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}arctg\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{x}{2(x^2+3)}\right) + \mathcal{C}$$

2. Calculaţi valoarea integralei:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x + 3\cos x + 4}$$

Soluţie: Pentru a calcula această integrală din funcţii trigonometrice vom utiliza substituţia bazată pe tangenta unghiului pe jumătate:

$$\begin{cases} \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}, t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

Dacă

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \to x = 2arctg\ t \to dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

Pentru limitele de integrare avem:

$$\begin{cases} x = 0 \to t = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \to t = 1 \end{cases}$$

Integrala devine:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{1}{\dfrac{2t}{1+t^2} + 3\dfrac{1-t^2}{1+t^2} + 4} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1+t^2}{2t+3-3t^2+4+4t^2+4} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int_0^1 \frac{2}{t^2+2t+7} dt \\ &= \int_0^1 \frac{2}{(t+1)^2+6} dt = \frac{2}{\sqrt{6}} arctg \frac{t+1}{\sqrt{6}} \Big|_0^1 \end{aligned} \tag{31}$$

3. Determinaţi valoarea limitei:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\int_{2021}^x \sin \frac{1}{t} dt}{\ln x}$$

Soluţie: ntegrala de la numărător este divergentă având aceeaşi natură cu integrala funcţiei $t \mapsto t^{-1}$ pe $[2021, \infty)$. Folosind teorema lui L'Hopital, avem

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\int_{2021}^x \sin \frac{1}{t} \mathrm{dt}}{\ln x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sin x^{-1}}{x^{-1}} = 1.$$

Numele şi prenumele:
Data: 28.01.2021
Grupa:
Facultatea: Automatică şi Calculatoare

Examen la disciplina Analiză Matematică nr. 4

Partea I (funcţii de o variabilă reală)

1. Studiaţi convergenţa şirului dat prin relaţia de recurenţă:

$$a_1 = 2020, \quad a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}, \forall n \geq 1.$$

Ca aplicaţie, calculaţi limita:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots + \sqrt{2021}}}}, \quad (n \text{ radicali}).$$

Soluţie: Fie $a_1 > 0$ şi a_{n+1} definit ca radical deci $a_{n+1} > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$.

- **Mărginire:** Vom scrie câtiva termeni ai şirului pentru a putea observa cum se comportă termenii şirului:

$$\begin{cases} a_2 = \sqrt{2021} < a_1 \\ a_3 = \sqrt{1 + \sqrt{1 + 2021}} < a_2 \end{cases}$$

Prin urmare putem demonstra prin inducţie că $P(n) : a_n > \sqrt{2}$.

  - $P(1) : a_1 = 2020 > \sqrt{2}$
  - $P(2) : a_2 = \sqrt{2021} > \sqrt{2}$
  - Presupunem $P(k) : a_k > \sqrt{2}$ adevărată şi demonstrăm că $P(k + 1)$ este adevărată: $P(k + 1) : a_{k+1} = \sqrt{1 + a_k} > \sqrt{1 + \sqrt{2}} > \sqrt{2}$.
  -

$$\begin{cases} P(1), P(2),\ (A) \\ P(k) \to P(k+1)\ (A) \end{cases} \to P(n)\ (A),\ \forall n \geq 1 \to a_n > \sqrt{2}, \forall n \geq 1.$$

  - Se observă că $\sqrt{2} < a_n \leq 2020 \to (a_n)$ mărginit

- **Monotonia şirului:** Pentru a studia monotonia şirului vom analiza:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{1 + a_n}}{a_n} = \sqrt{\frac{1 + a_n}{a_n^2}} = \sqrt{\frac{1}{a_n^2} + \frac{1}{a_n}} < \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}} < \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$$

Deoarece $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \to$ şirul este strict descrescător.

- **Convergenţa** Deoarece (a_n) este monoton şi mărginit rezultă că aceste este convergent conform criteriului lui Weirstrass.

- **Limita:** Deoarece şirul este convergent rezultă că $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Fie această limită $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Dar $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$ deci putem trece la limită în relaţia de recurenţă după cum urmează:

$$l = \sqrt{1 + l} \to l^2 = 1 + l \to l^2 - l - 1 = 0 \to l_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Deoarece (a_n) are termenin pozitivi $\to l \geq 0 \to l = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

- **Aplicaţie:** Să observăm că

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots + \sqrt{2021}}}} = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

2. a) Utilizând criteriile de convergenţă, să se determine natura seriilor:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}{3^n \cdot n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n \sqrt[n]{n^{2021}}}.$$

Soluţie: Vom nota termenul general al seriei propuse cu

$$a_n = \frac{2 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}{3^n \cdot n!}$$

Fiind vorba despre un raport vom încerca să aplicăm mai întâi criteriul raportului. Pentru aceasta analizăm:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (3(n+1)-1)}{3^{n+1} \cdot (n+1)!}}{\dfrac{2 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}{3^n \cdot n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{3n+3} = 1$$

deci criteriul raportului nu este eficient. Vom aplica în cele ce urmează criteriul Raabe-Duhamel:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{3n+3}{3n+2} - 1\right) \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{3n+3-3n-2}{3n+2}\right) = \frac{1}{3} < 1 \to \textbf{Seria diverge} \tag{32}$$

Pentru a doua serie considerăm:

$$a_n = \frac{\cos n}{n \sqrt[n]{n^{2021}}} = \frac{\cos n}{n^{1+\frac{2021}{n}}}$$

Deoarece în expresia termenului general apare funcţia trigonometrică cos ne gândim să aplicăm criteriul lui Dirichlet deoarece pentru $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos n}{n} = y_n \cdot z_n$ şi apoi criteriul lui Abel pentru seria iniţială

- Considerăm $a_n = \dfrac{\cos n}{n} \cdot \dfrac{1}{n^{\frac{2021}{n}}} = x_n \cdot y_n$

- Demonstrăm că şirul sumelor parţiale pentru $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos n$ este mărginit. Avem:

$$S_n = \cos a + \cos 2 + \ldots + \cos n$$

Înmulţim expresia anterioară cu $\sin \dfrac{1}{2}$ şi obţinem:

$$S_n \cdot \sin \frac{1}{2} = \cos 1 \cdot \sin \frac{1}{2} + \ldots + \cos n \cdot \sin \frac{1}{2}$$

Vom folosi formula:

$$\sin a \cos b = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}$$

Obţinem:

$$S_n \cdot \sin \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left[\sin\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \sin\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \sin\left(2 + \frac{1}{2}\right) + \sin\left(2 - \frac{1}{2}\right) + \ldots + \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) + \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sin\frac{1}{2} + \sin\frac{2n+1}{2}\right) \to S_n = \frac{\sin\dfrac{1}{2} + \sin\dfrac{2n+1}{2}}{2\sin\dfrac{1}{2}}$$

Obţinem că $|S_n| \leq \dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{2}}$.

- Observăm că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ şi $\dfrac{1}{n}$ descrescător la zero. Deci conform criteriului lui Dirichelet obţinem că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos n}{n}(C)$.

- Să observăm că mai avem de analizat şirul $y_n = \dfrac{1}{n^{\frac{2021}{n}}}$ despre care dorim să demonstrăm că este monoton şi mărginit.

- Considerăm $z_n = \sqrt[n]{n}$. Din criteriul rădăcinii obţinem:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

- Fie $t_n = z_n^{2021} \to \lim_{n\to\infty} t_n = 1$.

- Observăm că $y_n = \frac{1}{\cdot t_n}$. Deci $\lim_{n\to\infty} y_n = 1$. Deci y_n fiind convergent este şi monoton şi mărginit. Alternativ se poate studia separat monotonia şi mărginirea.

  Concluzie: Deoarece seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$ este convergentă conform criteriului lui Dirichlet şi y_n este monoton şi mărginit rezultă conform criteriului lui Abel că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

b) Aflaţi mulţimea de convergenţă şi calculaţi suma seriei de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{5^n}{n} x^{2n}$.

Soluţie: Avem de analizat convergenţa seriei:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{5^n}{n} x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(5x^2\right)^n \cdot \frac{1}{n}$$

Avem de studiat seria de puteri:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n y^n, y = 5x^2,\ a_n = \frac{1}{n}$$

Vom calcula raza de convergenţă a seriei de puteri:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n a_{n+1}}{(-1)^{n-1} a_n} \right|} = 1$$

Deci seria va fi absolut convergentă pentru $y \in (-1, 1)$ şi divergentă în afara acestui interval. Avem de analizat ce se întâmplă în capele intervalului de mai sus:

- pentru $y = 1$ seria de analizat devine $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ care converge conform criteriului lui Leibniz $\frac{1}{n}$ fiind descrescător la zero.

- pentru $y = -1$ seria de analizat devine $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ care converge conform criteriului lui Leibniz $\frac{1}{n}$ fiind descrescător la zero.

În concluzie seria va fi

$$\begin{cases} (AC), y \in (-1, 1) \\ (D), |y| > 1 \\ (SC), y = \pm 1 \end{cases} \quad \to \begin{cases} (AC), |x| < \frac{1}{\sqrt{5}} \\ (D), |x| > \frac{1}{\sqrt{5}} \\ (SC),\ x = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

3. Arătaţi inegalităţile:

$$\frac{x^{2020}}{(x^2+1)^{2021}} < \frac{(\operatorname{arctg} x)^{2021}}{x} < x^{2020}, \quad \forall x > 0.$$

Soluţie: Vom analiza prima parte a inegalităţii după cum urmează:

$$\frac{x^{2020}}{(x^2+1)^{2021}} < \frac{(\operatorname{arctg} x)^{2021}}{x} \Leftrightarrow \frac{x^{2021}}{(x^2+1)^{2021}} < (arctg\ x)^{2021} \Leftrightarrow \frac{x}{x^2+1} < arctg\ x$$

Considerăm $f : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = arctg\ x - \frac{x}{x^2+1}$.
Analizăm:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{2x^2}{(x^2+1)^2} \right) = \frac{2x^2}{(x^2+1)^2} > 0, x > 0$$

Obţinem că funcţia este crescătoare pe $[0,\infty) \to f(x) > f(0)$. Se observă că $f(0) = 0$ deci

$$0 < arctg\ x - \frac{x}{x^2+1} \to \frac{x}{x^2+1} < arctg\ x.$$

Legat de partea a doua a inegalităţii propuse vom considera:

$$\frac{(arctg\ x)^{2021}}{x} < x^{2020} \Leftrightarrow arctg\ x < x$$

Fie funcţia $g : [0,\infty) \to \mathbb{R},\ g(x) = x - arctgx$. Vom calcula derivata acesteia:

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x^2+1} - \frac{x^2}{1+x^2} > 0$$

Deci $g(x)$ este strict crescătoare. Prin urmare $g(x) > g(0) = 0 \to x > arctgx$.
DIn

$$\begin{cases} \dfrac{x}{x^2+1} < arctg\ x \\ x > arctg\ x \end{cases}$$

se obţine inegalitatea din enunţ.
Partea a II-a (funcţii de mai multe variabile reale)

1. Se dă funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{arctg}\left(x^2y^6\right)}{\sqrt{x^4+y^6}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiaţi existenţa derivatelor parţiale şi diferenţiabilitatea lui f în punctul $(0,0)$.
Soluţie: Studiem mai întâi continuitatea:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{arctg(x^2y^6)}{x^2y^6} \cdot \frac{x^2y^6}{\sqrt{x^4+y^6}} = 0$$

deci este continuă. Să observăm că:

$$\begin{cases} f(x,0) = 0,\ x \neq 0 \\ f(0,y) = 0,\ y \neq 0 \end{cases}$$

Folosim definiţia:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0 \qquad (33)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 0 \qquad (34)$$

Presupunem că f este diferenţiabilă în $(0,0)$ deci $df(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)dy = 0$.
Calculăm acum:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-df(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{arctg(x^2y^6)}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x^4+y^6}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{arctg(x^2y^6)}{x^2y^6} \cdot \frac{x^2y^6}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^4+y^6}}$$

Deoarece

$$\left| \frac{x^2}{\sqrt{x^4+y^6}} \right| \leq 1$$

şi $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^6}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x\to 0,\ y^2=px} \frac{p^3x^3}{\sqrt{x^2+px}} = 0$. Prin urmare f diferenţiabilă în origine.

2. Considerăm funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = (-3x+y)\cdot e^{-9x^2-y^2}$.

a) Calculaţi derivatele parţiale şi scrieţi formulele pentru diferenţialele de ordinul 1 şi 2 ale funcţiei f într-un punct oarecare din domeniul funcţiei.
Soluţie: Vom calcula mai întâi derivatele parţiale ale funcţiei f:

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{-9x^2-y^2}(-3-18x(-3x+y)) = 3e^{-9x^2-y^2}(18x^2-6xy-1)$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{-9x^2-y^2}(1-2y(-3x+y)) = e^{-9x^2-y^2}(6xy-2y^2+1)$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 3e^{-9x^2-y^2}(36x-6y-12x(18x^2-6xy-1)) = -18e^{-9x^2-y^2}(54x^3-18x^2y-9x+4)$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = e^{-9x^2-y^2}(6x-4y-24y(6xy-2y^2+1)) = 2e^{-9x^2-y^2}(2y^3-6xy^2+3x-3y)$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{-9x^2-y^2}(6y-18x(6xy-2y^2-1)) = 6e^{-9x^2-y^2}(y-3x-18x^2y+6xy^2) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

Putem scrie acum expresia diferenţialelor de ordinul 2 şi 2:

- $df(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy = e^{-9x^2-y^2}\big(3(18x^2-6xy-1)dx + (6xy-2y^2+1)dy\big)$
- $$\begin{aligned} d^2f(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx\ dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 \\ &= e^{-9x^2-y^2}\Big(-18(54x^3-18x^2y-9x+4)dx^2 + 12(y-3x-18x^2y+6xy^2)dxdy + 2(2y^3-6xy^2+3x-3y)dy^2\Big) \end{aligned}$$

b) Determinaţi punctele critice, calculaţi matricea hessiană în aceste puncte şi determinaţi punctele de extrem ale funcţiei f.

Soluţie: Punctele critice sunt soluţiile sistemului:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 18x^2-6xy-1=0 \\ 6xy-2y^2+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18x^2-2y^2=0 \\ 6xy-2y^2+1=0 \end{cases} \to \begin{cases} (3x+y)(3x-y)=0 \\ 6xy-2y^2+1=0 \end{cases}$$

- Dacă $y=3x$ din a două ecuaţie obţinem:
$$18x^2-18x^2+1=0$$
care nu are soluţie:
- Dacă $y=-3x \to 36x^2=1 \to x = \pm\dfrac{1}{6} \to \begin{cases} x=\dfrac{1}{6} \to y = -\dfrac{1}{2} \\ x = -\dfrac{1}{6} \to y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Deci punctele critice vor fi:

$$\left(\frac{1}{6},-\frac{1}{2}\right),\ \left(-\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right)$$

Scriem acum matricea hessiană în cele două puncte:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = e^{-9x^2-y^2}\begin{pmatrix} -18(54x^3-18x^2y-9x+4) & 6(y-3x-18x^2y+6xy^2) \\ 6(y-3x-18x^2y+6xy^2) & 2(2y^3-6xy^2+3x-3y) \end{pmatrix}$$

Avem:

- $$\begin{aligned} H_f\left(\frac{1}{6},-\frac{1}{2}\right) &= e^{-\frac{9}{36}-\frac{1}{4}}\begin{pmatrix} -18\left(54\frac{1}{216}+18\frac{1}{36}\cdot\frac{1}{2}-\frac{9}{6}+4\right) & 6\left(-\frac{1}{2}-\frac{3}{6}-18\frac{1}{36}\cdot\frac{1}{2}+6\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}\right) \\ 6\left(-\frac{1}{2}-\frac{3}{6}+18\frac{1}{36}\cdot\frac{1}{2}+6\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}\right) & 2\left(-\frac{2}{8}-6\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{6}+\frac{3}{2}\right) \end{pmatrix} \\ &= e^{-\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} 27 & -3 \\ -3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$
Observăm că $\Delta_1 = 27e^{-\frac{1}{2}} > 0$, $\Delta_2 = e^{-1}\begin{vmatrix} 27 & -3 \\ -3 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = e^{-1}\left(\frac{27}{2}-9\right) > 0$. Deci $\left(\frac{1}{6},-\frac{1}{2}\right)$ este punct de minim local.

- $$H_f\left(-\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right)=e^{-\frac{9}{36}-\frac{1}{4}}\begin{pmatrix}-18\left(-54\frac{1}{216}+18\frac{1}{36}\cdot\frac{1}{2}+\frac{9}{6}+4\right) & 6\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{6}-18\frac{1}{36}\cdot\frac{1}{2}-6\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}\right)\\ 6\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{6}-18\frac{1}{36}\cdot\frac{1}{2}-6\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}\right) & 2\left(\frac{2}{8}+6\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}-\frac{3}{6}-\frac{3}{2}\right)\end{pmatrix}.$$
$$=e^{-\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}-18\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{3}{2}+4\right) & 6\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)\\ 6\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right) & 2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)\end{pmatrix}=e^{-\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}-99 & 3\\ 3 & -3\end{pmatrix}$$

Observăm că $\Delta_1<0,\ \Delta_2=e^{-1}\begin{vmatrix}-99 & 3\\ 3 & -3\end{vmatrix}>0$ deci $\left(-\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right)$ este un maxim local.

Partea a III-a (integrabilitate)

1. Să se calculeze integralele nedefinite:

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+2\right)^2}\ \text{şi}\ \int\frac{2x^4+6x^2-5x+11}{x^5+3x^4+4x^3+12x^2+4x+12}dx.$$

Soluţie:

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{\left(x^2+2\right)^2}&=\frac{1}{2}\int\frac{2dx}{\left(x^2+2\right)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{x^2+2-x^2}{\left(x^2+2\right)^2}\\&=\frac{1}{2}\left(\int\frac{1}{x^2+2}dx-\frac{1}{2}\int x\cdot\frac{2x}{(x^2+2)^2}\right)\\&=\frac{1}{2\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{1}{4}\int\left(\frac{x}{x^2+2}\right)'\cdot x\ dx\\&=\frac{1}{2\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{1}{4}\cdot\frac{x}{x^2+2}-\frac{1}{4\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}+\mathcal{C}\\&=\frac{1}{4\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{1}{4}\cdot\frac{x}{x^2+2}+\mathcal{C}.\end{aligned}\tag{35}$$

Pentru a doua integrală vom încerca să descompunem polinomul de la numitorul raportului de sub integrală. Pentru aceasta căutăm mai întâi rădăcinile printre divizorii termenului liber. Aceşti divizori sunt:

$$\pm1,\pm2,\ \pm3,\ \pm4,\pm6$$

Se observă că $x=-3$ este rădăcină a polinomului deci aceste se va scrie ca un produs dintre $(x+3)$ şi un alt polinom de grad 4.

$$x^5+3x^4+4x^3+12x^2+4x+12=x^4(x+3)+4x^2(x+3)+4(x+3)=(x+3)(x^4+4x^2+4)=(x+3)(x^2+2)^2\tag{36}$$

Pentru pasul următor vom descompune fracţia de sub integrală în fracţii simple după cum urmează:

$$\frac{2x^4+6x^2-5x+11}{x^5+3x^4+4x^3+12x^2+4x+12}=\frac{A}{x+3}+\frac{Bx+C}{x^2+2}+\frac{Dx+E}{(x^2+2)^2}$$

Aducem la acelaşi numitor şi obţinem:

$$\frac{2x^4+6x^2-5x+11}{x^5+3x^4+4x^3+12x^2+4x+12}=\frac{A(x^2+2)^2+(Bx+C)(x^3+3x^2+2x+6)+(Dx+E)(x+3)}{x^5+3x^4+4x^3+12x^2+4x+12}$$

Avem de rezolvat următorul sistem de ecuaţii:

$$\begin{cases}A+B=2\\3B+C=0\\4A+3C+2B+D=6\\6B+2C+3D+E=-5\\4A+6C+3E=11\end{cases}\rightarrow\begin{cases}A=2\\B=C=0\\D=-2\\E=1\end{cases}$$

Integrala de calculat devine:

$$I=\int\left[\frac{2}{x+3}+\frac{1-2x}{(x^2+2)^2}\right]dx=2\ln|x+3|+\frac{1}{4\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{1}{4}\cdot\frac{x}{x^2+2}+\frac{1}{x^2+2}+\mathcal{C}\tag{37}$$

2. Calculaţi valoarea integralei:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

Soluţie:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 - 2\sin^2 x \cos^2 x} dx \tag{38}$$

Putem folosi următoarea substituţie trigonometrică:

$$t = tg\ x \to x = arctgt \to dx = \frac{1}{1+t^2} dt$$

Pentru capelete de integrare vom obţine:

$$\begin{cases} x = 1 \to t = 0 \\ x = \frac{\pi}{4} \to t = 1 \end{cases}$$

Avem:

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

Integrala de calculat devine:

$$\begin{aligned}
I &= \int\limits_0^1 \frac{1}{1 - \frac{2t^2}{1+t^2} \cdot \frac{1}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt = \int\limits_0^1 \frac{(1+t^2)^2}{t^4 + 2t^2 + 1 - 2t^2} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt \\
&= \int\limits_0^1 \frac{1+t^2}{t^4+1} dt = \int\limits_0^1 \frac{t^2+1}{(t^2+1)^2 - (\sqrt{2}t)^2} dt \\
&= \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{t^2 + 1 + \sqrt{2}t} + \frac{1}{t^2 + 1 - \sqrt{2}t} \right) dt \qquad (39) \\
&= \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{\left(t + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} + \frac{1}{\left(t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \right) dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \Big(arctg(\sqrt{2}+1) + arctg(\sqrt{2}+1) \Big) = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{\sqrt{2} - 1 + \sqrt{2} + 1}{1 - (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \infty = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

3. Calculaţi valoarea sumei:

$$\int_1^e \sqrt{\ln x} dx + \int_0^1 e^{x^2} dx.$$

Soluţie: Vom analiza mai înâi prima integrală: $I = \int\limits_1^e \sqrt{\ln x} dx$. Pentru a o calcula vom folosi schimbarea de variabilă:

$$t = \sqrt{\ln x} \to x = e^{t^2} \to dx = 2te^{t^2} dt$$

Pentru capetele de integrare avem:

$$\begin{cases} x = e \to t = 1 \\ x = 1 \to t = 0 \end{cases}$$

Integrala de calculat devine:

$$I = \int\limits_0^1 2t^2 e^{t^2} dt = te^{t^2}|_0^1 - \int\limits_0^1 e^{t^2} dt$$

Deci suma este:

$$\int_1^e \sqrt{\ln x} dx + \int_0^1 e^{x^2} dx = 1 - \int\limits_0^1 e^{t^2} dt + \int_0^1 e^{x^2} dx = 1.$$