1. Matrice

Operaţii cu matrice.

$A+B=C, C\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C}), C=(c_{ij})_{i=\overline{1,m},j=\overline{1,n}}, c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

Fie $A\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$,$B\in\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{C})$. Atunci $C=A\cdot B, C\in\mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{C})$, $C=(c_{ij})_{i=\overline{1,m},j=\overline{1,n}}$, $c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$.

Observaţia 1. $\underset{m\times \mathbf{n}}{A}\cdot\underset{\mathbf{n}\times p}{B}=\underset{m\times p.}{AB}$

În cazul înmulţirii a două matrice, numărul coloanelor primei matrice trebuie să fie egal cu numărul liniilor celei de a doua matrice.

Exerciţiul 1. *Să se efectueze produsele*

a) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\end{pmatrix}$, *b)* $\begin{pmatrix}3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}$.

Exerciţiul 2. *Fie matricele*

$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}$.

Să se calculeze produsele AB si BA Este adevărată egalitatea $AB=BA$?

Concluzie: $A\cdot B\neq B\cdot A$, adică **<u>înmulţirea matricelor nu este comutativă</u>**.

Exerciţiul 3. *Fie matricele A,B,C,D*

$A=\begin{pmatrix}3&0\\-1&2\\1&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&5&2\\-1&1&0\\-4&1&3\end{pmatrix},$

$C=\begin{pmatrix}-3&-1\\2&1\\4&3\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}4&-1\\2&0\end{pmatrix}$.

Calculati acele matrice dintre cele enumerate mai jos care sunt definite: $A+B, A+C, AB, BA, CD, DC, D^2$.

Exerciţiul 4. *Să se determine matricea X din egalitatea*

$$-5\begin{pmatrix}1&-2\\0&4\\15&-1\end{pmatrix}+2X=\begin{pmatrix}5&0\\1&-2\\5&4\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\-2&5\end{pmatrix}.$$

Exerciţiul 5. *Fie* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$*. Demonstrati că* $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ *dacă si numai dacă* $AB = BA$*.*

Exerciţiul 6. *Dacă* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *atunci* $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = 0$*.*

Exerciţiul 7. *Dacă* $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$*, folosind faptul că* $A^2 = 4A - 3I_2$ *si inductia matematică, demonstrati că*
$A^n = \dfrac{3^n-1}{2}A + \dfrac{3-3^n}{2}I_2, n \geq 2.$

Exerciţiul 8. *Pentru o matrice* $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *notăm*

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

pe care o numim **urma matricei** A. *Să se arate că:*

a) $\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B),\ \forall\, A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

b) $\mathrm{Tr}(\alpha A) = \alpha \mathrm{Tr}(A),\ \forall\, \alpha \in \mathbb{C},\ \forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

c) $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA),\ \forall\, A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

d) $\mathrm{Tr}(AA^T) = 0 \Rightarrow A = 0_n$

e) $\mathrm{Tr}(UAU^{-1}) = \mathrm{Tr}(A),\ \forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \forall\, U \in\in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *cu* $\det(U) \neq 0$.

1.1. Determinanti.

Exerciţiul 9. *Să se calculeze valoarea determinanţilor:*

a) $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}, R: 42,$ *b)* $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix}, R: -49,$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} R: -5,$ *d)* $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 9 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}, R: -256,$

e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, $R: 1$, *f)* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 4 \end{vmatrix}$, $R: -5$,

e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, $R: -343$.

Exerciţiul 10. *Să se calculeze suma determinanţilor:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

şi să se verifice în acest caz relaţia

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 14 & 10 \\ 4 & 0 & 6 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

calculând efectiv valoarea determinanţilor.

Exerciţiul 11. *Să se calculeze valoarea determinantului:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Determinanul unei matrice dreptunghiulare, $A = (a_{ij})_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $m \neq n$, <u>nu este definit.</u>

Exerciţiul 12. *Dacă* $A \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ *si* $\det(A) = 17$, *calculati* $\det(3A^2)$.

Exerciţiul 13. *Este* $\det(AB) = \det(BA)$ *în general?*

a) Este adevărată sau falsă relatia dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*?*

b) Este adevărată sau falsă relatia dacă $A \in \mathcal{M}_{mxn}(\mathbb{R}), B \in \mathcal{M}_{mxn}(\mathbb{R})$ *cu* $m \neq n$*?*

Justificati răspunsul în caz afirmativ şi dati contraexemple în cazul în care afirmatia este falsă.

Determinantul produsului a două matrice A şi B pătratice de acelaşi ordin este egal cu produsul determinanţilor celor două matrice, adică

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Exerciţiul 14. *Fie* $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *şi fie* $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})_{i,j=\overline{1,n}}$ *matricea ale cărei elemente sunt conjagatele elementelor matricei* A*. Să se demonstreze că*

$$a)\ \det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}, \quad b)\ \det(A \cdot \overline{A}) = |\det(A)|^2 \geq 0.$$

Exerciţiul 15. *Se consideră matricea* $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *astfel încât* $a_{ij} = \overline{a_{ji}},\ \forall i,j = \overline{1,n}$*. Să se demonstreze că* $\det(A) \in \mathbb{R}$*.*

1.2. Tipuri speciale de matrice..

Exerciţiul 16. *Demonstrati că dacă* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *este o matrice antisimetrică atunci matricea* $B = A - A^T$ *este antisimetrică.*

Exerciţiul 17. *Demonstrati că dacă* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *este o matrice simetrică atunci matricea* $B = A + A^T$ *este simetrică.*

Exerciţiul 18. *Demonstrati că produsul a două matrice pătratice simetrice este o matrice simetrică dacă si numai dacă matricele comută. Dati un exemplu de două matrice simetrice al căror produs nu este simetric.*

Exerciţiul 19. *Să se demonstreze că orice matrice poate fi scrisă ca sumă dintre o matrice pară si una impară si că această scriere este unică.*

Exerciţiul 20. *Fie matricea reală* A *este antisimetrică. Să se arate că* A^2 *este o matrice simetrică.*

1.3. Matrice inversabile (nesingulare).

Exerciţiul 21. *Fie matricea* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ *singulară. Presupunem că* $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *este o inversă a lui* A*. Ce concluzie tragem din conditia* $AB = I_2$*.*

Exerciţiul 22. *Dacă* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *care satisfac relatiile* $A^2 = B^2 = (AB)^2 = I_n$*.*
Demonstrati că $AB = BA$*.*

Exerciţiul 23. *Fie*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verificati că $A^3 = 5I_3$*, deduceti de aici că* A *este nesingulară si găsiti* A^{-1}*.*

Exerciţiul 24. *Fie* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *care satisface relatia* $A^2 - 3A + I = 0$. *Demonstrati că* $A^{-1} = 3I - A$.

Exerciţiul 25. *Se consideră matricele*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Calculati AC *si* BC *si arătati că* $AC = BC$.

b) Ce proprietate trebuie să aibă matricea C *pentru ca* $AC = BC$ *să implice* $A = B$?