1. Forme pătratice

Exerciţiul 1. *Fie forma pătratică*
$h : \mathbf{R}_3 \to \mathbf{R}$, $h(x) = -2x_1^2 + 7x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 16x_1x_3 + 20x_2x_3$.
a) Să se determine matricea formei pătratice.
b) să se aducă la forma canonică prin metodele cunoscute.
c) Să se detrmine în fiecare caz signatura şi să se verifice teoreme de inerţie a lui Sylvester.

Exerciţiul 2. *Folosind metoda lui Gauss să se determine forma canonică şi signatura formelor pătratice precum şi matricea cu care se obţine aceasta:*
a) $h : \mathbf{R}_2 \to \mathbf{R}$, $h(x) = x_1^2 - x_2^2 - x_1x_2$.
b) $h : \mathbf{R}_3 \to \mathbf{R}$, $h(x) = x_1^2 + 9x_2^2 + 19x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3$.
c) $h : \mathbf{R}_4 \to \mathbf{R}$, $h(x) = -3x_4x_3 + x_1x_2 + 2x_2x_3$.
d) $h : \mathbf{R}_3 \to \mathbf{R}$, $h(x) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_3$.

Exerciţiul 3. *Utilizând metoda lui Jacobi, să se determine forma canonică a formelor pătratice de mai jos, precum şi matricea cu care se obţine aceasta:*
a) $h : \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}$, $h(x) = x_1^2 + 7x_2^2 + x_3^2 - 8x_1x_2 - 16x_1x_3 - 8x_2x_3$.
b) $h : \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}$, $h(x) = x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.
c) $h : \mathbb{R}_4 \to \mathbb{R}$, $h(x) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_4^2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 6x_3x_4$.

Exerciţiul 4. *Folosind metoda transformărilor ortogonale (a valorilor proprii) să se reducă la forma canonică formele pătratice de mai jos, indicând matricea ortogonală cu care se obţine aceasta .*
a) $h : \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}$, $h(x) = 3x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$.
b) $h : \mathbb{R}_4 \to \mathbb{R}$, $h(x) = 2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4$.
c) $h : \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}$, $h(x) = x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3$.
d) $h : \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}$, $h(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.
Să se precizeze pentru fiecare din ele signatura şi natura formei pătratice.

Exerciţiul 5. *Se dau următoarele forme pătratice:*
a) $h : \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}$, $h(x) = 3x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$,
b) $h : \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}$, $h(x) = -x_1^2 + x_2^2 - 5x_3^2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3$,
c) $h : \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}$, $h(x) = 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$,
d) $h : \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}$, $h(x) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3$.
Să se determine expresia canonică prin toate metodele cunoscute.
Să se verifice legea de inerţie a lui Sylvester.

Exerciţiul 6. *Analizaţi dacă* $A, B \in \mathcal{M}_n^s(\mathbb{R})$ *două matrice pozitiv definite atunci* $A + B$ *este pozitiv definită.*

Exerciţiul 7. *Stabiliţi dacă următoarele matrice*
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
sunt pozitiv definite, negativ definite sau nedefinite.

Exerciţiul 8. *Fie $A \in \mathcal{M}_n^s(\mathbb{R})$. Forma pătratică $h(x) = x^T Ax$ este pozitiv definită dacă şi numai dacă $A = B^T B$, $\det(B) \neq 0$.*

Soluţie. Pp. $A = B^T B, h(x) = x^T B^T Bx = (Bx)^T Bx = \langle Bx, Bx\rangle \geq 0$,
$\langle Bx, Bx\rangle = 0 \Rightarrow Bx = 0, \det(B) \neq 0 \Rightarrow x = \theta$.

Pp. forma pătratică $h(x) = x^T Ax$ este pozitiv definită$\Rightarrow$valorile poprii sunt strict mai mari ca zero, matricea fiind simetrică este ortogonal asemenea cu o matrice diagonală

$A = QDQ^T = Q\sqrt{D}\sqrt{D}Q^T$,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_p \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \sqrt{\lambda_p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \sqrt{\lambda_p} \end{pmatrix} = \sqrt{D}\sqrt{D}$$

Rezultă că

$A = Q\sqrt{D}\left(Q\sqrt{D}\right)^T$.

Exerciţiul 9. *Fie $A \in \mathcal{M}_n^s(\mathbb{R})$ o matrice pozitiv definită (generează o formă pătratică pozitiv definită) şi fie $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det(S) \neq 0$. Să se demonstreze că matricea $S^T AS$ este tot o matrice pozitiv definită.*

Exerciţiul 10. *Analizaţi dacă $A, B \in \mathcal{M}_n^s(\mathbb{R})$ două matrice pozitiv definite atunci $A + B$ este pozitiv definită.*

Exerciţiul 11. *Stabiliţi dacă următoarele matrice*
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
sunt pozitiv definite, negativ definite sau nedefinite.