1. Transformări elementare

1.1. Determinarea inversei unei matrice..

Exerciţiul 1. *Folosind transformările elementare să se calculeze inversele următoarelor matrice, dacă acestea există.*

a) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ *R:* $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, *det nul,*

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *R:* $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, *R:* $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$, *R:* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Exerciţiul 2. *Pentru ce valori ale lui* $k \in \mathbb{R}$ *matricea* $\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ *este inversabilă?*

Exerciţiul 3. *Să se determine matricea* X *astfel încât*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.2. Calculul rangului unei matrice.

Exerciţiul 4. *Să se calculeze rangul următoarelor matrice*

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $R: 2$, *b)* $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$, $R: 2$, *c)* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $R:2$,*d)* $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 8 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $R:3$,

e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $R:2$, *f)* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 1 & 10 \end{pmatrix}$, $R:3$.

Exerciţiul 5. *Completati numerele care lipsesc din matricea de mai jos*

$$A = \begin{pmatrix} ? & -3 & ? \\ 1 & 3 & -1 \\ ? & 9 & -3 \end{pmatrix}$$

astfel încât matricea A să aibă: a) rangul 1, b) rangul 2, c) rangul 3.

1.3. Rezolvarea sistemelor algebrice liniare. Sistemele liniare cu două variabile apar în practică în legătură cu intersecţia a două drepte în plan. Forma generală a unui sistem liniar cu două variabile este

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

iar graficele celor două ecuaţii reprezintă drepte în plan. Soluţiile (x, y) ale acestui sistem, dacă există, corespund punctelor comune ale celor două drepte. Există trei posibilităţi:

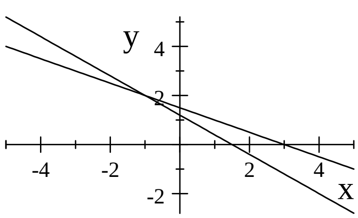
1. dreptele se intersectează într-un singur punct,
2. dreptele coincid, caz în care sistemul să aibă o infinitate de soluţii,
3. dreptele sunt paralele şi distincte, caz în care nu se intersectează.

Sistemul este **compatibil** dacă are măcar o soluţie şi **incompatibil** dacă nu admite soluţii. În cazul sistemului omogen ($c_1 = c_2 = 0$) acesta este întotdeauna compatibil.

Exerciţiul 6. *Se consideră sistemul:*

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x + 5y = 6 \end{cases}.$$

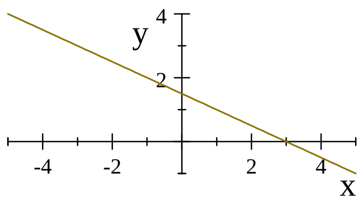
Să se rezolve, să se interpreteze geometric în plan şi să se deseneze.



Exerciţiul 7. *Se consideră sistemul:*

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x + 8y = 6 \end{cases}.$$

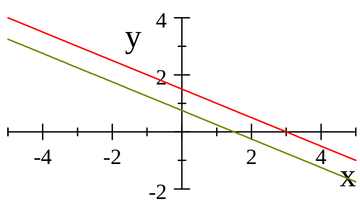
Să se rezolve, să se interpreteze geometric în plan şi să se deseneze.



Exerciţiul 8. *Se consideră sistemul:*

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x + 8y = 12 \end{cases}.$$

Să se rezolve, să se interpreteze geometric în plan şi să se deseneze.



Exerciţiul 9. *Să se rezolve următoarele sisteme, să se interpreteze geometric în plan şi să se deseneze:*

a) $\begin{cases} x - 2y = -1 \\ -x + 3y = 3 \end{cases}$, b) $\begin{cases} x - 2y = -1 \\ 4x - 8y = 2 \end{cases}$,

c) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x - 6y = 9 \end{cases}$, d) $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$,

e) $\begin{cases} x - y = 6 \\ -2x + 2y = 1 \end{cases}$, f) $\begin{cases} 2x + 5y = -1 \\ -10x - 25y = 5 \end{cases}$.

Un sistem liniar de trei ecuatii cu trei necunoscute are forma generală:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

iar graficele celor trei ecuaţii reprezintă plane în spaţiu. Soluţiile (x, y, z) ale acestui sistem, dacă există, corespund punctelor comune ale celor trei plane. Şi în acest caz există trei posibilităţi:

1. planele se intersectează într-un singur punct, caz în care sistemul este compatibil determinat,

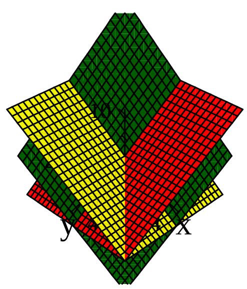
2. planele au o infinitate de puncte în comun (o dreaptă în comun sau cele trei plane coincid), sistemul are o infinitate de soluţii, caz în care sistemul este compatibil nedeterminat,

3. planele nu au nici-un punct în comun, caz în care sistemul este incompatibil.

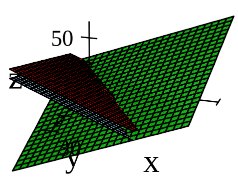
Două sisteme se numesc *echivalente* dacă au aceleaşi soluţii.

Exerciţiul 10. *Să se rezolve următoarele sisteme, să se interpreteze geometric:*

a) $$\begin{cases} x-y-z=-1 \\ x+y+z=1 \\ x-y+z=1 \end{cases} \Rightarrow [x=0, y=0, z=1]$$

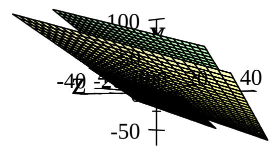


b) $$\begin{cases} x-y-z=-1 \\ x-y+z=1 \\ -x+y+z=10 \end{cases}.$$



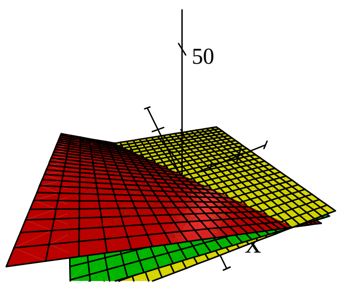
Exerciţiul 11.
două plane paralele intersectate de un al treilea. Sistemul este incompatibil.

c) $$\begin{cases} x-y-z=-10 \\ x-y-z=10 \\ x-y-z=-40 \end{cases}$$



Exemplul 1. Exerciţiul 12.
Plane sunt paralele. Sistemul este incompatibil.

$$d)\ \begin{cases} x+y+z=2 \\ x+2y+3z=5 \\ 3x+4y+5z=9 \end{cases},\ [x=z-1, y=3-2z]$$



Cele trei plane se intersectează după o dreaptă, sistemul are o infinitate de soluţii.

Concluzie: orice sistem liniar are fie o soluţie, fie o infinitate de soluţii, fie nu are nici o soluţie. Altă posibilitate nu există.

Rezolvarea sistemelor liniare este cea mai importantă aplicaţie a matricelor şi a determinanţilor.

Exemplu de rezolvare a sistemelor liniare: **metoda lui Gauss de eliminare**. Considerăm sistemul:

$$\begin{cases} 2x+y+z=5 \\ 4x-6y=-2 \\ -2x+7y+2z=9 \end{cases}.$$

Metoda constă în două etape:

-etapa I: eliminarea lui x din ecuaţiile doi şi trei:

1. din ecuaţia doi se scade ecuaţia întâi înmulţită cu doi,

$$\begin{cases} 2x+y+z=5 \\ -8y-2z=-12 \\ -2x+7y+2z=9 \end{cases},$$

se adună la ecuaţia trei prima ecuaţie

$$\begin{cases} 2x+y+z=5 \\ -8y-2z=-12 \\ 8y+3z=14 \end{cases}$$

2. eliminarea lui y din ecuaţia a treia, adunând ecuaţia doi la a treia ecuaţie

$$\begin{cases} 2x+y+z=5 \\ -8y-2z=-12 \\ z=2 \end{cases}$$

etapa II: (substituţia inversă) determinarea necunoscutei z din ultima ecuaţie, apoi a lui y din ecuaţia a doua, folosind valoarea lui z şi determinarea lui x din prima ecuaţie folosind valorile lui y şi z determinate anterior.

$$\begin{cases} 2x+y+z=5 \\ -8y-2z=-12 \\ z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+z=5 \\ -8y-2\cdot 2z=-12 \\ z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+z=5 \\ -8y=-8 \\ z=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+y+z=5 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1+2=5 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=2 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases}.$$

Metoda eliminării lui Gauss transformă un sistem în alt sistem echivalent (cu aceeaşi soluţie) prin eliminarea succesivă a necunoscutelor în vederea obţinerii unui sistem mai uşor de rezolvat. Metoda constă în trei operaţii simple care se fac asupra liniilor sistemului. Ele sunt:

1. se înlocuieşte o ecuaţie a sistemului cu ecuaţia înmulţită cu un scalar α diferit de zero,
2. se schimbă între ele două ecuaţii,
3. se înlocuieşte o ecuaţie cu ea însăşi la care am adăugat o altă ecuaţie înmulţită cu un scalar.

Exerciţiul 13. *Să se rezolve următoarele sisteme folosind transformările elementare şi să se realizeze interpretarea geometrică:*

a) $\begin{cases} x-2y+z=4 \\ 2y-8z=8 \\ 2x-3y+4z=0 \end{cases}$, *R:* $[x=-2, y=-4, z=-2]$,

b) $\begin{cases} x-2y+z=4 \\ 2y-8z=8 \\ x-4y+9z=-4 \end{cases}$, *R:* $[x=7z+12, y=4z+4]$,

c) $\begin{cases} x-2y+z=4 \\ 2y-8z=8 \\ x-4y+9z=0 \end{cases}$, d) $\begin{cases} x-2y+3z=7 \\ 2x+y+z=4 \\ -3x+2y-2z=-10 \end{cases}$, *e)* $\begin{cases} 3x+y-2z=2 \\ 2x+2y+z=9 \\ -x-y+3z=6 \end{cases}$, *f)* $\begin{cases} 3x-4y=10 \\ -5x+8y=-17 \\ -3x+12y=-12 \end{cases}$.

Exerciţiul 14. *Să se rezolve, folosind folosind transformările elementare, următoarele sisteme:*

a) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+5x_3+7x_4=1 \\ 4x_1-6x_2+2x_3+3x_4=2 \\ 2x_1-3x_2-11x_3-15x_4=1 \end{cases}$ *R:* $\left[\begin{array}{c} x_1=\frac{3}{2}x_2-\frac{1}{16}x_4+\frac{1}{2}, \\ x_3=-\frac{11}{8}x_4 \end{array}\right]$

b) $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=1 \\ 3x_1+3x_3+3x_4=6 \\ 2x_1+x_2+3x_3+x_4=3 \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=0 \end{cases}$ *R:* $\left[\begin{array}{c} x_1=2-x_4-x_3, \\ x_2=x_4-x_3-1 \end{array}\right]$

c) $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=4 \\ 4x_1+2x_2+x_3=6 \\ 6x_1+3x_2+x_3=8 \\ 8x_1+4x_2+x_3=10 \end{cases}$ *R:* $\left[x_1=1-\frac{1}{2}x_2, x_3=2\right]$

d) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ 2x_1+2x_3+x_4=1 \\ -2x_1+2x_2-x_4=2 \\ 3x_1+x_2-x_4=1 \end{cases}$ $R:$ $\left[\begin{array}{c} x_1=-\frac{1}{6}, x_2=\frac{1}{6}, \\ x_3=\frac{4}{3}, x_4=-\frac{4}{3} \end{array}\right]$

e) $\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+x_4=14 \\ -x_1-2x_2-3x_3=-4 \\ 2x_1+4x_2+8x_3-2x_4=48 \end{cases}$, *f)* $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=2 \\ 4x_1+2x_2+x_3=5 \\ 6x_1+3x_2+x_3=8 \\ 8x_1+4x_2+x_3=5 \end{cases}$.

Exerciţiul 15. *Pentru ce valori ale lui* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *sistemul*

$$\begin{cases} x+y=2 \\ y+z=2 \\ x+z=2 \\ ax+by+cz=0 \end{cases}$$

a) are solutie unică, b) nu are solutie, c) are o infinitate de solutii.

Exerciţiul 16. *Considerăm sistemul*

$$\begin{cases} x_1+x_3=q \\ x_2+2x_4=0 \\ x_1+2x_3+3x_4=0 \\ 2x_2+3x_3+px_4=3 \end{cases},$$

unde p, q *sunt parametrii reali. Pentru ce valori ale lui* p *si* q *sistemul*

a) are solutie unică, b) nu are solutie, c) are o infinitate de solutii?

Exerciţiul 17. *Să se factorizeze LU următoarele matrice:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

Exerciţiul 18. *Exemplu de factorizare LU şi aplicare la rezolvarea sistemului:*

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -10 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -10 \end{cases}. \text{ Soluţia este: } [x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 1]$$

Factorizare:

$$L_1A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$L_2(L_1A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$L_3(L_2(L_1A)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = U \Rightarrow$$

$$L_3L_2L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \frac{7}{5} & \frac{4}{5} & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = (L_3L_2L_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \frac{7}{5} & \frac{4}{5} & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -\frac{4}{5} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -\frac{4}{5} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Rezolvarea sistemului cu ajutorul factorizării

$AX = B \Leftrightarrow (LU)X = B \Leftrightarrow L(UX) = B, UX = Y \Rightarrow LY = B$

$$\begin{cases} y_1 = 7 \\ 2y_1 + y_2 = 4 \\ -3y_1 - \frac{4}{5}y_2 + y_3 = -10 \end{cases} \text{ Soluţia este: } [y_1 = 7, y_2 = -10, y_3 = 3]$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 5x_2 - 5x_3 = -10 \\ 3x_3 = 3 \end{cases} \text{ Soluţia este: } [x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 1]$$

Exerciţiul 19. *Pentru fiecare sistem, să se factorizeze LU matricea sistemului şi să se rezolve transformându-l în două sisteme triunghiulare:*

$$\begin{cases} x-2y+z=4 \\ 2y-8z=8 \\ 2x-3y+4z=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x+y+z=5 \\ 4x-6y=-2 \\ -2x+7y+2z=9 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x_1-x_2=1 \\ -x_1+2x_2-x_3=1 \\ -x_2+2x_3-x_4=1 \\ -x_3+2x_4=1 \end{cases}.$$

Sisteme omogene.

Exerciţiul 20. *Să se stabilească dacă sistemul de ecuaţii de mai jos admite soluţii diferite de soluţia banală şi în caz afirmativ să se afle aceste soluţii:*

$$a)\ \begin{cases} x_1-3x_2+x_4=0 \\ -x_2+x_3-x_4=0 \end{cases},\ b)\ \begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=0 \\ x_2+2x_3-3x_4=0 \\ 2x_1-4x_3+x_4=0 \end{cases},\ c)\ \begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=0 \\ 3x_1-2x_2+x_3=0 \\ x_1-x_2+x_3=0 \end{cases}$$

2. Exercitii suplimentare

Exerciţiul 21. *Să se exprime determinantul adjunctei lui A cu ajutorul determinantului lui A.*

Exerciţiul 22. *Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A+B=AB$. Demonstraţi că A şi B comută.*

Exerciţiul 23. *Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât $A+B=I_n, A^2=A^3$. Demonstraţi că*

a) $AB=BA$,
b) I_n-AB şi I_n+AB sunt inversabile.

Exerciţiul 24. *Fie matricele $A, B \in M_n(R)$ care satisfac condiţiile: $A \neq B$, $AB = BA$ şi $A^2=B^2$. Să se demonstreze că matricea $A+B$ este singulară.*

(First Internet Mathematics Olympiad Ariel, 2 ianuarie 2008)

Exerciţiul 25. *Dacă $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), U=(u_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, $u_{ij}=1, (\forall)\, i,j=\overline{1,n}$, calculaţi $(U-I_n)^{-1}$.*

Exercişiul 26. *Să se calculeze determinanţii:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 0 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1 & 0 & ... & 1 \\ . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & 1 & ... & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & x & x & ... & x \\ x & a_2 & x & ... & x \\ x & x & a_3 & ... & x \\ . & . & . & . & . \\ x & x & x & ... & a_n \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & y & z & t \\ y & x & t & z \\ z & t & x & y \\ t & z & y & x \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & a_1+b_3 \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & a_2+b_3 \\ a_3+b_1 & a_3+b_2 & a_3+b_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & a_1+b_3 & a_1+b_4 \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & a_2+b_3 & a_2+b_4 \\ a_3+b_1 & a_3+b_2 & a_3+b_3 & a_3+b_4 \\ a_4+b_1 & a_4+b_2 & a_4+b_3 & a_4+b_4 \end{vmatrix}.$$

Exerciţiul 27. *Fie*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Să se calculeze $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{2008}$.

(Third Internet Mathematics Olympiad for Students, 18 Decembrie 2008)

Exerciţiul 28. *Fie* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *şi fie* $ABA = BAB$. *Demonstraţi că una din următoarele condiţii este satisfăcută: una din matrice este singulară, sau matricele* A *şi* B *au acelaţi determinant.*

(Fourth Internet Mathematics Olympiad for Students, 14 Mai 2009)

Exerciţiul 29. *Fie* $n \in \mathbb{N}$ *şi* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *astfel încât matricea* $A + B$ *este inversabilă. Arătaţi că*

$$A(A+B)^{-1}B = B(A+B)^{-1}A.$$