Exerciţiul 1. *Fie* $(\mathbb{R},+,\cdot)$ *corpul comutativ al numerelor reale şi*
$\mathbb{R}_+^* = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}; \mathbf{x} > 0\}$.
Definim operaţiile:
$\oplus : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*,\ \forall (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 : \mathbf{x}\oplus\mathbf{y} = \mathbf{x}\cdot\mathbf{y};$
$\otimes : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*,\ \forall (\alpha,\mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* : \alpha\otimes\mathbf{x} = \mathbf{x}^\alpha.$
Să se arate că $\mathbb{R}_+^*$ *are o structura de spatiu liniar real (spaţiu liniar peste corpul comutativ* $\mathbb{R}$*) în raport cu operaţiile definite anterior.*

Exerciţiul 2. *Fie* $(\mathbb{K},+,\cdot)$ *un corp comutativ,* M *o mulţime oarecare şi* $(\mathbb{X},+,\cdot\mathbb{K})$ *un spaţiu liniar. Notăm prin* $\mathcal{F}(M,\mathbb{X})$ **mulţimea funcţiilor definite pe mulţimea** M *şi* **cu valori în** $\mathbb{X}$,

$$\mathcal{F}(M,\mathbb{X}) = \{f; f : M \to \mathbb{X}\}.$$

Elementele mulţimii $\mathcal{F}(M,\mathbb{X})$ *le vom nota cu litere mici latine* $f,g,h,\ldots$. *Definim egalitatea a două funcţii* f *şi* g *prin*

$$f = g \Leftrightarrow [f(x) = g(x), \forall x \in M].$$

Pe mulţimea $\mathcal{F}(M,\mathbb{X})$ *definim două operaţii astfel:*
-*(adunarea funcţiilor)* $\forall (f,g) \in \mathcal{F}(M,\mathbb{X}) \times \mathcal{F}(M,\mathbb{X})$:
$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in M$ *şi*
-*(înmulţirea funcţiilor din* $\mathcal{F}(M,\mathbb{X})$ *cu scalari din câmpul* $\mathbb{K}$*)* $\forall(\alpha,f) \in \mathbb{K} \times \mathcal{F}(M,\mathbb{X})$ *:*
$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \forall x \in M.$
Să se arate că faţă de aceste legi de compoziţie mulţimea $\mathcal{F}(M,\mathbb{X})$ *are structura de spaţiu liniar peste câmpul* $\mathbb{K}$. *Dacă considerăm* $\mathbb{K} = M = \mathbb{R}$, *atunci* $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *se numeşte* **spaţiul liniar real al funcţiilor reale cu valori reale**.

Exerciţiul 3. *Fie* $(\mathbb{R},+,\cdot)$ *un corpul comutativ al numerelor reale. Notăm cu* $\mathbb{R}_n[x]$ **mulţimea polinoamelor de grad** $\leq n$ *cu coeficienţi din* $\mathbb{R}$, *în nedeterminata* x. *Să se arate că operaţiile de adunare a două polinoame şi de înmulţire a unui poliom cu un scalar din* $\mathbb{R}$ *determină pe* $\mathbb{R}_n[x]$ *o structură de spaţiu liniar.*

Exerciţiul 4. *Să se arate că* **mulţimea matricelor cu** m **linii şi** n **coloane**, $m,n \in \mathbb{N}^*$, *cu elemente din corpul comutativ* $(\mathbb{R},+,\cdot)$, *notată cu* $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *are o structura de spaţiu liniar în raport cu operaţiile de adunare a matricelor şi de înmulţire a matricelor cu scalari din corpul* $\mathbb{R}$.

Exerciţiul 5. *Fie* $\mathbb{R}$ *corpul comutativ al numerelor reale. Notam cu* $\mathcal{M}_n^a(\mathbb{R})$ **mulţimea matricelor patratice antisimetrice** *cu elemente din* $\mathbb{R}$ *şi cu* $\mathcal{M}_n^s(\mathbb{R})$ **mulţimea**

matricelor patratice simetrice *cu elemente din* $\mathbb{R}$. *Să se arate că ele formeaza subspaţii liniare ale lui* $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$ *(mulţimea matricelor patratice cu elemente din* $\mathbb{R}$*) şi ca orice matrice patratica se poate descompune în mod unic ca suma dintre doua matrice, una simetrica şi una antisimetrica, adica*

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n^s(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{M}_n^a(\mathbb{R})$.

Demonstraţi că această descompunere este unică.

Exerciţiul 6. *Fie* $S_1 = \left\{ A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}); A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ *şi* $S_2 = \left\{ B \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}); B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p & q & r \end{pmatrix}, p, q, r \in \mathbb{R} \right\}$

a) Să se arate că S_1 *şi* S_2 *sunt subspaţii liniare ale lui* $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

b) Să se arate că $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) = S_1 \oplus S_2$.

Exerciţiul 7. *Sa se precizeze care din submulţimile lui* $\mathbb{R}^n$ *definite mai jos constituie subspaţiu liniar al lui* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, \mathbb{R})$:

a) $\mathbf{W} = \{x \mid x \in \mathbb{R}^n, x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), x_1 = 0\}$;

b) $\mathbf{W} = \{x \mid x \in \mathbb{R}^n, x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), x_1 = 1\}$;

c) $\mathbf{W} = \{x \mid x \in \mathbb{R}^n, x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), x_1 = x_2\}$;

d) $\mathbf{W} = \{x \mid x \in \mathbb{R}^n, x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), x_1 x_2 = 0\}$;

e) $\mathbf{W} = \{x \mid x \in \mathbb{R}^n, x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0\}$;

f) $\mathbf{W} = \{x \mid x \in \mathbb{R}^n, x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), x_1 = x_2 = 0\}$;

g) $\mathbf{W} = \{x \mid x \in \mathbb{R}^n, x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), x_1 = 0\}$;

h) $\mathbf{W} = \{x \mid x \in \mathbb{R}^n, x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), x_1 \geq x_2\}$.

Exerciţiul 8. *Fie sistemul liniar omogen de ecuaţii :*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0, i = 1, \ldots, m.$$

Să se arate că mulţimea soluţiilor acestui sistem formeaza un subspaţiu liniar real al spaţiului $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, \mathbb{R})$ *şi poartă numele de* **spaţiul nul** *al matricei* A, $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ *şi se notează* $\ker(A) = \left\{x, x^T \in \mathbb{R}^n : Ax = \theta\right\}$.

Exerciţiul 9. *Sa se expliciteze subspaţiul soluţiilor urmatoarelor sisteme liniare şi să se precizeze dimensiunea subspaţiului :*

a) $\{x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$, *subspaţiu în* $(\mathbb{R}^4, +, \cdot, \mathbb{R})$;

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$, *subspaţiu în* $(\mathbb{R}^4, +, \cdot, \mathbb{R})$;

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ *, subspaţiu în* $(\mathbb{R}^4, +, \cdot, \mathbb{R})$;

d) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$ *, subspaţiu în* $(\mathbb{R}^4, +, \cdot, \mathbb{R})$;

e) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$ *, subspaţiu în* $(\mathbb{R}^4, +, \cdot, \mathbb{R})$;

f) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$ *, subspaţiu în* $(\mathbb{R}^5, +, \cdot, \mathbb{R})$.

Exerciţiul 10. *Se consideră vectorii*
$\mathbf{v}_1 = \left(3 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\right) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{v}_2 = \left(7, 1 + 2\sqrt{2}\right) \in \mathbb{R}^2$.
Să se arate că $\mathbf{v}_1$ *si* $\mathbf{v}_2$ *sunt liniar dependenţi dacă se consideră* $\mathbb{R}^2$ *spaţiu liniar peste corpul comutativ* $\mathbb{R}$ *şi liniar independenţi dacă se consideră* $\mathbb{R}^2$ *spaţiu liniar peste corpul comutativ* $\mathbb{Q}$ *.*

Exerciţiul 11. *Se dau vectorii liniar independenţi* $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ *în spaţiul liniar* $\mathbb{X}$ *peste corpul comuativ* $\mathbb{R}$ *şi se cere:*
a) să se arate că vectorii $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{v} + \mathbf{w}$, $\mathbf{u} + \mathbf{w}$ *sunt liniar independenţi;*
b) să se arate că vectorii $\mathbf{u} + \mathbf{v} - 3\mathbf{w}$, $\mathbf{u} + 3\mathbf{v} - \mathbf{w}$, $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ *sunt liniar dependenţi;*
c) să se arate că vectorii $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, $\mathbf{v} - \mathbf{w}$, $\mathbf{w} - \mathbf{u}$ *sunt liniar dependenţi.*

Exerciţiul 12. *În spaţiul liniar* $\mathbb{R}^3$ *se consideră vectorii:*
$x = (1, 2, 3)\,, y = (2, 3, 1)\,, z = (a + 3, a + 1, a + 2)\,, a \in \mathbb{R}.$
Să se afle valorile parametrului a *pentru care aceşti vectori sunt liniar dependenţi şi să se scrie relaţia de dependenţă liniară.*

Exerciţiul 13. *În spaţiul liniar* $\mathbb{R}^3$ *se consideră vectorii:*
$u_1 = (1, 1, 0)\,, u_2 = (1, 0, 0)\,, u_3 = (1, 2, 3)\,, u_4 = (1, 0, 1)\,.$
Să se analizeze dacă:
a) sistemul de vectori (u_1, u_2) *este un sistem de generatori pentru* $\mathbb{R}^3$*; este acest sistem de vectori liniar independent?*
b) sistemul de vectori (u_1, u_2, u_3) *este un sistem de generatori pentru* $\mathbb{R}^3$*; este acest sistem de vectori liniar independent?*
c) sistemul de vectori (u_1, u_2, u_3, u_4) *este un sistem de generatori pentru* $\mathbb{R}^3$*; este acest sistem de vectori liniar independent?*
Precizaţi ce concluzii se desprind de aici.

Exerciţiul 14. *Fie sistemul de vectori* $S = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5)$ *unde* $\mathbf{v}_1 = (1, 0, -1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (-2, 0, 0, -2)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_4 = (1, -1, -3, 1)$, $\mathbf{v}_5 = (1, -1, 1, -1)$. *Se notează mulţimea*
$[S] = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : x = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_3 + \alpha_3\mathbf{v}_3 + \alpha_4\mathbf{v}_4 + \alpha_5\mathbf{v}_5, \alpha_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,5}\right\}$.

Să se arate că $[S]$ *este subspaţiu liniar al lui* $(\mathbb{R}^4, +, \cdot, \mathbb{R})$. *Să se determine o bază în* $[S]$.

Exerciţiul 15. *Să se studieze independenţa liniară pentru sistemele de vectori din spaţiile liniare specificate:*

a) $((-4,-2,2),(6,3,-3),(1,-1,-1),(0,0,2))$ *în* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \mathbb{R})$;

b) $((2,3,-1),(0,-2,1),(-1,-1,-1))$ *în* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \mathbb{R})$;

c) $((1,\alpha,0),(\alpha,1,1),(1,0,\alpha))$ *în* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \mathbb{R})$;

d) $(8 - t + 7t^2, 2 - t + 3t^2, 1 + t - t^2)$ *in* $(\mathbb{R}_2[t], +, \cdot, \mathbb{R})$;

e) $\left(A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}\right)$ *în* $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$;

f) $((2,1,3,1),(1,2,0,1),(-1,1,-3,0))$ *în* $(\mathbb{R}^4, +, \cdot, \mathbb{R})$;

g) $\left(A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$ *în* $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$.

Exerciţiul 16. *Să se demonstreze că sistemul* $AX = B$ *este compatibil dacă şi numai dacă* B *aparţine spaţiului coloanelor matricei* A.

Conform definiţiei subspaţiului generat de un sistem de vectori, b aparţine spaţiului coloanelor matricei A dacă există $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ astfel încât

$$b = \alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + ... + \alpha_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$b = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Analizaţi compatibilitatea sistemelor folosind rezultatul Exerciţiului 16.

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Exercițiul 17. *Să se demonstreze că sistemul $AX = B$ are soluție unică dacă și numai dacă $\ker(A) = \{\theta\}$, unde $\ker(A) = \{X : AX = 0\}$.*

Exercițiul 18. *Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Este adevărată egalitatea $C(A) = C(B)$?*

Exercițiul 19. *Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Determinați o bază în spațiul coloanelor, o bază în spațiul liniilor matricei A și în spațiul nul. Precizați dimensiunile acestor spații.*

Exercițiul 20. *Analog pentru matricea*
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 9 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercițiul 21. *Să se arate că vectorii.$(1,0,0), (1,2,0), (1,2,3)$ formează o bază în $(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \mathbb{R})$.*

Exercițiul 22. *Fie*
$$A = \left\{ A | A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ y & 0 & 0 \\ u & z & 0 \end{pmatrix}, x = y + z, x, y, z, u \in \mathbb{R} \right\}.$$

a). Sa se atate ca $\mathcal{A}$ este subspațiu liniar real al lui $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

b). Matricele M, N, P constituie o baza în $\mathcal{A}$ unde

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercițiul 23. *În spațiul liniar* $(\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$ *consideram sistemul de matrice:*

$$S = \left(E_{ij}; i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}\right)$$

unde E_{ij} *sunt definite prin*

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} & & j & & \\ & & \downarrow & & \end{matrix} \\
\begin{matrix} \\ \\ \\ i \rightarrow \\ \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & \dots & \cdot & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \cdot & \dots & 0 \\ \dots & & 0 & & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & 0 & & \dots \\ 0 & \dots & \cdot & \dots & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

(E_{ij} are toate elementele nule, cu excepția celui de la intersecția liniei i cu coloana j, care este egal cu 1), constituie o bază, numită baza canonică *a spațiului* $(\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$.

Exercițiul 24. *Să se arate că* $S = (1, x, x^2, \dots, x^n)$ *este o bază în* $(\mathbb{R}_n[x], +, \cdot, \mathbb{R})$, *numită baza canonică a spațiului.*

Exercițiul 25. *Fie* $S = (v_1, v_2, ..., v_n) \subset \mathbb{R}_m$ *o mulțime de vectori coloană liniar independentă. Fie* $P \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ *o matrice nesingulară. Demonstrați că mulțimea* $S' = (Pv_1, Pv_2, ..., Pv_n)$ *este liniar independentă. Rezultatul se păstrează dacă* P *este singulară?*

Exercițiul 26. *Fie* $S = (v_1, v_2, ..., v_n) \subset \mathbb{R}^n$ *o mulțime de vectori linie liniar independentă. Să se demonstreze că* S *este liniar independentă dacă și numai dacă* $S' = (v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, ..., v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_n)$ *este liniar independentă.*

Exercițiul 27. *a) Să se determine coordonatele vectorului* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ *în baza canonică dacă în baza*

$$S_1 = (e_1' = (1,1,1), e_2' = (1,1,0), e_3' = (1,0,0))$$

are coordonatele $1, 2, 3$, $(x)_{S_1} = (1,2,3)$.

b) Ce coordonate are vectorul $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ *în baza* S_1 *dacă în baza*

$$S_2 = (e_1'' = (1,-1,1), e_2'' = (3,2,1), e_3'' = (0,1,0))$$

are coordontele $(\mathbf{y})_{S_2} = (2, 4, -2)$.

Exerciţiul 28. *Să se completeze până la o bază în* $\mathbb{R}^4$ *următoarea mulţime liniar independentă:*
$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\right)$.

Exerciţiul 29. *Fie sistemul de vectori* $S = (\mathbf{v}_1 = (1, 0, -1, 1), \mathbf{v}_2 = (1, 1, 1, -1))$.
Completaţi aceast sistem de vectori până la o bază în $(\mathbb{R}^4, +, \cdot, \mathbb{R})$.
Acelaşi lucru pentru vectorii $\mathbf{v}_1 = (1, 0, -1, 2), \mathbf{v}_2 = (0, 0, 1, -2)$

Exerciţiul 30. *Fie sistemul de vectori* $S = (\mathbf{v} = (1, 2, 3))$.
Completaţi aceast sistem de vectori până la o bază în $(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \mathbb{R})$.

Exerciţiul 31. *Să se stabilească formulele de transformare a coordonatelor când se trece de la baza* S *la baza* S' *dacă*
a) $S = ((2, 3), (0, 1))$, $S' = ((6, 4), (4, 8))$ *în* $\mathbb{R}^2$;
b) $S = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$, $S' = ((2, 0, 3), (-1, 4, 1), (3, 2, 5))$ *în* $\mathbb{R}^3$;
c) $S = (t^2, t, 1)$, $S' = (3 + 2t + t^2, t^2 - 4, t + 2)$ *în* $\mathbb{R}_2[\mathbf{x}]$
d) $S = ((1, 2, -1, 0), (1, -1, 1, 1), -1, 2, 1, 1), (-1, -1, 0, 1))$,
$S' = ((2, 1, 0, 1), (0, 1, 2, 2), (-2, 1, 1, 2), (1, 3, 1, 2))$ *în* $\mathbb{R}^4$.
e) $S = ((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$,
$S' = ((1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (1, 1, 1, 1))$ *în* $\mathbb{R}^4$.

Exerciţiul 32. *Să se arate că sistemul de vectori* $((1, 1, 0, 0), (1, -1, 1, 1))$ *nu este o bază în subspaţiul soluţiilor sistemului*
$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$.

Exerciţiul 33. *Se dau matricele*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) *Să se studieze liniara dependenţă a acestor matrice în* $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$.
b) *Să se completeze mulţimea acestor matrice până la o bază în spaţiul* $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$.
c) *Este baza obţinută la fel orientată cu baza canonică a spaţiului dat?*

1. Exercitii suplimentare

Exerciţiul 34. *Fie* $(\mathbb{X}, +, \cdot, \mathbb{K})$ *un spaţiul liniar şi* S_1, S_2 *două sisteme de vectori din* $\mathbb{X}, S_1 \subset S_2$. *Demostraţi că*

a) dacă S_1 *este liniar dependent, atunci* S_2 *este liniar dependent.*

b) dacă S_2 *este liniar independent, atunci* S_1 *este liniar independent.*

Exerciţiul 35. *Fie* $(\mathbb{X}, +, \cdot, \mathbb{K})$ *un spaţiul liniar şi* $S = (v_1, v_2, ..., v_n)$ *o bază din* $\mathbb{X}$. *Orice sistem de vectori care conţine mai mult de* n *vectori este liniar dependent.*

Exerciţiul 36. *Fie* $(\mathbb{X}, +, \cdot, \mathbb{K})$ *un spaţiul liniar şi* $(\mathbb{V}, +, \cdot, \mathbb{K})$ *un subspaţiul liniar a lui* $\mathbb{X}$. *Demonstraţi că* $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V} \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{X}$.

Exerciţiul 37. *Fie* $(\mathbb{X}, +, \cdot, \mathbb{K})$ *un spaţiul liniar şi* $(\mathbb{V}, +, \cdot, \mathbb{K})$ *un subspaţiul liniar a lui* $\mathbb{X}$. *Dacă* $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V} = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{X}$ *atunci* $\mathbb{V} = \mathbb{X}$.

Exerciţiul 38. *(***Teorema lui Grassmann)** *Fie* $\mathbb{X}$ *un* $\mathbb{K}$*-spaţiu liniar finit dimensionat. Dacă* $\mathbb{V}_1$ *şi* $\mathbb{V}_2$ *sunt două subspaţii liniare ale lui* $\mathbb{X}$ *atunci are loc relaţia*

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V}_1 + \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V}_2 = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2) + \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2).$$

Exerciţiul 39. *Fie* $(\mathbb{V}, +, \cdot, \mathbb{R})$ *un spaţiu liniar iar* $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2$ *două subspaţii liniare ale lui* $\mathbb{V}$ *cu* $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{V}_1 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{V}_2 = 6$ *şi* $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{V} = 10$. *care este cea mai mică valoare posibilă a lui* $\dim_{\mathbb{R}} (\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2)$?

Exerciţiul 40. *Fie* $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ *o matrice de ordinul* n*, cu elemente reale sau complexe. Dacă*

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = \overline{1,n}$$

să se arate că $\det A \neq 0$.

Exerciţiul 41. *Fie* $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ *o matrice reală sau complexă, de ordinul* n*, având proprietatea că* $\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}| < 1$ *pentru* $i = \overline{1,n}$. *Să se arate că matricele* $I + A$ *şi* $I - A$ *sunt inversabile.*

Exerciţiul 42. *Fie* $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,2013}}$ *o matrice în care* $a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}, \forall i, j = \overline{1, 2013}$. *Să se arate că determinantul matricei*

$2014 I_{2013} + A$

este nenul.

Exerciţiul 43. *Să se stabilească, fără a calcula determinantul, dacă matricea*

$$A = \begin{pmatrix} n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & n & \cdots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

este nesingulară.

Exerciţiul 44. *Fie $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ astfel încât $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 0$ pentru $i = 1, 2, ..., m$. Să se explice de ce coloanele matricei A sunt liniar dependente şi deci $rang(A) < n$.*

Exerciţiul 45. *Fie $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Să se justifice că dacă $rang(A) = r$ atunci* $\dim_R C(A) = \dim_R L(A) = r$ *şi* $\dim_R \ker(A) = n - r, \dim_R \ker(A^T) = m - r$.

Exerciţiul 46. *Să se demonstreze că $rang(A + B) \leq rang(A) + rang(B)$.*

Indicaţie. Se demonstrează că
$rang(A + B) = \dim_R C(A + B) \leq \dim_R (C(A) + C(B)) \leq$
$\leq \dim_R C(A) + \dim_R C(B) - \dim_R (C(A) \cap C(B)) \leq$
$\leq \dim_R C(A) + \dim_R C(B) = rang(A) + rang(B)$.

Exerciţiul 47. *Să se demonstreze că $|rang(A) - rang(B)| \leq rang(A - B)$.*

Exerciţiul 48. *Să se explice de ce coloanele matricei*

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \cdots & x_m^{n-1} \end{pmatrix}$$

sunt liniar independente dacă $n \leq m$.