# Języki Formalne i Techniki Translacji

Ćwiczenia

**Michał Budnik (234586)**

Lista 4 - Zadanie 6

20 listopada 2018

## 1 Zadanie

Pokazać, że jeśli wszystkie produkcje gramatyki bezkontekstowej mają postać A $\rightarrow \omega$B lub A $\rightarrow \omega$, gdzie A i B są symbolami nieterminalnymi a $\omega$ słowem złożonym tylko z symboli terminalnych, to język generowany przez tą gramatykę jest regularny.

Pokazać, że jeśli język jest regularny to istnieje gramatyka bezkontekstowa generująca ten język której wszystkie produkcje mają postać A $\rightarrow a$B lub A $\rightarrow a$, gdzie A i B są symbolami nieterminalnymi, a $a$ symbolem terminalnym.

### 1.1 Rozwiązanie części pierwszej

Gramatyka bezkontekstowa jest definiowana jako:

$$G = (N, T, P, S)$$

- $N$ - skończony zbiór symboli nieterminalnych
- $T$ - skończony zbiór symboli terminalnych
- $P$ - skończony zbiór przejść
- $S \in N$ - wyróżniony symbol startowy

W celu udowodnienia pierwszej tezy należy zbudować odpowiedni automat skończony który będzie akceptował język opisany zadaną gramatyką. Jest to poprawny sposób udowodnienia tej tezy wynikający z faktu, że dla każdego języka regularnego można zbudować automat skończony który będzie go akceptować. Należy również zwrócić uwagę na to, żeby wynaczony autmat akceptował tylko i wyłącznie ten język.

W celu rozwiązania problemu weźmy zatem skończony automat:

$$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

- $Q = N \cup \{q_f\} \quad q_f \notin N$
- $\Sigma = T$
- $q_0 = S$
- $F = \{q_f\}$

Funkcja przejścia $\delta$ tego automatu zostaje określona jako:

$$\delta(q, a) = \{q_f : a \rightarrow a \in P\} \cup \{p : q \rightarrow ap \in P\}$$

Tak określony automat akceptuje każde słowo które może zostać wyprowadzone w zadanej gramatyce.
Dla dowolnego $a = a_1a_2a_3...a_{(n-1)}a_n \in L(G)$ istnieje ścieżka w wyznaczonym automacie:

$$S \rightarrow a_1A_1 \rightarrow a_1a_2A_2 \rightarrow ... \rightarrow a_1a_2a_3...a_{n-1}a_n$$

Mając natomiast słowo $b = b_1b_2b_3...b_{n-1}b_n$ akceptowane przez automat wiemy, że w zadanej gramatyce istnieją produkcje pozwalające na wyprowadzenie $b$:

$$S \rightarrow b_1B_1, B_1 \rightarrow b_2B_2, ..., B_{n-2} \rightarrow b_{n-1}B_{n-1}, B_{n-1} \rightarrow b_n,$$

co kończy dowód.

## 1.2 Rozwiązanie części drugiej

Wiemy, że skoro język $L$ generowany przez jakąś gramatykę jest regularny, to istnieje deterministyczny automat skończony akceptujący ten język. W celu udowodnienia drugiej tezy gramatyka rozpoznająca ten sam język zostanie skonstruowana na podstawie $DFA$ tego języka. Zakładamy posiadanie odpowiedniego $DFA$: $M = (\Sigma, Q, q_0, \delta, F)$. Tworzymy więc gramatykę $G = (N, T, P, S)$, gdzie: $N = Q, T = \Sigma, S = q_0$, a produkcje to:

$$P = \{q_n \rightarrow a_n : a_n \in \Sigma \wedge \delta(q_n, a_n) \in F\} \cup \{q_n \rightarrow a_nX : a_n \in \Sigma \wedge \delta(q_n, a_n) \in F, X \in P\}$$

Dla tak zadanej gramatyki należy pokazać, że dla dowolnego słowa $a = a_1a_2...a_n$ akceptowanego przez $M$, możliwe jest jego wygenerowanie w $G$. Automat $M$ analizując słowo $a$ przejdzie do stanu akceptującego w następujący sposób:

$$q_0 \rightarrow a_1q_1, q_1 \rightarrow a_2q_2, .., q_{n-1} \rightarrow a_nq_f$$

korzystając ze zbioru produkcji gramatyki $G$ można utworzyć ciąg wyprowadzeń:

$$q_0 \rightarrow a_1q_1 \rightarrow a_1a_2q_2 \rightarrow ... \rightarrow a_1a_2...a_n$$

z czego wynika, że nasze słowo może być wygenerowane przez $G$.

Dowód w drugą stronę przeprowadzany jest w analogiczny sposób. Znamy gramatykę, która opisuje ten sam język, co $DFA$ opisujący nasz język regularny, a więc jeśli język jest regularny, to istnieje taka gramatyka bezkontekstowa.