

Rapport d'étape du projet ECMA

HASSAN Lucas, NGUYEN Tito

décembre 2015

1 Modélisation du problème sous la forme d'un PL

1.1 Modélisation naïve du problème

Dans un premier temps, on ne s'intéresse pas à la contrainte de connexité du problème. Le problème se modélise alors naturellement de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{(i,j) \in M} x_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & H^p(M) + H^a(M) \geq 2 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\text{Où } H^p(M) = \frac{\sum_{(i,j) \in M} H_{ij}^p C_{ij}^p x_{ij}}{\sum_{(i,j) \in M} C_{ij}^p x_{ij}} \text{ et } H^a(M) = \frac{\sum_{(i,j) \in M} H_{ij}^a C_{ij}^a x_{ij}}{\sum_{(i,j) \in M} C_{ij}^a x_{ij}}$$

1.2 Linéarisation de la modélisation

On remarque que la contrainte définie est fractionnaire. Ainsi on choisit la linéariser de la manière suivante :

La contrainte s'écrit aussi :

$$\sum_{(i,j) \in M} H_{ij}^p C_{ij}^p x_{ij} \left(\sum_{(i,j) \in M} C_{ij}^p x_{ij} \right) + \sum_{(i,j) \in M} H_{ij}^a C_{ij}^a x_{ij} \left(\sum_{(i,j) \in M} C_{ij}^a x_{ij} \right) \geq 2 \left(\sum_{(k,l) \in M} C_{kl}^a x_{kl} \right) \left(\sum_{(k,l) \in M} C_{kl}^p x_{kl} \right) \tag{2}$$

Définissons les variables réelles p et a telle que :

$$\begin{aligned} p &= \left(\sum_{(i,j) \in M} C_{ij}^p x_{ij} \right) \\ a &= \left(\sum_{(i,j) \in M} C_{ij}^a x_{ij} \right) \end{aligned} \tag{3}$$

Les contraintes du problème d'optimisation s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \sum_{(i,j) \in M} H_{ij}^p C_{ij}^p p x_{ij} + \sum_{(i,j) \in M} H_{ij}^a C_{ij}^a a x_{ij} \geq 2 \left(\sum_{(i,j) \in M} C_{ij}^a p x_{ij} \right) \\ p = \left(\sum_{(i,j) \in M} C_{ij}^p x_{ij} \right) \\ a = \left(\sum_{(i,j) \in M} C_{ij}^a x_{ij} \right) \end{cases} \tag{4}$$

On définit ensuite $\forall (i,j) \in M \quad a_{ij} = a x_{ij}$ et $p_{ij} = p x_{ij}$

On sait que l'égalité $a_{ij} = a x_{ij}$ s'écrit encore :

$$\begin{aligned} a_{ij} &\leq a_{\max} x_{ij} \\ a_{ij} &\leq a \\ a_{ij} &\geq (x_{ij} - 1) a_{\max} + a \\ a_{ij} &\geq 0 \end{aligned} \tag{5}$$

où a_{max} est une borne supérieur de a . Une borne supérieur triviale de a est ici $\sum_{(i,j) \in M} C_{ij}^a$. Il en est de même pour la contrainte $p_{ij} = px_{ij}$.
Ainsi, on définit le problème linéarisé :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \sum_{(i,j) \in M} x_{ij} \\ \sum_{(i,j) \in M} H_{ij}^p C_{ij}^p p_{ij} + \sum_{(i,j) \in M} H_{ij}^a C_{ij}^a a_{ij} \geq 2 \left(\sum_{(i,j) \in M} C_{ij}^a p_{ij} \right) \\ \forall (i,j) \in M \quad a_{ij} \leq a_{max} x_{ij} \quad p_{ij} \leq p_{max} x_{ij} \\ \forall (i,j) \in M \quad a_{ij} \leq a \quad p_{ij} \leq p \\ \forall (i,j) \in M \quad a_{ij} \geq (x_{ij} - 1) a_{max} + a \quad p_{ij} \geq (x_{ij} - 1) p_{max} + p \\ \forall (i,j) \in M \quad a_{ij} \geq 0 \quad p_{ij} \geq 0 \\ a = \left(\sum_{(i,j) \in M} C_{ij}^a x_{ij} \right) \quad p = \left(\sum_{(i,j) \in M} C_{ij}^p x_{ij} \right) \end{array} \right. \quad (6)$$

1.3 Prise en compte de la contrainte de connexité

Une commune peut être représentée par un graphe non orienté tel que chaque chaque maille (i, j) est un nœud du graphe, les nœuds étant reliés par des arrêtes si les mailles correspondante sont adjacentes dans $Z = \{(i, j) \in M \mid x_{ij} = 1\}$. On dira qu'un nœud (i, j) est à la distance k d'un nœud (m, n) si il existe une chaîne de taille k allant de (i, j) vers (m, n) .

Soit $\forall (i, j, k) \in M \times \llbracket 0; Card(M) - 1 \rrbracket$ $S_{i,j,k}$ qui vaut 1 si le nœud (i, j) est à la distance k d'un nœud central (i_0, j_0) et 0 sinon. On lui associe les contraintes suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{(i,j) \in M} S_{i,j,0} = 1 \\ \sum_{(k) \in M} S_{ijk} = x_{ij} \\ \forall (i, j, k) \in M \times N \quad S_{i,j,k} \leq S_{i-1,j,k-1} + S_{i+1,j,k-1} + S_{i,j-1,k-1} + S_{i,j+1,k-1} \end{array} \right. \quad (7)$$

Où $N = \llbracket 0; Card(M) - 1 \rrbracket$

- La première contrainte assure de choisir un et un seul nœud central
- La seconde contrainte assure de n'attribuer de distance que pour les mailles de Z
- La dernière contrainte assure que (i, j) ne peut être à la distance k du nœud centrale que si au moins l'un de ses voisins est à la distance $k - 1$.

Le problème global s'écrit donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \sum_{(i,j) \in M} x_{ij} \\ \sum_{(i,j) \in M} H_{ij}^p C_{ij}^p p_{ij} + \sum_{(i,j) \in M} H_{ij}^a C_{ij}^a a_{ij} \geq 2 \left(\sum_{(i,j) \in M} C_{ij}^a p_{ij} \right) \\ \forall (i,j) \in M \quad a_{ij} \leq a_{max} x_{ij} \quad p_{ij} \leq p_{max} x_{ij} \\ \forall (i,j) \in M \quad a_{ij} \leq a \quad p_{ij} \leq p \\ \forall (i,j) \in M \quad a_{ij} \geq (x_{ij} - 1) a_{max} + a \quad p_{ij} \geq (x_{ij} - 1) p_{max} + p \\ \forall (i,j) \in M \quad a_{ij} \geq 0 \quad p_{ij} \geq 0 \\ a = \left(\sum_{(i,j) \in M} C_{ij}^a x_{ij} \right) \quad p = \left(\sum_{(i,j) \in M} C_{ij}^p x_{ij} \right) \\ \forall k \in N \quad \sum_{(k) \in M} S_{ijk} = x_{ij} \quad \sum_{(i,j) \in M} S_{i,j,0} = 1 \\ \forall (i, j, k) \in M \times N \quad S_{i-1,j,k-1} + S_{i+1,j,k-1} + S_{i,j-1,k-1} + S_{i,j+1,k-1} \end{array} \right. \quad (8)$$