Rapport d'étape du projet ECMA

HASSAN Lucas, NGUYEN Tito

décembre 2015

1 Modélisation du problème sous la forme d'un PL

1.1 Modélisation naïve du problème

Dans un premier temps, on ne s'intéresse pas à la contrainte de connexité du problème.
Le problème se modélise alors naturellement de la façon suivante :

$$\begin{gathered} \max \sum_{(i,j)\in M} x_i ij \\ H^p(M) + H^a(M) \geq 2 \end{gathered} \tag{1}$$

Où $H^p(M) = \frac{\sum\limits_{(i,j)\in M} H^p_{ij} C^p_{ij} x_{ij}}{\sum\limits_{(i,j)\in M} C^p_{ij} x_{ij}}$ et $H^a(M) = \frac{\sum\limits_{(i,j)\in M} H^p_{ij} C^a_{ij} x_{ij}}{\sum\limits_{(i,j)\in M} C^a_{ij} x_{ij}}$

1.2 Linéarisation de la modélisation

On remarque que la contrainte définie est fractionnaire. Ainsi on choisit la linéariser de la manière suivante :

La contrainte s'écrit aussi :

$$\sum_{(i,j)\in M} H^p_{ij} C^p_{ij} x_{ij} (\sum_{(i,j)\in M} C^a_{ij} x_{ij}) + \sum_{(i,j)\in M} H^a_{ij} C^a_{ij} x_{ij} (\sum_{(i,j)\in M} C^p_{ij} x_{ij}) \geq 2(\sum_{(k,l)\in M} C^a_{kl} x_{kl})(\sum_{(k,l)\in M} C^p_{kl} x_{kl}) \tag{2}$$

On Constate que cette formulation n'est équivalente à la première que si $\sum\limits_{(k,l)\in M} C^p_{kl} x_{kl}$ et $\sum\limits_{(k,l)\in M} C^a_{kl} x_{kl}$ sont non nulles.

Il faut donc ajouter les contraintes :

$$\begin{gathered} \sum_{(k,l)\in M} C^p_{kl} x_{kl} \geq 0 \\ \sum_{(k,l)\in M} C^a_{kl} x_{kl} \geq 0 \end{gathered} \tag{3}$$

Définissons les variables réelles p et a telle que :

$$\begin{gathered} p = (\sum_{(i,j)\in M} C^p_{ij} x_{ij}) \\ a = (\sum_{(i,j)\in M} C^a_{ij} x_{ij}) \end{gathered} \tag{4}$$

Les contraintes du problème d'optimisation s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \sum\limits_{(i,j)\in M} H^p_{ij} C^p_{ij} a x_{ij} + \sum\limits_{(i,j)\in M} H^a_{ij} C^a_{ij} p x_{ij} \geq 2(\sum\limits_{(i,j)\in M} C^a_{ij} p x_{ij}) \\ p = (\sum\limits_{(i,j)\in M} C^p_{ij} x_{ij}) \\ a = (\sum\limits_{(i,j)\in M} C^a_{ij} x_{ij}) \end{cases} \tag{5}$$

On définit ensuite $\forall (i,j) \in M \quad a_{ij} = ax_{ij}$ et $p_{ij} = px_{ij}$
On sait que l'égalité $a_{ij} = ax_{ij}$ s'écrit encore :

$$\begin{aligned} & a_{ij} \leq a_{max} x_{ij} \\ & a_{ij} \leq a \\ & a_{ij} \geq (x_{ij} - 1) a_{max} + a \\ & a_{ij} \geq 0 \end{aligned} \tag{6}$$

où a_{max} est une borne supérieur de a. Une borne supérieur triviale de a est ici $\sum_{(i,j)\in M} C^a_{ij}$. Il en est de même pour la contrainte $p_{ij} = px_{ij}$.

Ainsi, on définit le problème linéarisé :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \max \sum_{(i,j)\in M} x_{ij} & & \\ \multicolumn{3}{l}{\sum_{(i,j)\in M} H^p_{ij} C^p_{ij} a_{ij} + \sum_{(i,j)\in M} H^a_{ij} C^a_{ij} p_{ij} \geq 2 (\sum_{(i,j)\in M} C^a_{ij} p_{ij})} \\ \forall (i,j) \in M & a_{ij} \leq a_{max} x_{ij} & p_{ij} \leq p_{max} x_{ij} \\ \forall (i,j) \in M & a_{ij} \leq a & p_{ij} \leq p \\ \forall (i,j) \in M & a_{ij} \geq (x_{ij} - 1) a_{max} + a & p_{ij} \geq (x_{ij} - 1) p_{max} + p \\ \forall (i,j) \in M & a_{ij} \geq 0 & p_{ij} \geq 0 \\ & a = (\sum_{(i,j)\in M} C^a_{ij} x_{ij}) & p = (\sum_{(i,j)\in M} C^p_{ij} x_{ij}) \\ & p > 0 & a > 0 \end{array} \right. \tag{7}$$

1.3 Prise en compte de la contrainte de connexité

Une commune peut être représentée par un graphe non orienté tel que chaque chaque maille (i,j) est un nœud du graphe, les nœuds étant reliés par des arrêtes si les mailles correspondante sont adjacentes dans $Z = \{(i,j) \in M \quad | \quad x_{ij} = 1\}$. On dira qu'un nœud (i,j) est à la distance k d'un nœud (m,n) si il existe une chaîne de taille k allant de (i,j) vers (m,n).

Soit $\forall (i,j,k) \in M \times [\![0; Card(M) - 1]\!] \quad S_{i,j,k}$ qui vaut 1 si le nœud (i,j) est à la distance k d'un nœud central (i_0, j_0) et 0 sinon. On lui associe les contraintes suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{(i,j)\in M} S_{i,j,0} = 1 \\ \sum_{(k)\in M} S_{ijk} = x_{ij} \\ \forall (i,j,k) \in M \times N \quad S_{i,j,k} \leq S_{i-1,j,k-1} + S_{i+1,j,k-1} + S_{i,j-1,k-1} + S_{i,j+1,k-1} \end{array} \right. \tag{8}$$

Où $N = [\![0; Card(M) - 1]\!]$

— La première contrainte assure de choisir un et un seul nœud central
— La seconde contrainte assure de n'attribuer de distance que pour les mailles de Z
— La dernière contrainte assure que (i,j) ne peut être à la distance k du nœud centrale que si au moins l'un de ses voisins est à la distance $k-1$.

Le problème global s'écrit donc :

$$
\left\{
\begin{array}{lll}
\max \sum\limits_{(i,j)\in M} x_{ij} & & \\
\sum\limits_{(i,j)\in M} H^p_{ij} C^p_{ij} a_{ij} + \sum\limits_{(i,j)\in M} H^a_{ij} C^a_{ij} p_{ij} \geq 2(\sum\limits_{(i,j)\in M} C^a_{ij} p_{ij}) & & \\
\forall (i,j) \in M & a_{ij} \leq a_{max} x_{ij} & p_{ij} \leq p_{max} x_{ij} \\
\forall (i,j) \in M & a_{ij} \leq a & p_{ij} \leq p \\
\forall (i,j) \in M & a_{ij} \geq (x_{ij} - 1) a_{max} + a & p_{ij} \geq (x_{ij} - 1) p_{max} + p \\
\forall (i,j) \in M & a_{ij} \geq 0 & p_{ij} \geq 0 \\
 & a = (\sum\limits_{(i,j)\in M} C^a_{ij} x_{ij}) & p = (\sum\limits_{(i,j)\in M} C^p_{ij} x_{ij}) \\
 & p > 0 & a > 0 \\
\forall k \in N & \sum\limits_{(k)\in M} S_{ijk} = x_{ij} & \sum\limits_{(i,j)\in M} S_{i,j,0} = 1 \\
\forall (i,j,k) \in M \times N & S_{i,j,k} \leq S_{i-1,j,k-1} + S_{i+1,j,k-1} + S_{i,j-1,k-1} + S_{i,j+1,k-1} &
\end{array}
\right.
\tag{9}
$$

(Les effets de bords pour la dernière contrainte ne sont pas spécifiés pour simplifier les notations)

1.4 Remarque

Les résultat seront présentés dans le rapport final, mais on peut déjà constater que la contrainte de connexité engendre un nombre très important de variable de décision (De l'ordre de $Card(M)^2$). Même sur des instance de taille très raisonnable (10x10), on génère 10000 variables. Une première question sera donc de se demander si on peut limiter le nombre de variable à ajouter pour définir les contraintes de connexité.

Ceci sera présenté dans le rapport final.