

# ONDES GRAVITATIONNELLES

rapport réalisé par:

RAYEN BEN ISMAIL

encadrante:

MARLÈNE NAHRANG

Un grand merci à:

NADINE ATTIEH - GRÉGOIRE PIHAN



**IMT Atlantique**  
Bretagne - Pays de la Loire  
Ecole Mines-Télécom



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Présentation</b>	<b>2</b>
1.1	présentaion du contexte . . . . .	2
1.2	Problématique . . . . .	2
1.3	notation . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
2.1	Historique . . . . .	4
2.2	Relativité restreinte . . . . .	4
2.3	Vers une théorie de gravitation relativiste . . . . .	5
2.3.1	princie d'équivalence . . . . .	5
2.3.2	l'expérience du disque . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Relativité générale</b>	<b>7</b>
3.1	Métrique et tenseurs . . . . .	7
3.2	Transport parallèle, géodésique et tenseur de Rieman . . . . .	7
3.2.1	le transport parallèle . . . . .	7
3.2.2	géodésique . . . . .	8
3.3	Equation d'Einstein . . . . .	8
3.3.1	la métrique et les symboles de Christofel . . . . .	8
3.3.2	Tenseur de la courbure . . . . .	9
3.3.3	Tenseur d'énergie-impulsion . . . . .	9
3.3.4	Equation de la relativité générale . . . . .	9
3.3.5	Conclusion . . . . .	10
3.4	Ondes gravitationnelles . . . . .	10
3.4.1	Linéarisation de l'équation d'Einstein . . . . .	10
3.4.2	Jauge de Lorentz . . . . .	11
3.4.3	Résoltion dans le vide . . . . .	11
3.4.4	Jauge TT (transverse-traceless) . . . . .	11
3.4.5	génération des ondes gravitationnelles . . . . .	12
3.4.6	un tenseur energie-impulsion fluctuant . . . . .	13
3.4.7	Intéraction avec la matière et principe de détection . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>15</b>

# Chapitre 1

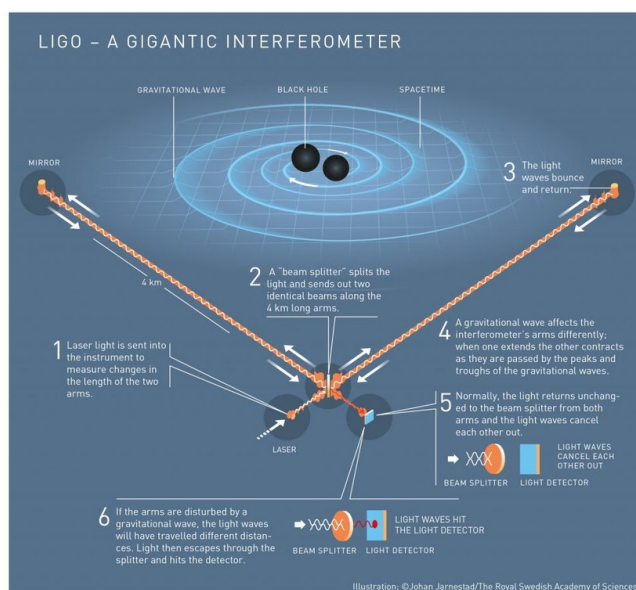
## Présentation

### 1.1 présentation du contexte

Ce rapport est le résultat d'un projet de 4 mois, durant l'unité d'enseignement CODEV Recherche au sein de la formation ingénieur d'IMT Atlantique, à Subatech, le laboratoire de physique subatomique et des technologies associées, situé dans le bâtiment d'IMT Atlantique. C'est un institut de recherche affilié à l'université de Nantes et l'Institut National de la Physique Nucléaire et de Physique des Particules (IN2P3) du CNRS.

### 1.2 Problématique

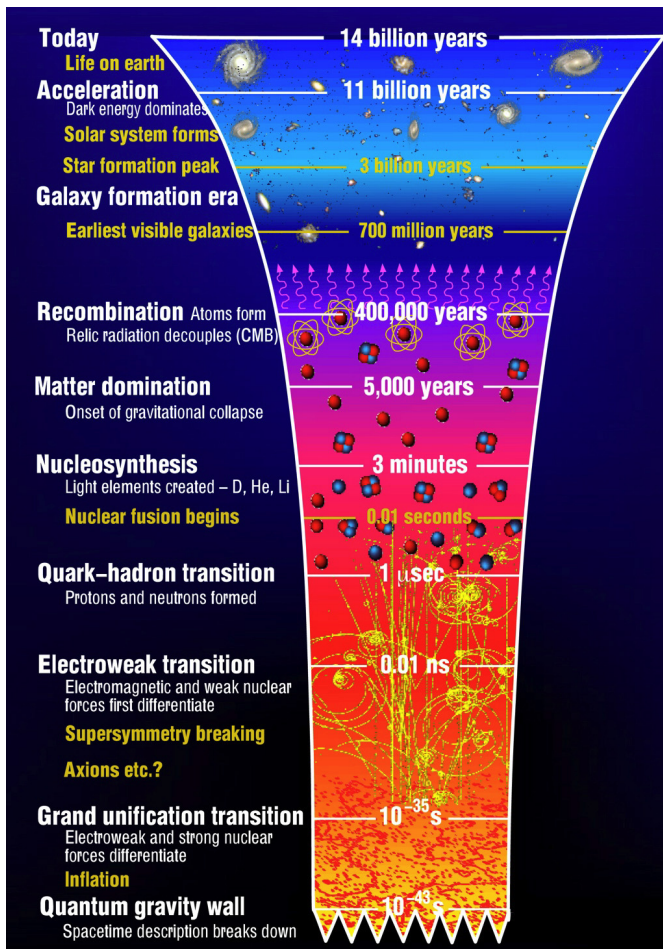
le 14 septembre 2015, LIGO, observatoire d'onde gravitationnelle par interférométrie laser et projet conjoint des scientifiques du MIT, a réalisé une première détection directe d'onde gravitationnelle issue d'une collision de deux trous noirs situés à 1.3 milliard année lumière. Tous les laboratoires qui détectent les ondes gravitationnelles utilisent le même principe ; c'est l'interferométrie.



Source :<https://www.researchgate.net>

Comme une onde gravitationnelle provoque une déformation de la fabrique de l'espace-temps, le principe est basé sur le temps de propagation de la lumière. Ainsi l'objectif de ce codev recherche est, d'une part, d'étudier une source d'ondes gravitationnelles de l'univers primordial

qui est la transition quark-hadron à 10 micro secondes après le Big bang. D'autre part, on prouvera le principe de détection en étudiant l'interaction d'une onde gravitaionnelle avec la matière.



Source : <https://www.ctc.cam.ac.uk/outreach/origins/bigbang.htm>

## 1.3 notation

On notera le symbole de Kronecker  $\delta^{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} = \delta\nu_{\mu} = \delta\mu_{\nu}$  et l'impulsion de Dirac  $\delta$ . Le laplacien et le d'Alembertien seront notés respectivement " $\Delta$ " et " $\square$ ". Les lettres grecques en indice ou en exposant en relativité générale sont des indices allant de 0 à 3 ou l'indice 0 correspond à la composante temporelle. On utilisera la convention de sommation d'Einstein. Enfin, on travaillera avec les unités naturelles :  $\hbar = c = k_B = 1$ .

# Chapitre 2

## Introduction

### 2.1 Historique

En physique, il existe quatre forces fondamentales dans l'univers ; la gravitation, la force électromagnétique, l'interaction faible et l'interaction forte. La gravitation, étant la première qui a été découverte, a été décrite par Isaac Newton en 1687 par sa loi universelle de gravitation. Elle s'énonce comme suit : " Deux corps ponctuels de masses respectives  $m_1$  et  $m_2$  s'attirent avec des forces vectoriellement opposées et de même norme. Cette valeur est proportionnelle aux deux masses et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare :  $\|\vec{F}\| = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$  avec  $G$  est la constante universelle." La loi de Newton peut être exprimé sous la forme de l'équation de Poisson :

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho \quad (2.1)$$

l'équation de mouvement s'exprime par :  $\ddot{\vec{x}} = -\vec{\nabla}\Phi$

En prenant  $\vec{s} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$  on peut écrire :

$$\ddot{\vec{s}} = -(\vec{s} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \phi \quad (2.2)$$

La problématique qui se pose avec la gravité Newtonnienne est qu'elle agit *instantanément* !

### 2.2 Relativité restreinte

En 1871, Abraham Michelson et Edward Morley ont utilisé ce qu'on appelle aujourd'hui l'interféromètre de Michelson pour mesurer la célérité de lumière dans deux directions orthogonales.

Le résultat de l'expérience a été très surprenant. La célérité de la lumière était constante indépendamment de la position et le mouvement de la terre. Donc la lumière ne suit pas les principes de la relativité galiléenne (loi de décomposition de la vitesse).

Ce problème a été résolu en 1905 par Albert Einstein en énonçant la théorie de la relativité restreinte qui est basé sur un nouveau principe : la célérité de la lumière dans le vide est une constante universelle.

Ce nouveau postulât a révolutionné notre compréhension de l'espace et du temps. En relativité restreinte la distance entre deux événements dans cet espace est défini comme suit :

$$\Delta s^2 = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \quad (2.3)$$

Donc ce référentiel inertiel d'espace-temps est décrit par un espace de Minkowski (euclidien en 4D) de métrique :

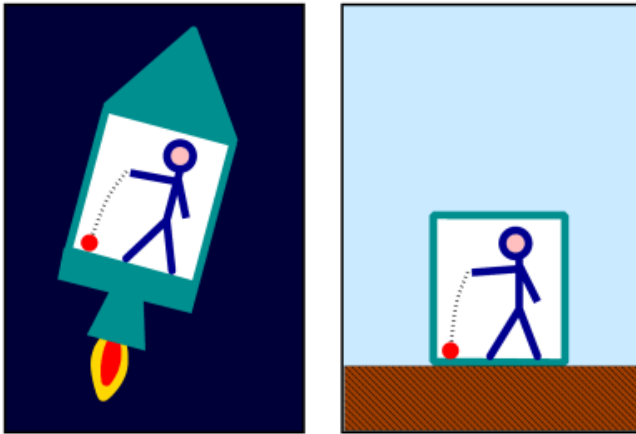
$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 2.3 Vers une théorie de gravitation relativiste

### 2.3.1 principe d'équivalence

Une personne dans un ascenseur en chute libre ne ressent aucun effet de gravitation. A partir de cette expérience, Albert Einstein constate l'égalité de la masse inertielle et la masse gravitationnelle. Alors, le principe d'équivalence d'Einstein postule qu'on ne peut jamais distinguer localement un mouvement de chute libre dans un champ gravitationnel et d'un mouvement accéléré en absence de champ gravitationnel.

La gravitation et l'accélération sont localement équivalentes. (\*)

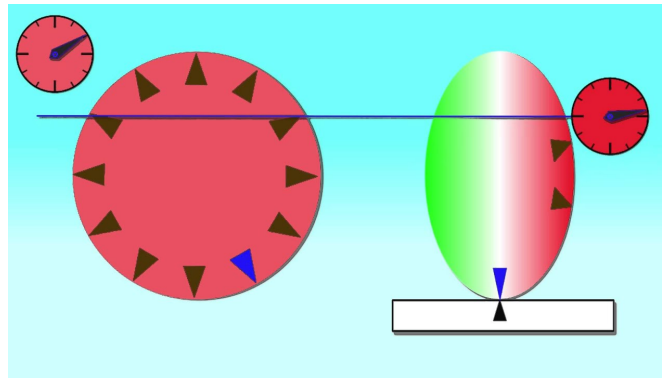


Source : <https://www.astronomes.com/etoile-massive/relativite-generale/>

### 2.3.2 l'expérience du disque

L'expérience du disque en rotation a joué un rôle important dans le développement d'une théorie relativiste de gravitation. En fait, lorsqu'un disque tourne suffisamment vite de telle façon que les points sur sa circonférence peuvent avoir une vitesse proche de celle de la lumière, on montre dans le cadre de la relativité restreinte que la circonférence du disque est différente dans les deux repères à cause de la contraction de Lorentz. Mais le rayon, étant perpendiculaire au mouvement, ne subit pas de contraction. Donc le rapport de la circonférence sur le rayon dans le repère tournant est différent de  $2\pi$ . C'est le paradoxe d'Ehrenfest. Une déduction intuitive est que le disque est voilé ou déchiré, or ce n'est pas le cas. Donc, la géométrie du deuxième repère est non euclidienne.

Une théorie relativiste de gravitation devrait être élaborée dans une géométrie courbe. (\*\*)



(\*) (\*\*) La gravité est entièrement déterminée par  $g_{\mu\nu}$  qui décrit l'accélération du référentiel choisi par rapport à un référentiel inertiel. Donc, dans le cadre de la relativité générale, la gravité n'est qu'un effet géométrique de la courbure de l'espace-temps.

# Chapitre 3

## Relativité générale

### 3.1 Métrique et tenseurs

La métrique  $g_{\mu\nu}$  décrit localement la courbure. En utilisant le théorème de Pythagore généralisée, on exprime l'intervalle élémentaire de l'espace-temps  $ds$  dans un référentiel par :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (3.1)$$

L'intervalle élémentaire de l'espace-temps est un invariant relativiste ; invariant par changement de coordonnées. Par contre, Le tenseur métrique dépend des coordonnées choisies. Les tenseurs sont fondamentale en RG car une équation entre tenseurs reste vraie pour tout système de coordonnées.

### 3.2 Transport parallèle, géodésique et tenseur de Rieman

#### 3.2.1 le transport parallèle

En géométrie différentielle, un théorème fondamentale énonce qu'il existe une dérivée covariante privilégiée, souvent appelée la connexion de Levi-Civita, destiné à définir la dérivée d'un champs de vecteur. La dérivée covariante associe à un tenseur de type  $(r,s)$  un tenseur de type  $(r,s+1)$ . La dérivée covariante d'un champ de vecteur est définie par :

$$\nabla_a v = \nabla_a (v^\beta e_\beta) = \partial_a v^\beta e_\beta + v^\beta \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma \quad (3.2)$$

avec les  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma$  sont les coefficients de Christoffel qui décrivent comment les coordonnées s'étendent, se contractent, se déforment. . .

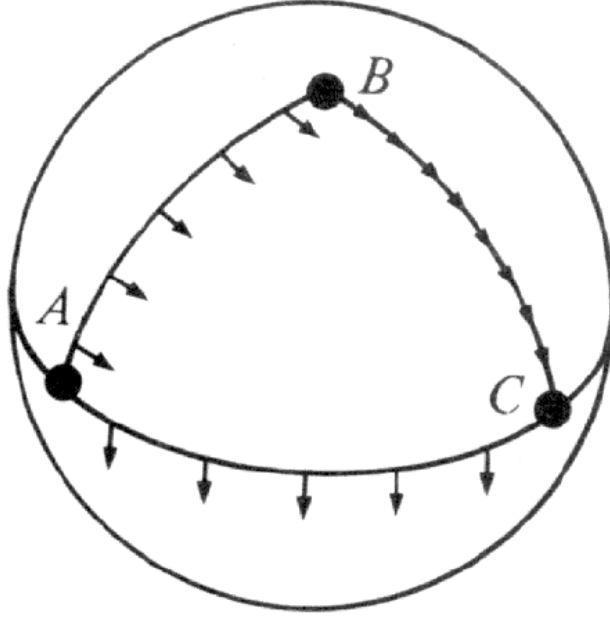
Dans le cas d'un espace courbe (non euclidien), la translation n'est pas définie. On définit alors la notion du transport parallèle (généralisation de la notion du conservation d'un vecteur constant sur une surface). Un vecteur est dit transporté parallèlement sur une courbe suivant le vecteur tangent  $t^a$  ssi :

$$t^a \nabla_a v^b = 0 \quad (3.3)$$

$$\Rightarrow \frac{dv^\alpha}{d\lambda} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha t^\beta v^\gamma = 0 \quad (3.4)$$

$\Rightarrow$  On peut généraliser les lois valides en relativité restreinte (c'est à dire dans des référentiel inertiels) en remplaçant la dérivée usuelle par la dérivée covariante.

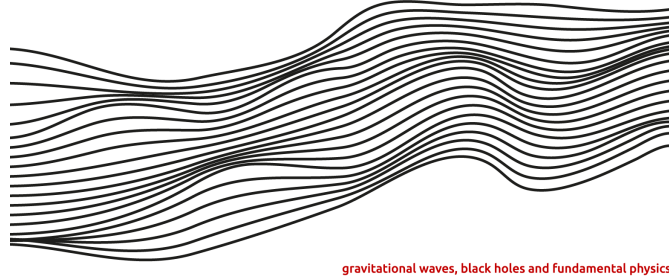




### 3.2.2 géodésique

Par définition, une géodésique est le chemin le plus court entre deux points dans un espace courbe ; analogue d'une droite dans un espace euclidien. Mathématiquement, une géodésique est une courbe qui transporte parallèlement son propre vecteur tangent :

$$t^a \nabla_a t^b = 0 \quad (3.5)$$



## 3.3 Equation d'Einstein

### 3.3.1 la métrique et les symboles de Christofel

Soit  $g_{ab}$  une métrique. Evidemment, on veut que le produit scalaire  $g_{ab}u^a u^b$  soit conservé au cours du transport parallèle donc :

$$t^c \nabla_c (g_{ab} u^a u^b) = 0 \quad (3.6)$$

Ce qui implique :

$$\nabla_c g_{ab} = 0 \quad (3.7)$$

Donc la connection Livi-civita est compatible avec la métrique. Un théorème fondamentale de la géométrie Riemannienne garantit l'unicité de la connection compatible. On peut donc d'après (7) et (10) exprimer les coefficients de Christoffel en fonction de la métrique.

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \frac{1}{2} g^{\gamma\delta} (\partial_\alpha g_{\delta\beta} + \partial_\beta g_{\alpha\delta} - \partial_\delta g_{\alpha\beta}) \quad (3.8)$$

### 3.3.2 Tenseur de la courbure

La condition d'absence de courbure est exprimé par cette expression :

$$\nabla_a \nabla_b v^c = \nabla_b \nabla_a v^c \quad (3.9)$$

On introduit alors le tenseur de la courbure défini par :

$$\nabla_a \nabla_b v^c - \nabla_b \nabla_a v^c = R_{dab}^c v^d \quad (3.10)$$

Ainsi, on peut exprimer R à l'aide des symboles de Christoffel :

$$R_{\beta\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu \Gamma_{\beta\nu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\beta\mu}^\alpha + \Gamma_{\sigma\mu}^\alpha \Gamma_{\beta\nu}^\sigma - \Gamma_{\sigma\nu}^\alpha \Gamma_{\beta\mu}^\sigma \quad (3.11)$$

A partir du tenseur de Riemann, on peut définir le tenseur de Ricci :

$$R_{ab} = g^{cd} R_{cadb} = R_{acb}^c \quad (3.12)$$

le tenseur de Ricci est de symétrique de rang 2. On introduit aussi la trace du tenseur de Ricci :  $R = g^{ab} R_{ab} = R_{ab}^{ab}$  Enfin, on introduit le tenseur d'Einstein  $G_{ab}$  qui est très fondamentale en relativité générale car  $\nabla^a G_{ab} = 0$ .

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} \quad (3.13)$$

### 3.3.3 Tenseur d'énergie-impulsion

En relativité générale la matières et les radiations produisent un champ gravitationnel avec leur tenseur énergie-impulsion,  $T_{ab}$ , un tenseur de rang 2.

$$T_{ab} = \begin{pmatrix} T_{tt} & T_{tx} & T_{ty} & T_{tz} \\ T_{xt} & T_{xx} & T_{xt} & T_{xz} \\ T_{yt} & T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zt} & T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}$$

$T_{tt}$  : densité d'énergie

$T_{tx}, T_{ty}, T_{tz}, T_{xt}, T_{yt}, T_{zt}$  : densité d'impulsion

$T_{xx}, T_{yy}, T_{zz}$  : pression

$T_{xy}, T_{xz}, T_{yz}, T_{yx}, T_{zx}, T_{zy}$  : viscosité

La conservation locale d'énergie et d'impulsion est traduite par :

$$\nabla^a T_{ab} = 0 \quad (3.14)$$

### 3.3.4 Equation de la relativité générale

On cherche un lien de proportionnalité entre  $T_{\mu\nu}$  et une mesure de courbure.

On exprime l'accélération relative à l'aide du tenseur de courbure :

$$\ddot{s} = R_{bcd}^a u^b u^c s^d \quad (3.15)$$

l'équation (18) est analogue à (2). Donc  $R_{bcd}^a u^b u^c$  est analogue à  $\partial^a \partial_b \Phi$ .

On continue la réflexion par analogie avec l'équation du Poisson.  $T_{ab} u^a u^b$  est analogue avec la densité de masse  $\rho$ . On peut finalement postuler l'équation de la relativité générale :

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = 8\pi G T_{ab} \quad (3.16)$$

### 3.3.5 Conclusion

Cette equation vérifie bien la conservation locale du tenseur d'énergie-impulsion, elle converge vers l'équation de Poisson(1) de la gravité Newtonnienne dans la limite non relativiste et elle relie bien la courbure de l'espace-temps à son contenu de matière.

## 3.4 Ondes gravitationnelles

En 1916, Albert Einstein a prédit les ondes gravitationnelles comme conséquence de la relativité générale. Tout comme l'accélération des charges électrique crée des ondes électromagnétiques, l'accélération de la matière crée des ondes gravitationnelles. La seule différence est que les ondes électromagnétiques se propagent à travers l'espace-temps, les ondes gravitationnelles sont des perturbations dans l'espace-temps lui-même. On s'intéressera au cas d'un champ gravitationnel faible, loin des trous noirs et des étoiles à neutrons, c-à-d la métrique s'exprime comme une faible perturbation autour de la métrique de l'espace Minkowski de la relativité restreinte (plat).

### 3.4.1 Linéarisation de l'équation d'Einstein

$$g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab}$$

(20) avec  $|h_{ab}| \ll 1$  (3.17) L'idée est alors de linéariser l'équation d'Einstein, c'est-à-dire de l'écrire au premier ordre en  $h$ .

$$g^{ab} = \eta^{ab} - h^{ab} \quad (21) \text{ avec } h^{ab} := \eta^{a\mu}\eta^{b\nu}h_{\mu\nu} \quad (3.18)$$

Les symboles de Christoffel :

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\nu}(\partial_{\beta}h_{\nu\gamma} + \partial_{\gamma}h_{\beta\nu} - \partial_{\nu}h_{\beta\gamma}) \quad (3.19)$$

Le tenseur de Ricci linéarisé :

$$R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(-\partial_{\mu}\partial_{\nu}h_{\alpha\beta} + \partial_{\alpha}\partial_{\mu}h_{\beta\nu} + \partial_{\beta}\partial_{\mu}h_{\alpha\nu}) - \frac{1}{2}\partial_{\alpha}\partial_{\beta}h \quad (3.20)$$

Le scalaire de Ricci linéarisé :

$$R = \eta^{\mu\nu}(-\partial_{\mu}\partial_{\nu}h + \eta^{\rho\sigma}\partial_{\rho}\partial_{\mu}h_{\sigma\nu}) \quad (3.21)$$

le tenseur d'Einstein linéarisé au 1er ordre est :

$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[\eta^{\mu\nu}(-\partial_{\mu}\partial_{\nu}h_{\alpha\beta} + \partial_{\alpha}\partial_{\mu}h_{\beta\nu} + \partial_{\beta}\partial_{\mu}h_{\alpha\nu}) - \partial_{\alpha}\partial_{\beta}h + \eta^{\mu\nu}\partial_{\alpha}\partial_{\mu}h\eta^{\alpha\beta} - \eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}\partial_{\sigma}\partial_{\nu}h\eta^{\alpha\beta}] \quad (3.22)$$

On introduit  $\bar{h}_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}h\eta^{\alpha\beta}$

Donc :

$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(-\eta^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu}\bar{h}_{\alpha\beta} + \eta^{\mu\nu}\partial_{\alpha}\partial_{\mu}\bar{h}_{\beta\nu} + \eta^{\mu\nu}\partial_{\beta}\partial_{\mu}\bar{h}_{\alpha\nu} - \eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}\partial_{\sigma}\partial_{\nu}\bar{h}\eta^{\alpha\beta}) \text{ On pose}$$

$V_\alpha = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \bar{h}_{\alpha\beta}$  et  $\square \bar{h}_{\alpha\beta} = -\partial_t^2 \bar{h}_{\alpha\beta} + \partial_x^2 \bar{h}_{\alpha\beta} + \partial_y^2 \bar{h}_{\alpha\beta} + \partial_z^2 \bar{h}_{\alpha\beta}$   
L'équation d'Einstein linéarisée :

$$\square \bar{h}_{\alpha\beta} - \partial_\beta V_\alpha - \partial_\alpha V_\beta + \eta^{\mu\nu} \partial_\nu V_{\mu\alpha} \eta_{\alpha\beta} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta} \quad (3.24)$$

L'équation paraît compliquée mais on peut voir l'opérateur d'onde de D'Alembert. Donc on s'attend à des solutions de type onde.

### 3.4.2 Jauge de Lorentz

Pour simplifier l'équation d'Einstein linéarisée on effectuera un changement de coordonnées infinitésimales. On peut toujours trouver un changement de variable dans lequel les divergences de  $V$  disparaissent par analogie avec les ondes électromagnétiques. On qualifie ce changement de coordonnées infinitésimal de changement de jauge. On peut même pousser l'analogie plus loin en constatant que les composantes du tenseur de Riemann sont invariantes dans le changement de coordonnées. On dit que le potentiel  $\bar{h}_{\alpha\beta}$  satisfait la jauge de Lorentz si :

$$\partial_\mu (\eta^{\mu\nu} \bar{h}_{\alpha\nu}) = 0 \quad (3.25)$$

Sous cette jauge l'équation d'Einstein linéarisée devient :

$$\square \bar{h}_{\alpha\beta} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta} \quad (3.26)$$

### 3.4.3 Résolution dans le vide

Considérons une propagation dans le vide ( $T_{\alpha\beta} = 0$ ) et en jauge de Lorenz : les équations conduisent aux systèmes :

$$\square \bar{h}_{\alpha\beta} = 0 \quad (3.27)$$

$$\partial_\mu (\eta^{\mu\nu} \bar{h}_{\alpha\nu}) = 0 \quad (3.28)$$

Cherchons une solution en onde plane progressive monochromatique : c'est-à-dire de la forme :

$$\bar{h}_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} e^{ik_\mu x^\mu} \quad (3.29)$$

où  $A$  est une matrice symétrique  $4 \times 4$  constante. Par exemple, pour une propagation dans la direction  $z$ ,  $k_\alpha = (\omega/c, 0, 0, \omega/c)$ . La condition de Lorentz est équivalente à :

$$A_{\alpha\beta} k^\mu = 0 \quad (3.30)$$

### 3.4.4 Jauge TT (transverse-traceless)

La jauge de Lorentz n'est pas suffisante pour spécifier la métrique. On s'intéressera à des solutions de trace nulle et transverse à un vecteur donnée pour avoir une solution unique.

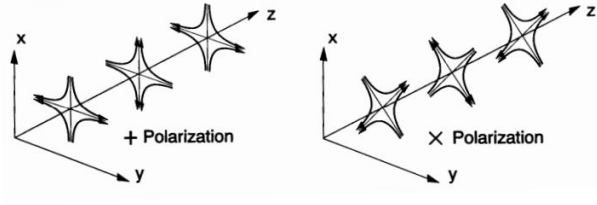
$$u^a A_{ab} = 0 \quad (3.31)$$

$$\eta^{ab} A_{ab} = 0 \quad (3.32)$$

Au départ,  $\bar{h}_{\alpha\beta}$  étant une matrice  $4 \times 4$  symétrique, a 10 degrés de liberté. Ces conditions fixent complètement la jauge et il ne reste que les deux degrés de liberté fondamentaux du champ gravitationnel.

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+(t-z) & h_\times(t-z) & 0 \\ 0 & h_\times(t-z) & -h_+(t-z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ou  $h_+$  et  $h_\times$  décrivent les deux états de polarisation de l'onde gravitationnelle.



source :A. Abramovici et al, Science 256, 325 (1992)

### 3.4.5 génération des ondes gravitationnelles

Les ondes gravitationnelles sont produites par des masses accélérées. Pour étudier la génération des ondes gravitationnelles, il faut revenir à l'équation d'Einstein linéarisée avec source.  $\square \bar{h}_{\alpha\beta} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}$  Pour résoudre cette équation, on utilisera les fonctions de Green. Pour tout équation de la forme  $f(t,x) = s(t,x)$  ou  $f$  est un champs radiative et  $s$  la fonction source. La fonction de Green est définie comme suit :  $G(t,x,t',x') = \delta(t-t')\delta(x-x')$  avec  $(t',x')$  les coordonnées de la source.

On en déduit  $f(t,x) = \int dt' d^3x' G(t,x,t',x') s(t',x')$

La fonction de Green associée à l'opérateur d'onde de D'Alembert est bien connu :

$$G(t,x,t',x') = -\frac{\delta(t' - [t - |x - x'|]/c)}{4\pi|x - x'|} \quad (3.33)$$

En appliquant ce théorème sous l'hypothèse d'une régime quasi-stationnaire (source lentement variable) :

$$\bar{h}_{\alpha\beta} = 4 \int d^3x' \frac{T_{\alpha\beta}(t' - [t - |x - x'|])}{4\pi|x - x'|} \quad (3.34)$$

On se met dans le cas d'une source lointaine :  $T_{ij}(t - |x - x'|, x')_{ij}(t - r, x')$

La conservation du tenseur energie-impulsion permet d'écrire les équations suivantes :

$$\partial_t T^{tt} + \partial_i T^{ti} = 0 \quad (3.35)$$

$$\partial_t T^{ti} + \partial_j T^{ij} = 0 \quad (3.36)$$

On peut en déduire :

$$\partial_t^2 T^{tt} = \partial_k \partial_l T^{kl} \quad (3.37)$$

En multipliant par  $x^i x^j$

$$\partial_t T^{tt} x^i x^j = \partial_t T^{tt} (x^i x^j) \quad (3.38)$$

$$\partial_k \partial_l T^{kl} x^i x^j = \partial_k \partial_l (T^{kl} x^i x^j) - 2\partial_k (T^{ik} x^j + T^{kj} x^i) + 2T^{ij} \quad (3.39)$$

On en déduit alors :

$$\partial_t T^{tt} (x^i x^j) = \partial_k \partial_l (T^{kl} x^i x^j) - 2\partial_k (T^{ik} x^j + T^{kj} x^i) + 2T^{ij} \quad (3.40)$$

Finalement, en intégrant le résultat précédent et en utilisant le théorème de Gauss, on aura le résultat final :

$$\bar{h}_{ij}(t, x) = \frac{2}{r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int d^3x' \rho x'^i x'^j \quad (3.41)$$

En posant  $I_{ij} = \int d^3x' \rho(t, x') x'^i x'^j$

$$\bar{h}_{ij}(t, x) = \frac{2}{r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} I_{ij} \quad (3.42)$$

### 3.4.6 un tenseur energie-impulsion fluctuant

A 10 micro secondes après le big bang, l'évènement le plus spectaculaire de cette époque est la transition de phase quark-hydron pour créer les protons et les neutrons. Cette transition provoque des perturbations dans le champs de la matière. Nous étudions le tenseur énergie-momentum effectif (EMT) pour les perturbations cosmologiques et formulons le problème de la rétro-réaction gravitationnelle d'une manière invariante par rapport à la jauge. d'une manière invariante par rapport à la jauge. Nous analysons les expressions explicites dans les cas de fluctuations métriques scalaires et de rétro-réaction gravitationnelle. cas de fluctuations métriques scalaires et d'ondes gravitationnelles et nous dérivons les équations d'état qui en résultent. Le formalisme est appliqué pour étudier les effets de rétroaction dans l'inflation chaotique. chaotique.

Pour ce faire, on considère un fluide parfait comme une source. Le tenseur energie-impulsion correspondant est  $T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}$ .

On mettra toute les grandeurs physique sous forme d'une variation :

$$p = p_0 + \delta p \quad \rho = \rho_0 + \delta \rho \quad g_{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu}$$

$$\bar{h}_{ij}(t, x) = \frac{2}{r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int d^3x' (\rho_0 + \delta \rho) x'^i x'^j \quad (3.43)$$

$$\bar{h}_{ij}(t, x) = \frac{2}{r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (I_{0ij} + \delta I_{ij}) \quad (3.44)$$

On remarque la naissance de nouveaux termes de fluctuations qui sont potentiellement visibles par les instruments de détection. Le principe de détection sera mis en valeur dans la partie suivante.

### 3.4.7 Intéraction avec la matière et principe de détection

$$ds^2 = -dt^2 + (\delta_{ij} + h_{ij}^{TT}) dx^i dx^j \quad (3.45)$$

La manière la plus simple de comprendre les effets physiques des ondes gravitationnelles sur la matière est de considérer le mouvement relatif de deux masses d'essai proches en chute libre. On définit la distance entre ces deux particules à partir du temps de propagation d'un rayon lumineux.

$$L = \frac{1}{2} (T_{reception} - T_{emission}) \quad (3.46)$$

Le temps propre de la lumière  $ds^2 = 0 \Rightarrow dt^2 = (\delta_{ij} + h_{ij}^{TT}) dx^i dx^j$

On en déduit :

$$L(t) = L_0 (1 + \frac{1}{2} n^i n^j h_{ij}^{TT}) \quad (3.47)$$

avec :  $L_0 = \delta_{ij} \Delta x^i \Delta x^j$  et  $n^i = \Delta x^i / L_0$

Cette équation montre que la distance entre les deux particules varie dans le temps sous l'effet de la propagation de l'onde gravitationnelle sous l'effet de la propagation de l'onde gravitationnelle. C'est essentiellement ce changement de la distance entre les masses d'essai que les détecteurs d'ondes gravitationnelles existants tentent de mesurer.

Le tenseur de Riemann linéarisé peut s'écrire en fonction de la perturbation de la métrique :

$$R_{itjt} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{ij}^{TT} \quad (3.48)$$

l'accélération relative de deux géodésiques voisines est contrôlée par le tenseur de Riemann.

$$\frac{d^2 \epsilon^i}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{ij}^{TT} \epsilon^i \quad (3.49)$$

l'effet d'une onde gravitationnelle sur la matière peut être compris comme une force supplémentaire de type newtonien, appelée force de marée, qui perturbe l'accélération relative entre des particules voisines en chute libre.

# Chapitre 4

## Conclusion

Pour résumer les problématiques trîtées pendant ce codev recherche, nous avons établi l'équation de la relativité générale qui lie la courbure de l'espace-temps à la densité d'énergie. Ensuite, en linéarisant l'équation d'Einstein autour de la métrique d'un espace plat, nous avons démontré l'équation d'onde gravitationnelle dans un champ gravitationnel faible. Enfin, on s'est intéressé à la résolution de l'équation d'onde pour étudier la génération des ondes gravitationnelles et leurs interactions avec la matière afin de mettre en évidence le principe de détection et l'une des sources d'ondes gravitationnelles de l'univers primordiale ; la transition de phase quantique quark-hadron.

Etant passionné de la physique fondamentale et la cosmologie, je trouve cette expérience très intéressante qui m'a permis de découvrir le monde de la recherche et travailler sur l'un des sujets les plus pertinents de la physique moderne. Je connaissais ces domaines initialement seulement via de la vulgarisation scientifique et avec du recul, j'ai vraiment appris énormément de choses ! J'ai passé la majeure partie de mon temps à me familiariser avec la RG et l'algèbre tensorielle, mais on a pu finalement discuté un peu des fluctuations de l'univers primordial qu'on compte les étudier de manière plus avancée dans les semestres qui suivent.



# Bibliographie

- [1] A. Le Tiec and J. Novak, *Theory of Gravitational Waves*, pp. 1–41. 2017.
  - [2] Moreira, Lúcia, “The energy-momentum tensor for cosmological perturbation,” *Ocean engineering*, vol. 34, no. 14, pp. 2074–2085, 2007.
  - [3] L. Raul W. Abramo, Robert H. Brandenberger, V. F. Mukhanov, “The energy-momentum tensor for cosmological perturbation,” *Ocean engineering*, vol. 29, no. 14, pp. 2074–2085, 1997.
  - [4] Inyong Choa, Jinn-Ouk Gongb, Seung Hun Oh, “Second-order effective energy-momentum tensor of gravitational scalar perturbations with perfect fluid,” *Ocean engineering*, vol. 21, no. 14, pp. 2074–2085, 2003.
  - [5] Alexandre Le Tiec, d J´er^ome Novak, “The basics of gravitational wave theory,” *Ocean engineering*, vol. 40, no. 14, pp. 2074–2085, 2016.
  - [6] Daniel E. Holz, Scott A. Hughes, Bernard F. Schutz , “Measuring cosmic distances with standard sirens,” *Ocean engineering*, vol. 8, no. 14, pp. 2074–2085, 2018.
  - [7] M. Coleman Miller<sup>1,2\*</sup> Nicolás Yunes , “The new frontier of gravitational waves,” *Ocean engineering*, vol. 8, no. 14, pp. 2074–2085, 2018.
- (1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) ( ? )