Método do Ponto Fixo e de Newton

May 7, 2021

Autor: Renan Tonolli Mondini - RA: 191010324

1 Método do Ponto Fixo

Considerando a função $f(x) = 2x - ln(x)–4$ e a equação $f(x) = 0$.

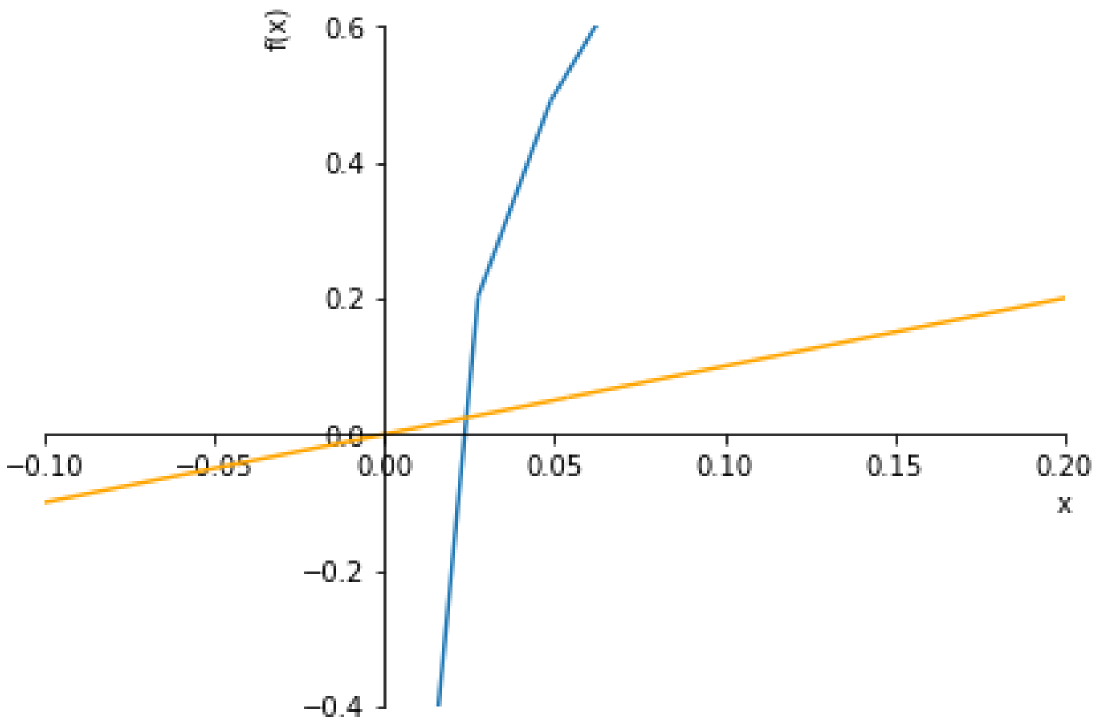
Importando as bibliotecas:

[1]:
```
import math
import numpy as np
import sympy
import pandas as pd
import seaborn as sns
from sympy import *
from sympy import E
from sympy.solvers import solve
from matplotlib import pyplot as plt
from IPython.display import HTML
from IPython.display import Markdown as md
x = sympy.symbols('x')
```

Definindo as funções e plotando a intersecção de $y = 0,5ln(x) + 2$ e $y = x$

[2]:
```
def f(x):
    return 2 * x - sympy.ln(x) - 4
def f1(x):
    return 0.5 * sympy.ln(x) + 2
def f2(x):
    return x
```

[3]:
```
f1_plot = sympy.plotting.plot(f1(x),xlim=(-0.1,0.2),ylim=(-0.4,0.6), show=False)
f2_plot = sympy.plotting.plot(f2(x), line_color = 'orange', show=False)
f1_plot.append(f2_plot[0])
f1_plot.show()
```



Verificando pelo Teorema de convergência, em que $|g'(x)| < 1$

[4]:
```
f1_dx = diff(f1(x), x)
solve(abs(f1_dx) < 1)
```

[4]:

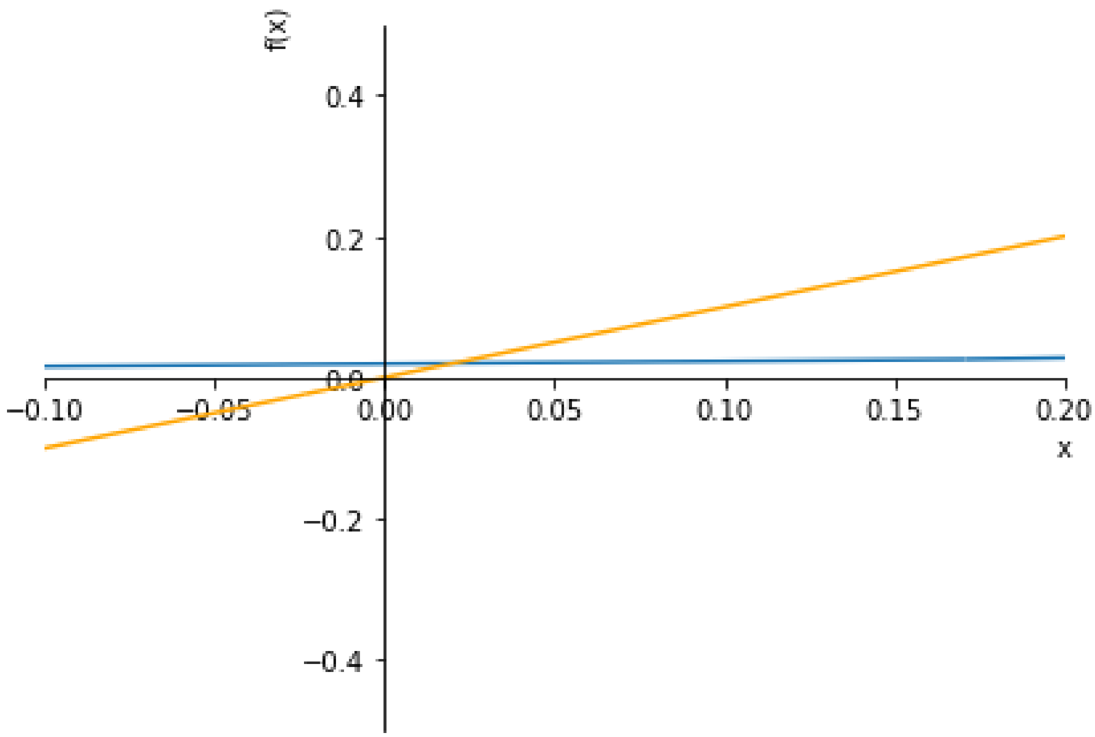
$$(-\infty < x \wedge x < -0.5) \vee (0.5 < x \wedge x < \infty)$$

Portanto, pela análise de convergência o ponto de intersecção está fora dos intervalos da função $g(x)$ adotada.

Adotando a função $g(x) = e^{2x-4}$ e plotando-a com $y = x$.

[5]:
```
def g1(x):
    return math.e ** (2 * x - 4)
def g2(x):
    return x
```

[6]:
```
g1_plot = sympy.plotting.plot(g1(x),xlim=(-0.1,0.2),ylim=(-0.5,0.5), show=False)
g2_plot = sympy.plotting.plot(g2(x), line_color = 'orange', show=False)
g1_plot.append(f2_plot[0])
g1_plot.show()
```



Verificando pelo Teorema de convergência, em que $|g'(x)| < 1$

[7]:
```
g1_dx = diff(g1(x), x)
solve(abs(g1_dx) < 1)
```

[7]:

$x < 1.65342640972003$

Portanto, pela análise de convergência o ponto de intersecção está dentro do intervalo da função $g(x)$ adotada.

Definindo um valor inicial de $x_k = 0,03$

[8]:
```
x_k = 0.03
e = 0.0001
lista_x_k = list()
lista_g_x = list()
lista_f_x = list()
lista_e = list()
```

Definindo o erro relativo como restrição $\frac{|x_{k+1} - x_k|}{max\{x_{k+1}, 1\}}$

[9]:
```
def erro_relativo(x_k, x_k1, max_xk_1):
    return (abs(x_k - x_k1)/max_xk_1)
```

Realizando as iterações do método de ponto fixo:

[10]:
```
def metodo_ponto_fixo(x_k, e):

    while True:

        lista_x_k.append(x_k)
        x_k1 = x_k
        x_k = g1(x_k)
        lista_g_x.append(x_k)
        lista_f_x.append(abs(f(x_k)))

        if x_k < 1:
            max_xk_1 = 1

        else:
            max_xk_1 = x_k

        lista_e.append(abs(x_k - x_k1)/max_xk_1)

        if(abs(f(x_k)) >= e and erro_relativo(x_k, x_k1, max_xk_1) > e):
            continue

        else:
            break

    return x_k1
```

[11]:
```
x_k1 = metodo_ponto_fixo(x_k, e)
```

Plotando a tabela dos resultados obtidos pelas iterações.

[12]:
```
df = pd.DataFrame({'x_k': lista_x_k,'g(x_k)': lista_g_x, 'f(x_k)': lista_f_x,␣
 ↪'ER': lista_e})
md(df.to_markdown(numalign = 'center', stralign = 'center', floatfmt = '.6f',␣
 ↪index=False))
```

[12]:

x_k	g(x_k)	f(x_k)	ER
0.030000	0.019448	0.021104	0.010552
0.019448	0.019042	0.000812	0.000406
0.019042	0.019027	0.000031	0.000015

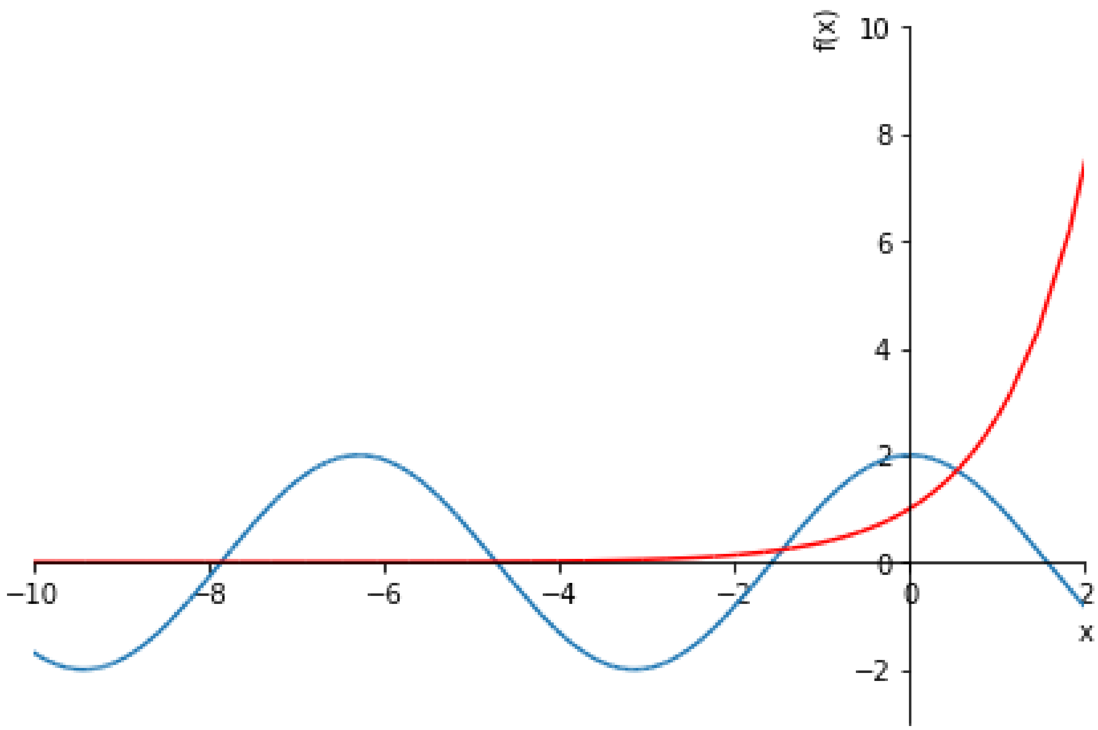
Após 3 iterações pode-se concluir que $x_k = 0,019027$. Além disso na terceira iteração o erro relativo e $|f(x_k)|$ são menor que a precisão de ε.

2 Método de Newton

Definindo as funções e plotando a intersecção de $y = 2cos(x)$ e $y = e^x$

[13]:
```
def f(x):
    return 2 * sympy.cos(x) - math.e ** (x)
def f1(x):
    return 2 * sympy.cos(x)
def f2(x):
    return math.e ** (x)
```

[14]:
```
f1_plot = sympy.plotting.plot(f1(x),xlim=(-10,2),ylim=(-3,10), show=False)
f2_plot = sympy.plotting.plot(f2(x), line_color = 'red', show=False)
f1_plot.append(f2_plot[0])
f1_plot.show()
```



Por meio do gráfico é possível perceber que para a função e^x para $x < 0$ sempre tenderá a 0, e a função $2cos(x)$ será periodica. Portanto para $x < 0$ haverá infinitas raízes.

Aplicando o Teorema de Rolle:

[15]:
```
f(0) * f(1)
```

[15]: $-2.71828182845905 + 2.0\cos(1)$

Pode-se concluir que ela é contínua nos intervalos de $I[0,1]$

Definindo as funções e variáveis:

[16]:
```
def f_dx(x):
    return -math.e ** x - 2 * sympy.sin(x)
```

[17]:
```
x_k = 0.5
e = 0.00001
lista_x_k.clear()
lista_f_dx = list()
lista_f_x.clear()
lista_e.clear()
```

Realizando as iterações do método de Newton:

[18]:
```
def metodo_newton(x_k, e):
    eh_1_iteração = True
    x_k1 = 0
    while True:

        lista_x_k.append(x_k)
        lista_f_x.append(f(x_k))
        lista_f_dx.append(f_dx(x_k))

        if x_k < 1:
            max_xk_1 = 1

        else:
            max_xk_1 = x_k

        lista_e.append(abs(x_k - x_k1)/max_xk_1)

        if not eh_1_iteração and (abs(f(x_k)) >= e and erro_relativo(x_k, x_k1,␣
 ↪max_xk_1) > e):
            x_k1 = x_k
            x_k = x_k - (f(x_k)/f_dx(x_k))

        elif eh_1_iteração and abs(f(x_k)) >= e:
            x_k1 = x_k
            x_k = x_k - (f(x_k)/f_dx(x_k))
            eh_1_iteração = False

        else:
            break
    return x_k
```

[19]:
```
x_k = metodo_newton(x_k, e)
```

Plotando os resultados em uma tabela:

[20]:
```
df = pd.DataFrame({'x_k': lista_x_k,'f_dx(x_k)': lista_f_dx, 'f(x_k)':␣
↪lista_f_x,'ER': lista_e})
md(df.to_markdown(numalign = 'center', stralign = 'center', floatfmt = '.6f',␣
↪index=False))
```

[20]:

x_k	f_dx(x_k)	f(x_k)	ER
0.500000	-2.607572	0.106444	0.500000
0.540821	-2.747096	-0.002844	0.040821
0.539786	-2.743544	-0.000002	0.001035

Após 3 iterações pode-se concluir que $x_k = 0,019027$. Além disso na terceira iteração $|f(x_k)|$ são menor que a precisão de ε.