Research on Product of Subalgebras including Subgroups

Re-menal

2021 年 1 月 27 日

目次

添字圏が集合（小離散圏）となる図式の極限を**直積**と呼ぶ．C を直積と終対象 $\mathbf{1}$ を持つ圏とする．

1 Subgroup の Pullback も Subgroup

1.1 Preparation

Definition. C における**群対象** (G, m, e, i) を次のように定義する．

- G を C の対象とする．
- m を射 $m : G \times G \to G$ で，次の可換図式を満たすものとする：

$$\begin{tikzcd} G \times G \times G \arrow[r, "\mathrm{id}_G \times m"] \arrow[d, "m \times \mathrm{id}_G"'] & G \times G \arrow[d, "m"] \\ G \times G \arrow[r, "m"'] & G \end{tikzcd}$$

- e を射 $e : \mathbf{1} \to G$ で，次の可換図式を満たすものとする：

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \times G \arrow[d, "e \times \mathrm{id}_G"'] & G \arrow[l, "(u, \mathrm{id}_G)"'] \arrow[r, "(\mathrm{id}_G, u)"] \arrow[d, "\mathrm{id}_G"] & G \times \mathbf{1} \arrow[d, "\mathrm{id}_G \times e"] \\ G \times G \arrow[r, "m"'] & G & G \times G \arrow[l, "m"] \end{tikzcd}$$

ここで，$u : G \to \mathbf{1}$ は一意的に存在する射である．

- i を射 $i : G \to G$ で，次の可換図式を満たすものとする：

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[d, "i \times \mathrm{id}_G"'] & G \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "s"] & G \arrow[d, "\mathrm{id}_G \times i"] \\
G \times G \arrow[r, "m"'] & G & G \times G \arrow[l, "m"]
\end{tikzcd}$$

ここで，$\Delta : G \to G \times G$ は G の対角射，$s \coloneqq e \circ u$ である．

また，このとき m を**乗法射**，e を**単位射**，i を**逆元射**と呼ぶことにする．これらの射を明記する必要がない場合，簡単のために群対象 (G, m, e, i) を単に G と書く．

Definition. (G, m, e, i), (H, m', e', i') を C における群対象とする．このとき，G から H への**準同型** $h : G \to H$ を，C の射 $h : G \to H$ であって次の 3 つの可換図式を満たすものとする：

1.
$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "h \times h"] \arrow[d, "m"'] & H \times H \arrow[d, "m'"] \\
G \arrow[r, "h"'] & H
\end{tikzcd}$$

2.
$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "h"] & H \\
\mathbf{1} \arrow[u, "e"] \arrow[ur, "e'"'] &
\end{tikzcd}$$

3.
$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i"'] & H \arrow[d, "i'"] \\
G \arrow[r, "h"'] & H
\end{tikzcd}$$

2 つの準同型の合成が再び準同型になることはそれぞれが満たす図式を 2 つ横に並べることですぐに分かる．したがって，C における群対象とその間の準同型は C の部分圏をなす．この圏を $\mathbf{Grp}_C$ と書くことにする．

Definition. G を C における群対象とする．G の $\mathbf{Grp}_C$ における部分対象 $f : H \to G$ を G の**部分群**という．

1.2 Main Theorem

Theorem 1. (G, M, E, I) を C の群対象，$f_1 : (H_1, m_1, e_1, i_1) \to G$，$f_2 : (H_2, m_2, e_2, i_1) \to G$ を G の部分群とする．このとき，f_1 と f_2 の C における pullback $H_1 \times_G H_2$ も G の部分群である．

Example. $C = \mathbf{Set}$ とする．このとき，図式追跡により $\mathbf{Set}$ における群対象とその間の準同型はそれぞれ通常の意味での群と群準同型であることがわかる．また，G が $\mathbf{Set}$ における群対象（すなわち通所の意味での群）のとき，その部分群 $f : H \to G$ は，f が $\mathbf{Grp_{Set}}$ のモノ射で $H \subset G$ とみなせることより，通常の意味での G の部分群 H となる．

H_1, H_2 を群 G の部分群とし，標準的包含をそれぞれ $i_1 : H_1 \to G,\ i_2 : H_2 \to G$ と書く．このとき，$\mathbf{Set}$ における i_1, i_2 の pullback は i_1, i_2 が単射であることより $H_1 \cap H_2$ となる．したがって，この場合 Theorem 1 は「部分群の共通部分もまた部分群となる」という有名な事実を表している．

1.3 Proof

簡単のために f_1 と f_2 の C における pullback $H_1 \times_G H_2$ を H と書く．次のような流れで証明する：

Step 1. C におけるモノ射 $f : H \to G$ が存在する．
Step 2. H は $\mathbf{Grp}_C$ の対象である．
Step 3. $f : H \to G$ は $\mathbf{Grp}_C$ の射である．

Step 1. $p_1 : H \to H_1,\ p_2 : H \to H_2$ を標準的射影とする．H が pullback だから，C における次の図式が可換.

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & H_2 \arrow[d, "f_2"] \\ H_1 \arrow[r, "f_1"'] & G \end{tikzcd} \tag{1}$$

ここで，モノ射の pullback はモノ射であったから，p_2 はモノ射．よって合成 $f \coloneqq p_2 \circ f_2 : H \to G$ もモノ射となる． □

Step 2. (i) 乗法射の存在

f_1, f_2 が準同型であることと図式 (1) の可換性より，次の図式の 3 つの四角がそれぞれ可換となる．

$$\begin{tikzcd} H \times H \arrow[r, "p_2 \times p_2"] \arrow[d, "p_1 \times p_1"'] & H_2 \times H_2 \arrow[r, "m_2"] \arrow[d, "f_2 \times f_2"] & H_2 \arrow[dd, "f_2"] \\ H_1 \times H_1 \arrow[r, "f_1 \times f_1"'] \arrow[d, "m_1"'] & G \times G \arrow[dr, "M"'] & \\ H_1 \arrow[rr, "f_1"'] & & G \end{tikzcd}$$

よって図式の外側も可換，すなわち $\varphi_1 \coloneqq m_1 \circ (p_1 \times p_2),\ \varphi_2 \coloneqq m_2 \circ (p_2 \times p_2)$ とおけば次の図式が可換.

$$\begin{tikzcd} H \times H \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & H_2 \arrow[d, "f_2"] \\ H_1 \arrow[r, "f_1"'] & G \end{tikzcd}$$

したがって，pullback の普遍性より射 $m : H \times H \to H$ で次の図式を可換にするものが一意的に存在する．

$$\begin{tikzcd}
H \times H \arrow[dr, dashed, "m"] \arrow[drr, bend left, "\varphi_2"] \arrow[ddr, bend right, "\varphi_1"'] & & \\
& H \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & H_2 \arrow[d, "f_2"] \\
& H_1 \arrow[r, "f_1"'] & G
\end{tikzcd} \tag{2}$$

この射 m が H の乗法射を与えることを示す．すなわち，次の図式が可換であることを示す．

$$\begin{tikzcd}
H \times H \times H \arrow[r, "\mathrm{id}_H \times m"] \arrow[d, "m \times \mathrm{id}_H"'] & H \times H \arrow[d, "m"] \\
H \times H \arrow[r, "m"'] & H
\end{tikzcd} \tag{I}$$

φ_2 の定義と可換図式 (2) より，次の 3 つの図式が可換.

$$\begin{tikzcd}
H \times H \arrow[r, "m"] \arrow[d, "p_2 \times p_2"'] & H \arrow[d, "p_2"] \\
H_2 \times H_2 \arrow[r, "m_2"'] & H_2
\end{tikzcd} \tag{3}$$

$$\begin{tikzcd}
H \times H \times H \arrow[r, "m \times \mathrm{id}_H"] \arrow[d, "p_2 \times p_2 \times p_2"'] & H \times H \arrow[d, "p_2 \times p_2"] \\
H_2 \times H_2 \times H_2 \arrow[r, "m_2 \times \mathrm{id}_{H_2}"'] & H_2 \times H_2
\end{tikzcd} \tag{4}$$

$$\begin{tikzcd}
H \times H \times H \arrow[r, "\mathrm{id}_H \times m"] \arrow[d, "p_2 \times p_2 \times p_2"'] & H \times H \arrow[d, "p_2 \times p_2"] \\
H_2 \times H_2 \times H_2 \arrow[r, "\mathrm{id}_{H_2} \times m"'] & H_2 \times H_2
\end{tikzcd} \tag{5}$$

したがって，

$$\begin{aligned}
&p_2 \circ m \circ (m \times \mathrm{id}_H) \\
&= m \circ (p_2 \times p_2) \circ (m \times \mathrm{id}_H) && \text{(by(3))} \\
&= m \circ (m \times \mathrm{id}_{H_2}) \circ (p_2 \times p_2 \times p_2) && \text{(by(4))} \\
&= m \circ (\mathrm{id}_{H_2} \times m) \circ (p_2 \times p_2 \times p_2) && \text{(since } m_2 \text{ is the multiplication map)} \\
&= m \circ (p_2 \times p_2) \circ (\mathrm{id}_H \times m) && \text{(by(5))} \\
&= p_2 \circ m \circ (\mathrm{id}_H \times m).
\end{aligned}$$

ゆえに，p_2 がモノ射であることから $m\circ(m\times \mathrm{id}_H) = m\circ(\mathrm{id}_H\times m)$ となり，(I) が可換となる．

$$
\begin{tikzcd}
 & & H_2\times H_2\times H_2 \arrow[rr, "\mathrm{id}_{H_2}\times m_2"] \arrow[d, "p_2\times p_2\times p_2"] \arrow[ddll, "m_2\times\mathrm{id}_{H_2}"'] & & H_2\times H_2 \arrow[d, "p_2\times p_2"] \arrow[ddl, "m_2"'] \\
 & & H\times H\times H \arrow[rr, "\mathrm{id}_H\times m"'] \arrow[ddll, "m\times\mathrm{id}_H"] & & H\times H \arrow[ddl, "m"] \\
H_2\times H_2 \arrow[rrr, "m_2"] \arrow[d, "p_2\times p_2"'] & & & H_2 \arrow[d, "p_2"'] & \\
H\times H \arrow[rrr, "m"'] & & & H &
\end{tikzcd}
$$

(ii) 単位射の存在

f_1, f_2 が準同型であることより，次の図式の 2 つの三角がそれぞれ可換となる．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "e_2"] \arrow[d, "e_1"'] \arrow[dr, "E"] & H_2 \arrow[d, "f_2"] \\
H_1 \arrow[r, "f_1"'] & G
\end{tikzcd}
$$

よって図式の外側も可換．したがって pullback の普遍性より射 $e:\mathbf{1}\to H$ で次の図式を可換にするものが一意的に存在する．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[dr, dashed, "e"] \arrow[drr, bend left, "e_2"] \arrow[ddr, bend right, "e_1"'] & & \\
 & H \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & H_2 \arrow[d, "f_2"] \\
 & H_1 \arrow[r, "f_1"'] & G
\end{tikzcd}
\tag{6}
$$

この射 e が H の単位射を与えることを示す．すなわち，次の図式が可換であることを示す（u は一意的に存在する射 $u: H\to\mathbf{1}$ である．）．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1}\times H \arrow[d, "e\times\mathrm{id}_H"'] & H \arrow[l, "(u{,}\mathrm{id}_H)"'] \arrow[r, "(\mathrm{id}_{H_2}{,}u)"] \arrow[d, "\mathrm{id}_H"] & H\times\mathbf{1} \arrow[d, "\mathrm{id}_H\times e"] \\
H\times H \arrow[r, "m"'] & H & H\times H \arrow[l, "m"]
\end{tikzcd}
\tag{II}
$$

可換図式 (6) より，次の 2 つの図式が可換．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1}\times H_2 \arrow[d, "e\times\mathrm{id}_{H_2}"'] & \mathbf{1}\times H \arrow[l, "\mathrm{id}_{\mathbf{1}}\times p_2"'] \arrow[d, "e\times\mathrm{id}_H"] \\
H_2\times H_2 & H\times H \arrow[l, "p_2\times p_2"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H\times\mathbf{1} \arrow[r, "p_2\times\mathrm{id}_{\mathbf{1}}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_H\times e"'] & H_2\times\mathbf{1} \arrow[d, "\mathrm{id}_{H_2}\times e_2"] \\
H\times H \arrow[r, "p_2\times p_2"'] & H_2\times H_2
\end{tikzcd}
\tag{7}
$$

また，終対象の普遍性より次の 2 つの図式が可換（u_2 は一意的に存在する射 $u_2 : H_2 \to \mathbf{1}$ である.）.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \times H_2 & H_2 \arrow[l, "{(u_2, \mathrm{id}_{H_2})}"'] \\
\mathbf{1} \times H \arrow[u, "\mathrm{id}_{\mathbf{1}} \times p_2"] & H \arrow[l, "p_2 \times p_2"] \arrow[u, "p_2"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H_2 \arrow[r, "{(\mathrm{id}_{H_2}, u_2)}"] & H_2 \times \mathbf{1} \\
H \arrow[u, "p_2"] \arrow[r, "p_2 \times p_2"'] & H \times \mathbf{1} \arrow[u, "p_2 \times \mathrm{id}_{\mathbf{1}}"']
\end{tikzcd}
\tag{8}
$$

したがって，

$$
\begin{aligned}
& p_2 \circ m \circ (e \times \mathrm{id}_H) \circ (u, \mathrm{id}_H) \\
& = m_2 \circ (p_2 \times p_2) \circ (e \times \mathrm{id}_H) \circ (u, \mathrm{id}_H) && (\text{by } (3)) \\
& = m_2 \circ (e_2 \times \mathrm{id}_{H_2}) \circ (\mathrm{id}_{\mathbf{1}} \times p_2) \circ (u, \mathrm{id}_H) && (\text{by the left side of } (7)) \\
& = m_2 \circ (e_2 \times \mathrm{id}_{H_2}) \circ (u_2, \mathrm{id}_{H_2}) \circ p_2 && (\text{by the left side of } (8)) \\
& = \mathrm{id}_{H_2} \circ p_2 && (\text{since } e_2 \text{ is the unit map}) \\
& = p_2 \circ \mathrm{id}_H .
\end{aligned}
$$

よって p_2 がモノ射であることより $m \circ (e \times \mathrm{id}_H) \circ (u, \mathrm{id}_H) = \mathrm{id}_H$ となり，(II) の左側の可換性が分かった．同様に，

$$
\begin{aligned}
& p_2 \circ m \circ (\mathrm{id}_H \times e) \circ (\mathrm{id}_H, u) \\
& = m_2 \circ (p_2 \times p_2) \circ (\mathrm{id}_H \times e) \circ (\mathrm{id}_H, u) && (\text{by } (3)) \\
& = m_2 \circ (\mathrm{id}_{H_2} \times e_2) \circ (p_2 \times \mathrm{id}_{\mathbf{1}}) \circ (\mathrm{id}_H, u) && (\text{by the right side of } (7)) \\
& = m_2 \circ (\mathrm{id}_{H_2} \times e_2) \circ (\mathrm{id}_{H_2}, u_2) \circ p_2 && (\text{by the right side of } (8)) \\
& = \mathrm{id}_{H_2} \circ p_2 && (\text{since } e_2 \text{ is the unit map}) \\
& = p_2 \circ \mathrm{id}_H
\end{aligned}
$$

であるから，$m \circ (\mathrm{id}_H \times e) \circ (\mathrm{id}_H, u) = \mathrm{id}_H$ となり，(II) の右側の可換性が分かる．ゆえに (II) は可換である．

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{1} \times H_2 \arrow[dl, equal] & H_2 \arrow[l, "{(u_2, \mathrm{id}_{H_2})}"'] \arrow[r, "{(\mathrm{id}_{H_2}, u_2)}"] & H_2 \times \mathbf{1} \arrow[dr, equal] & \\
\mathbf{1} \times H_2 \arrow[d, "e_2 \times \mathrm{id}_{H_2}"] & \mathbf{1} \times H \arrow[l, "\mathrm{id}_{\mathbf{1}} \times p_2"] \arrow[u, "\mathrm{id}_{\mathbf{1}} \times p_2"] \arrow[d, "e \times \mathrm{id}_H"] & H \arrow[l, "p_2 \times p_2"] \arrow[r, "p_2 \times p_2"] \arrow[u, "p_2"] \arrow[d, "\mathrm{id}_H"] & H \times \mathbf{1} \arrow[r, "p_2 \times \mathrm{id}_{\mathbf{1}}"] \arrow[u, "p_2 \times \mathrm{id}_{\mathbf{1}}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_H \times e"] & H_2 \times \mathbf{1} \arrow[d, "\mathrm{id}_{H_2} \times e_2"] \\
H_2 \times H_2 \arrow[dr, equal] & H \times H \arrow[l, "p_2 \times p_2"] \arrow[r, "m"] \arrow[d, "p_2 \times p_2"] & H \arrow[d, "p_2"] & H \times H \arrow[l, "m"'] \arrow[r, "p_2 \times p_2"] \arrow[d, "p_2 \times p_2"] & H_2 \times H_2 \arrow[dl, equal] \\
 & H_2 \times H_2 \arrow[r, "m_2"] & H_2 & H_2 \times H_2 \arrow[l, "m_2"'] &
\end{tikzcd}
$$

(iii) 逆元射の存在

f_1, f_2 は準同型であることと可換図式 (1) の可換性より，次の図式の 3 つの四角がそれぞれ可換

となる．

$$
\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & H_2 \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "f_2"] & H_2 \arrow[dd, "f_2"] \\
H_1 \arrow[r, "f_1"'] \arrow[d, "i_1"'] & G \arrow[dr, "I"] & \\
H_1 \arrow[rr, "f_1"'] & & G
\end{tikzcd}
$$

よって図式の外側も可換，すなわち $\psi_1 \coloneqq i_1 \circ p_1$，$\psi_2 \coloneqq i_2 \circ p_2$ とおけば次の図式が可換.

$$
\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\psi_2"] \arrow[d, "\psi_1"'] & H_2 \arrow[d, "f_2"] \\
H_1 \arrow[r, "f_1"'] & G
\end{tikzcd}
$$

したがって，pullback の普遍性より射 $i : H \to H$ で次の図式を可換にするものが一意的に存在する．

$$
\begin{tikzcd}
H \arrow[dr, dashed, "i"] \arrow[drr, bend left, "\psi_2"] \arrow[ddr, bend right, "\psi_1"'] & & \\
& H \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & H_2 \arrow[d, "f_2"] \\
& H_1 \arrow[r, "f_1"'] & G
\end{tikzcd}
\tag{9}
$$

この射 i が H の逆元射を与えることを示す．すなわち，次の図式が可換であることを示す（Δ は H の対角射 $\Delta : H \to H \times H$ で，$s = e \circ u$ である．）．

$$
\begin{tikzcd}
H \times H \arrow[d, "i \times \mathrm{id}_H"'] & H \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "s"'] & H \times H \arrow[d, "\mathrm{id}_H \times i"] \\
H \times H \arrow[r, "m"'] & H & H \times H \arrow[l, "m"]
\end{tikzcd}
\tag{III}
$$

$\Delta_{H_2} : H_2 \to H_2 \times H_2$ を H_2 の対角射とすると，$\Delta = (\mathrm{id}_H, \mathrm{id}_H)$，$\Delta_{H_2} = (\mathrm{id}_{H_2}, \mathrm{id}_{H_2})$ より次の図式が可換.

$$
\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "p_2"'] & H \times H \arrow[d, "p_2 \times p_2"] \\
H_2 \arrow[r, "\Delta_{H_2}"'] & H_2 \times H_2
\end{tikzcd}
\tag{10}
$$

また，可換図式 (9) より，次の 2 つの図式が可換.

$$
\begin{tikzcd}
H_2 \times H_2 \arrow[d, "i_2 \times \mathrm{id}_{H_2}"'] & H \times H \arrow[l, "p_2 \times p_2"'] \arrow[d, "i \times \mathrm{id}_H"] \\
H_2 \times H_2 & H \times H \arrow[l, "p_2 \times p_2"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H \times H \arrow[r, "p_2 \times p_2"] \arrow[d, "\mathrm{id}_H \times i"'] & H_2 \times H_2 \arrow[d, "\mathrm{id}_H \times i_2"] \\
H \times H \arrow[r, "p_2 \times p_2"'] & H_2 \times H_2
\end{tikzcd}
\tag{11}
$$

さらに，可換図式 (6) と終対象の普遍性より次の図式が可換.

$$
\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "u"] \arrow[d, "p_2"'] & \mathbf{1} \arrow[r, "e"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbf{1}}"] & H \arrow[d, "p_2"] \\
H_2 \arrow[r, "u_2"'] & \mathbf{1} \arrow[r, "e_2"'] & H_2
\end{tikzcd}
\tag{12}
$$

したがって,

$$
\begin{aligned}
& p_2 \circ m \circ (i \times \mathrm{id}_H) \circ \Delta \\
& = m_2 \circ (p_2 \times p_2) \circ (i \times \mathrm{id}_H) \circ \Delta && \text{(by (3))} \\
& = m_2 \circ (i_2 \times \mathrm{id}_{H_2}) \circ (p_2 \times p_2) \circ \Delta && \text{(by the left side of (11))} \\
& = m_2 \circ (i_2 \times \mathrm{id}_{H_2}) \circ \Delta_{H_2} \circ p_2 && \text{(by (10))} \\
& = e_2 \circ u_2 \circ p_2 && \text{(since } i_2 \text{is the inverse map)} \\
& = e_2 \circ \mathrm{id}_{\mathbf{1}} \circ u && \text{(by the left side of (12))} \\
& = p_2 \circ e \circ u && \text{(by the right side of (12))}
\end{aligned}
$$

よって，p_2 がモノ射であることより $m \circ (i \times \mathrm{id}_H) \circ \Delta = e \circ u = s$ となり，(III) の左側の可換性が分かる．同様に,

$$
\begin{aligned}
& p_2 \circ m \circ (\mathrm{id}_H \times i) \circ \Delta \\
& = m_2 \circ (p_2 \times p_2) \circ (\mathrm{id}_H \times i) \circ \Delta && \text{(by (3))} \\
& = m_2 \circ (\mathrm{id}_{H_2} \times i_2) \circ (p_2 \times p_2) \circ \Delta && \text{(by the right side of (11))} \\
& = m_2 \circ (\mathrm{id}_{H_2} \times i_2) \circ \Delta_{H_2} \circ p_2 && \text{(by (10))} \\
& = e_2 \circ u_2 \circ p_2 && \text{(since } i_2 \text{is the inverse map)} \\
& = e_2 \circ \mathrm{id}_{\mathbf{1}} \circ u && \text{(by the left side of (12))} \\
& = p_2 \circ e \circ u && \text{(by the right side of (12))}
\end{aligned}
$$

であり，p_2 がモノ射であるから $m \circ (\mathrm{id}_H \times i) \circ \Delta = s$. ゆえに (III) の右側が可換となり，(III) が可換であることが分かった.

$$
\begin{tikzcd}
 & H_2 \times H_2 \arrow[dl, equal] & H_2 \arrow[l, "\Delta_{H_2}"'] \arrow[r, "\Delta_{H_2}"] & H_2 \times H_2 \arrow[dr, equal] & \\
H_2 \times H_2 \arrow[d, "i_2 \times \mathrm{id}_{H_2}"] & H \times H \arrow[l, "p_2 \times p_2"'] \arrow[u, "p_2 \times p_2"] \arrow[d, "i \times \mathrm{id}_H"] & H \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Delta"] \arrow[u, "p_2"] \arrow[d, "s"] & H \times H \arrow[r, "p_2 \times p_2"] \arrow[u, "p_2 \times p_2"] \arrow[d, "\mathrm{id}_H \times i"] & H_2 \times H_2 \arrow[d, "\mathrm{id}_{H_2} \times i_2"] \\
H_2 \times H_2 \arrow[dr, equal] & H \times H \arrow[l, "p_2 \times p_2"] \arrow[r, "m"'] \arrow[d, "p_2 \times p_2"] & H \arrow[d, "p_2"] & H \times H \arrow[l, "m"] \arrow[r, "p_2 \times p_2"'] \arrow[d, "p_2 \times p_2"] & H_2 \times H_2 \arrow[dl, equal] \\
 & H_2 \times H_2 \arrow[r, "m_2"'] & H_2 & H_2 \times H_2 \arrow[l, "m_2"] &
\end{tikzcd}
$$

□

Step 3. (i) 乗法射を保つこと

次の図式が可換であることを示す.

$$\begin{tikzcd} H \times H \arrow[r, "f \times f"] \arrow[d, "m"'] & G \times G \arrow[d, "M"] \\ H \arrow[r, "f"'] & G \end{tikzcd} \tag{IV}$$

f_2 が準同型であることと可換図式 (3) より次の図式の 2 つの四角が可換.

$$\begin{tikzcd} H \times H \arrow[r, "p_2 \times p_2"] \arrow[d, "m"'] & H_2 \times H_2 \arrow[r, "f_2 \times f_2"] \arrow[d, "m_2"] & G \times G \arrow[d, "M"] \\ H \arrow[r, "p_2"'] & H_2 \arrow[r, "f_2"'] & G \end{tikzcd}$$

よって，上の図式の外側も可換となるから $f = f_2 \circ p_2$ より (IV) が可換であることが分かる．(ii) 単位射を保つこと

次の図式が可換であることを示す.

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "f"] & G \\ \mathbf{1} \arrow[u, "e"] \arrow[ur, "E"'] & \end{tikzcd} \tag{V}$$

f_2 が準同型であることと可換図式 (6) より次の図式の 2 つの三角が可換.

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "p_2"] & H_2 \arrow[r, "f_2"] & G \\ \mathbf{1} \arrow[u, "e"] \arrow[ur, "e_2"] \arrow[urr, "E"'] & & \end{tikzcd}$$

よって，上の図式の外側も可換となるから $f = f_2 \circ p_2$ より (V) が可換であることが分かる．(iii) 逆元射を保つこと

次の図式が可換であることを示す.

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & G \arrow[d, "I"] \\ H \arrow[r, "f"'] & G \end{tikzcd} \tag{VI}$$

f_2 が準同型であることと可換図式 (9) より次の図式の 2 つの四角が可換.

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "i"'] & H_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "i_2"] & G \arrow[d, "I"] \\ H \arrow[r, "p_2"'] & H_2 \arrow[r, "f_2"'] & G \end{tikzcd}$$

よって，上の図式の外側も可換となるから $f = f_2 \circ p_2$ より (VI) が可換であることが分かる． □

2 Subgroup の Product も Subgroup

Λ を任意の集合とする.

2.1 Main Theorem

Theorem 2. G を C の群対象，$\{f_\lambda : H_\lambda \to G\}_{\lambda\in\Lambda}$ を G の部分群の族とする．このとき $\{f_\lambda : H_\lambda \to G\}_{\lambda\in\Lambda}$ のスライス圏 C/G における直積 $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda : H \to G$ も G の部分群である．

2.2 Proof

簡単のため $f \coloneqq \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda$ とおく．1 章と同様に次の流れで証明する：

Step 1. 直積 $f : H \to G$ は C のモノ射である.

Step 2. H は $\mathbf{Grp}_C$ の対象である.

Step 3. $f : H \to G$ は $\mathbf{Grp}_C$ の射である.

Step 1. $g, h : P \to H$ を C における任意の射とし，$f \circ g = f \circ h$ と仮定する．このとき $g = h$ であることを示せばよい．$v = f \circ g = f \circ h$ とおく．直積 $f : H \to G$ の標準的射影を p_λ とすると次の図式が可換.

$$\begin{tikzcd} H \arrow[d, "p_\lambda"'] \arrow[dr, "f"] & \\ H_\lambda \arrow[r, "f_\lambda"'] & G \end{tikzcd} \tag{13}$$

よって $f_\lambda \circ p_\lambda \circ g = f \circ g = f \circ h = f_\lambda \circ p_\lambda \circ h$ となり，f_λ がモノ射であることから $p_\lambda \circ g = p_\lambda \circ h$. $q_\lambda = p_\lambda \circ g = p_\lambda \circ h$ とおくと，可換図式 (13) より次の図式が可換.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[d, "q_\lambda"'] \arrow[dr, "s"] & \\ H_\lambda \arrow[r, "f_\lambda"'] & G \end{tikzcd}$$

したがって q_λ はスライス圏 C/G の射で，次の 2 つの図式が可換.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[dd, "g"'] \arrow[dr, "q_\lambda"] \arrow[drr, bend left, "s"] & & \\ & H_\lambda \arrow[r, "f_\lambda"] & G \\ H \arrow[ur, "p_\lambda"'] \arrow[urr, bend right, "f"'] & & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} P \arrow[dd, "h"'] \arrow[dr, "q_\lambda"] \arrow[drr, bend left, "s"] & & \\ & H_\lambda \arrow[r, "f_\lambda"] & G \\ H \arrow[ur, "p_\lambda"'] \arrow[urr, bend right, "f"'] & & \end{tikzcd}$$

ゆえに直積の普遍性より $g = h$ が分かる．□

Step 2. (i) 乗法射の存在

$\varphi_\lambda \coloneqq m_\lambda \circ (p_\lambda \times p_\lambda)$ とおけば，直積の普遍性より次の図式を可換にする射 $m : H \times H \to H$ が一意的に存在する．

$$\begin{tikzcd} H \times H \arrow[d, dashed, "m"'] \arrow[dr, "\varphi_\lambda"] & \\ H \arrow[r, "p_\lambda"'] & H_\lambda \end{tikzcd} \tag{14}$$

この射 m が H の乗法射を与えることを示す．可換図式 (14) より次の図式の中央の四角以外が可換.

$$\begin{tikzcd}
& H_\lambda\times H_\lambda\times H_\lambda \arrow[r, "\mathrm{id}_{H_\lambda}\times m_\lambda"] \arrow[dl, equal] & H_\lambda\times H_\lambda \arrow[dr, equal] & \\
H_\lambda\times H_\lambda\times H_\lambda \arrow[d, "m_\lambda\times\mathrm{id}_{H_\lambda}"] & H\times H\times H \arrow[l, "p_\lambda\times p_\lambda\times p_\lambda"'] \arrow[u, "p_\lambda\times p_\lambda\times p_\lambda"] \arrow[r, "\mathrm{id}_H\times m"] \arrow[d, "m\times\mathrm{id}_H"] & H\times H \arrow[u, "p_\lambda\times p_\lambda"] \arrow[r, "p_\lambda\times p_\lambda"] \arrow[d, "m"] & H_\lambda\times H_\lambda \arrow[d, "m_\lambda"] \\
H_\lambda\times H_\lambda \arrow[dr, equal] & H\times H \arrow[l, "p_\lambda\times p_\lambda"'] \arrow[r, "m"] \arrow[d, "p_\lambda\times p_\lambda"] & H \arrow[r, "p_\lambda"] \arrow[d, "p_\lambda"] & H_\lambda \arrow[dl, equal] \\
& H_\lambda\times H_\lambda \arrow[r, "m_\lambda"'] & H_\lambda &
\end{tikzcd}$$

この図式と m_λ が H_λ の乗法射であることを用いると $p_\lambda\circ m\circ(m\times\mathrm{id}_H)=p_\lambda\circ m\circ(\mathrm{id}_H\times m)$ が分かる．よって p_λ がモノ射であることより $m\circ(m\times\mathrm{id}_H)=m\circ(\mathrm{id}_H\times m)$ となり，m が H の乗法射であることが分かった.

(ii) 単位射の存在

直積の普遍性より次の図式を可換にする射 $e:\mathbf{1}\to H$ が一意的に存在する.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[d, dashed, "e"'] \arrow[dr, "e_\lambda"] & \\
H \arrow[r, "p_\lambda"'] & H_\lambda
\end{tikzcd}\tag{15}$$

この射 e が H の単位射を与えることを示す．可換図式 (14),(15) と終対象の普遍性より次の図式の中央の 2 つの四角以外が可換（u,u_λ はそれぞれ一意的に存在する射 $u:H\to\mathbf{1}$，$u_\lambda:H_\lambda\to\mathbf{1}$ である.）.

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{1}\times H_\lambda \arrow[dl, equal] & H_\lambda \arrow[l, "(u_\lambda,\mathrm{id}_{H_\lambda})"'] \arrow[r, "(\mathbf{1}_{H_\lambda},u_\lambda)"] & H_\lambda\times\mathbf{1} \arrow[dr, equal] & \\
\mathbf{1}\times H_\lambda \arrow[d, "e_\lambda\times\mathrm{id}_{H_\lambda}"] & \mathbf{1}\times H \arrow[l, "\mathrm{id}_{\mathbf{1}}\times p_\lambda"'] \arrow[u, "\mathrm{id}_{\mathbf{1}}\times p_\lambda"] \arrow[d, "e\times\mathrm{id}_H"] & H \arrow[l, "(u,\mathrm{id}_H)"'] \arrow[r, "(\mathrm{id}_H,u)"] \arrow[u, "p_\lambda"] \arrow[d, "\mathrm{id}_H"] & H\times\mathbf{1} \arrow[r, "p_\lambda\times\mathrm{id}_{\mathbf{1}}"] \arrow[u, "p_\lambda\times\mathrm{id}_{\mathbf{1}}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_H\times e"] & H_\lambda\times\mathbf{1} \arrow[d, "\mathrm{id}_{H_\lambda}\times e_\lambda"] \\
H_\lambda\times H_\lambda \arrow[dr, equal] & H\times H \arrow[l, "p_\lambda\times p_\lambda"'] \arrow[r, "m"] \arrow[d, "p_\lambda\times p_\lambda"] & H \arrow[d, "p_\lambda"] & H\times H \arrow[l, "m"'] \arrow[r, "p_\lambda\times p_\lambda"] \arrow[d, "p_\lambda\times p_\lambda"] & H_\lambda\times H_\lambda \arrow[dl, equal] \\
& H_\lambda\times H_\lambda \arrow[r, "m_\lambda"'] & H_\lambda & H_\lambda\times H_\lambda \arrow[l, "m_\lambda"] &
\end{tikzcd}$$

この図式と e_λ が H_λ の単位射であることを用いると $p_\lambda\circ m\circ(e\times\mathrm{id}_H)\circ(u,\mathrm{id}_H)=p_\lambda\circ\mathrm{id}_H$ が分かる．よって p_λ がモノ射であることより $m\circ(e\times\mathrm{id}_H)\circ(u,\mathrm{id}_H)=\mathrm{id}_H$ となり，e が H の単位射であることが分かった.

(iii) 逆元射の存在

$\psi_\lambda := p_\lambda \circ i_\lambda$ とおけば，直積の普遍性より次の図式を可換にする射 $i : H \to H$ が一意的に存在する．

$$
\begin{tikzcd}
H \arrow[d, dashed, "i"'] \arrow[dr, "i_\lambda"] & \\
H \arrow[r, "p_\lambda"'] & H_\lambda
\end{tikzcd}
\tag{16}
$$

この i が H の逆元射を与えることを示す．$\Delta : H \to H \times H$ を H の対角射，$\Delta_{H_\lambda} : H_\lambda \to H_\lambda \times H_\lambda$ を H_λ の対角射，$s = e \circ u$ とすると，可換図式 (14),(16) より次の図式の中央の 2 つの四角以外が可換．

$$
\begin{tikzcd}
 & H_\lambda \times H_\lambda \arrow[dl, equal] & H_\lambda \arrow[l, "\Delta_{H_\lambda}"'] \arrow[r, "\Delta_{H_2}"] & H_\lambda \times H_\lambda \arrow[dr, equal] & \\
H_\lambda \times H_\lambda \arrow[d, "i_\lambda \times \mathrm{id}_{H_\lambda}"] & H \times H \arrow[l, "p_\lambda \times p_\lambda"'] \arrow[u, "p_\lambda \times p_\lambda"] \arrow[d, "i \times \mathrm{id}_H"] & H \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Delta"] \arrow[u, "p_\lambda"] \arrow[d, "s"] & H \times H \arrow[r, "p_\lambda \times p_\lambda"] \arrow[u, "p_\lambda \times p_\lambda"] \arrow[d, "\mathrm{id}_H \times i"] & H_\lambda \times H_\lambda \arrow[d, "\mathrm{id}_{H_\lambda} \times i_\lambda"] \\
H_\lambda \times H_\lambda \arrow[dr, equal] & H \times H \arrow[l, "p_\lambda \times p_\lambda"'] \arrow[r, "m"] \arrow[d, "p_\lambda \times p_\lambda"] & H \arrow[d, "p_\lambda"] & H \times H \arrow[l, "m"'] \arrow[r, "p_\lambda \times p_\lambda"] \arrow[d, "p_\lambda \times p_\lambda"] & H_\lambda \times H_\lambda \arrow[dl, equal] \\
 & H_\lambda \times H_\lambda \arrow[r, "m_\lambda"'] & H_\lambda & H_\lambda \times H_\lambda \arrow[l, "m_\lambda"] &
\end{tikzcd}
$$

また，次の図式が可換．

$$
\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "u"] \arrow[d, "p_\lambda"'] & \mathbf{1} \arrow[r, "e"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbf{1}}"] & H \arrow[d, "p_\lambda"] \\
H_\lambda \arrow[r, "u_\lambda"'] & \mathbf{1} \arrow[r, "e_\lambda"'] & H_\lambda
\end{tikzcd}
$$

これら 2 つの図式と i_λ が H_λ の逆元射であることを用いると $p_\lambda \circ m \circ (i \times \mathrm{id}_H) \circ \Delta = p_\lambda \circ s$ が分かる．よって p_λ がモノ射であることより $m \circ (i \times \mathrm{id}_H) \circ \Delta = s$ となり，i が H の逆元射であることが分かった． □

Step 3. (i) 乗法射を保つこと

f_λ が準同型であることと可換図式 (14) より次の図式の 2 つの四角が可換であるから，外側も可換．よって f は乗法射を保つ．

$$
\begin{tikzcd}
H \times H \arrow[r, "p_\lambda \times p_\lambda"] \arrow[d, "m"'] & H_\lambda \times H_\lambda \arrow[r, "f_\lambda \times f_\lambda"] \arrow[d, "m_\lambda"] & G \times G \arrow[d, "M"] \\
H \arrow[r, "p_\lambda"'] & H_\lambda \arrow[r, "f_\lambda"'] & G
\end{tikzcd}
$$

(ii) 単位射を保つこと

f_λ が準同型であることと可換図式 (15) より次の図式の 2 つの三角が可換であるから，外側も可

換．よって f は単位射を保つ．

$$
\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "p_\lambda"] & H_\lambda \arrow[r, "f_\lambda"] & G \\
\mathbf{1} \arrow[u, "e"] \arrow[ur, "e_\lambda"] \arrow[urr, "E"'] & &
\end{tikzcd}
$$

(iii) 逆元射を保つこと

f_λ が準同型であることと可換図式 (16) より次の図式の 2 つの四角が可換であるから，外側も可換．よって f は逆元射を保つ．

$$
\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "p_\lambda"] \arrow[d, "i"'] & H_\lambda \arrow[r, "f_\lambda"] \arrow[d, "i_\lambda"] & G \arrow[d, "I"] \\
H \arrow[r, "p_\lambda"'] & H_\lambda \arrow[r, "f_\lambda"'] & G
\end{tikzcd}
$$

$\square$