## limits in comma category

Re menal 2021年7月9日

- 圏は locally small であるとする.
- 圏 I に対して、射の集まり Mor(I) が集合であるとき I を小圏という.
- $K:I\to C,\ L:J\to C$  が関手のとき、各  $j\in J$  に対し関手  $Q:K\downarrow Lj\to K\downarrow L$  を  $(i,Ki\to Lj)\mapsto (i,j,Ki\to Lj)$  で定義する.

補題. U を圏,C,D を小圏, $F:C\to D$ , $E:C\to U$  を関手とする.このとき  $\operatorname{colim} E\cong \operatorname{colim} F^\dagger E$  が成り立つ.

Proof.  $\Delta:U\to U^C,~\Delta':U\to U^D$  をそれぞれ対角関手とすれば、任意の  $u\in U$  に対し  $\Delta'u\circ F=\Delta u$  が成り立つから、

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{U}(\operatorname{colim} E, u) &\cong \operatorname{Hom}_{U^{C}}(E, \Delta u) \\ &\cong \operatorname{Hom}_{U^{C}}(E, \Delta' u \circ F) \\ &\cong \operatorname{Hom}_{U^{D}}(F^{\dagger}E, \Delta' u) \\ &\cong \operatorname{Hom}_{U}(\operatorname{colim} F^{\dagger}E, u). \end{aligned}$$

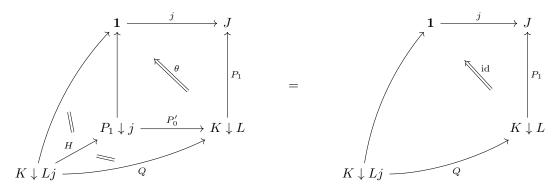
よって  $\operatorname{colim} E \cong \operatorname{colim} F^{\dagger}E$  が成り立つ.

定理 1. C を圏,D を余完備な圏,I,J を小圏, $K:I\to C$ , $L:J\to C$  を関手とする.このとき,図式  $T:K\downarrow L\to D$  に対して

$$\operatorname{colim} T \cong \operatornamewithlimits{colim}_{j \in J} \operatorname{colim}(K \downarrow Lj \xrightarrow{Q} K \downarrow L \xrightarrow{T} D)$$

が成り立つ.

Proof. Step1:  $j \in J$  とし, $P_1: K \downarrow L \to J$ , $P'_0: P_1 \downarrow j \to K \downarrow L$  をコンマ圏から標準的に定まる関手とする.このとき,コンマ圏  $P_1 \downarrow j$  の普遍性([1] 命題 7)から,ある関手  $H: K \downarrow Lj \to P_1 \downarrow j$  が一意的に存在して次の等式が成り立つ.

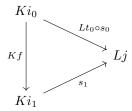


Step2:  $H': P_1 \downarrow j \rightarrow K \downarrow Lj \, \mathcal{E}$ ,

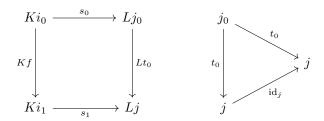
$$((i_0, j_0, Ki_0 \xrightarrow{s_0} Lj_0), j_0 \xrightarrow{t_0} j) \mapsto (i_0, Ki_0 \xrightarrow{s} Lj_0 \xrightarrow{Lt_0} Lj)$$

とすることで定義すれば、明らかにこれは関手になる.  $x=((i_0,j_0,Ki_0\xrightarrow{s_0}Lj_0),j_0\xrightarrow{t_0}j)\in P_1\downarrow j,\ y=(i_1,Ki_1\xrightarrow{s_1}Lj)\in K\downarrow Lj$  とおく.

(i)  $f \in \operatorname{Hom}_{K \downarrow Lj}(H'x,y)$  に対し  $\varphi(f) = (f,t_0)$  とおくと,写像  $\varphi : \operatorname{Hom}_{K \downarrow Lj}(H'x,y) \to \operatorname{Hom}_{P_1 \downarrow j}(x,Hy)$  が定まることを示す.まず,コンマ圏における射と関手 H' の定義より,f は I の射  $f:i_0 \to i_1$  であって次の図式を可換にするものである.

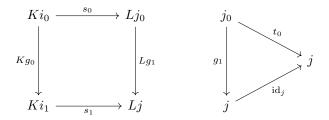


すなわち,次の2つの図式が可換.

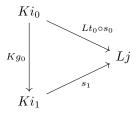


これは  $\varphi(f)=(f,t_0)$  が  $P_1\downarrow j$  における x から Hy への射であることを意味するから,写像  $\varphi: \operatorname{Hom}_{K\downarrow Lj}(H'x,y) \to \operatorname{Hom}_{P_1\downarrow j}(x,Hy)$  が得られた.

(ii)  $P_0: K \downarrow L \to I$  を標準的に定まる関手とする。  $g = (g_0, g_1) \in \operatorname{Hom}_{K \downarrow L j}(H'x, y)$  に対し  $\psi(g) = P_0 g$  とおくと写像  $\psi: \operatorname{Hom}_{P_1 \downarrow j}(x, Hy) \to \operatorname{Hom}_{K \downarrow L j}(H'x, y)$  が定まることを示す。まず, $g = (g_0, g_1)$  は  $g_0: i_0 \to i_1, \ g_1: i_1 \to j$  であって次の 2 つの図式を可換にするものである。



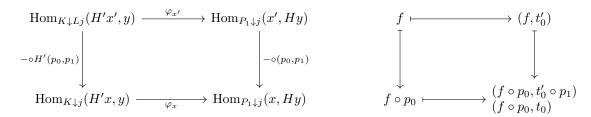
すなわち,次の図式が可換である.



これは射  $g_0 = P_0 g: i_0 \to i_1$  が  $K \downarrow Lj$  における H'x から y への射であることを意味するから,写像  $\psi: \operatorname{Hom}_{P_1 \downarrow j}(x, Hy) \to \operatorname{Hom}_{K \downarrow Lj}(H'x, y)$  が定まった.

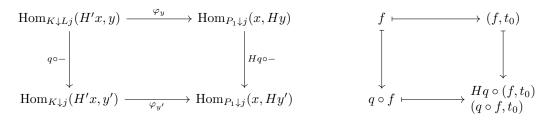
(iii) 上で定めた写像  $\varphi$  が  $x \in P_1 \downarrow j$  について自然であることを示す. そのために  $\varphi$  を改めて  $\varphi_x$  とかき,  $x = ((i_0, j_0, Ki_0 \xrightarrow{s_0} Lj_0), j_0 \xrightarrow{t_0} f), \ x' = ((i'_0, j'_0, Ki'_0 \xrightarrow{s'_0} Lj'_0), j'_0 \xrightarrow{t'_0} j) \in P_1 \downarrow j$  とし, $(p_0, p_1) : x \to x'$ 

を射とする. このとき, 次の図式が可換であればよい.



ここで、 $(p_0,p_1)$  が  $P_1\downarrow j$  における射であることから  $t_0'\circ p_1=t_0$  が成り立つ.ゆえに上の図式が可換であることが分かった.

(iv) 次に  $\varphi$  が  $y \in K \downarrow Lj$  について自然であることを示す. (iii) と同様に  $\varphi$  を改めて  $\varphi_y$  とかき,  $y = (i_1, Ki_1 \xrightarrow{s_1} Lj), \ y' = (i'_1, Ki'_1 \xrightarrow{s'_1} Lj) \in K \downarrow Lj$  とし, $q: y \to y'$  を射とする.このとき,次の図式が可換であればよい.



ここで,H の定め方より  $Hq=(q,\mathrm{id}_j)$  で,よって  $Hq\circ (f,t_0)=(q\circ f,t_0)$ . したがって上の図式が可換となり, $\varphi_y$  が y について自然となる.

以上の (i) から (iv) の議論により、 $x\in P_1\downarrow j,\ y\in K\downarrow Lj$  について自然な同型  $\mathrm{Hom}_{K\downarrow Lj}(H'x,y)\cong\mathrm{Hom}_{P_1\downarrow j}(x,Hy)$  が存在することがわかる.すなわち H は関手 H' の右随伴関手である.

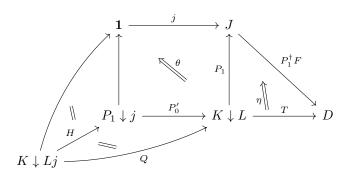
Step3: Step2 で H が右随伴関手であることが分かったが、右随伴関手は終関手である([3] 命題 7)から H は終関手である.したがって、 $Q=P_0'\circ H$  より、

$$\begin{aligned} & \operatorname*{colim}_{j \in J} \operatorname*{colim}(K \downarrow Lj \xrightarrow{Q} K \downarrow L \xrightarrow{T} D) \\ & \cong \operatorname*{colim}_{j \in J} \operatorname*{colim}(K \downarrow Lj \xrightarrow{H} P_1 \downarrow j \xrightarrow{P'_0} K \downarrow L \xrightarrow{T} D) \\ & \cong \operatorname*{colim}_{j \in J} \operatorname*{colim}(P_1 \downarrow j \xrightarrow{P'_0} K \downarrow L \xrightarrow{T} D) \end{aligned}$$

ここで,各点左 Kan 拡張より  $P_1^\dagger T(j)\cong \mathrm{colim}(P_1\downarrow j\xrightarrow{P_0'}K\downarrow L\xrightarrow{T}D)$  である([2] 定理 4)から,これと補題を用いれば,

$$\operatorname{colim}_{j \in J} \operatorname{colim}(P_1 \downarrow j \xrightarrow{P'_0} K \downarrow L \xrightarrow{T} D) 
\cong \operatorname{colim}_{j \in J} P_1^{\dagger} T(j) 
\cong \operatorname{colim} T$$

となり、結局  $\operatorname{colim} T \cong \operatorname{colim}_{j \in J} \operatorname{colim}(K \downarrow Lj \xrightarrow{Q} K \downarrow L \xrightarrow{T} D)$  が得られた.



参考文献

- [1] alg-d, 『コンマ圏』,  $http://alg-d.com/math/kan_extension/comma.pdf$
- [2] alg-d, 『Kan 拡張』, http://alg-d.com/math/kan\_extension/kan\_extension.pdf
- [3] alg-d, 『随伴関手定理』, http://alg-d.com/math/kan\_extension/aft.pdf
- [4] M. Kashiwara, P. Shapira, "Categories and Sheaves", Springer, 2006