単体的備忘録

Re-menal

2022 年 3 月 11 日

Cat を小圏全体のなす圏とする。また、$\mathbb{N}$ を正の整数全体のなす集合とする。

1　単体的集合

1.1　単体圏

定義 1.1.1. (1) 集合 S 上の関係 $\leq$ が S 上の**全順序**であるとは、次の 3 つの条件が成り立つことをいう。

- 任意の $a, b \in S$ に対し、$a \leq b$ かつ $b \leq a$ なら $a = b$ が成り立つ。
- 任意の $a, b, c \in S$ に対し、$a \leq b$ かつ $b \leq c$ なら $a \leq c$ が成り立つ。
- 任意の $a, b \in S$ に対し、$a \leq b$ または $b \leq a$ が成り立つ。

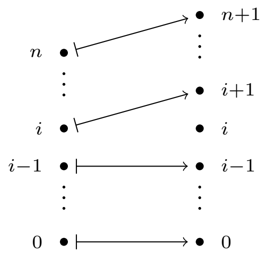
(2) S, T が全順序集合であるとき、写像 $f : S \to T$ が**順序を保つ**とは、任意の $a, b \in S$ に対し、 $a \leq b$ なら $f(a) \leq f(b)$ が成り立つことをいう。

(3) S, T が全順序集合であるとき、順序を保つ写像 $f : S \to T$ が**順序同型写像**であるとは、f が全単射であって f の逆写像 f^{-1} も順序を保つことをいう。2 つの全順序集合の間に順序同型写像が存在するとき、それらは**順序同型**であるという。

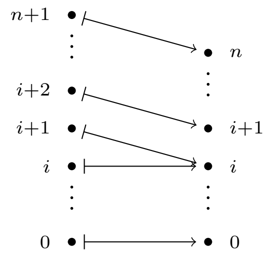
定義 1.1.2. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $[n] \coloneqq \{0, \dots, n\}$ とおき、通常の全順序により圏とみなす。$\{ [n] \mid n \in \mathbb{N} \} \subset \mathrm{Ob}(\mathbf{Cat})$ が定める **Cat** の充満部分圏を $\mathbb{\Delta}$ と書き、**単体圏**（simplex category）という。

定義 1.1.3. 各 $0 \leq i \leq n$ に対して $\mathbb{\Delta}$ の射 $\delta_i^n : [n-1] \to [n]$ と $\sigma_i^n : [n+1] \to [n]$ を次のように定義する。

$$\delta_i^n(x) \coloneqq \begin{cases} x & (x < i) \\ x+1 & (i \leq x) \end{cases} \qquad \sigma_i^n(x) \coloneqq \begin{cases} x & (x \leq i) \\ x-1 & (i < x) \end{cases}$$



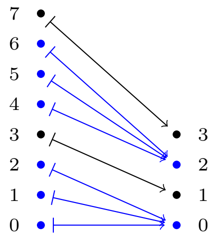
$\boxed{\delta_i^n \text{ の行き先}}$



$\boxed{\sigma_i^n \text{ の行き先}}$

補題 1.1.4. Δ の任意の全射 $f:[m]\to[n]$ はいくつかの σ_i^n の合成で表せる。

証明. $f:[m]\to[n]$ を全射とする（このとき $m\geq n$ となる)。

> **考察.** 以下の例を考える。
>
> $$[7]\xrightarrow{f}[3]$$
>
> 
>
>
> $0,1,2\in[7]$ が f によって 1 点 $0\in[3]$ に「潰され」、同じく $4,5,6\in[7]$ が f によって 1 点 $2\in[3]$ に「潰されて」いる。ここで、$\sigma_i^n:[n+1]\to[n]$ は $i,i+1\in[n+1]$ を 1 点 $i\in[n]$ に「潰す」写像であるから、上の $f:[7]\to[3]$ は「 f によって $0\in[3]$ に潰される $[7]$ の元を σ_0 を繰り返し合成して潰し」、その後同様に「 f によって $2\in[3]$ に潰される $[7]$ の元を σ_2 を繰り返し合成して潰す」ことにより得られると考えられる。すなわち、 $f=\underbrace{\sigma_2^3\circ\sigma_2^4}_{2\text{ に潰す部分}}\circ\underbrace{\sigma_0^5\circ\sigma_0^6}_{0\text{ に潰す部分}}$ と表せる。これを一般化すればよい。

$j\in[n]$ で $f^{-1}(j)$ が 2 元以上からなるものすべてを順に $j_0<\cdots<j_r$ と並べる。f は順序を保つから、各 $0\leq k\leq r$ に対し $f^{-1}(j_k)$ の元はすべて隣り合っている。よって、ある正の整数 s_k が存在して、$f^{-1}(j_k)$ のすべての元を順に $a_k,\ a_k+1,\ \ldots,\ a_k+s_k$ と並べることができる。

このとき、

$$g:=(\sigma_{j_r}^{m-(s_0+\cdots+s_r)}\circ\cdots\circ\sigma_{j_r}^{m-(s_0+\cdots+s_{r-1})-1})\circ\cdots\circ(\sigma_{j_0}^{m-s_0}\circ\cdots\circ\sigma_{j_0}^{m-1}):[m]\to[m-(s_0+\cdots+s_r)]$$

と定める。各 $0\leq k\leq r$ に対し $f^{-1}(j_k)$ の元の個数は s_k+1 である。また、各 j_k の定め方より集合 $[m]-f^{-1}(\{j_1,\ldots,j_r\})$ と $[n]-\{j_0,\ldots,j_r\}$ は f により順序同型になる。したがって、両者の元の個数を比べれば、

$$m-((s_0+1)+\cdots+(s_r+1))=n-r\quad\Longleftrightarrow\quad m-(s_0+\cdots+s_r)=n$$

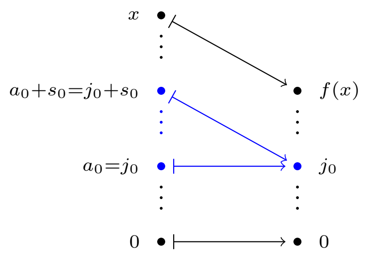
が成り立つ。よって g は写像 $g:[m]\to[n]$ となる。このとき、$f=g$ が成り立つことを示す。

Step1：任意の $0\leq k<r$ と任意の $a_k+s_l\leq x\leq a_{k+1}$ に対し、$f(x)=x-(s_0+\cdots+s_k)$ が成り立つことを示す。k についての帰納法を用いる。

($k=0$ のとき)　$a_0+s_0\leq x\leq a_1$ なる x に対し $f(x)=x-s_0$ が成り立つことを示す。まず、j_0 の定め方より $a_0=j_0$ となる。また、各 j_k の定め方より、f は集合 $\{y\in[m]\mid a_0+s_0\leq y\leq x\}$ と $\{y'\in[n]\mid j_0\leq y'\leq f(x)\}$ の間の順序同型を導く。したがって、それら 2 つの集合の元の個数を比べれば、

$$x-(a_0+s_0)+1=f(x)-j_0+1\quad\Longleftrightarrow\quad f(x)=x-s_0$$

が成り立つ。



($a_0 + s_0 \leq x \leq a_1$ において $x - f(x)$ は一定)

($k-1$ の場合を仮定)　任意の $a_{k-1} + s_{k-1} \leq x \leq a_k$ に対し $f(x) = x - (s_0 + \cdots + s_{k-1})$ が成り立つと仮定する。上と同じように、f が集合 $\{y \in [m] \mid a_k + s_k \leq y \leq x\}$ と $\{y' \in [n] \mid j_k \leq y' \leq f(x)\}$ の間の順序同型を導くことから、式

$$x - (a_k + s_k) + 1 = f(x) - j_k + 1 \quad\iff\quad x - f(x) = a_k - j_k + s_k$$

を得る。したがって、$j_k = f(a_k)$ と仮定の式を用いれば、

$$x - f(x) = a_k - j_k + s_k = (a_k - f(a_k)) + s_k = s_0 + \cdots + s_{k-1} + s_k$$

が成り立つことがわかる。

Step2：$f = g$ を示す。$x \in [m]$ を 4 つの場合に場合分けして証明する。

(i) $x < j_0$ のとき。この場合 j_0 と σ の定義より $f(x) = x = g(x)$ となる。

(ii) ある $0 \leq k \leq r$ に対し $a_k \leq x \leq a_k + s_k$ となるとき。このとき $f(x) = j_k$ だから $g(x) = j_k$ であればよい。x はある $0 \leq l \leq s_k$ により $x = a_k + l$ とかける。よって σ の定義より、

$$\begin{aligned}
g(x) &= (\sigma_{j_k}^{m-(s_0+\cdots+s_k)} \circ \cdots \circ \sigma_{j_k}^{m-(s_0+\cdots+s_{k-1})-1})(x - (s_0 + \cdots + s_{k-1})) \\
&= (a_k + l - (s_0 + \cdots + s_{k-1})) - l \\
&= a_k - (s_0 + \cdots + s_{k-1}) \\
&= f(a_k) = j_k.
\end{aligned}$$

(iii) ある $0 \leq k < r$ に対し $a_k + s_k < x < a_{k+1}$ のとき。Step1 より $f(x) = x - (s_0 + \cdots + s_k)$ だから $g(x) = x - (s_0 + \cdots + s_k)$ ならよい。σ の定義より、

$$\begin{aligned}
g(x) &= ((\sigma_{j_k}^{m-(s_0+\cdots+s_k)} \circ \cdots \circ \sigma_{j_k}^{m-(s_0+\cdots+s_{k-1})-1}) \circ \cdots \circ (\sigma_{j_0}^{m-s_0} \circ \cdots \circ \sigma_{j_0}^{m-1}))(x) \\
&= x - (s_0 + \cdots + s_k).
\end{aligned}$$

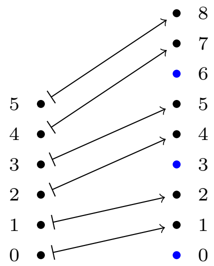
(iv) $a_r + s_r < x \leq m$ のとき。式 $j_r = f(a_r) = a_r - (s_0 + \cdots + s_r)$ を用いれば、Step1 と同様にして $f(x) = x - (s_0 + \cdots + s_r)$ がわかる。したがって、(iii) と同様な式変形によって $g(x) = x - (s_0 + \cdots + s_r) = f(x)$ が成り立つ。 □

補題 1.1.5. Δ の任意の単射 $f : [m] \to [n]$ はいくつかの δ_i^n の合成で表せる。

証明. $f : [m] \to [n]$ を単射とする（このとき $m \leq n$ となる）。もし $f(m) < n$ なら、f は $f : [m] \to [f(m)]$ とみなせるため最初から $f(m) = n$ と仮定する。また、$i < f(i)$ なる最初の $i \in [m]$ が 0 でないとき、$x < i$ なら $f(x) = x$ が成り立つため、f は $f : [m - (i-1)] \to [n - (i-1)]$ とみなせる。よって最初から $0 < f(0)$ と仮定する。

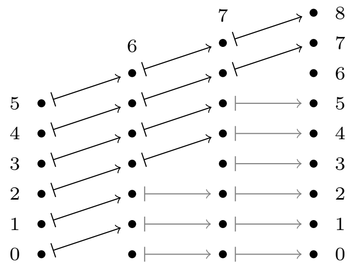
考察. 以下の例を考える。

$$[5] \xrightarrow{f} [8]$$



$[8]$ を $f([5])$ に含まれない元 $0, 3, 6$ で区切ると 3 つのまとまりができる。f は単射だから、それぞれのまとまりにおいては f は全単射、すなわち一律に $+n$ する写像になる。よって、このまとまりごとに、小さい順に考えていけばよいはず。例えば、この f の場合は $f = \underbrace{\delta^8_{4+2}}_{4\text{ を }7\text{ に移す}} \circ \underbrace{\delta^7_{2+1}}_{2\text{ を }4\text{ に移す}} \circ \underbrace{\delta^6_0}_{0\text{ を }1\text{ に移す}}$ となる。$\delta^n_i : [n] \to [n+1]$ は定義域の i 以上の元をすべて $+1$ する写像であるから、あるまとまりを移した後は、それによる増分も考慮して以降のまとまりを移していく必要がある（Step ）。

$$[5] \xrightarrow{\delta^6_0} [6] \xrightarrow{\delta^7_{2+1}} [7] \xrightarrow{\delta^8_{4+2}} [8]$$



Step1【 $[n]$ を $f([m])$ に含まれない元で区切ってグループを作る】: まず、$b_0 := f(0) - 1$ とおく（仮定 $0 < f(0)$ より $b_0 \in [n]$ である）。次に、 $b_0 < y$ かつ $y \notin f([m])$ なる最小の $y \in [n]$ を b_1 とおく。そして、

- $b_1 - b_0 = 1$ のとき：何もしない。
- $b_1 - b_0 > 1$ のとき：$s_0 :- 0,\ k_0 := b_1 - b_0 - 1$ とおく（この k_0 は $b_0 < y < b_1$ なる $y \in [n]$ の個数を表す）。

帰納的に、$b_s\ (0 \leq s)$ まで、$k_{l-1}\ (0 \leq l-1 \leq s)$ まで定まっているとしたとき、$b_s < y$ かつ $y \notin f([m])$ なる最小の $y \in [n]$ を b_{s+1} とおき、

- $b_{s+1} - b_s = 1$ のとき：何もしない。
- $b_{s+1} - b_s > 1$ のとき：$s_l := s,\ k_l := b_{s+1} - b_s - 1$ とおく（この k_l は $b_s < y < b_{s+1}$ なる $y \in [n]$ の個数を表す）。

すると、仮定 $f(m) = n$ より、ある $0 \leq r < n$ で、任意の $b_r < y$ に対し $y \in f([m])$ なるものがある。このとき、そこまでで k_l が番号 $q-1$ まで定まっているなら $k_q := n - b_r$ とおく（この k_q は $b_r < y \leq n$ なる

$y \in [n]$ の個数を表す)。

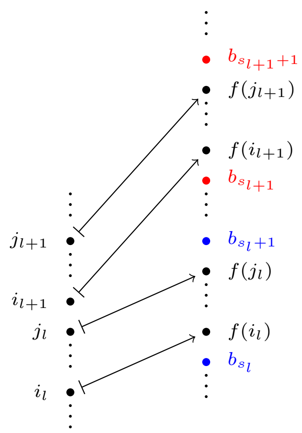
以上のもとで、さらに次のように記号を定める：

- $i_0 := 0$ とし、各 $1 \le l \le q$ に対し $i_l := k_0 + \cdots + k_{l-1}$ とおく。
- $j_0 := k_0 - 1$ とし、各 $1 \le l \le q$ に対し $j_l := k_0 + \cdots + k_{l-1} + (k_l - 1)$ とおく。

注意. 上の考察によれば、

- 数字 q は $[n]$ を分割したときにできたグループの個数を表し、
- 各 l $(0 \le l \le q)$ に対して、グループ l に属する元の個数は（$[m]$ 側でも $[n]$ 側でも）k_l 個であり (すなわちグループ l は 2 元 b_{s_l}, b_{s_l+1} にちょうど「挟まれて」いて)、
- 各 l $(0 \le l \le q)$ に対して、i_l, j_l はそれぞれグループ l の（$[m]$ 側での）最初の元、最後の元を表す

はずである。このようなことが実際に成り立っていることを以下で確かめる。



(青字に挟まれているのがグループ l、赤字に挟まれているのがグループ $l+1$)

以下で次の 2 つの主張 ①, ② を証明する。

① 各 $0 \le l \le q-1$ に対して $f(i_l) = b_{s_l} + 1,\ f(j_l) = b_{s_l+1} - 1$ が成り立つ。

② $j_q = m$ が成り立つ。

ただし、 f は単射だから任意の $j \in [n]$ に対し逆像 $f^{-1}(j)$ は 1 元からなるため、以降 $f^{-1}(j)$ をそのただ 1 つの元と同一視することにする。

① の証明. まず $f(i_l) = b_{s_l}+1$ を仮定する。このとき、f は単射だから、集合 $\{y \in [n] \mid b_{s_l} < y < b_{s_l+1}\}$ と $\{x \in [m] \mid f^{-1}(b_{s_l}+1) \le x \le f^{-1}(b_{s_l+1}-1)\}$ の間の順序同型が誘導される。したがって両者の元の個数を比べれば、式

$$k_l = f^{-1}(b_{s_l+1} - 1) - i_l + 1 \quad\Longleftrightarrow\quad f^{-1}(b_{s_l+1} - 1) = i_l + (k_l + 1)$$

を得る。よって、j_l の定義より $f^{-1}(b_{s_l+1}-1)=i_l+(k_l+1)=j_l$ 、すなわち $f(j_l)=b_{s_l+1}-1$ がわかる。

したがって、各 $0\leq l\leq q-1$ に対し $f(i_l)=b_{s_l}+1$ であることを示せばよい。l による帰納法を用いる。

($l=0$ のとき)　定義より $b_0=f(0)-1$ で、$s_0=0,\ i_0=0$ だから $f(i_0)=b_{s_0}-1$ である。

(l の場合を仮定)　$f(i_l)=b_{s_l}+1$ を仮定する。各 s_l の定義より $f^{-1}(b_{s_l+1}-1)=f^{-1}(b_{s_{l+1}}+1)$ が成り立つ。

証明. $f^{-1}(b_{s_l+1}-1)<x<f^{-1}(b_{s_{l+1}}+1)$ なる $x\in[m]$ があるとする。すると $b_{s_l+1}\leq f(x)\leq b_{s_{l+1}}$ となる。

(i) $b_{s_l+1}=b_{s_{l+1}}$ の場合：このとき $f(x)=b_{s_l+1}$ となり、 $b_{s_l+1}\notin f([m])$ に矛盾する。

(ii) $b_{s_l+1}<b_{s_{l+1}}$ の場合：このとき (i) と同じ理由で $b_{s_l+1}<f(x)<b_{s_{l+1}}$ が成り立つ。しかし、この不等式は $b_{s_{l+1}}$ の定め方に矛盾する。

したがって、 $f^{-1}(b_{s_l+1}-1)=f^{-1}(b_{s_{l+1}}+1)$ が成り立つ。 □

仮定から $f(j_l)=b_{s_l+1}-1$ が導かれることは上で見た。よって、

$$f^{-1}(b_{s_{l+1}}+1)=f^{-1}(b_{s_l+1}-1)+1=j_l+1=i_{l+1}.$$

すなわち、 $f(i_{l+1})=b_{s_{l+1}}+1$ が成り立つ。 □

② の証明. $j_q=m$ が成り立つことを示す。f は単射だから、集合 $\{y\in[n]\mid b_r<y\leq n\}$ と $\{x\in[m]\mid f^{-1}(b_r+1)\leq x\leq m\}$ の間の順序同型を導く。よって $k_q=n-b_r=m-f^{-1}(b_r+1)+1$ が成り立つ。すると、 $i_q+(k_q-1)=j_q$ より、

$$\begin{aligned} j_q=m &\iff i_q+(k_q-1)=m \\ &\iff f^{-1}(b_r+1)=i_q \end{aligned}$$

となるから、 $f^{-1}(b_r+1)=i_q$ を示せばよい。

$f^{-1}(b_{s_{q-1}+1}-1)+1=f^{-1}(b_r+1)$ が成り立つ。

証明. $f^{-1}(b_{s_{q-1}+1}-1) < x < f^{-1}(b_r+1)$ なる $x \in [m]$ があるとする。すると $b_{s_{q-1}+1} \leq f(x) \leq b_r$ となる。

(i) $b_{s_{q-1}+1} = b_r$ の場合：このとき $f(x) = b_r$ となり、 $b_r \notin f([m])$ に矛盾する。

(ii) $b_{s_{q-1}+1} < b_r$ の場合：このとき (i) と同じ理由で $b_{s_{q-1}+1} < f(x) < b_r$ が成り立つ。しかし、この不等式は $b_{s_{q-1}}$ の定め方に矛盾する。

したがって、 $f^{-1}(b_{s_{q-1}+1}-1) = f^{-1}(b_r+1)$ が成り立つ。 □

$f(j_l) = b_{s_l+1} - 1$ に $l = q-1$ を代入すれば $j_{q-1} = f^{-1}(b_{s_{q-1}+1}-1)$ を得るから、

$$f^{-1}(b_r+1) = f^{-1}(b_{s_{q-1}+1}-1) + 1 = j_{q-1} + 1 = i_q$$

となる。 □

Step2【区切ったグループごとの f による変化度合いを調べる】: まず、各 $0 \leq l \leq q$ に対して $h_l := f(i_l) - i_l$ とおく。f の単射性より、任意の $i_l \leq x \leq j_l$ に対して $f(x) - x = f(i_l) - i_l = h_l$ である。

また、各 $0 \leq l \leq q$ に対して g_l を次のように定める：

- $l = 0$ のとき： g_0 を $f(0)$ より小さい $[n] - f([m])$ の元の個数、すなわち $g_0 := f(0)$ とする。
- $l > 0$ のとき： g_l を、$f(j_{l-1})$ より大きく $f(i_l)$ より小さい $[n] - f([m])$ の元の個数とする。

このとき、 $h_0 = g_0,\ h_l - h_{l-1} = g_l\ (1 \leq l \leq q)$ が成り立つ。

証明. $h_0 = f(0) = g_0$ は明らか。後者を示す。Step1 の ① より g_l は「 $b_{s_{l-1}+1}$ 以上 b_{s_l} 以下の $[n] - f([m])$ の元の個数」と等しい、すなわち $g_l = b_{s_l} - b_{s_{l-1}+1} + 1$ である。よって、

$$\begin{aligned} h_l - h_{l-1} &= (f(i_l) - i_l) - (f(i_{l-1}) - i_{l-1}) \\ &= b_{s_l} - b_{s_{l-1}} - k_{l-1} && (\because \text{Step1 の ①}) \\ &= b_{s_l} - b_{s_{l-1}} - (b_{s_l+1} - b_{s_{l-1}} - 1) && (\because k_{l-1}\text{の定義}) \\ &= b_{s_l} - b_{s_{l-1}+1} + 1 \\ &= g_l \end{aligned}$$

となる。 □

Step3【 f を δ_i^n の合成で表す】: 以上の準備のもと、

$$g = (\delta_{i_q+h_q-1}^{m+h_q} \circ \cdots \circ \delta_{i_q+h_{q-1}}^{m+h_{q-1}+1}) \circ \cdots \circ (\delta_{h_0-1}^{m+h_0} \circ \cdots \circ \delta_0^{m+1}) : [m] \to [m+h_q]$$

と定める。ここで、 Step1 の ② より

$$m + h_q = m + (f(i_q) - i_q) = m + (f(j_q) - j_q) = f(m) = n$$

だから、 g は写像 $g : [m] \to [n]$ である。

注意. どのようにして上の g の定義が導かれるか考える。$[m]$ の元を小さいものから順に移していくとする。

まず 0 を $f(0) = h_0$ に移すためには（つまりグループ 0 を移すためには）$\underbrace{\delta^{m+h_0}_{h_0-1} \circ \cdots \circ \delta^{m+1}_0}_{g_0 \text{個}} :$ $[m] \to [m+h_0]$ を作用させればよい。この写像により $[m]$ の元全体が $+h_0$ されるため、 $i_1 \in [m]$ は $i_1 + h_0 \in [m+h_0]$ に移る。

したがって、その状態を保った上で i_1 を $f(i_1) = i_1 + h_1 = (i_1 + h_0) + g_1$ に移すためには（つまりグループ 1 を移すためには)、さらに $\underbrace{\delta^{m+h_1}_{i_1+h_1-1} \circ \cdots \circ \delta^{m+h_0+1}_{i_1+h_0}}_{g_1 \text{個}} : [m+h_0] \to [m+h_1]$ を作用させればよい。δ^n_i の定義から、これを作用させたとき全体として（合成 $[m] \to [m+h_1]$ として）は、 $i_1 \in [m]$ より小さい元は $+h_0$ され、 i_1 以上の元が $+h_1$ されることになる。

これを繰り返していけば、上の g の定義を得る。

あとは $f = g$ であることを示せばよい。$x \in [m]$ とすると、ある $0 \leq l \leq q$ が存在して $i_l \leq x \leq j_l$ となる。このとき、 Step2 の冒頭で述べたように $f(x) = x + h_l$ が成り立つ。一方、 g の定義より $g(x) = x + h_l$ だから、 $f(x) = g(x)$ がわかった。 $\square$

定理 1.1.6. Δ の任意の射 f は、いくつかの δ^n_i, σ^n_i の合成で表せる。

証明. $f : [m] \to [n]$ を Δ の射とする。このとき、 f がある全射 $g : [m] \to [k]$ と単射 $h : [k] \to [n]$ によって $f = h \circ g$ と表せることを示せば、補題 1.1.4 から h がいくかの σ^n_i の合成で表され、補題 1.1.5 から g がいくつかの δ^n_i の合成で表されるため、題意が言える。

$f([m])$ のすべての元を順番に $a_0 < a_1 < \cdots < a_k$ $(0 \leq k \leq n)$ と並べる。このとき、写像 $g : [m] \to [k]$ を $x \in [m]$ に対し $g(x) = y \overset{\text{def}}{\iff} f(x) = a_y$ $(0 \leq y \leq k)$ として定める。f は順序を保つから g も順序を保ち、各 a_y $(0 \leq y \leq k)$ の定め方より g は全射である。

また、写像 $h : [k] \to [n]$ を $y \in [k]$ に対し $h(y) \coloneqq a_y$ と定める。各 a_y $(0 \leq y \leq k)$ の定め方より、$0 \leq y_0 < y_1 \leq k$ なら $a_{y_0} < a_{y_1}$ が成り立つ。これは h が順序を保つ単射であることを意味する。

定義より明らかに $f = h \circ g$ であるから、証明が完了した。 $\square$

1.2 単体的集合

1.3 標準 n-単体、境界、角