Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 10

24 Maggio 2022 — Compito n. 00199 — □□■■□□□■■■

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: | | | | | | | |

Punteggi: 1 punto per ogni risposta esatta, 0 punti per risposte sbagliate o lasciate in bianco.

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
F	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
C	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□

---

1) Si consideri l'equazione differenziale:

$$y'' + 7\,y' + 2\,y = 0\,.$$

1A) L'equazione ha un'unica soluzione.
1B) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(3) = 4$.
1C) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(6) = 7$ e $y'(6) = 6$.
1D) Non esistono soluzioni dell'equazione tali che

$$y(4) = 5\,,\ y'(4) = 6\,,\ y''(4) = 47\,.$$

---

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' - 13\,y' + 36\,y = 108\,. \tag{1}$$

2A) Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 + 13L + 36$.
2B) La funzione $y_0(t) = 4\,\mathrm{e}^{4\,t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata a (1).
2C) La funzione $\overline{y}(t) = 4$ è una soluzione particolare di (1).
2D) Se $y(0) = 3$ e $y'(0) = 0$, la soluzione di (1) è costante.

---

3) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) + A\,y(t) + B\,y(t) = 0\,.$$

3A) Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 + A\,L + B$.
3B) Se $A = 0$ e $B = -25$, la funzione $y(t) = 8\,\mathrm{e}^{5\,t} - 5\,\mathrm{e}^{-5\,t}$ è soluzione dell'equazione.
3C) Se $A = -5$ e $B = 0$, la funzione $y(t) = 7$ non è soluzione dell'equazione.
3D) Se $A = -10$ e $B = 74$, la funzione $y(t) = 5\,\mathrm{e}^{5\,t}\,\sin(7\,t)$ è soluzione dell'equazione.

---

4) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' - 4\,y' = -28\,.$$

4A) Tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da $y_0(t) = C + D\,\mathrm{e}^{4\,t}$.
4B) Esistono soluzioni costanti dell'equazione.
4C) La funzione $\overline{y}(t) = 7\,t$ non è soluzione dell'equazione.
4D) Se $y(0) = 8$ e $y'(0) = 7$, la soluzione dell'equazione è un polinomio di primo grado.

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00199**

5) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' - 11\,y' + 18\,y = -7\,\mathrm{e}^{2\,t}\,. \tag{1}$$

a) Scrivere il polinomio caratteristico dell'equazione in (1) e trovarne le radici.
b) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).
c) Trovare una soluzione particolare di (1).
d) Trovare l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

6) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' - 6\,y' + 9\,y = 2\,\mathrm{e}^{3\,t}\,. \tag{1}$$

a) Si determini il polinomio caratteristico di (1) e si trovino tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).
b) Si trovi una soluzione particolare di (1).
c) Si trovi l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 5$.
d) Si trovi l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 6$ e $y'(0) = 0$.

Soluzioni del compito 00199

1) Si consideri l'equazione differenziale:

$$y'' + 7\,y' + 2\,y = 0\,.$$

1A) L'equazione ha un'unica soluzione.

Falso: Trattandosi di un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine, ha infinite soluzioni, dipendenti da due parametri reali.

1B) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(3) = 4$.

Falso: L'equazione ha infinite soluzioni, dipendenti da due parametri reali. Assegnando una sola condizione, si "fissa" uno solo dei due parametri, e quindi l'equazione ha infinite soluzioni tali che $y(3) = 4$.

1C) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(6) = 7$ e $y'(6) = 6$.

Vero: Assegnando due condizioni, una sulla funzione e una sulla derivata, si ottiene un problema di Cauchy, che ha un'unica soluzione.

1D) Non esistono soluzioni dell'equazione tali che

$$y(4) = 5\,,\ y'(4) = 6\,,\ y''(4) = 47\,.$$

Vero: Se $y(4) = 5$ e $y'(4) = 6$, dall'equazione segue che deve essere

$$0 = y''(4) + 7\,y'(4) + 2\,y(4) = y''(4) + 7 \cdot 5 + 2 \cdot 6 = y''(4) + 47\,,$$

da cui segue che $y''(4) = -47$. Pertanto, l'unica soluzione dell'equazione che soddisfa le condizioni $y(4) = 5$ e $y'(4) = 6$ è tale che $y''(4) = -47 \neq 47$; in altre parole, non esistono soluzioni dell'equazione che soddisfano le tre condizioni richieste.

---

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' - 13\,y' + 36\,y = 108\,. \tag{1}$$

2A) Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 + 13L + 36$.

Falso: Sostituendo y'' con L^2, y' con L e y con 1, si trova che

$$P(L) = L^2 - 13L + 36 \neq L^2 + 13L + 36\,.$$

2B) La funzione $y_0(t) = 4\,\mathrm{e}^{4\,t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata a (1).

Vero: Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 13L + 36$, che si annulla per $L_1 = 4$ e $L_2 = 9$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da

$$y_0(t) = C\,\mathrm{e}^{4\,t} + D\,\mathrm{e}^{9\,t}\,,$$

con C e D numeri reali. Scegliendo $C = 4$ e $D = 0$, si ha che $y_0(t) = 4\,\mathrm{e}^{4\,t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata a (1).

2C) La funzione $\overline{y}(t) = 4$ è una soluzione particolare di (1).

Falso: Sostituendo nell'equazione si ha, essendo nulle sia la derivata prima che la derivata seconda di $\overline{y}(t)$,

$$y'' - 13\,y' + 36\,y = 36 \cdot 4 = 144 \neq 108\,,$$

e quindi $\overline{y}(t) = 4$ non è una soluzione particolare di (1). Cercando una soluzione particolare della forma $y(t) \equiv Q$ si vede facilmente che deve essere $Q = 3$.

2D) Se $y(0) = 3$ e $y'(0) = 0$, la soluzione di (1) è costante.

Vero: Come detto nell'esercizio **2C**, la funzione $y(t) \equiv 3$ è soluzione dell'equazione (1). Dato che soddisfa inoltre le condizioni $y(0) = 3$ e $y'(0) = 0$, la funzione costante $y(t) \equiv 3$ è l'unica soluzione di (1) che le soddisfa.

---

3) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) + A\,y(t) + B\,y(t) = 0\,.$$

3A) Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 + A\,L + B$.

Vero: Sostituendo y'' con L^2, y' con L e y con 1, si trova che

$$P(L) = L^2 + A\,L + B\,.$$

3B) Se $A = 0$ e $B = -25$, la funzione $y(t) = 8\,\mathrm{e}^{5\,t} - 5\,\mathrm{e}^{-5\,t}$ è soluzione dell'equazione.

Vero: Se $A = 0$ e $B = -25$, il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 25$ che si annulla per $L = \pm 5$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(t) = C\,\mathrm{e}^{5\,t} + D\,\mathrm{e}^{-5\,t}\,.$$

Scegliendo $C = 8$ e $D = -5$, si ha che $y(t) = 8\,\mathrm{e}^{5\,t} - 5\,\mathrm{e}^{-5\,t}$ è soluzione dell'equazione.

3C) Se $A = -5$ e $B = 0$, la funzione $y(t) = 7$ non è soluzione dell'equazione.

Falso: Se $A = -5$ e $B = 0$, il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 5\,L$ che si annulla per $L = 0$ e per $L = 5$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(t) = C\,\mathrm{e}^{0\,t} + D\,\mathrm{e}^{5\,t} = C + D\,\mathrm{e}^{5\,t}\,.$$

Scegliendo $C = 7$ e $D = 0$, si ha che $y(t) = 7$ è soluzione dell'equazione.

3D) Se $A = -10$ e $B = 74$, la funzione $y(t) = 5\,\mathrm{e}^{5\,t}\,\sin(7\,t)$ è soluzione dell'equazione.

Vero: Se $A = -10$ e $B = 74$, il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 10\,L + 74$, che si annulla per $L = 5 \pm 7\,i$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(t) = \mathrm{e}^{5\,t}[C\,\cos(7\,t) + D\,\sin(7\,t)]\,.$$

Scegliendo $C = 0$ e $D = 5$, si ha che $y(t) = 5\,\mathrm{e}^{5\,t}\,\sin(7\,t)$ è soluzione dell'equazione.

---

4) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' - 4\,y' = -28\,.$$

4A) Tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da $y_0(t) = C + D\,\mathrm{e}^{4\,t}$.

Vero: Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 4\,L$, che si annulla per $L = 0$ e $L = 4$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da

$$y_0(t) = C\,\mathrm{e}^{0\cdot t} + D\,\mathrm{e}^{4\,t} = C + D\,\mathrm{e}^{4\,t}\,.$$

4B) Esistono soluzioni costanti dell'equazione.

Falso: Se $y(t) \equiv Q$ è una costante, sostituendo nell'equazione si ha

$$y''(t) - 4\,y'(t) = 0 - 4\cdot 0 = 0 \neq 7\,,$$

e quindi l'equazione non ha soluzioni costanti. Alternativamente, sappiamo dalla domanda **4A** che le costanti sono soluzioni dell'equazione omogenea, e quindi non possono essere soluzioni dell'equazione "completa".

4C) La funzione $\overline{y}(t) = 7\,t$ non è soluzione dell'equazione.

Falso: Se $\overline{y}(t) = 7\,t$, si ha $\overline{y}'(t) = 7$ e $\overline{y}''(t) = 0$. Sostituendo nell'equazione si ha

$$\overline{y}''(t) - 4\,\overline{y}'(t) = -4\cdot 7 = -28\,,$$

e quindi $\overline{y}(t) = 7\,t$ è soluzione dell'equazione.

4D) Se $y(0) = 8$ e $y'(0) = 7$, la soluzione dell'equazione è un polinomio di primo grado.

Vero: Sappiamo già, dagli esercizi **4A** e **4C**, che tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t) = C + D\,\mathrm{e}^{4\,t} + 7\,t\,,$$

da cui segue che

$$y'(t) = 4\,D\,\mathrm{e}^{5\,t} + 7\,.$$

Pertanto, assegnando le condizioni iniziali, si ha

$$8 = C + D\,, \qquad 7 = 4\,D + 7\,.$$

Dalla seconda si ricava $D = 0$, e sostituendo nella prima si ricava $C = 8$. Ne segue che l'unica soluzione dell'equazione è

$$y(t) = 8 + 7\,t\,,$$

che è un polinomio di primo grado.

---

5) Si consideri l'equazione differenziale

$$(1) \qquad y'' - 11\,y' + 18\,y = -7\,e^{2\,t}\,.$$

a) Scrivere il polinomio caratteristico dell'equazione in (1) e trovarne le radici.
b) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).
c) Trovare una soluzione particolare di (1).
d) Trovare l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

Soluzione:
a) Sostituendo in (1) L^2 a y'', L a y' e 1 a y, si trova

$$P(L) = L^2 - 11\,L + 18\,,$$

che si annulla per $L_1 = 2$ e per $L_2 = 9$.

b) Usando le radici del polinomio caratteristico calcolate al punto precedente, abbiamo che tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1) sono date da

$$y_0(t) = C\,e^{2\,t} + D\,e^{9\,t}\,,$$

con C e D numeri reali.

c) Dato che $g(t) = e^{2\,t}$ è una soluzione dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$\overline{y}(t) = Q\,t\,e^{2\,t}\,.$$

Si ha

$$\overline{y}'(t) = Q\,(1 + 2\,t)\,e^{2\,t}\,, \qquad \overline{y}''(t) = Q\,(4 + 4\,t)\,e^{2\,t}\,.$$

Sostituendo in (1) si ha

$$\overline{y}'' - 11\,\overline{y} + 18\,\overline{y} = Q\,e^{2\,t}\,[4 + 4\,t - 11\,(1 + 2\,t) + 18\,t] = -7\,Q\,e^{2\,t}\,,$$

e quindi $\overline{y}$ è soluzione di (1) se Q è tale che

$$-7\,Q\,e^{2\,t} = -7\,e^{2\,t}\,,$$

da cui segue $Q = 1$ e quindi

$$\overline{y}(t) = t\,e^{2\,t}\,.$$

d) Da **b)** e **c)** abbiamo che tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t) = C\,e^{2\,t} + D\,e^{9\,t} + t\,e^{2\,t}\,,$$

con C e D numeri reali. Dato che

$$y'(t) = 2\,C\,e^{2\,t} + 9\,D\,e^{9\,t} + e^{2\,t} + 2\,t\,e^{2\,t}\,,$$

si ha $y(0) = C + D$ e $y'(0) = 2\,C + 9\,D + 1$. Imponendo le condizioni iniziali, si ha che deve essere $C + D = 0$ e $2\,C + 9\,D + 1 = 1$, da cui si ricava facilmente $C = D = 0$. Ne segue che l'unica soluzione di (1) che soddisfa le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ è

$$y(t) = t\,e^{2\,t}\,.$$

6) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' - 6\,y' + 9\,y = 2\,\mathrm{e}^{3\,t}\,. \tag{1}$$

a) Si determini il polinomio caratteristico di (1) e si trovino tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).
b) Si trovi una soluzione particolare di (1).
c) Si trovi l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 5$.
d) Si trovi l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 6$ e $y'(0) = 0$.

Soluzione:
a) Il polinomio caratteristico è $P(L) = L^2 - 6\,L + 9$, che si annulla per $L_1 = L_2 = 3$. Conseguentemente, tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata ad (1) sono date da

$$y_0(t) = (C + D\,t)\,\mathrm{e}^{3\,t}\,,$$

con C e D numeri reali.

b) Dato che sia $\mathrm{e}^{3\,t}$ che $t\,\mathrm{e}^{3\,t}$ sono soluzioni dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare di (1) della forma

$$\overline{y}(t) = Q\,t^2\,\mathrm{e}^{3\,t}\,.$$

Derivando, si ha

$$\overline{y}'(t) = Q\,(2t + 3\,t^2)\,\mathrm{e}^{3\,t}\,, \qquad \overline{y}''(t) = Q\,(2 + 12\,t + 9\,t^2)\,\mathrm{e}^{3\,t}\,.$$

Sostituendo nell'equazione si ha

$$\overline{y}'' - 6\,\overline{y}' + 9\,\overline{y}(t) = Q\,\mathrm{e}^{3\,t}\,[2 + 12\,t + 9\,t^2 - 6\,(2t + 3\,t^2) + 9\,t^2] = 2\,Q\,\mathrm{e}^{3\,t}\,,$$

da cui segue che $\overline{y}$ è soluzione di (1) se $Q = 1$. Si ha dunque che tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t) = (C + D\,t + t^2)\,\mathrm{e}^{3\,t}\,,$$

da cui segue, derivando, che

$$y'(t) = (3\,C + D + (3\,D + 2)\,t + 3\,t^2)\,\mathrm{e}^{3\,t}\,.$$

Pertanto

$$y(0) = C\,, \qquad y'(0) = 3\,C + D\,. \tag{2}$$

c) Da (2) e dalle condizioni date segue che deve essere $C = 0$ e $3\,C + D = 5$, da cui $C = 0$ e $D = 5$. L'unica soluzione di (1) è quindi data da

$$y(t) = (5\,t + t^2)\,\mathrm{e}^{3\,t}\,.$$

d) Da (2) e dalle condizioni date segue che deve essere $C = 6$ e $3\,C + D = 0$, da cui $D = -18$. L'unica soluzione di (1) è quindi data da

$$y(t) = (6 - 18\,t + t^2)\,\mathrm{e}^{3\,t}\,.$$