Calcolo integrale — Compito di pre-esonero
27 Maggio 2022 — Compito n. 00135 — □□■□□□□■■■

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: | | | | | | | |

Punteggi: 1 punto per ogni risposta esatta, 0 punti per risposte sbagliate o lasciate in bianco.

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
F	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
C	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□

---

1) Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = (2t+3)\,y + 5t^2 + 6t + 3$$

1A) L'equazione ha infinite soluzioni.
1B) Esistono infinite soluzioni tali che $y(0) = 3$.
1C) Non esistono soluzioni tali che $y(0) = 7$ e $y'(0) = 24$.
1D) Se $y(0) = 0$, si ha $y''(0) = 15$.

---

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = \mathrm{e}^{6\,t}\,(3y^2 + 3y - 6)\,.$$

2A) Se $y(0) = 1$, la soluzione è costante.
2B) Se $y(0) = 0$, la soluzione è crescente in un intorno dell'origine.
2C) Se $y(0) = 2$, si ha $T_1(y;0) = 2 + 12\,t$.
2D) Se $y(0) = 0$, si ha $y''(0) = -54$.

---

3) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} y' = 14\,t\,y + 5\,\mathrm{e}^{7\,t^2}\,(6\,t+2) \\ y(0) = 6\,. \end{cases}$$

3A) Si ha $y'(0) = 10$.
3B) La funzione $y(t) = 5\,\mathrm{e}^{7\,t^2}$ non è soluzione dell'equazione omogenea associata all'equazione di (1).
3C) La funzione $y(t) = (15\,t^2 + 10\,t)\,\mathrm{e}^{7\,t^2}$ non è soluzione dell'equazione in (1).
3D) Si ha

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty\,.$$

---

4) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' - 8\,y' + B\,y = 0\,.$$

4A) Se $B = 0$, le funzioni costanti sono soluzioni dell'equazione.
4B) Se $B = -20$, la funzione $y(t) = 7\,\mathrm{e}^{10\,t}$ è soluzione dell'equazione.
4C) Se $B = 16$, la funzione $y(t) = 6\,t\,\mathrm{e}^{4\,t}$ è soluzione dell'equazione.
4D) Se $B = 52$, la funzione $y(t) = 7\,\mathrm{e}^{4\,t}\cos(6\,t)$ non è soluzione dell'equazione.

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00135**

---

5) Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = \frac{y\,(y-10)}{t+5}\,. \tag{1}$$

a) Quante soluzioni ha l'equazione (1)? E quante soluzioni ha, se aggiungiamo la condizione $y(0) = 3$?
b) Determinare la soluzione di (1) se $y(0) = 10$.
c) Scrivere $T_1(y; 0)$ se $y(0) = 5$.
d) Determinare la soluzione di (1) se $y(0) = 5$.

6) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' - 9\,y' + 18\,y = 72\,. \tag{1}$$

a) Quante soluzioni ha l'equazione (1)? E quante soluzioni tali che $y(0) = 4$ ha l'equazione (1)?
b) Scrivere il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea associata all'equazione (1) e scrivere tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata.
c) Trovare una soluzione particolare dell'equazione (1) e scrivere tutte le soluzioni dell'equazione (1).
d) Trovare la soluzione di (1) con le condizioni $y(0) = 4$ e $y'(0) = 3$.

Soluzioni del compito 00135

1) Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = (2t+3)\,y + 5t^2 + 6t + 3$$

1A) L'equazione ha infinite soluzioni.

Vero: Trattandosi di un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, esistono infinite soluzioni, dipendenti da un unico parametro reale.

1B) Esistono infinite soluzioni tali che $y(0) = 3$.

Falso: Assegnando una condizione iniziale ad un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, si ottiene un problema di Cauchy che ha un'unica soluzione.

1C) Non esistono soluzioni tali che $y(0) = 7$ e $y'(0) = 24$.

Falso: L'equazione ha un'unica soluzione tale che $y(0) = 7$; d'altra parte, dall'equazione, sostituendo $t = 0$, si ha

$$y'(0) = 3\,y(0) + 3 = 3 \cdot 7 + 3 = 24\,,$$

e quindi la condizione sulla derivata è automaticamente verificata. Ne consegue che esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 7$ e $y'(0) = 24$.

1D) Se $y(0) = 0$, si ha $y''(0) = 15$.

Vero: Dall'equazione si ha

$$y'(0) = 3\,y(0) + 3 = 3 \cdot 0 + 3 = 3\,,$$

mentre, derivando l'equazione, si ha

$$y'' = 2\,y + (2t+3)\,y' + 10t + 6\,,$$

da cui segue che

$$y''(0) = 2\,y(0) + 3\,y'(0) + 6 = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 6 = 15\,.$$

---

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = \mathrm{e}^{6\,t}\,(3y^2 + 3y - 6)\,.$$

L'equazione è un'equazione a variabili separabili della forma

$$y' = f(y)\,g(t)\,,$$

con

$$f(y) = 3y^2 + 3y - 6 \qquad \text{e} \qquad g(t) = \mathrm{e}^{6\,t}\,. \tag{1}$$

2A) Se $y(0) = 1$, la soluzione è costante.

Vero: Se $f(y)$ è come in (1), dato che $f(1) = 0$, la funzione costante $y \equiv 1$ è soluzione dell'equazione.

2B) Se $y(0) = 0$, la soluzione è crescente in un intorno dell'origine.

Falso: Dato che, sostituendo $t = 0$ nell'equazione, si ha

$$y'(0) = \mathrm{e}^{6\cdot 0}\,(3y(0)^2 + 3y(0) - 6) = 1 \cdot (-6) = -6 < 0\,,$$

per il teorema della permanenza del segno si ha $y' \leq 0$ in un intorno dell'origine, e quindi la soluzione è decrescente in un intorno dell'origine.

2C) Se $y(0) = 2$, si ha $T_1(y; 0) = 2 + 12\,t$.

Vero: Dall'equazione, sostituendo $t = 0$, si ha

$$y'(0) = \mathrm{e}^{6\cdot 0}\,(3y(0)^2 + 3y(0) - 6) = 1 \cdot 12 = 12\,.$$

Pertanto,

$$T_1(y; 0) = y(0) + y'(0)\,t = 2 + 12\,t\,.$$

2D) Se $y(0) = 0$, si ha $y''(0) = -54$.

Vero: Se $y(0) = 0$, si ha dall'equazione che $y'(0) = -6$. Inoltre, derivando l'equazione, si ha

$$y'' = 6\,\mathrm{e}^{6\,t}\,(3y^2 + 3y - 6) + \mathrm{e}^{6\,t}\,(6\,y + 3)\,y'\,,$$

da cui, sostituendo $t = 0$, si ha

$$y''(0) = 6\,(-6) + 3\,(-6) = -54\,.$$

---

3) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} y' = 14\,t\,y + 5\,\mathrm{e}^{7\,t^2}\,(6\,t+2) \\ y(0) = 6\,. \end{cases}$$

Ricordiamo che per il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = a(t)\,y + b(t) \\ y(0) = 6\,, \end{cases}$$

la soluzione è data da

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)}\left[6 + \int_0^t b(s)\,\mathrm{e}^{-A(s)}\,ds\right],$$

dove

$$A(t) = \int_0^t a(s)\,ds\,.$$

Nel nostro caso, $a(t) = 14\,t$, $b(t) = 5\,\mathrm{e}^{7\,t^2}\,(6\,t+2)$. Pertanto

$$A(t) = \int_0^t 14\,s\,ds = 7\,t^2\,,$$

e quindi

$$(2) \qquad y(t) = \mathrm{e}^{7\,t^2}\left[6 + \int_0^t 5\,\mathrm{e}^{7\,s^2}\,(6\,s+2)\,\mathrm{e}^{-7\,s^2}\,ds\right] = \mathrm{e}^{7\,t^2}\,[15\,t^2 + 10\,t + 6]\,.$$

3A) Si ha $y'(0) = 10$.

Vero: Sostituendo $t = 0$ nell'equazione si ha

$$y'(0) = 14 \cdot 0 \cdot y(0) + 5 \cdot \mathrm{e}^{7 \cdot 0^2} \cdot 2 = 5 \cdot 2 = 10\,.$$

3B) La funzione $y(t) = 5\,\mathrm{e}^{7\,t^2}$ non è soluzione dell'equazione omogenea associata all'equazione di (1).

Falso: L'equazione omogenea associata è

$$y' = 14\,t\,y\,.$$

Se $y(t) = 5\,\mathrm{e}^{7\,t^2}$, si ha

$$y'(t) = 5 \cdot 14\,t\,\mathrm{e}^{7\,t^2} = 14\,t \cdot 5\,\mathrm{e}^{7\,t^2} = 14\,t\,y(t)\,,$$

e quindi $y(t)$ è soluzione dell'equazione omogenea associata.

3C) La funzione $y(t) = (15\,t^2 + 10\,t)\,\mathrm{e}^{7\,t^2}$ non è soluzione dell'equazione in (1).

Falso: Se $y(t) = (15\,t^2 + 10\,t)\,\mathrm{e}^{7\,t^2}$, si ha

$$y'(t) = (15\,t^2 + 10\,t)\,14\,t\,\mathrm{e}^{7\,t^2} + (30\,t + 10)\,\mathrm{e}^{7\,t^2} = 14\,t\,y(t) + 5\,\mathrm{e}^{7\,t^2}\,(6\,t+2)\,,$$

e quindi $y(t)$ è soluzione dell'equazione in (1).

3D) Si ha

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = +\infty\,.$$

Vero: Per la (2), si ha

$$y(t) = \mathrm{e}^{7\,t^2}\,[15\,t^2 + 10\,t + 6]\,,$$

che è tale che

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = +\infty\,.$$

---

4) Si consideri l'equazione differenziale
$$y'' - 8\,y' + B\,y = 0\,.$$

4A) Se $B = 0$, le funzioni costanti sono soluzioni dell'equazione.

Vero: Se $B = 0$, l'equazione diventa
$$y'' - 8\,y' = 0\,.$$
Se $y(t) \equiv c$, allora $y''(t) = y'(t) = 0$, e quindi $y(t)$ è soluzione dell'equazione.

4B) Se $B = -20$, la funzione $y(t) = 7\,\mathrm{e}^{10\,t}$ è soluzione dell'equazione.

Vero: Se $B = -20$, l'equazione diventa
$$y'' - 8\,y' - 20\,y = 0\,.$$
Il polinomio caratteristico associato è
$$P(L) = L^2 - 8\,L - 20\,,$$
che si annulla per $L_1 = 10$ e $L_2 = -2$; le soluzioni dell'equazione sono quindi date da
$$y(t) = C\,\mathrm{e}^{10\,t} + D\,\mathrm{e}^{-2\,t}\,,$$
con C e D numeri reali. Scegliendo $C = 7$ e $D = 0$, abbiamo che $y(t) = 7\,\mathrm{e}^{10\,t}$ è soluzione dell'equazione.

4C) Se $B = 16$, la funzione $y(t) = 6\,t\,\mathrm{e}^{4\,t}$ è soluzione dell'equazione.

Vero: Se $B = 16$, l'equazione diventa
$$y'' - 8\,y' + 16\,y = 0\,.$$
Il polinomio caratteristico associato è
$$P(L) = L^2 - 8\,L + 16\,,$$
che ha la radice doppia $L = 4$; le soluzioni dell'equazione sono quindi date da
$$y(t) = C\,\mathrm{e}^{4\,t} + D\,t\,\mathrm{e}^{4\,t}\,,$$
con C e D numeri reali. Scegliendo $C = 0$ e $D = 6$, abbiamo che $y(t) = 6\,t\,\mathrm{e}^{4\,t}$ è soluzione dell'equazione.

4D) Se $B = 52$, la funzione $y(t) = 7\,\mathrm{e}^{4\,t}\,\cos(6\,t)$ non è soluzione dell'equazione.

Falso: Se $B = 52$, l'equazione diventa
$$y'' - 8\,y' + 52\,y = 0\,.$$
Il polinomio caratteristico associato è
$$P(L) = L^2 - 8\,L + 52\,,$$
le cui radici sono $L = 4 \pm 6\,i$; le soluzioni dell'equazione sono quindi date da
$$y(t) = \mathrm{e}^{4\,t}\,[C\,\cos(6\,t) + D\,\sin(6\,t)]\,,$$
con C e D numeri reali. Scegliendo $C = 7$ e $D = 0$, abbiamo che $y(t) = 7\,\mathrm{e}^{4\,t}\,\cos(6\,t)$ è soluzione dell'equazione.

---

5) Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = \frac{y\,(y-10)}{t+5}\,. \tag{1}$$

a) Quante soluzioni ha l'equazione (1)? E quante soluzioni ha, se aggiungiamo la condizione $y(0) = 3$?
b) Determinare la soluzione di (1) se $y(0) = 10$.
c) Scrivere $T_1(y;0)$ se $y(0) = 5$.
d) Determinare la soluzione di (1) se $y(0) = 5$.

Soluzione:
a) Infinite, dipendenti da un parametro reale, e una.

b) L'equazione è a variabili separabili, della forma

$$y' = g(t)\,f(y)\,,$$

con $g(t) = \frac{1}{t+5}$ e $f(y) = y\,(y-10)$. Dato che $f(10) = 0$, se $y(0) = 10$ si ha che la funzione costante $y(t) \equiv 10$ è la soluzione di (1).

c) Dall'equazione si ha

$$y'(0) = \frac{y(0)\,(y(0)-10)}{0+5} = \frac{5\,(5-10)}{5} = -5\,.$$

Pertanto,

$$T_1(y;0) = y(0) + y'(0)\,t = -5t + 5\,.$$

d) Separando le variabili, possiamo riscrivere l'equazione come

$$\frac{y'(t)}{y(t)\,(y(t)-10)} = \frac{1}{t+5}\,.$$

Integrando tra 0 e s, sostituendo $z = y(t)$ nel primo integrale, e ricordando la condizione iniziale $y(0) = 5$, si ha

$$\int_5^{y(s)} \frac{dz}{z\,(z-10)} = \int_0^s \frac{dt}{t+5} = \ln(|t+5|)\Big|_0^s = \ln(s+5) - \ln(5) = \ln\Big(\frac{s+5}{5}\Big)\,.$$

Ricordando che

$$\int \frac{dz}{z\,(z-10)} = \frac{1}{10}\,\ln\Big(\Big|\frac{z-10}{z}\Big|\Big)\,,$$

si ha

$$\int_5^{y(s)} \frac{dz}{z\,(z-10)} = \frac{1}{10}\,\ln\Big(\Big|\frac{y(s)-10}{y(s)}\Big|\Big) - \frac{1}{10}\,\ln\Big(\Big|\frac{5-10}{5}\Big|\Big) = \frac{1}{10}\,\ln\Big(\Big|\frac{y(s)-10}{y(s)}\Big|\Big)\,.$$

Si ha pertanto che

$$\frac{1}{10}\,\ln\Big(\Big|\frac{y(s)-10}{y(s)}\Big|\Big) = \ln\Big(\frac{s+5}{5}\Big)\,,$$

da cui segue (osservando che $0 < y(s) < 10$ per s vicino a zero dato che $y(0) = 5$) che

$$\frac{10-y(s)}{y(s)} = \Big(\frac{s+5}{5}\Big)^{10}\,.$$

Da questa relazione si ricava facilmente che

$$y(s) = \frac{10}{\big(\frac{s+5}{5}\big)^{10} + 1}\,.$$

6) Si consideri l'equazione differenziale

(1) $$y'' - 9\,y' + 18\,y = 72\,.$$

a) Quante soluzioni ha l'equazione (1)? E quante soluzioni tali che $y(0) = 4$ ha l'equazione (1)?
b) Scrivere il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea associata all'equazione (1) e scrivere tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata.
c) Trovare una soluzione particolare dell'equazione (1) e scrivere tutte le soluzioni dell'equazione (1).
d) Trovare la soluzione di (1) con le condizioni $y(0) = 4$ e $y'(0) = 3$.

Soluzione:
a) Infinite, dipendenti da due parametri reali, e infinite, dipendenti da un parametro reale.

b) Il polinomio caratteristico è
$$P(L) = L^2 - 9L + 18\,.$$
Dato che $P(L) = 0$ per $L = 6$ e per $L = 3$, le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da
$$y_0(t) = C\,e^{6\,t} + D\,e^{3\,t}\,,$$
con C e D parametri reali.

c) Essendo il dato una costante, e dato che le costanti **non sono** soluzioni dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare della forma $\overline{y}(t) = Q$, con Q numero reale. Sostituendo nell'equazione, si ha che deve essere
$$18\,Q = 72\,,$$
da cui segue $Q = 4$. Tutte le soluzioni dell'equazione (1) sono pertanto date da
$$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t) = C\,e^{6\,t} + D\,e^{3\,t} + 4\,,$$
con C e D parametri reali.

d) Si ha $y(0) = C + D + 4$ e
$$y'(t) = 6\,C\,e^{6\,t} + 3\,D\,e^{3\,t}\,,$$
da cui segue che $y'(0) = 6\,C + 3\,D$. Pertanto, assegnando le condizioni iniziali si ha che deve essere
$$C + D + 4 = 4\,, \quad 6\,C + 3\,D = 3\,.$$
Dalla prima equazione si ricava che deve essere $C = -D$; sostituendo nella seconda si ha
$$-6\,D + 3\,D = -3\,D = 3\,,$$
da cui segue che $D = -1$ (e quindi $C = -D = 1$). In definitiva, l'unica soluzione di (1) è data da
$$y(t) = e^{6\,t} - e^{3\,t} + 4\,.$$