Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 7
26 Aprile 2022 — Compito n. 00210 — □□■■□■□□■□

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ⊠ o ☑).

Nome: ______________________

Cognome: ______________________

Matricola: □□□□□□□

Punteggi: 1 punto per ogni risposta esatta, 0 punti per risposte sbagliate o lasciate in bianco.

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
F	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
C	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□

---

1) Sia

$$F(t) = 16 \int_{-7\pi}^{t} \cos^2(4\,x)\,dx\,.$$

1A) La funzione $F(t)$ non è derivabile per qualche t in $\mathbb{R}$.
1B) La funzione $F(t)$ è crescente su $\mathbb{R}$.
1C) Si ha $F(-28) > 0$.
1D) La funzione

$$G(t) = F(t) - 2\sin(4\,t)\,\cos(4\,t) - 8\,t$$

è costante su $\mathbb{R}$.

---

2) Sia

$$F(t) = \int_{-t}^{t} e^{5\,x^2}\,dx\,.$$

2A) La funzione $F(t)$ è derivabile per ogni t in $\mathbb{R}$.
2B) Si ha $F(-2) > 0$.
2C) Si ha $F(t) + F(-t) = 0$ per ogni t in $\mathbb{R}$.
2D) La funzione $F(t)$ è crescente su $\mathbb{R}$.

---

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

3A) La funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x}}$ non è integrabile in senso improprio su $[0,1]$.
3B) La funzione $f(x) = \frac{1}{x^4}$ è integrabile in senso improprio su $[1,+\infty)$.
3C) La funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x}+x^5}$ non è integrabile in senso improprio su $[0,+\infty)$.
3D) La funzione $f(x) = e^{-7\,x}$ non è integrabile in senso improprio su $\mathbb{R}$.

---

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

4A) Si ha

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{6}{x}\right) dx < +\infty\,.$$

4B) Si ha

$$\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{7}{x^2}\right) dx = +\infty\,.$$

4C) Si ha

$$\int_1^{+\infty} \sqrt{x}\,(e^{\frac{7}{x}} - 1)\,dx = +\infty\,.$$

4D) Si ha

$$\int_6^{+\infty} \frac{e^{-3\,x}}{\sqrt{x-6}}\,dx = +\infty\,.$$

5) Sia

$$F(t) = \int_{-1}^{t} \frac{10 + \cos(2\,x^2)}{1 + 5\,x^2}\,dx\,.$$

a) Calcolare $F(-1)$ e $F'(0)$.
b) Dimostrare che $F(-2) \leq 0 \leq F(1)$.
c) Dimostrare che $F(t)$ è crescente su $\mathbb{R}$.
d) Dimostrare che

$$\int_{-1}^{+\infty} \frac{10 + \cos(2\,x^2)}{1 + 5\,x^2}\,dx < +\infty\,.$$

6) Sia
$$F(t) = \int_0^{4\,t^2} \cos^2(6\,x^2)\,dx\,.$$
a) Calcolare $F'(t)$.
b) Dimostrare che la funzione $F(t)$ è crescente su $[0,+\infty)$ e decrescente su $(-\infty,0]$.
c) Dimostrare che $F(t)$ ha un minimo per $t=0$.
d) Dimostrare che
$$\lim_{t\to+\infty} \frac{F(t)}{t^3} = 0\,.$$

Soluzioni del compito 00210

1) Sia
$$F(t) = 16 \int_{-7\,\pi}^{t} \cos^2(4\,x)\,dx\,.$$

1A) La funzione $F(t)$ non è derivabile per qualche t in $\mathbb{R}$.

Falso: Dato che la funzione $x \mapsto 16\,\cos^2(4\,x)$ è continua, per il Teorema fondamentale del calcolo integrale la funzione $F(t)$ è derivabile e si ha

$$F'(t) = 16\,\cos^2(4\,t)\,, \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,. \tag{1}$$

1B) La funzione $F(t)$ è crescente su $\mathbb{R}$.

Vero: Per la (1) si ha
$$F'(t) = 16\,\cos^2(4\,t) \geq 0\,, \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,,$$
da cui segue che $F(t)$ è crescente.

1C) Si ha $F(-28) > 0$.

Falso: Dato che (si veda la domanda **1B**) la funzione $F(t)$ è crescente, e dato che $-28 < -7\,\pi$, si ha
$$F(-28) \leq F(-7\,\pi) = \int_{-7\,\pi}^{-7\,\pi} \cos^2(4\,x)\,dx = 0\,,$$
e quindi $F(-28) \leq 0$.

1D) La funzione
$$G(t) = F(t) - 2\sin(4\,t)\,\cos(4\,t) - 8\,t$$
è costante su $\mathbb{R}$.

Vero: Si ha, per la (1),
$$G'(t) = F'(t) - 8\,\cos^2(4\,t) + 8\,\sin^2(4\,t) - 8 = 16\,\cos^2(4\,t) - 8\,\cos^2(4\,t) - 8\,(1 - \sin^2(4\,t))\,.$$
Ricordando che $1 - \sin^2(4\,t) = \cos^2(4\,t)$ si ha
$$G'(t) = 16\,\cos^2(4\,t) - 16\,\cos^2(4\,t) = 0\,.$$
Dato che $G'(t) \equiv 0$, $G(t)$ è una funzione costante.

---

2) Sia
$$F(t) = \int_{-t}^{t} \mathrm{e}^{5\,x^2}\,dx\,.$$

Osserviamo che si ha
$$F(t) = \int_{-t}^{t} \mathrm{e}^{5\,x^2}\,dx = \int_{-t}^{0} \mathrm{e}^{5\,x^2}\,dx + \int_{0}^{t} \mathrm{e}^{5\,x^2}\,dx\,.$$
Per il primo integrale, con il cambio di variabile $y = -x$, da cui $dx = -dy$, si ha
$$\int_{-t}^{0} \mathrm{e}^{5\,x^2}\,dx = -\int_{t}^{0} \mathrm{e}^{5\,(-y)^2}\,dy = \int_{0}^{t} \mathrm{e}^{5\,y^2}\,dy\,,$$
da cui segue che
$$F(t) = \int_{-t}^{t} \mathrm{e}^{5\,x^2}\,dx = \int_{0}^{t} \mathrm{e}^{5\,y^2}\,dy + \int_{0}^{t} \mathrm{e}^{5\,x^2}\,dx\,.$$
Pertanto
$$F(t) = 2\int_{0}^{t} \mathrm{e}^{5\,x^2}\,dx\,. \tag{1}$$

2A) La funzione $F(t)$ è derivabile per ogni t in $\mathbb{R}$.

Vero: Dalla (1) segue che $F(t)$ è l'integrale della funzione $x \mapsto 2\,\mathrm{e}^{5\,x^2}$, che è una funzione continua. Per il Teorema fondamentale del calcolo integrale, la funzione $F(t)$ è derivabile e si ha
$$F'(t) = 2\,\mathrm{e}^{5\,t^2}\,, \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,. \tag{2}$$

2B) Si ha $F(-2) > 0$.

Falso: Per la (1) si ha
$$F(-2) = 2\int_{0}^{-2} \mathrm{e}^{5\,x^2}\,dx\,.$$
Dato che si tratta dell'integrale di una funzione positiva su un intervallo percorso nel verso "sbagliato", il risultato è negativo e si ha $F(-2) \le 0$.

2C) Si ha $F(t) + F(-t) = 0$ per ogni t in $\mathbb{R}$.

Vero: Osserviamo che si ha, per ogni t in $\mathbb{R}$, e cambiando il verso di integrazione,
$$F(-t) = \int_{-(-t)}^{-t} \mathrm{e}^{5\,x^2}\,dx = \int_{t}^{-t} \mathrm{e}^{5\,x^2}\,dx = -\int_{-t}^{t} \mathrm{e}^{5\,x^2}\,dx = -F(t)\,,$$
da cui segue che
$$F(t) + F(-t) = 0\,, \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,.$$

2D) La funzione $F(t)$ è crescente su $\mathbb{R}$.

Vero: Dalla (2) segue che
$$F'(t) = 2\,\mathrm{e}^{5\,t^2} > 0\,, \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,,$$
e quindi la funzione $F(t)$ è crescente su $\mathbb{R}$.

---

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

Ricordiamo che si ha

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} < +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha < 1\,, \tag{1}$$

e che

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} < +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha > 1\,. \tag{2}$$

3A) La funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x}}$ non è integrabile in senso improprio su $[0,1]$.

Falso: Per la (1), con $\alpha = \frac{1}{5} < 1$, la funzione data è integrabile in senso improprio su $[0,1]$.

3B) La funzione $f(x) = \frac{1}{x^4}$ è integrabile in senso improprio su $[1,+\infty)$.

Vero: Per la (2), con $\alpha = 4 > 1$, la funzione data è integrabile in senso improprio su $[1,+\infty)$.

3C) La funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x}+x^5}$ non è integrabile in senso improprio su $[0,+\infty)$.

Falso: Osserviamo che l'integrale è improprio sia in $x=0$ che all'infinito. Scriviamo

$$f(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{5}} + x^5} = \frac{1}{x^{\frac{1}{5}}}\,\frac{1}{1 + x^{5-\frac{1}{5}}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{5}}}\,\frac{1}{1 + x^{\frac{24}{5}}}\,,$$

e

$$f(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{5}} + x^5} = \frac{1}{x^5}\,\frac{1}{1 + x^{\frac{1}{5}-5}} = \frac{1}{x^5}\,\frac{1}{1 + x^{-\frac{24}{5}}}\,,$$

Ora si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{1 + x^{\frac{24}{5}}} = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1 + x^{-\frac{24}{5}}} = 1\,.$$

Pertanto, si ha

$$f(x) \approx \frac{1}{x^{\frac{1}{5}}} \quad \text{per } x \text{ tendente a } 0,$$

e

$$f(x) \approx \frac{1}{x^5} \quad \text{per } x \text{ tendente a } +\infty.$$

Per il criterio del confronto asintotico, $f(x)$ è integrabile sia vicino a zero (dato che per la (1) con $\alpha = \frac{1}{5} < 1$ la funzione $\frac{1}{x^{\frac{1}{5}}}$ è integrabile in zero), che all'infinito (dato che per la (2) con $\alpha = 5 > 1$ la funzione $\frac{1}{x^5}$ è integrabile all'infinito), e quindi è integrabile su $[0,+\infty)$.

3D) La funzione $f(x) = \mathrm{e}^{-7\,x}$ non è integrabile in senso improprio su $\mathbb{R}$.

Vero: Si tratta di vedere se la funzione $f(x)$ è integrabile in senso improprio "a $+\infty$" e "a $-\infty$". A $+\infty$ si ha

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-7\,x}\,dx = \lim_{M\to+\infty} \int_0^M \mathrm{e}^{-7\,x}\,dx = \lim_{M\to+\infty} -\frac{\mathrm{e}^{-7\,x}}{7}\Big|_0^M = \lim_{M\to+\infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{-7\,M}}{7} = \frac{1}{7}\,,$$

e quindi la funzione $f(x)$ è integrabile in senso improprio su $[0,+\infty)$. A $-\infty$, invece, si ha

$$\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{-7\,x}\,dx = \lim_{M\to-\infty} \int_M^0 \mathrm{e}^{-7\,x}\,dx = \lim_{M\to-\infty} -\frac{\mathrm{e}^{-7\,x}}{7}\Big|_M^0 = \lim_{M\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^{-7\,M} - 1}{7} = +\infty\,,$$

dato che $\mathrm{e}^{-7\,M}$ diverge, e quindi $f(x)$ non è integrabile in senso improprio su $(-\infty,0]$. Pertanto, $f(x)$ non è integrabile in senso improprio su $\mathbb{R}$.

---

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

Ricordiamo il criterio del confronto asintotico per integrali impropri: se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni tali che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in (0,+\infty)\,, \tag{1}$$

allora

$$\int_{x_0} f(x)\,dx < +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int_{x_0} g(x)\,dx < +\infty\,.$$

Se, invece $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni tali che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in (0,+\infty)\,, \tag{2}$$

allora

$$\int^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int^{+\infty} g(x)\,dx < +\infty\,.$$

Un criterio analogo vale a $-\infty$.

4A) Si ha

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{6}{x}\right) dx < +\infty\,.$$

Falso: Dato che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\frac{6}{x})}{\frac{6}{x}} = 1\,,$$

per la (1) si ha

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{6}{x}\right) dx < +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int_0^1 \frac{6}{x}\,dx < +\infty\,.$$

Dato che l'ultimo integrale è infinito (si tratta dell'integrale di $\frac{1}{x^\alpha}$ con $\alpha = 1$), anche l'integrale richiesto è infinito.

4B) Si ha

$$\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{7}{x^2}\right) dx = +\infty\,.$$

Falso: Dato che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+\frac{7}{x^2})}{\frac{7}{x^2}} = 1\,,$$

per la (2) si ha

$$\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{7}{x^2}\right) dx < +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int_1^{+\infty} \frac{7}{x^2}\,dx < +\infty\,.$$

Dato che l'ultimo integrale è finito (essendo l'integrale di $\frac{1}{x^\alpha}$ con $\alpha = 2 > 1$), anche l'integrale di partenza è finito.

4C) Si ha

$$\int_1^{+\infty} \sqrt{x}\,(\mathrm{e}^{\frac{7}{x}} - 1)\,dx = +\infty\,.$$

Vero: Dato che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{7}{x}} - 1}{\frac{7}{x}} = 1\,,$$

si ha

$$\int_1^{+\infty} \sqrt{x}\,(e^{\frac{7}{x}} - 1)\,dx < +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int_1^{+\infty} \sqrt{x}\,\frac{7}{x}\,dx < +\infty\,.$$

L'ultimo integrale è infinito (essendo, dopo aver semplificato le potenze, l'integrale di $\frac{1}{x^\alpha}$ con $\alpha = \frac{1}{2} < 1$), e quindi l'integrale di partenza è infinito.

4D) Si ha

$$\int_6^{+\infty} \frac{e^{-3\,x}}{\sqrt{x-6}}\,dx = +\infty\,.$$

Falso: L'integrale è improprio sia in $x_0 = 6$ che a più infinito. Dato che si ha

$$0 \le \frac{e^{-3\,x}}{\sqrt{x-6}} \le \frac{1}{\sqrt{x-6}}\,, \qquad \forall x \ge 6\,,$$

per il criterio del confronto si ha che

$$\int_6^7 \frac{dx}{\sqrt{x-6}} < +\infty \quad \Longrightarrow \quad \int_6^7 \frac{e^{-3\,x}}{\sqrt{x-6}}\,dx < +\infty\,.$$

Siccome il primo integrale è finito (con il cambio di variabile $y = x - 6$ diventa l'integrale tra 0 e 1 di $\frac{1}{y^\alpha}$ con $\alpha = \frac{1}{2} < 1$), si ha

$$\int_6^7 \frac{e^{-3\,x}}{\sqrt{x-6}}\,dx < +\infty\,. \tag{3}$$

Si ha poi

$$0 \le \frac{e^{-3\,x}}{\sqrt{x-6}} \le e^{-3\,x}\,, \qquad \forall x \ge 7\,,$$

e quindi, sempre per il criterio del confronto si ha

$$\int_7^{+\infty} e^{-3\,x}\,dx < +\infty \quad \Longrightarrow \quad \int_7^{+\infty} \frac{e^{-3\,x}}{\sqrt{x-6}}\,dx < +\infty\,.$$

Il primo integrale è finito dato che

$$\int_7^{+\infty} e^{-3\,x}\,dx = \lim_{M\to+\infty} \int_7^M e^{-3\,x}\,dx = \lim_{M\to+\infty} -\frac{e^{-3\,x}}{3}\Big|_7^M = \lim_{M\to+\infty} \frac{e^{-21} - e^{-3\,M}}{3} = \frac{e^{-21}}{3}\,,$$

e quindi

$$\int_7^{+\infty} \frac{e^{-3\,x}}{\sqrt{x-6}}\,dx < +\infty\,. \tag{4}$$

Mettendo insieme la (3) e la (4) si ha

$$\int_6^{+\infty} \frac{e^{-3\,x}}{\sqrt{x-6}}\,dx < +\infty\,.$$

---

5) Sia

$$F(t) = \int_{-1}^{t} \frac{10 + \cos(2\,x^2)}{1 + 5\,x^2}\,dx\,.$$

a) Calcolare $F(-1)$ e $F'(0)$.
b) Dimostrare che $F(-2) \leq 0 \leq F(1)$.
c) Dimostrare che $F(t)$ è crescente su $\mathbb{R}$.
d) Dimostrare che

$$\int_{-1}^{+\infty} \frac{10 + \cos(2\,x^2)}{1 + 5\,x^2}\,dx < +\infty\,.$$

Soluzione:
a) Si ha

$$F(-1) = \int_{-1}^{-1} \frac{10 + \cos(2\,x^2)}{1 + 5\,x^2}\,dx = 0\,.$$

Inoltre, dato che la funzione integranda è continua, per il Teorema fondamentale del calcolo integrale si ha

$$F'(t) = \frac{10 + \cos(2\,t^2)}{1 + 5\,t^2} \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,, \tag{1}$$

da cui segue che

$$F'(0) = \frac{10 + \cos(2 \cdot 0^2)}{1 + 5 \cdot 0^2} = \frac{10 + 1}{1 + 0} = 11\,.$$

b) Dato che

$$\cos(2\,x^2) \geq -1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,,$$

si ha

$$\frac{10 + \cos(2\,x^2)}{1 + 5\,x^2} \geq \frac{10 - 1}{1 + 5\,x^2} = \frac{9}{1 + 5\,x^2} \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,. \tag{2}$$

Ne segue pertanto che

$$F(1) = \int_{-1}^{1} \frac{10 + \cos(2\,x^2)}{1 + 5\,x^2}\,dx \geq 0\,,$$

essendo l'integrale di una funzione positiva sull'intervallo $[-1, 1]$; inoltre

$$F(-2) = \int_{-1}^{-2} \frac{10 + \cos(2\,x^2)}{1 + 5\,x^2}\,dx \leq 0\,,$$

essendo l'integrale di una funzione positiva su un intervallo orientato nel verso opposto (si va da -1 a -2).

c) Combinando (1) e (2) si ha

$$F'(t) = \frac{10 + \cos(2\,t^2)}{1 + 5\,t^2} \geq 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,,$$

e quindi la funzione $F(t)$ è crescente.

d) Si tratta di dimostrare che la funzione

$$f(x) = \frac{10 + \cos(2\,x^2)}{1 + 5\,x^2}$$

è integrabile in senso improprio su $[-1, +\infty)$. Dato che

$$\cos(2\,x^2) \leq 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,,$$

si ha

$$0 \leq \frac{10 + \cos(2\,x^2)}{1 + 5\,x^2} \leq \frac{11}{1 + 5\,x^2}\,.$$

Pertanto, per il criterio del confronto, si ha

$$\int_{-1}^{+\infty} \frac{11}{1+5\,x^2}\,dx < +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad \int_{-1}^{+\infty} \frac{10+\cos(2\,x^2)}{1+5\,x^2}\,dx < +\infty\,. \tag{3}$$

Osserviamo ora che

$$\int_{-1}^{+\infty} \frac{11}{1+5\,x^2}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{11}{1+5\,x^2}\,dx + \int_{1}^{+\infty} \frac{11}{1+5\,x^2}\,dx\,.$$

Il primo integrale è finito (si tratta dell'integrale di una funzione continua su un intervallo limitato); quanto al secondo, si ha

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{11}{1+5\,x^2}\,dx \le \int_{1}^{+\infty} \frac{11}{5\,x^2}\,dx = \frac{11}{5}\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} < +\infty\,,$$

dato che la funzione integranda è della forma $\frac{1}{x^\alpha}$, con $\alpha = 2 > 1$. Pertanto

$$\int_{-1}^{+\infty} \frac{11}{1+5\,x^2}\,dx < +\infty\,,$$

e, per la (3), la funzione $f(x)$ è integrabile in senso improprio su $[-1,+\infty)$.

6) Sia

$$F(t) = \int_0^{4\,t^2} \cos^2(6\,x^2)\,dx\,.$$

a) Calcolare $F'(t)$.
b) Dimostrare che la funzione $F(t)$ è crescente su $[0,+\infty)$ e decrescente su $(-\infty,0]$.
c) Dimostrare che $F(t)$ ha un minimo per $t = 0$.
d) Dimostrare che

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{F(t)}{t^3} = 0\,.$$

Soluzione:
a) Definiamo

$$G(s) = \int_0^{s} \cos^2(6\,x^2)\,dx\,.$$

Dato che la funzione $x \mapsto \cos^2(6\,x^2)$ è continua, per il Teorema fondamentale del calcolo integrale si ha che $G(s)$ è derivabile, con

$$G'(s) = \cos^2(6\,s^2) \qquad \forall s \in \mathbb{R}\,. \tag{1}$$

Osserviamo ora che $F(t) = G(4\,t^2)$; pertanto, per la formula di derivazione delle funzioni composte, si ha, per la (1),

$$F'(t) = G'(4\,t^2)\,[4\,t^2]' = 8\,t\,\cos^2(96\,t^2)\,. \tag{2}$$

b) Dato che $\cos^2(96\,t^4) \geq 0$ per ogni t in $\mathbb{R}$, dalla (2) si ha che $F'(t) \geq 0$ per ogni $t \geq 0$, e che $F'(t) \leq 0$ per ogni $t \leq 0$; ne segue che la funzione $F(t)$ è crescente su $[0,+\infty)$ e decrescente su $(-\infty,0]$, come richiesto.

c) Dato che $F'(0) = 0$ e che la derivata di $F(t)$ è negativa per $t < 0$ e positiva per $t > 0$, il punto $t = 0$ è di minimo per $F(t)$.

d) Dato che $0 \leq \cos^2(6\,x^2) \leq 1$ per ogni x in $\mathbb{R}$, per la monotonia dell'integrale si ha

$$0 \leq F(t) = \int_0^{4\,t^2} \cos^2(6\,x^2)\,dx \leq \int_0^{4\,t^2} 1\,dx = 4\,t^2\,,$$

da cui segue che

$$0 \leq \frac{F(t)}{t^3} \leq \frac{4\,t^2}{t^3} = \frac{4}{t}\,.$$

Pertanto,

$$0 \leq \lim_{t\to+\infty} \frac{F(t)}{t^3} \leq \lim_{t\to+\infty} \frac{4}{t} = 0\,,$$

e la tesi segue dal teorema dei carabinieri.