Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 9
17 Maggio 2022 — Compito n. 00198 — □□■■□□□■■□

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ⊠ o ☑).

Nome: ______________________

Cognome: ______________________

Matricola: | | | | | | | |

Punteggi: 1 punto per ogni risposta esatta, 0 punti per risposte sbagliate o lasciate in bianco.

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
F	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
C	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□

1) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = (14t + 3)\, y(t) + A\, e^{7t^2+3t}\,.$$

1A) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(2) = 3$.
1B) Se $A = 0$, la funzione $y(t) = 3\, e^{7t^2+3t}$ è soluzione dell'equazione.
1C) La funzione $y(t) = (5 + A\, t)\, e^{7t^2+3t}$ non è soluzione dell'equazione.
1D) Se $y(0) = 0$ e $A = 6$, si ha

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty\,.$$

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = 6\,\cos(t)\, y(t) + 5\,\sin(t)\,\cos(t)\,.$$

2A) Se $y(0) = 0$, si ha $y'(0) \neq 0$.
2B) Se $y(0) = 0$, si ha $y''(0) = 5$.
2C) Se $y(0) = 6$, la soluzione $y(t)$ è crescente in un intorno di $t = 0$.
2D) Se $y(\frac{\pi}{2}) = 5$, si ha $T_1(y(t); \frac{\pi}{2}) = 5$.

3) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = \frac{e^{y(t)} - 1}{e^{y(t)}}\, \cos(t)\,.$$

3A) L'equazione è a variabili separabili.
3B) Se $y(0) = 0$, la soluzione $y(t)$ non è costante.
3C) Se $y(0) = 7$, esiste $t_0 > 0$ tale che $y(t_0) = 0$.
3D) Se $y(0) = \ln(4)$, si ha

$$y(s) = \ln(3\, e^{\sin(s)} + 1)\,.$$

4) Si consideri l'equazione differenziale $y'(t) = t\,(y(t)^3 - 49y(t))$.

4A) Se $y(0) = 7$, la soluzione è costante.
4B) Se $y(0) = 1$, si ha $y'(0) = 0$.
4C) Se $y(0) = -1$, si ha $T_2(y(t); 0) = -1 + 24\, t^2$.
4D) Se $y(0) = 1$, la soluzione ha un massimo relativo per $t = 0$.

5) Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)\,y(t) + b(t)\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases} \tag{1}$$

a) Si risolva (1) se $a(t) = -8$, $b(t) = 3$ e $y_0 = 0$.
b) Si risolva (1) se $a(t) = \sin(t)$, $b(t) = 4\,\sin(t)$ e $y(0) = \pi$.
c) Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 1 di $y(t)$ nell'origine se $a(t) = \mathrm{e}^{12\,t}$, $b(t) = 7\,\cos(t)$ e $y_0 = 3$.
d) Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 2 di $y(t)$ nell'origine se $a(t) = 10\,t$, $b(t) = 3\,t^2$ e $y_0 = 3$.

6) Si risolvano le seguenti equazioni differenziali a variabili separabili.
a) $y'(t) = 6\,y(t) + 3$, se $y(0) = 0$.
b) $y'(t) = 6\,t\,(36 + y^2(t))$, se $y(0) = 0$.
c) $y'(t) = \mathrm{e}^{-y(t)}\,\mathrm{e}^{5\,t}$, se $y(0) = 0$.
d) $y'(t) = \frac{2\,(1+y^2(t))}{y(t)}$, se $y(0) = 1$.

Soluzioni del compito 00198

1) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = (14t + 3)\, y(t) + A\, \mathrm{e}^{7t^2+3t}\,.$$

Ricordiamo la formula risolutiva per il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)\, y(t) + b(t)\,, \\ y(t_0) = y_0\,. \end{cases} \tag{1}$$

Posto

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds\,,$$

si ha

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)} \left[y_0 + \int_{t_0}^{t} b(s)\, \mathrm{e}^{-A(s)}\, ds \right]. \tag{2}$$

1A) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(2) = 3$.

Vero: Trattandosi di un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, è sufficiente una sola condizione iniziale affinché esista un'unica soluzione.

1B) Se $A = 0$, la funzione $y(t) = 3\, \mathrm{e}^{7t^2+3t}$ è soluzione dell'equazione.

Vero: Se $y(t) = 3\, \mathrm{e}^{7t^2+3t}$, si ha

$$y'(t) = 3\,(14t + 3)\, \mathrm{e}^{7t^2+3t} = (14t + 3)\, y(t) = (14t + 3)\, y(t) + A\, \mathrm{e}^{7t^2+3t}\,,$$

e quindi $y(t)$ è soluzione dell'equazione.

1C) La funzione $y(t) = (5 + A\, t)\, \mathrm{e}^{7t^2+3t}$ non è soluzione dell'equazione.

Falso: Se $y(t) = (5 + A\, t)\, \mathrm{e}^{7t^2+3t}$, derivando si ha

$$y'(t) = A\, \mathrm{e}^{7t^2+3t} + (5 + A\, t)\, (14t + 3)\, \mathrm{e}^{7t^2+3t} = (14t + 3)\, y(t) + A\, \mathrm{e}^{7t^2+3t}\,,$$

e quindi $y(t)$ è soluzione dell'equazione.

1D) Se $y(0) = 0$ e $A = 6$, si ha

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = +\infty\,.$$

Vero: Il problema rientra nel caso (1) con

$$a(t) = 14t + 3\,, \quad b(t) = 6\, \mathrm{e}^{7t^2+3t}\,, \qquad t_0 = 0\,, \quad y_0 = 0\,.$$

Dato che

$$A(t) = \int_0^t a(s)\, ds = \int_0^t (14s + 3)\, ds = (7s^2 + 3s)\Big|_0^t = 7t^2 + 3t\,,$$

e dato che

$$\int_0^t b(s)\, \mathrm{e}^{-A(s)}\, ds = \int_0^t 6\, \mathrm{e}^{7s^2+3s}\, \mathrm{e}^{-(7s^2+3s)}\, ds = \int_0^t 6\, ds = 6\, t\,,$$

dalla (2) si ha

$$y(t) = 6\, t\, \mathrm{e}^{7t^2+3t}\,,$$

da cui segue che

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = +\infty\,.$$

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = 6\,\cos(t)\,y(t) + 5\,\sin(t)\,\cos(t)\,.$$

Derivando l'equazione si ha

$$y''(t) = -6\,\sin(t)\,y(t) + 6\,\cos(t)\,y'(t) + 5\,\cos^2(t) - 5\,\sin^2(t)\,. \tag{1}$$

2A) Se $y(0) = 0$, si ha $y'(0) \neq 0$.

Falso: Dall'equazione, sostituendo $t = 0$, si ha

$$y'(0) = 6\,\cos(0)\,y(0) + 5\,\sin(0)\,\cos(0) = 6 \cdot 1 \cdot 0 + 5 \cdot 0 \cdot 1 = 0\,.$$

2B) Se $y(0) = 0$, si ha $y''(0) = 5$.

Vero: Dall'equazione con $t = 0$ si ha (si veda l'esercizio **2A**)

$$y'(0) = 0\,.$$

Dalla (1) con $t = 0$ si ha

$$y''(0) = 5\,,$$

dato che il primo, secondo e quarto termine si annullano.

2C) Se $y(0) = 6$, la soluzione $y(t)$ è crescente in un intorno di $t = 0$.

Vero: Dall'equazione si ha

$$y'(0) = 6 \cdot \cos(0) \cdot y(0) = 6 \cdot 6 = 36 > 0\,,$$

per ipotesi. Essendo $y'(0) > 0$, si ha $y'(t) > 0$ in un intorno dell'origine (per il teorema di permanenza del segno per funzioni continue) e quindi $y(t)$ è crescente in un intorno dell'origine.

2D) Se $y(\frac{\pi}{2}) = 5$, si ha $T_1(y(t); \frac{\pi}{2}) = 5$.

Vero: Dall'equazione si ha

$$y'(\tfrac{\pi}{2}) = 6\,\cos(\tfrac{\pi}{2})\,y(\tfrac{\pi}{2}) + 5\,\sin(\tfrac{\pi}{2})\,\cos(\tfrac{\pi}{2}) = 6 \cdot 0 \cdot 5 + 5 \cdot 1 \cdot 0 = 0\,.$$

Ricordando che

$$T_1(y(t); \tfrac{\pi}{2}) = y(\tfrac{\pi}{2}) + y'(\tfrac{\pi}{2})\,(t - \tfrac{\pi}{2})\,,$$

si ha

$$T_1(y(t); \tfrac{\pi}{2}) = 5\,.$$

---

3) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = \frac{e^{y(t)} - 1}{e^{y(t)}} \cos(t)\,.$$

Osserviamo che l'equazione è a variabili separabili, essendo della forma

$$y'(t) = f(y(t))\,g(t)\,,$$

con

$$f(s) = \frac{e^s - 1}{e^s}\,, \qquad g(t) = \cos(t)\,.$$

Dato che $f(0) = 0$, se all'equazione abbiniamo la condizione iniziale $y(0) = 0$ abbiamo la soluzione costante $y(t) \equiv 0$. Se, invece $y(0) = y_0 > 0$ allora $y(t) \neq 0$ per ogni t e possiamo separare le variabili, riscrivendo l'equazione come

$$\frac{e^{y(t)}\,y'(t)}{e^{y(t)} - 1} = \cos(t)\,.$$

Integrando tra zero e s si ha

$$\int_0^s \frac{e^{y(t)}\,y'(t)}{e^{y(t)} - 1}\,dt = \int_0^s \cos(t)\,dt = \sin(s)\,.$$

Per il primo integrale, con la sostituzione $z = y(t)$, da cui $dz = y'(t)\,dt$, si ha

$$\int_0^s \frac{e^{y(t)}\,y'(t)}{e^{y(t)} - 1}\,dt = \int_{y_0}^{y(s)} \frac{e^z}{e^z - 1}\,dz\,.$$

Con la sostituzione $w = e^z - 1$, da cui $dw = e^z\,dz$, si ha

$$\int_{y_0}^{y(s)} \frac{e^z}{e^z - 1}\,dz = \int_{e^{y_0}-1}^{e^{y(s)}-1} \frac{dw}{w} = \ln(|w|)\Big|_{e^{y_0}-1}^{e^{y(s)}-1} = \ln\left(\left|\frac{e^{y(s)} - 1}{e^{y_0} - 1}\right|\right).$$

Essendo $y_0 > 0$ possiamo levare i moduli (perché?) e scrivere che

$$\ln\left(\frac{e^{y(s)} - 1}{e^{y_0} - 1}\right) = \sin(s)\,,$$

da cui segue, dopo alcuni calcoli, che

$$y(s) = \ln[(e^{y_0} - 1)\,e^{\sin(s)} + 1]\,. \tag{1}$$

Osserviamo di passaggio che la (1) è valida anche nel caso in cui $y_0 = 0$.

3A) L'equazione è a variabili separabili.

Vero: Per quanto detto sopra, l'equazione è a variabili separabili.

3B) Se $y(0) = 0$, la soluzione $y(t)$ non è costante.

Falso: Dato che $f(y_0) = f(0) = 0$, la funzione costante $y(t) \equiv y_0 = 0$ è soluzione dell'equazione.

3C) Se $y(0) = 7$, esiste $t_0 > 0$ tale che $y(t_0) = 0$.

Falso: Se esistesse $t_0 > 0$ tale che $y(t_0) = 0$, il problema di Cauchy con dato iniziale $y(t_0) = 0$ avrebbe due soluzioni: la funzione $y(t)$ che stiamo considerando (e che non è la funzione nulla dato che in $t = 0$ vale 7), e la funzione $w(t) \equiv 0$. Dato che il problema di Cauchy ha un'unica soluzione, si ha $y(t) \neq 0$ per ogni $t > 0$.

3D) Se $y(0) = \ln(4)$, si ha

$$y(s) = \ln(3\,e^{\sin(s)} + 1)\,.$$

Vero: Dalla (1), con $y_0 = \ln(4)$, da cui segue che $\mathrm{e}^{y_0} - 1 = 4 - 1 = 3$, si ha

$$y(s) = \ln(3\,\mathrm{e}^{\sin(s)} + 1)\,.$$

---

4) Si consideri l'equazione differenziale $y'(t) = t\,(y(t)^3 - 49y(t))$.

Osserviamo che l'equazione è a variabili separabili, essendo della forma

$$y'(t) = f(y(t))\,g(t)\,,$$

con

$$f(s) = s^3 - 49s\,, \qquad g(t) = t\,. \tag{1}$$

4A) Se $y(0) = 7$, la soluzione è costante.

Vero: Se $f(s)$ è come in (1), dato che si ha $f(7) = 0$, la funzione costante $y(t) \equiv 7$ è soluzione dell'equazione.

4B) Se $y(0) = 1$, si ha $y'(0) = 0$.

Vero: Dall'equazione, scritta per $t = 0$, si ha

$$y'(0) = 0 \cdot (y(0)^3 - 49y(0)) = 0 \cdot (1 - 49) = 0\,.$$

4C) Se $y(0) = -1$, si ha $T_2(y(t);0) = -1 + 24\,t^2$.

Vero: Derivando l'equazione si ha

$$y''(t) = y(t)^3 - 49y(t) + t\,(3y(t)^2 - 49)\,y'(t)\,,$$

da cui segue che $y''(0) = 48$. Dato che dall'equazione segue che $y'(0) = 0$ (si veda l'esercizio **4B**), si ha

$$T_2(y(t);0) = y(0) + y'(0)\,t + \frac{y''(0)}{2}\,t^2 = -1 + 24\,t^2\,.$$

4D) Se $y(0) = 1$, la soluzione ha un massimo relativo per $t = 0$.

Vero: Derivando l'equazione si ha

$$y''(t) = y(t)^3 - 49y(t) + t\,(3y(t)^2 - 49)\,y'(t)\,,$$

da cui segue che $y''(0) = -48 < 0$. Dato che dall'equazione segue che $y'(0) = 0$ (si veda l'esercizio **4B**), si ha che $t = 0$ è un punto di massimo relativo per $y(t)$.

---

5) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} y'(t) = a(t)\, y(t) + b(t)\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases}$$

a) Si risolva (1) se $a(t) = -8$, $b(t) = 3$ e $y_0 = 0$.
b) Si risolva (1) se $a(t) = \sin(t)$, $b(t) = 4\,\sin(t)$ e $y(0) = \pi$.
c) Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 1 di $y(t)$ nell'origine se $a(t) = \mathrm{e}^{12\,t}$, $b(t) = 7\,\cos(t)$ e $y_0 = 3$.
d) Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 2 di $y(t)$ nell'origine se $a(t) = 10\,t$, $b(t) = 3\,t^2$ e $y_0 = 3$.

Soluzione:
Ricordiamo che la soluzione del problema di Cauchy (1) è data da

$$(2) \qquad y(t) = \mathrm{e}^{A(t)} \left[y_0 + \int_0^t b(s)\, \mathrm{e}^{-A(s)}\, ds \right], \qquad \text{dove} \qquad A(t) = \int_0^t a(s)\, ds\,.$$

a) Dato che $a(t) = -8$, si ha

$$A(t) = -\int_0^t 8\, ds = -8\,t\,.$$

Pertanto, per la (2) si ha

$$y(t) = \mathrm{e}^{-8\,t} \left[0 + \int_0^t 3\,\mathrm{e}^{8\,s}\, ds \right] = \mathrm{e}^{-8\,t} \left[\frac{3}{8}\, \mathrm{e}^{8\,s} \Big|_0^t \right] = \frac{3}{8}\, \mathrm{e}^{-8\,t}\, [\mathrm{e}^{8\,t} - 1] = \frac{3}{8}\, [1 - \mathrm{e}^{-8\,t}]\,.$$

b) Dato che $a(t) = \sin(t)$, si ha

$$A(t) = \int_0^t \sin(s)\, ds = -\cos(s)\Big|_0^t = 1 - \cos(t)\,,$$

e quindi, per la (2),

$$y(t) = \mathrm{e}^{1-\cos(t)} \left[\pi + \int_0^t 4\,\sin(s)\, \mathrm{e}^{\cos(s)-1}\, ds \right].$$

Con il cambio di variabile $z = \cos(s) - 1$, da cui $dz = -\sin(s)\, ds$, si ha

$$\int_0^t 4\,\sin(s)\, \mathrm{e}^{\cos(s)-1}\, ds = -4 \int_0^{\cos(t)-1} \mathrm{e}^z\, dz = -4\,\mathrm{e}^z \Big|_0^{\cos(t)-1} = 4(1 - \mathrm{e}^{\cos(t)-1})\,.$$

Pertanto

$$y(t) = \mathrm{e}^{1-\cos(t)}\, [\pi + 4\,(1 - \mathrm{e}^{\cos(t)-1})] = (\pi + 4)\, \mathrm{e}^{1-\cos(t)} - 4\,.$$

c) Dall'equazione si ha

$$y'(0) = \mathrm{e}^{12 \cdot 0}\, y(0) + 7\,\cos(0) = 1 \cdot 3 + 7 = 10\,,$$

da cui segue che

$$T_1(y(t); 0) = y(0) + y'(0)\, t = 3 + 10\, t\,.$$

d) Dall'equazione si ha

$$y'(0) = 10 \cdot 0 \cdot y(0) + 3 \cdot 0^2 = 0\,.$$

Derivando l'equazione si ha poi

$$y''(t) = 10\, y(t) + 10\, t\, y'(t) + 6\, t\,,$$

da cui segue che

$$y''(0) = 10\, y(0) + 10 \cdot 0 \cdot y'(0) + 6 \cdot 0 = 30\,.$$

Si ha quindi

$$T_2(y(t); 0) = y(0) + y'(0)\, t + \frac{y''(0)}{2}\, t^2 = 3 + 15\, t^2\,.$$

6) Si risolvano le seguenti equazioni differenziali a variabili separabili.
a) $y'(t) = 6\,y(t) + 3$, se $y(0) = 0$.
b) $y'(t) = 6\,t\,(36 + y^2(t))$, se $y(0) = 0$.
c) $y'(t) = \mathrm{e}^{-y(t)}\,\mathrm{e}^{5\,t}$, se $y(0) = 0$.
d) $y'(t) = \frac{2\,(1+y^2(t))}{y(t)}$, se $y(0) = 1$.

Soluzione:
a) Dividendo per $6\,y(t) + 3$, l'equazione è equivalente a

$$\frac{y'(t)}{6\,y(t)+3} = 1\,.$$

Integrando tra 0 e s si ha

$$\int_0^s \frac{y'(t)}{6\,y(t)+3}\,dt = \int_0^s 1\,dt = s\,.$$

Con la sostituzione $z = y(t)$ si ha, ricordando che $y(0) = 0$, ed osservando che $6\,y(s) + 3 > 0$ per s vicino a zero,

$$\int_0^s \frac{y'(t)}{6\,y(t)+3}\,dt = \int_0^{y(s)} \frac{dz}{6\,z+3} = \frac{1}{6}\,\ln(|6\,z+3|)\Big|_0^{y(s)} = \frac{1}{6}\,[\ln(6\,y(s)+3) - \ln(3)]\,.$$

Pertanto,

$$\frac{1}{6}\,[\ln(6\,y(s)+3) - \ln(3)] = s\,,$$

da cui segue (dopo facili calcoli...) che

$$\frac{6\,y(s)+3}{3} = \mathrm{e}^{6\,s}\,,$$

e quindi che

$$y(s) = \frac{3\,\mathrm{e}^{6\,s} - 3}{6}\,.$$

b) Separando le variabili, si ha che deve essere

$$\frac{y'(t)}{36 + y^2(t)} = 6\,t\,.$$

Integrando (con la consueta sostituzione $z = y(t)$) si ha

$$\int_0^{y(s)} \frac{dz}{36+z^2} = \int_0^s 6\,t\,dt = 3\,s^2\,.$$

Dato che

$$\int \frac{dz}{36+z^2} = \frac{1}{6}\,\arctan\left(\frac{z}{6}\right),$$

si ha

$$\frac{1}{6}\,\arctan\left(\frac{y(s)}{6}\right) = 3\,s^2\,,$$

da cui segue che

$$y(s) = 6\,\tan(18\,s^2)\,.$$

c) Separando le variabili si arriva a

$$\int_0^{y(s)} \mathrm{e}^z\,dz = \int_0^s \mathrm{e}^{5\,t}\,dt = \frac{\mathrm{e}^{5\,s} - 1}{5}\,.$$

Il primo integrale è immediato, e porta a

$$\mathrm{e}^{y(s)} - 1 = \frac{\mathrm{e}^{5\,s} - 1}{5}\,,$$

da cui
$$y(s) = \ln\Big(\frac{\mathrm{e}^{5\,s} + 4}{5}\Big)\,.$$
d) Separando le variabili si arriva a
$$\int_1^{y(s)} \frac{z}{1+z^2}\,dz = \int_0^s 2\,dt = 2\,s\,.$$
Dato che
$$\int \frac{z}{1+z^2}\,dz = \frac{1}{2}\,\frac{2z}{1+z^2}\,dz = \frac{1}{2}\,\ln(1+z^2)\,,$$
si ha
$$\frac{1}{2}\,\ln(1+y^2(s)) - \frac{1}{2}\,\ln(2) = 2\,s\,,$$
da cui
$$y^2(s) = 2\,\mathrm{e}^{4\,s} - 1\,,$$
e quindi
$$y(s) = \sqrt{2\,\mathrm{e}^{4\,s} - 1}\,.$$
Perché, tra le due radici, si è scelta quella positiva?