Calcolo integrale — Compito di pre-esonero

18 Marzo 2022 — Compito n. 00164 — ☐☐■☐■☐☐■☐☐

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: ☐☐☐☐☐☐☐

Punteggi: 1 punto per ogni risposta esatta, 0 punti per risposte sbagliate o lasciate in bianco.

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
F	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
C	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

---

1) Sia $a_k > 0$ tale che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \text{ è convergente.}$$

1A) La successione a_k tende a zero.
1B) Se $b_k \geq a_k$, la serie di termine generico b_k è convergente.
1C) Se b_k è tale che $\frac{a_k}{b_k}$ tende a 4, la serie di termine generico b_k è convergente.
1D) La serie di termine generico $\frac{a_k}{k^5}$ può divergere.

---

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A) La serie di termine generico $\sin^2(\frac{1}{\sqrt[3]{k}})$ è convergente.
2B) La serie di termine generico $\frac{k^4\,k!}{k^k}$ è divergente.
2C) La serie di termine generico $\frac{(-1)^{2k}}{\sqrt[5]{k}}$ è convergente.
2D) La serie di termine generico $\frac{(-1)^k}{k^5}$ converge semplicemente ma non assolutamente.

---

3) Sia

$$f(x) = \sin(5\,x)\,.$$

3A) Il raggio di convergenza della serie di Taylor di $f(x)$ è finito.
3B) Il coefficiente del termine di grado 0 della serie di Taylor di $f(x)$ è 0.
3C) Il coefficiente del termine di grado 1 della serie di Taylor di $f(x)$ è -5.
3D) Se $g(x) = x^7\,f(x)$, allora $g^{(7)}(0) = 7!$.

---

4) Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{5^k}\,(x-7)^k\,.$$

4A) Se $a_k \equiv 13$, il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{1}{5}$.
4B) Se $a_k = k^3$, il raggio di convergenza della serie è $R = 5$.
4C) Se $a_k = 4^k$, il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{5}{4}$.
4D) Se $a_k = \frac{1}{(k+1)^3}$, la serie diverge per $x = 12$.

5) a) Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{4^k}{k!}\right).$$

b) Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 3^k \sin\left(\frac{3}{k^7\, 3^k}\right).$$

c) Si scriva la serie di Taylor di

$$f(x) = x^4 \sin(6\,x)\,,$$

e si calcoli $f^{(4)}(0)$.

d) Data

$$f(x) = e^{4\,x^2}\,,$$

si calcolino $f^{(3)}(0)$ e $f^{(4)}(0)$.

6) Si consideri la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(x-5)^k}{k} \,.$$

a) Si determini il centro della serie.
b) Si determini il raggio di convergenza della serie.
c) Si determini l'insieme di convergenza della serie.
d) Si determini la funzione $f'(x)$.

Soluzioni del compito 00164

1) Sia $a_k > 0$ tale che
$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \text{ è convergente.}$$

1A) La successione a_k tende a zero.

Vero: Per la condizione necessaria di convergenza di una serie, la successione a_k tende a zero.

1B) Se $b_k \geq a_k$, la serie di termine generico b_k è convergente.

Falso: Ad esempio, se $a_k = \frac{1}{k^2}$ e $b_k \equiv 1$, si ha $b_k \geq a_k$ e la serie di termine generico b_k è divergente.

1C) Se b_k è tale che $\frac{a_k}{b_k}$ tende a 4, la serie di termine generico b_k è convergente.

Vero: La serie di termine generico b_k converge per il criterio del confronto asintotico.

1D) La serie di termine generico $\frac{a_k}{k^5}$ può divergere.

Falso: Dato che
$$0 \leq \frac{a_k}{k^5} \leq a_k\,,$$
la serie di termine generico $\frac{a_k}{k^5}$ è convergente per il criterio del confronto.

---

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A) La serie di termine generico $\sin^2(\frac{1}{\sqrt[3]{k}})$ è convergente.

Falso: Ricordando che

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{x^2}=1\,,$$

per il criterio del confronto asintotico la serie data si comporta come la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{k}}\right)^2=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{\frac{2}{3}}}\,,$$

che è divergente essendo una serie armonica generalizzata con $\alpha=\frac{2}{3}<1$.

2B) La serie di termine generico $\frac{k^4\,k!}{k^k}$ è divergente.

Falso: Usiamo il criterio del rapporto. Si ha

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\lim_{k\to+\infty}\frac{(k+1)^4\,(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}\,\frac{k^k}{k^4\,k!}=\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{k+1}{k}\right)^4\frac{k^k}{(k+1)^k}\,.$$

Osserviamo ora che

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{k^k}{(k+1)^k}=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}=\frac{1}{\mathrm{e}}\,,$$

cosicché

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{k+1}{k}\right)^4\frac{k^k}{(k+1)^k}=1\cdot\frac{1}{\mathrm{e}}=\frac{1}{\mathrm{e}}<1\,,$$

e quindi la serie data è convergente.

2C) La serie di termine generico $\frac{(-1)^{2k}}{\sqrt[5]{k}}$ è convergente.

Falso: Dato che $(-1)^{2k}=1$ per ogni k, la serie data è

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{\frac{1}{5}}}\,,$$

che è divergente essendo una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha=\frac{1}{5}<1$.

2D) La serie di termine generico $\frac{(-1)^k}{k^5}$ converge semplicemente ma non assolutamente.

Falso: La serie dei moduli è

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^5}\,,$$

che è convergente essendo una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha=5>1$. Si ha quindi che la serie converge assolutamente, e quindi converge anche semplicemente.

---

3) Sia

$$f(x) = \sin(5\,x)\,.$$

Ricordando che si ha, per ogni y in $\mathbb{R}$,

$$\sin(y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\,y^{2k+1}}{(2k+1)!}\,,$$

con la sostituzione $y = 5\,x$ si ha, per ogni x in $\mathbb{R}$,

$$(1) \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\,5^{2k+1}\,x^{2k+1}}{(2k+1)!} = 5\,x - \frac{125}{6}\,x^3 + \text{ termini di grado superiore a 3.}$$

3A) Il raggio di convergenza della serie di Taylor di $f(x)$ è finito.

Falso: Dato che la (1) vale per ogni x in $\mathbb{R}$, il raggio di convergenza della serie è infinito.

3B) Il coefficiente del termine di grado 0 della serie di Taylor di $f(x)$ è 0.

Vero: Come si vede dalla (1), la serie di Taylor di $f(x)$ non ha termini di grado 0, e quindi il coefficiente di tale termine è 0. D'altra parte, $f(0) = 0\ldots$

3C) Il coefficiente del termine di grado 1 della serie di Taylor di $f(x)$ è -5.

Falso: Come si vede dalla (1), il coefficiente del termine di grado 1 è 5.

3D) Se $g(x) = x^7\,f(x)$, allora $g^{(7)}(0) = 7!$.

Falso: Dalla (1), moltiplicando per x^7, si ha

$$g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\,5^{2k+1}\,x^{2k+8}}{(2k+1)!} = 5\,x^8 + \text{ termini di grado superiore a 8.}$$

Dato che nello sviluppo di Taylor di $g(x)$ non compaiono termini di grado 7, il coefficiente di tale termine è 0. Essendo tale termine uguale a $\frac{g^{(7)}(0)}{7!}$, si ha $g^{(7)}(0) = 0 \neq 7!$.

---

4) Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{5^k} (x-7)^k .$$

Se definiamo

$$S = \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{a_k} ,$$

allora

$$L = \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\frac{a_k}{5^k}} = \frac{S}{5} ,$$

da cui segue che il raggio di convergenza della serie è

$$R = \frac{5}{S} . \tag{1}$$

4A) Se $a_k \equiv 13$, il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{1}{5}$.

Falso: Se $a_k \equiv 13$, si ha

$$S = \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{13} = 1 ,$$

da cui, per la (1), $R = 5 \neq \frac{1}{5}$.

4B) Se $a_k = k^3$, il raggio di convergenza della serie è $R = 5$.

Vero: Se $a_k = k^3$, si ha

$$S = \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{k^3} = 1 ,$$

da cui, per la (1), $R = 5$.

4C) Se $a_k = 4^k$, il raggio di convergenza della serie è $R = \frac{5}{4}$.

Vero: Se $a_k = 4^k$, si ha

$$S = \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{4^k} = 4 ,$$

da cui, per la (1), $R = \frac{5}{4}$.

4D) Se $a_k = \frac{1}{(k+1)^3}$, la serie diverge per $x = 12$.

Falso: Se $x = 12$, si ha $x - 7 = 5$, e quindi la serie diventa

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{5^k} 5^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^3} ,$$

che converge essendo una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha = 3 > 1$.

---

5) a) Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{4^k}{k!}\right).$$

b) Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 3^k \sin\left(\frac{3}{k^7\,3^k}\right).$$

c) Si scriva la serie di Taylor di

$$f(x) = x^4 \sin(6\,x)\,,$$

e si calcoli $f^{(4)}(0)$.

d) Data

$$f(x) = \mathrm{e}^{4\,x^2}\,,$$

si calcolino $f^{(3)}(0)$ e $f^{(4)}(0)$.

Soluzione:

a) Dato che $\frac{4^k}{k!}$ tende a zero quando k diverge, e che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1\,,$$

per il criterio del confronto asintotico la serie data ha lo stesso comportamento della serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4^k}{k!}\,. \tag{1}$$

Dato che la serie in (1) converge (per il criterio del rapporto/radice, oppure perché la sua somma vale e^4), anche la serie data è convergente.

b) Dato che $\frac{3}{k^7\,3^k}$ tende a zero quando k diverge, e che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1\,,$$

per il criterio del confronto asintotico la serie data ha lo stesso comportamento della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 3^k \frac{3}{k^7\,3^k} = 3 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^7}\,. \tag{2}$$

Dato che la serie in (2) converge, essendo una serie armonica generalizzata con $\alpha = 7 > 1$, anche la serie data è convergente.

c) Ricordando che per ogni y in $\mathbb{R}$ si ha

$$\sin(y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\,y^{2k+1}}{(2k+1)!}\,,$$

si ha, con la sostituzione $y = 6\,x$, e moltiplicando per x^4,

$$f(x) = x^4 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\,(6\,x)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\,6^{2k+1}\,x^{2k+5}}{(2k+1)!}\,.$$

Dato che

$$f(x) = 6\,x^5 + \text{ termini di grado superiore a 5},$$

si ha $f^{(4}(0) = 0$.

d) Ricordando che per ogni y in $\mathbb{R}$ si ha

$$\mathrm{e}^y = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}\,,$$

si ha, con la sostituzione $y = 4\,x^2$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(4\,x^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4^k}{k!}\,x^{2k}\,.$$

Scrivendo i primi tre termini della serie, si ha

$$f(x) = 1 + 4\,x^2 + 8\,x^4 + \text{ termini di ordine superiore a 4.}$$

Confrontando quest'espressione con l'espressione generica del polinomio di Taylor di ordine 4 di $f(x)$, ovvero

$$f(x) = 1 + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6}\,x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{24}\,x^4 + \text{ termini di ordine superiore a 4,}$$

si ricava facilmente che $f^{(3)}(0) = 0$, e che deve essere

$$\frac{f^{(4)}(0)}{24} = 8\,,$$

da cui

$$f^{(4)}(0) = 192\,.$$

6) Si consideri la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(x-5)^k}{k}\,.$$

a) Si determini il centro della serie.
b) Si determini il raggio di convergenza della serie.
c) Si determini l'insieme di convergenza della serie.
d) Si determini la funzione $f'(x)$.

Soluzione:
a) Ricordando che una serie di potenze si scrive come

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k\,(x-x_0)^k\,,$$

e che il centro della serie è il numero reale x_0, per la serie data il centro è $x_0 = 5$.

b) Nella serie data si ha $a_k = \frac{1}{k}$. Usando il criterio del rapporto, si ha

$$L = \lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k}{k+1} = 1\,,$$

da cui segue che il raggio di convergenza è

$$R = \frac{1}{L} = 1\,.$$

c) Per il teorema di convergenza delle serie di potenze, la serie converge per $|x-5| < 1 = R$, e non converge per $|x-5| > 1 = R$. Dato che

$$|x-5| < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 4 < x < 6\,,$$

la serie converge per x in $(4,6)$ e non converge se x appartiene a $(-\infty,4) \cup (6,+\infty)$. Rimangono da studiare i casi $x = 6$ e $x = 4$. Se $x = 6$ si ha $x - 5 = 1$ e la serie diventa

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\,,$$

che diverge essendo la serie armonica. Se $x = 4$, si ha $x - 5 = -1$ e la serie diventa

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}\,,$$

che converge per il criterio di Leibniz. In definitiva, la serie data converge per x in $[4,6)$ e non converge altrimenti.

d) Ricordando che le serie di potenze si derivano termine a termine, si ha

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k\,(x-5)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} (x-5)^{k-1} = \sum_{h=0}^{+\infty} (x-5)^h\,.$$

Ricordando la formula che dà la somma di una serie geometrica, si ha quindi

$$f'(x) = \sum_{h=0}^{+\infty} (x-5)^h = \frac{1}{1-(x-5)} = \frac{1}{6-x}\,.$$