Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 6

19 Aprile 2022 — Compito n. 00207 — □□■■□□■■■■

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data. Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ⊠ o ☑).

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: | | | | | | | |

Punteggi: 1 punto per ogni risposta esatta, 0 punti per risposte sbagliate o lasciate in bianco.

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
F	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
C	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□

---

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1A) Si ha
$$\int_2^3 \frac{dx}{x-2} < +\infty\,.$$

1B) Si ha
$$\int_6^7 \frac{dx}{\sqrt[6]{7-x}} < +\infty\,.$$

1C) Si ha
$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{4+x^6} = +\infty\,.$$

1D) Si ha
$$\int_5^{+\infty} \frac{e^{-7\,x}}{\sqrt[5]{x-5}}\,dx < +\infty\,.$$

---

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

2A)
$$\int_{-5}^{5} [x^{11} + \sin(4\,x)]\,dx = 0\,.$$

2B)
$$\int_{-2}^{2} [x^2 + x^7]\,dx = 0\,.$$

2C)
$$\int_6^8 \frac{dx}{x-4} = \int_{12}^{20} \frac{dx}{x-4}\,.$$

2D)
$$\int_0^{\pi/3} \sin(3\,x)\,dx = 3\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx\,.$$

---

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

3A)
$$\int_0^{\pi} \sin(7\,x)\,dx = \frac{2}{7}$$

3B)
$$\int_0^{1/\sqrt{5}} x\,e^{5\,x^2}\,dx = 10\,(e-1)\,.$$

3C)
$$\int_0^1 5\,x\,e^x\,dx = 1\,.$$

3D)
$$\int_0^{3\,\pi} \sin^2(x)\,dx = \frac{3}{2}\,\pi\,.$$

---

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

4A)
$$\int_5^6 \frac{dx}{|x-4|} = -\ln(2)\,.$$

4B)
$$\int_7^8 \frac{dx}{(x-6)^2} = \frac{1}{2}\,.$$

4C)
$$\int_6^{12} \frac{dx}{x^2+6x} = \ln(4/3)\,.$$

4D)
$$\int_0^6 \frac{x}{x^2+64}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{10}{8}\right).$$

$\square\square\square\square\square\square\square\square$ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00207**

5) Calcolare una primitiva delle funzioni $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $k(x)$ e calcolare gli integrali.

$$\textbf{a12)}\ f(x) = \frac{1}{x+3}\,, \quad \int_0^1 f(x)\,dx\,, \qquad \textbf{b12)}\ g(x) = \frac{1}{x^2-4\,x}\,, \quad \int_7^{10} g(x)\,dx\,,$$

$$\textbf{c12)}\ h(x) = \frac{8\,x+16}{x^2+4\,x+1}\,, \quad \int_0^1 h(x)\,dx\,, \qquad \textbf{d12)}\ k(x) = \frac{x^3}{x^2-64}\,, \quad \int_{-1}^1 k(x)\,dx\,,$$

6) Calcolare una primitiva delle funzioni $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $k(x)$ e calcolare gli integrali.

$$\textbf{a12)}\ f(x) = x^3\,\cos(x^2)\,, \quad \int_0^{\sqrt{9\,\pi}} f(x)\,dx\,, \qquad \textbf{b12)}\ g(x) = (x^2+2x-9)\,\mathrm{e}^x\,, \quad \int_0^3 g(x)\,dx\,,$$

$$\textbf{c12)}\ h(x) = \cos^3(x)\,, \quad \int_0^{\frac{17}{2}\,\pi} h(x)\,dx\,, \qquad \textbf{d12)}\ k(x) = \frac{4x-5}{5}\,\ln(x)\,, \quad \int_1^5 k(x)\,dx\,,$$

Soluzioni del compito 00207

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

Ricordiamo che si ha

$$\int_0 \frac{dy}{y^\alpha} < +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha < 1\,, \tag{1}$$

e che

$$\int^{+\infty} \frac{dy}{y^\alpha} < +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha > 1\,. \tag{2}$$

1A) Si ha

$$\int_2^3 \frac{dx}{x-2} < +\infty\,.$$

Falso: Si tratta, evidentemente, di un integrale improprio. Con il cambio di variabile $y = x - 2$ si ha

$$\int_2^3 \frac{dx}{x-2} = \int_0^1 \frac{dy}{y}\,,$$

e quest'ultimo integrale è infinito per la (1), dato che si tratta dell'integrale della funzione $\frac{1}{y^\alpha}$ con $\alpha = 1$.

1B) Si ha

$$\int_6^7 \frac{dx}{\sqrt[6]{7-x}} < +\infty\,.$$

Vero: Anche in questo caso si tratta di un integrale improprio. Con il cambio di variabile $y = 7 - x$, l'integrale diventa

$$-\int_1^0 \frac{dy}{\sqrt[6]{y}} = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt[6]{y}} < +\infty\,,$$

per la (1), dato che si tratta dell'integrale di $\frac{dy}{y^\alpha}$, con $\alpha = \frac{1}{6} < 1$.

1C) Si ha

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{4+x^6} = +\infty\,.$$

Falso: Osserviamo che si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{4+x^6}}{\frac{1}{x^6}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^6}{4+x^6} = 1\,.$$

Per il criterio del confronto asintotico, l'integrale dato è finito se e solo se è finito

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^6}\,.$$

Usando la (2) con $\alpha = 6 > 1$, si vede che quest'ultimo integrale è finito, e quindi lo è anche quello di partenza.

1D) Si ha

$$\int_5^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-7\,x}}{\sqrt[5]{x-5}}\,dx < +\infty\,.$$

Vero: L'integrale dato è finito se e solo se sono finiti i due integrali impropri
$$\int_5^6 \frac{\mathrm{e}^{-7\,x}}{\sqrt[5]{x-5}}\,dx\,, \qquad \text{e} \qquad \int_6^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-7\,x}}{\sqrt[5]{x-5}}\,dx\,.$$
Il primo è finito; infatti, dato che
$$\lim_{x\to 5} \mathrm{e}^{-7\,x} = \mathrm{e}^{-35}\,,$$
per il criterio del confronto asintotico, l'integrale dato ha lo stesso comportamento dell'integrale
$$\int_5^6 \frac{dx}{\sqrt[5]{x-5}}\,,$$
che è finito per la (1), applicata con $\alpha = \frac{1}{5} < 1$, essendo uguale (dopo il cambio di variabile $y = x - 5$) all'integrale improprio
$$\int_0^1 \frac{dy}{y^{\frac{1}{5}}}\,.$$
Anche il secondo integrale è finito dato che
$$0 \le \frac{\mathrm{e}^{-7\,x}}{\sqrt[5]{x-5}} \le \mathrm{e}^{-7\,x}\,, \qquad \forall x \ge 6\,.$$
Dato che
$$\int_6^{+\infty} \mathrm{e}^{-7\,x}\,dx = \lim_{M\to+\infty} \int_6^M \mathrm{e}^{-7\,x}\,dx = \lim_{M\to+\infty} -\frac{\mathrm{e}^{-7\,x}}{7}\Big|_6^M = \lim_{M\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-42} - \mathrm{e}^{-7\,M}}{7} = \frac{\mathrm{e}^{-42}}{7} < +\infty\,,$$
per il criterio del confronto si ha
$$\int_6^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-7\,x}}{\sqrt[5]{x-5}}\,dx \le \int_6^{+\infty} \mathrm{e}^{-7\,x}\,dx < +\infty\,.$$

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

2A)

$$\int_{-5}^{5} [x^{11} + \sin(4\,x)]\,dx = 0\,.$$

Vero: Dal momento che le funzioni $x \mapsto x^{11}$ e $x \mapsto \sin(4\,x)$ sono funzioni dispari, e che l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto all'origine, l'integrale vale zero.

2B)

$$\int_{-2}^{2} [x^2 + x^7]\,dx = 0\,.$$

Falso: Dal momento che la funzione $x \mapsto x^7$ è una funzione dispari, e che l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto all'origine, l'integrale di x^7 vale zero; d'altra parte, dato che la funzione $x \mapsto x^2$ è una funzione pari, e che l'intervallo è simmetrico rispetto all'origine, si ha

$$\int_{-2}^{2} x^2\,dx = 2\int_0^2 x^2 = \frac{2}{3}\,2^3 > 0\,.$$

2C)

$$\int_6^8 \frac{dx}{x-4} = \int_{12}^{20} \frac{dx}{x-4}\,.$$

Vero: Infatti si ha

$$\int_6^8 \frac{dx}{x-4} = \ln(|x-4|)\Big|_6^8 = \ln(4) - \ln(2) = \ln(2)\,,$$

e

$$\int_{12}^{20} \frac{dx}{x-4} = \ln(|x-4|)\Big|_{12}^{20} = \ln(16) - \ln(8) = \ln(2)\,,$$

e quindi i due integrali sono uguali.

2D)

$$\int_0^{\pi/3} \sin(3\,x)\,dx = 3\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx\,.$$

Falso: Si ha

$$\int_0^{\pi/3} \sin(3\,x)\,dx = -\frac{1}{3}\cos(3\,x)\Big|_0^{\pi/3} = -\frac{\cos(3\cdot\pi/3) - \cos(0)}{3} = \frac{2}{3}\,,$$

e

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx = -\cos(x)\Big|_0^{\pi} = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2\,,$$

e quindi

$$\int_0^{\pi/3} \sin(3\,x)\,dx = \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\cdot 2 = \frac{1}{3}\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx \neq 3\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx\,.$$

---

3) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

3A)

$$\int_0^{\pi} \sin(7\,x)\,dx = \frac{2}{7}$$

Vero: Si ha infatti

$$\int_0^{\pi} \sin(7\,x)\,dx = -\frac{\cos(7\,x)}{7}\Big|_0^{\pi} = -\frac{\cos(7\,\pi) - \cos(0)}{7} = \frac{2}{7}\,.$$

3B)

$$\int_0^{1/\sqrt{5}} x\,\mathrm{e}^{5\,x^2}\,dx = 10\,(\mathrm{e} - 1)\,.$$

Falso: Si ha, con la sostituzione $y = 5\,x^2$, da cui $dy = 10\,x\,dx$ e quindi $x\,dx = \frac{dy}{10}$,

$$\int_0^{1/\sqrt{5}} x\,\mathrm{e}^{5\,x^2}\,dx = \frac{1}{10}\int_0^1 \mathrm{e}^y\,dy = \frac{\mathrm{e}-1}{10} \neq 10\,(\mathrm{e}-1)\,.$$

3C)

$$\int_0^1 5\,x\,\mathrm{e}^x\,dx = 1\,.$$

Falso: Si ha, integrando per parti (derivando $5\,x$ e integrando l'esponenziale),

$$\int_0^1 5\,x\,\mathrm{e}^x\,dx = 5\,x\,\mathrm{e}^x\Big|_0^1 - 5\int_0^1 \mathrm{e}^x\,dx = 5\,\mathrm{e} - 5\,\mathrm{e}^x\Big|_0^1 = 5\,\mathrm{e} - 5\,\mathrm{e} + 5 = 5 \neq 1\,.$$

3D)

$$\int_0^{3\,\pi} \sin^2(x)\,dx = \frac{3}{2}\,\pi\,.$$

Vero: Iniziamo con il calcolare una primitiva di $\sin^2(x)$; ricordando la formula

$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}\,,$$

si ha

$$\int \sin^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\int [1-\cos(2x)]\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}\,.$$

Si ha pertanto

$$\int_0^{3\,\pi} \sin^2(x)\,dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}\right]\Big|_0^{3\,\pi} = \frac{3}{2}\,\pi\,.$$

dato che $\sin(6\,\pi) = 0 = \sin(0)$.

---

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

4A)

$$\int_5^6 \frac{dx}{|x-4|} = -\ln(2)\,.$$

Falso: Iniziamo con l'osservare che si ha $x-4 \geq 0$ sull'intervallo $[5,6]$; su tale intervallo si ha pertanto $|x-4| = x-4$. Si ha allora

$$\int_5^6 \frac{dx}{|x-4|} = \int_5^6 \frac{dx}{x-4} = \ln(|x-4|)\Big|_5^6 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2) \neq -\ln(2)\,.$$

Alternativamente, si poteva osservare che, essendo la funzione integranda positiva, l'integrale non poteva venire un numero negativo.

4B)

$$\int_7^8 \frac{dx}{(x-6)^2} = \frac{1}{2}\,.$$

Vero: Infatti si ha

$$\int_7^8 \frac{dx}{(x-6)^2} = -\frac{1}{x-6}\Big|_7^8 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}\,.$$

4C)

$$\int_6^{12} \frac{dx}{x^2+6x} = \ln(4/3)\,.$$

Falso: Il polinomio al denominatore si scompone come

$$x^2 + 6x = x\,(x+6)\,,$$

che ha come radici $x_1 = -6$ e $x_2 = 0$. Ricordando che

$$\int \frac{dx}{(x-x_1)\,(x-x_2)} = \frac{1}{x_2-x_1}\,\ln\left(\left|\frac{x-x_2}{x-x_1}\right|\right),$$

si ha quindi

$$\int_6^{12} \frac{dx}{x^2+6x} = \int_6^{12} \frac{dx}{x\,(x+6)} = \frac{1}{6}\,\ln\left(\left|\frac{x}{x+6}\right|\right)\Big|_6^{12} = \frac{1}{6}\left[\ln\left(\frac{12}{18}\right) - \ln\left(\frac{6}{12}\right)\right] = \frac{1}{6}\,\ln(4/3) \neq \ln(4/3)\,.$$

4D)

$$\int_0^6 \frac{x}{x^2+64}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{10}{8}\right).$$

Falso: Si ha, facendo comparire al numeratore la derivata del denominatore,

$$\int_0^6 \frac{x}{x^2+64}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^6 \frac{2x}{x^2+64}\,dx = \frac{1}{2}\,\ln(|x^2+64|)\Big|_0^6.$$

Svolgendo i calcoli, si ha allora

$$\int_0^6 \frac{x}{x^2+64}\,dx = \frac{\ln(100)-\ln(64)}{2} = \frac{1}{2}\,\ln\left(\frac{10^2}{8^2}\right) = \ln\left(\frac{10}{8}\right) \neq \frac{1}{2}\ln\left(\frac{10}{8}\right).$$

---

5) Calcolare una primitiva delle funzioni $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $k(x)$ e calcolare gli integrali.

$$\textbf{a12)}\ f(x) = \frac{1}{x+3}\,, \quad \int_0^1 f(x)\,dx\,, \qquad \textbf{b12)}\ g(x) = \frac{1}{x^2-4\,x}\,, \quad \int_7^{10} g(x)\,dx\,,$$

$$\textbf{c12)}\ h(x) = \frac{8\,x+16}{x^2+4\,x+1}\,, \quad \int_0^1 h(x)\,dx\,, \qquad \textbf{d12)}\ k(x) = \frac{x^3}{x^2-64}\,, \quad \int_{-1}^1 k(x)\,dx\,,$$

Soluzione:

a12) Ricordando che si ha

$$\int \frac{dx}{x+a} = \ln(|x+a|)\,,$$

si ha

$$\int \frac{dx}{x+3} = \ln(|x+3|)\,,$$

e quindi

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+3} = \ln(|x+3|)\Big|_0^1 = \ln(4) - \ln(3) = \ln\left(\frac{4}{3}\right).$$

b12) Ricordando che si ha

$$\int \frac{dx}{(x-x_2)\,(x-x_1)} = \frac{1}{x_2-x_1}\ \ln\left(\left|\frac{x-x_2}{x-x_1}\right|\right),$$

ed essendo $x^2 - 4\,x = x\,(x-4) = (x-0)(x-4)$, si ha

$$\int \frac{dx}{x^2-4\,x} = \frac{1}{4}\ \ln\left(\left|\frac{x-4}{x}\right|\right).$$

Pertanto,

$$\int_7^{10} \frac{dx}{x^2-4\,x} = \frac{1}{4}\ \ln\left(\left|\frac{x-4}{x}\right|\right)\Big|_7^{10} = \frac{1}{4}\left[\ln\left(\frac{6}{10}\right) - \ln\left(\frac{3}{7}\right)\right] = \frac{1}{4}\ \ln\left(\frac{7}{5}\right).$$

c12) La derivata del denominatore è:

$$[x^2+4\,x+1]' = 2x+4\,,$$

mentre il numeratore si può scrivere come:

$$8\,x+16 = 4\,(2x+4)\,.$$

Si ha allora

$$\int \frac{8\,x+16}{x^2+4\,x+1}\,dx = 4\int \frac{2x+4}{x^2+4\,x+1}\,dx = 4\ \ln(|x^2+4\,x+1|)\,,$$

da cui segue che

$$\int_0^1 \frac{8\,x+16}{x^2+4\,x+1}\,dx = 4\ \ln(|x^2+4\,x+1|)\Big|_0^1 = 4\,[\ln(6) - \ln(1)] = 4\ \ln(6)\,.$$

d12) Si ha

$$x^3 = x^3 - 64\,x + 64\,x = x\,(x^2-64) + 64\,x\,,$$

e quindi

$$\frac{x^3}{x^2-64} = \frac{x\,(x^2-64)+64\,x}{x^2-64} = x + \frac{64\,x}{x^2-64} = x + 32\,\frac{2x}{x^2-64}\,.$$

Ne segue che

$$\int \frac{x^3}{x^2-64}\,dx = \int \left[x + 32\,\frac{2x}{x^2-64}\right]dx = \frac{x^2}{2} + 32\ \ln(|x^2-64|)\,,$$

e quindi che

$$\int_{-1}^1 \frac{x^3}{x^2-64}\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + 32\ \ln(|x^2-64|)\right]\Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2} + 32\ \ln(63) - \frac{1}{2} - 32\ \ln(63) = 0\,.$$

Si noti che, essendo la funzione integranda dispari e l'intervallo simmetrico rispetto all'origine, si poteva concludere che l'integrale valeva zero **senza** calcolare la primitiva.

6) Calcolare una primitiva delle funzioni $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $k(x)$ e calcolare gli integrali.

a12) $f(x) = x^3\,\cos(x^2)\,,\quad \displaystyle\int_0^{\sqrt{9\,\pi}} f(x)\,dx\,,$ **b12)** $g(x) = (x^2+2x-9)\,\mathrm{e}^x\,,\quad \displaystyle\int_0^3 g(x)\,dx\,,$

c12) $h(x) = \cos^3(x)\,,\quad \displaystyle\int_0^{\frac{17}{2}\,\pi} h(x)\,dx\,,$ **d12)** $k(x) = \dfrac{4x-5}{5}\,\ln(x)\,,\quad \displaystyle\int_1^5 k(x)\,dx\,,$

Soluzione:

a12) Con la sostituzione $y = x^2$, da cui $dy = 2x\,dx$, e quindi $x\,dx = \frac{dy}{2}$, si ha

$$\int x^3\,\cos(x^2)\,dx = \int x^2\,\cos(x^2)\,x\,dx = \frac{1}{2}\int y\,\cos(y)\,dy\,.$$

Integrando per parti (al solito, derivando y ed integrando il coseno), si ha

$$\int y\,\cos(y)\,dy = y\,\sin(y) - \int \sin(y)\,dy = y\,\sin(y) + \cos(y)\,,$$

da cui segue (ricordando la sostituzione) che

$$\int x^3\,\cos(x^2)\,dx = \frac{x^2\,\sin(x^2)+\cos(x^2)}{2}\,.$$

Si ha dunque

$$\int_0^{\sqrt{9\,\pi}} x^3\,\cos(x^2) = \frac{x^2\,\sin(x^2)+\cos(x^2)}{2}\Big|_0^{\sqrt{9\,\pi}} = \frac{\cos(9\,\pi)-\cos(0)}{2} = -1\,.$$

b12) Ricordiamo che se $P(x)$ è un polinomio, si ha

$$\int P(x)\,\mathrm{e}^x\,dx = Q(x)\,\mathrm{e}^x\,,$$

dove $Q(x)$ è un polinomio dello stesso grado di $P(x)$ e tale che

$$P(x) = Q(x) + Q'(x)\,.$$

Considerando un generico polinomio di secondo grado $Q(x) = a\,x^2 + b\,x + c$, si ha dunque

$$Q(x) + Q'(x) = x^2 + (2a+b)\,x + (b+c) = x^2 + 2x - 9\,,$$

da cui si deduce che deve essere $a = 1$, $2a+b = 2$ e $b+c = -9$; da queste tre equazioni si ricava facilmente che $a = 1$, $b = 0$ e $c = -9$, cosicché si ha

$$\int (x^2+2x-9)\,\mathrm{e}^x\,dx = (x^2-9)\,\mathrm{e}^x\,.$$

Se ne deduce che

$$\int_0^3 (x^2+2x-9)\,\mathrm{e}^x\,dx = (x^2-9)\,\mathrm{e}^x\Big|_0^3 = 9\,.$$

c12) Iniziamo a scrivere

$$\cos^3(x) = \cos^2(x)\,\cos(x) = (1-\sin^2(x))\,\cos(x)\,,$$

cosicché si tratta di calcolare

$$\int (1-\sin^2(x))\,\cos(x)\,dx\,.$$

Con la sostituzione $y = \sin(x)$, da cui $dy = \cos(x)\,dx$, si ha

$$\int (1-\sin^2(x))\,\cos(x)\,dx = \int (1-y^2)\,dy = y - \frac{y^3}{3} = \sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3}\,.$$

Se ne deduce che

$$\int_0^{\frac{17}{2}\,\pi} \cos^3(x)\,dx = \left[\sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3}\right]\Big|_0^{\frac{17}{2}\,\pi} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\,.$$

d12) Integrando per parti (derivando il logaritmo e integrando il polinomio) si ha

$$\begin{aligned}\int \frac{4x-5}{5}\ln(x)\,dx &= \frac{2x^2-5\,x}{5}\ln(x) - \int \frac{2x^2-5\,x}{5}\,\frac{1}{x}\,dx = \frac{2x^2-5\,x}{5}\ln(x) - \int \frac{2x-5}{5}\,dx \\ &= \frac{2x^2-5\,x}{5}\ln(x) - \frac{x^2-5\,x}{5}\,.\end{aligned}$$

Ne segue che

$$\int_1^5 \frac{4x-5}{5}\ln(x)\,dx = \Big[\frac{2x^2-5\,x}{5}\ln(x) - \frac{x^2-5\,x}{5}\Big]\Big|_1^5 = 5\,\ln(5) - 0 - 0 + \frac{1-5}{5} = 5\,\ln(5) - \frac{4}{5}\,.$$