How to Metodi Matematici

@mignaway

July 10, 2022

Contents

1 Introduzione

Questo documento può essere utile per chi deve sostenere l'esame **Metodi Matematici** della **Sapienza** Università di Roma per il prof. **Piperno Adolfo**, ma non necessariamente. Questi appunti sono basati sulla mia esperienza e conoscenza, non forniscono una "correttezza assoluta". Con ciò vorrei avvisare che potrebbero esserci errori di tipo microscopico (ovvero di impatto inferiore rispetto le corrette macro conoscenze). Inoltre non garantisco alcune conoscenze basilari come il significato di tutti i simboli principali degli insiemi che sono facilmente capibili e ricercabili su internet. Il professore suddivide l'esame in 3 parti:

1. **Insiemi e funzioni**
2. **Induzione**
3. **Logica proposizionale e predicativa**

Per questo motivo gli appunti saranno divisi (categorizzati) in tre parti.

Parte 1

2 Insiemi

2.1 Introduzione agli insiemi

Piccolo accenno ai simboli principali degli insiemi:

- $\forall$ = Per ogni
- $\exists$ = Esiste
- $\in$ = Appartiene
- $\implies$ = Implica
- $\iff$ = se e solo se
- $\land$ = And (E)
- $\lor$ = Or (O)
- $\neg$ = Not (Negazione)

Un insieme non è altro che una collezione di oggetti e viene contenuto (e simboleggiato) da parentesi graffe $\{\ \}$.
Deve sempre essere ben definito il concetto di appartenenza $\rightarrow a \in A$ o $a \notin A$
Negli insiemi non conta l'ordine degli elementi e ne la loro molteplicità
es. per rappresentare i numeri da 0 a 24 utilizzeremo questa formula:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq 24\}$$

Che si legge come "x appartiene ai numeri naturali, tale che x è compreso tra 0 e 24"

> Non confondiamo l'appartenenza con la inclusione
> L'appartenenza $\in$ è una relazione tra un elemento ed un insieme.
> L'inclusione $\subseteq$ è una relazione tra due insiemi.

2.1.1 Implicazione

L'implicazione è un connettivo logico che ha la seguente tavola di verità:

a	b	$a \implies b$
T	T	T
T	F	F
F	T	V
F	F	V

Brevemente, se la premessa (a) è falsa allora l'implicazione è vera, altrimenti prende il valore di b.

2.1.2 Insieme vuoto

L'insieme vuoto si indica con $\emptyset$ ed è un insieme che non ha nessun elemento.
Esso è sottoinsieme di qualunque insieme $\rightarrow \forall x \quad \emptyset \subseteq X$
per confermare ciò prendiamo l'implicazione del sottoinsieme $\rightarrow \forall x(x \in A \implies x \in B)$
Come già accennato precedentemente sulla sezioni dell'implicazione, se A è falso allora tutta l'espressione è vera quindi se $x \in A$ è falso allora è vero che $\emptyset \subseteq X$.

2.1.3 Alcuni chiarimenti sugli insiemi

In un insieme gli elementi ripetuti non vengono contati, **es.** $\{1,2,1\} = \{1,2\}$

Quando andiamo a controllare se un elemento appartiene ad un insieme ($a \in A$) andiamo a vedere se è presente quell'esatto elemento. Quando controlliamo se un insieme è sottoinsieme di un insieme ($\{a\} \subseteq A$) andiamo a cercare invece tutti gli elementi presenti all'interno del sottoinsieme. Vedere gli esempi per capire meglio.

2.1.4 Esempi di insiemi

$A = \{1, 2, \{1, 2\}\}$

- $1 \in A \rightarrow$ Vera $\rightarrow A = \{1, 2, \{1, 2\}\}$
- $\{1, 2\} \in A \rightarrow$ Vera $\rightarrow A = \{1, 2, \{1, 2\}\}$
- $\{1, 2\} \subseteq A \rightarrow$ Vera $\rightarrow A = \{1, 2, \{1, 2\}\}$
- $\{\{1, 2\}\} \subseteq A \rightarrow$ Vera $\rightarrow A = \{1, 2, \{1, 2\}\}$
- $\{\{1, 2\}\} \in A \rightarrow$ Falsa $\rightarrow$ Essa appartiene ad A ma non è un suo elemento

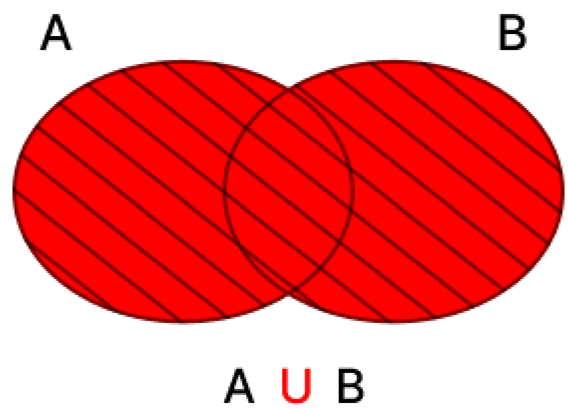
2.2 Relazioni tra insiemi

2.2.1 Unione

Si indica con ∪.
A ∪ B significa: Tutti gli elementi che stanno in A ed anche in B.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

es. {1,2,3} ∪ {4,5} = {1,2,3,4,5}

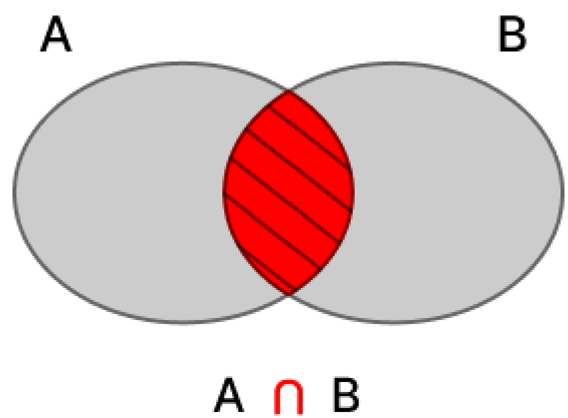


2.2.2 Intersezione

Si indica con ∩.
A ∩ B significa: Solo gli elementi che stanno sia in A che in B.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

es. {1,2,3,4} ∩ {3,4,5} = {3,4}

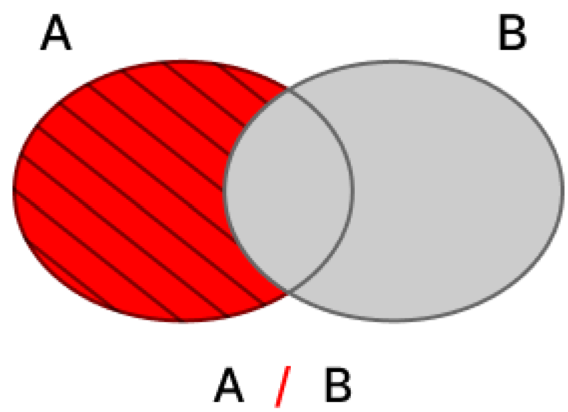


2.2.3 Differenza

Si indica con / o -.
A / B significa: Tutti gli elementi di A che **non** stanno in B.

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

es. {1,2,3,4,5} − {4,5} = {1,2,3}

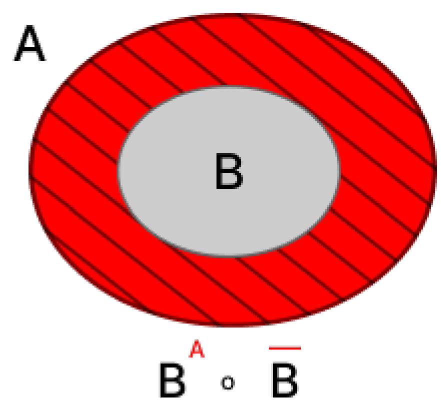


2.2.4 Complemento

Si indica con B^A o $\overline{B}$.
B^A significa: Tutti gli elementi di A che non stanno in B, praticamente A (insieme superiore di B) - B.

$$B^A = \{x \mid x \notin B\}$$

es. {1,2,3,4,5} − {4,5} = {1,2,3}



2.3 Insieme delle parti

Dato un insieme X si indica l'insieme delle parti di X con P(X)

$$P(X) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

Esso è l'insieme di tutti i possibili sottoinsiemi di X.
es. A = {1,2} $\rightarrow P(A) = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \emptyset\}$
es. A = {a,b,c} $\rightarrow P(A) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b.c\}, \emptyset\}$

2.4 Prodotto cartesiano

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \; e \; b \in B\}$$

$(a, b) \neq (b, a) \rightarrow$ Nel caso delle coppie l'**ordine conta**

Il prodotto cartesiano è sia riflessivo,simmetrico e transitivo, ovvero equivalente (vedere sezione successiva). Il prodotto cartesiano di due insiemi è l'insieme di tutte le possibili coppie ordinate di elementi dei due insiemi .

2.5 Relazioni

Una relazione R è un sottoinsieme di un prodotto cartesiano ($R \subseteq A \times A$), ovvero l'insieme di coppie sull'insieme A.
es. $3 < 7 \rightarrow R_< = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a < b\}$

---

es. $A = \{1, 2, 3\} \rightarrow R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2)\} \subseteq A \times A$
con $A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

2.5.1 Riflessiva

Una relazione è riflessiva se

$$\forall a \in A((a, a) \in R)$$

es. $A = \{1, 2, 3\} \rightarrow R_{riflessiva} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$
Ci devono essere tutte le coppie dello stesso elemento della forma (a,a) nella relazione R, se anche una viene tolta non è più riflessiva.

2.5.2 Anti-Riflessiva

Una relazione è anti-riflessiva se

$$\forall a \in A((a, a) \notin R)$$

ovvero non esiste neanche una singola coppia riflessiva (cioè mancano tutte)
es. $A = \{1, 2\} \rightarrow R_{anti-riflessiva} = \{(1, 2), (2, 1)\}$

2.5.3 Simmetrica

Una relazione è simmetrica se

$$\forall a, b \in A \quad [(a, b) \in R \Longrightarrow (b, a) \in R]$$

Ovvero se esiste una coppia della forma (a,b) deve esistere la sua corrispettiva coppia simmetrica (b,a).
es. $A = \{1, 2, 3\} \rightarrow R_{simmetrica} = \{(1, 1)(1, 2), (2, 1)\}$ // le coppie riflessive come (1,1) "valgono per due"
es. $A = \{1, 2, 3\} \rightarrow R_{non-simmetrica} = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3)\} \rightarrow$ Non è simmetrica perchè non esiste la coppia $(3, 1)$

2.5.4 Anti-simmetrica

Una relazione è anti-simmetrica se

$$\forall a, b \, [((a, b) \in R \text{ e } (b, a) \in R) \Longrightarrow a = b]$$

Ovvero se esiste la coppia (a, b) e (b, a) allora $a = b$.
es. $\leq$ è un tipo di relazione anti-simmetrica perchè se **a** $\leq$ **b** ed **b** $\geq$ **a** i due numeri sono uguali.
es. $A = \{1, 2, 3\} \rightarrow R_{anti-simmetrica} = \{(1, 1), (2, 2)\}$
es. $A = \{1, 2, 3\} \rightarrow R_{anti-simmetrica} = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\} \rightarrow$ È antisimmetrica perchè se la premessa [$(a, b) \in R$ e $(b, a) \in R$] è falsa (non c'è la coppia $(a, b)(b, a)$) allora indipendentemente da b l'espressione è vera.
Quindi nel caso non esista nessuna coppia simmetrica all'interno di R allora la relazione è antisimmetrica.

2.5.5 Transitiva

Una relazione è transitiva se

$$\forall a, b, c \in A[(a, b) \in R \; e \; (b, c) \in R] \Longrightarrow (a, c) \in R$$

Vale a dire che per ogni coppia della forma (a, b) ed una coppia della forma (b, c) è transitiva se esiste una coppia (a, c).
es. $\{$Roma, Firenze, Milano$\} \rightarrow$ Se da **Roma** posso andare a **Firenze** e da **Firenze** posso andare a **Milano** allora posso andare da **Roma** a **Milano**.
es. se la retta **A** è parallela alla retta **B** e la retta **B** è parallela alla retta **C** allora **A** è

parallela alla retta **C**.
es. $A = \{1,2,3\} \rightarrow R_{non\ transitiva} = \{(1,2),(2,3),(3,1)\} \rightarrow$ Non è transitiva, manca la coppia $(1,3)$ e $(2,1)$
es. $A = 1,2,3 \rightarrow R_{transitiva} = \{(1,2),(3,2)\} \rightarrow$ È transitiva perchè non esiste una coppia $(a,b)(b,c)$, la premessa risulta falsa e la relazione transitiva.

2.5.6 Equivalenza

Se la relazione è sia **simmetrica** che **riflessiva** che **transitiva** allora si dice che è di **equivalenza**.
es. $A = \{1,2,3,4\} \rightarrow R_{equivalente} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1),(2,4),(4,2),(1,4),(4,1)\}$

2.6 Classe di equivalenza

Vale solo se c'è una relazione di equivalenza

$$a \in A$$

$$[a] = \{x \in A \mid (a,x) \in R\}$$

Sono tutti gli elementi di A che sono in relazione con a.

- $[1] = \{1,2,4\} \rightarrow$ **1** è in relazione **se stesso**, con **2** e con **4**
- $[2] = \{1,2,4\} \rightarrow$ Dato che è in relazione con **1** allora la classe di equivalenza coincide.
- $[3] = \{3\} \rightarrow$ È in relazione solo con **se stesso**
- $[4] = \{1,2,4\} \rightarrow$ Dato che è in relazione con **1** allora la classe di equivalenza coincide.

es. $A = \{1,2,3,4\} \rightarrow R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1),(2,4),(4,2),(1,4),(4,1)\}$

2.7 Partizione di A

La partizione è una successione di sottoinsiemi, che non si intersecano, di classi di equivalenza disgiunte. Facendo la loro unione ottengo l'insieme di partenza.
I sottoinsiemi che determinano la partizione di un insieme si dicono classi dell'insieme.
es. $[1],[3]$
L'insieme di queste partizioni di chiama insieme quoziente $\rightarrow \{[1],[3]\}$

2.8 Insieme quoziente

L'insieme quoziente di una relazione di equivalenza è l'insieme delle sue classi di equivalenza.
Es. $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
$\rightarrow$ È sia **riflessiva**, **transitiva** (perchè la premessa è falsa) che **simmetrica**
$\rightarrow$ Il suo Quoziente sarà $\rightarrow Q = \{[1],[2],[3],[4]\}$ Dato che ogni oggetto è in relazione solo con se stesso

2.9 Ordine stretto, largo e totale

2.9.1 Ordine Stretto

Si dice di ordine **stretto** quando la relazione è **anti-riflessiva** e **transitiva**.
es. $<$

2.9.2 Ordine Largo

Si dice di ordine **largo** quando la relazione è **riflessiva**, **anti-simmetrica** e **transitiva**.
es. $\leq$

2.9.3 Ordine Totale

Si dice di ordine totale quando il primo elemento è in relazione con il secondo oppure il secondo è in relazione con il primo.

$$\forall a, b \in A[(a,b) \in R \vee (b,a) \in R]$$

es. $a < b$ o $b < a$

2.10 Chiusura Transitiva

Data $R \subseteq A \times A$
$\overline{R}$ è la più piccola relazione transitiva e contiene R.
Brevemente la chiusura transitiva è $R \cup \{qualcosa\}$ affinché renda il tutto la sola più piccola relazione transitiva possibile.

> ❗ La chiusura transitiva non sono gli elementi che bisogna aggiungere, bensì tutto quanto!

es. $A = \{1,2,3,4\} \rightarrow \overline{R} = \{(1,2),(2,3)\} \cup \{(1,3)\}$
es. $A = \{1,2,3,4\} \rightarrow \overline{R} = \{(1,2),(2,3),(3,4)\} \cup \{(1,3),(2,4),(1,4)\}$

3 Funzioni

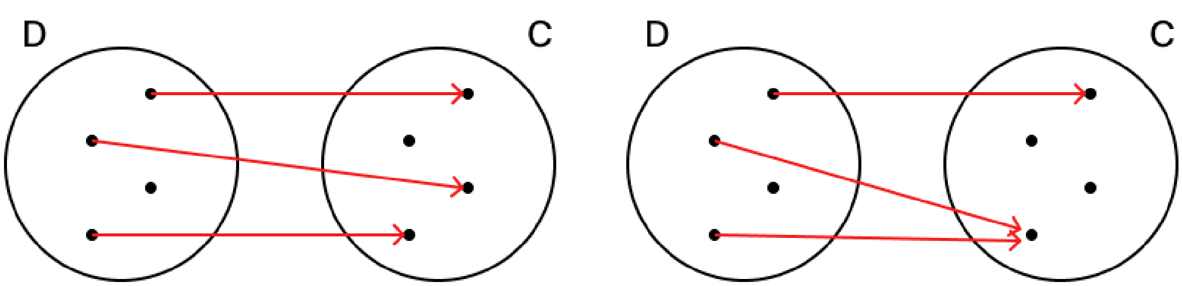
Le funzioni sono delle relazioni. Quando parliamo di funzioni parliamo di argomento e valore.
$D =$ Dominio | $C =$ Codominio
$f : D \Longrightarrow C$ la si può vedere come $\rightarrow f \subseteq D \times C \rightarrow$ ovvero come un sotto insieme di un prodotto cartesiano. Le funzioni godono di questa proprietà:

$$\forall d \in D \ \exists! \ c \in C$$

Ovvero, per ogni elemento del dominio deve esistere **una sola ed unica** corrispondenza di un elemento del codominio.

3.1 Iniettiva

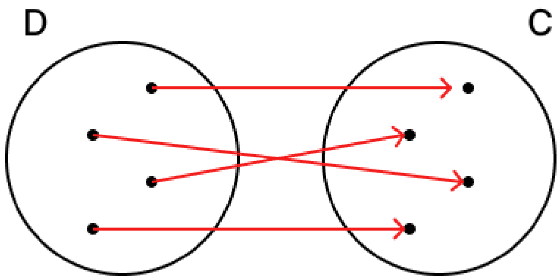
Una funzione viene detta **iniettiva** quando non capita mai che da due argomenti del dominio si ottiene lo stesso elemento del codominio.



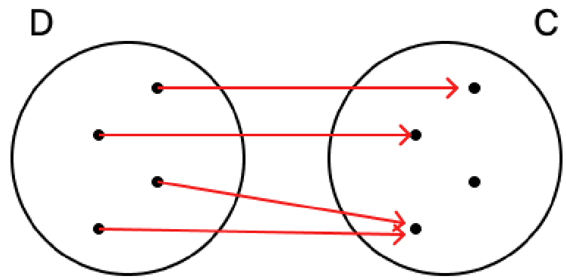
Funzione iniettiva   Funzione non iniettiva

3.2 Suriettiva

Una funzione viene detta **suriettiva** quando per ogni elemento del codominio c'è immagine di qualche elemento del dominio. Ovvero se esistono elementi del codominio che non hanno un'immagine di uno o più elementi del dominio non è suriettiva.



Funzione suriettiva



Funzione non suriettiva

3.3 Biettiva o corrispondenza biunivoca

Una funzione viene detta biettiva o in corrispondenza biunivoca quando è **sia iniettiva** e **suriettiva**

3.4 Cardinalità

La cardinalità di un insieme sono il **numero di elementi**. Due insiemi hanno la stessa cardinalità quando hanno una corrispondenza biunivoca.
es. $\mathbb{N} \subseteq P$ (numeri pari)

3.5 Numerabilità

Nella teoria degli insiemi, un insieme viene detto **numerabile** se i suoi elementi sono in numero finito oppure se possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i **numeri naturali** ($\mathbb{N}$).
es. $\mathbb{N} - \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow$ è numberabile? (Spoiler: si)
Per dimostrare se un insieme è numerabile bisogna verificare che esiste una corrispondenza biunivoca con i numeri naturali. Basta **trovarne una**, se ci si riesce significa che ce ne saranno poi infinite.
Soluzione $\rightarrow \{(a, b) \mid a \in \mathbb{N}, b \in A \ e \ b = a + 4\} \rightarrow \{(0, 4), (1, 5), (2, 6), ...\}$

3.5.1 Dimostrazione che non funziona

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è numerabile?
$\rightarrow \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...\}$
Dimostrazione non funzionante:
$\rightarrow \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), ...\}$
Si ma se $\mathbb{N}$ è infinito, la coppia $(1, 0)$ quando arriva? Non è possibile lasciare un oggetto infinitamente prolungato.

Per risolvere questa dimostrazione bisognerà utilizzare un metodo chiamato **Metodo diagonale di Cantor**:

	0	1	2	3	4	...
0	0	2	5	9	14	...
1	1	4	8	13	...	
2	3	7	12	...		
3	6	11	...			
4	10	...				
...	...					

Parte 2

4 Induzione

4.1 Proprietà utili per lo svolgimento

Prima di spiegare l'induzione sarebbe utile conoscere come prima cosa delle proprietà da applicare necessarie per lo svolgimento degli esercizi di induzione.

Sommatorie

Proprietà che permette di portare fuori la costante moltiplicativa:

$$\sum_{k=1}^{n} c\, a_k = c \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Proprietà che permette di esportare fuori dalla sommatoria l'ultimo membro della somma:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) + (n+1)(n+2)$$

(Semplicemente basta sommare alla sommatoria l'espressione con l'intervallo (n+1 in questo caso) al posto di k e poi diminuire di 1 l'indice della sommatoria).

Proprietà delle potenze

Proprietà delle potenze con la stessa base:

$$(n+2)^{n+1} = (n+2)^n\ (n+2)$$

Queste proprietà saranno importanti per il passo induttivo che verrà spiegato in seguito.

4.2 Principio di induzione

Sia $P(n)$ una proprietà dipendente da un indice $n \in \mathbb{N}$

- Se $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $P(n_0)$ è vera (**Passo base**)
- Se $P(n)$ è vera allora $P(n+1)$ è vera $\forall x \geq n_0$ (**Passo induttivo**)

In sintesi il principio di induzione è un metodo che permette di verificare che se una formula vale per un certo valore, allora varrà anche per quel certo valore + 1, cosi da verificare la correttezza della formula.
Questo metodo si basa, come detto sopra, in due passi: quello **base** e quello **induttivo**.

4.2.1 Passo Base

Il passo base è quello più semplice e bisognerà semplicemente sostituire il valore minimo dato (es. dimostrare $\forall n \geq 0$, allora si sostituisce 0 ad n).

4.2.2 Passo induttivo

Il passo induttivo invece è il passo più difficile della dimostrazione e non è uguale per ogni esercizio. Una cosa fondamentale da capire il passo induttivo è quello di cercare **l'espressione precedente all'interno della nuova** per poi sostituirla induttivamente, quindi il pattern da ricercare è **espressione iniziale** + **un qualcosa**. Quello che si va fare con il passo induttivo è quello di sostituire ad n $\rightarrow$ **n + 1**. Capiremo che è verificata quando nello svolgimento del membro di sinistra (dopo aver sostituito n+1) risulterà uguale al membro di destra (sempre con la sostituzione di n+1)

4.3 Esercizi

Per capire meglio guardiamo un po di esercizi. Per evitare ripetizioni metterò solo esercizi di sintassi e soluzione differente.

4.3.1 Formula di Gauss

(Somma di tutti i numeri naturali)
L'esercizio chiede di verificare che

$$\forall n \geq 1$$
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

La prima cosa che faremo è applicare il **passo base** (quindi sostituire 1 ad n):

$$\sum_{k=1}^{1} k = \frac{1(1+1)}{2} \implies 1 = 1$$

Una volta verificato il passo base andremo ad applicare il passo induttivo, ovvero sostituire **n+1**
Cosa vogliamo ottenere:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Svolgimento del membro di sinistra:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \implies \sum_{k=1}^{n} k + (n+1)$$

La parte fondamentale, ovvero il **passo induttivo**, è sostituire il membro di sinistra iniziale con quello di destra iniziale:

$$\sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \implies \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

Ora svolgendo dei calcoli aritmetici otterremo

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Che è proprio quello che volevamo ottenere.

4.3.2 Disuguaglianza di Bernoulli

Dimostrare che

$$\forall x \geq 0 \; e \; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

In questo tipo di dimostrazioni con disuguaglianze quello che si vuole ottenere, in modo differente dalla sommatoria, verificare che la **disuguaglianza vale** anche per **n+1**. Per capire meglio sarà necessario lo svolgimento.
Cosa vogliamo ottenere

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$$

Passo base (sostituzione con n = 0):

$$(1+x)^0 \geq 1 + n0 \implies 1 = 1$$

Passo induttivo (n $\rightarrow$ n + 1):

$$(1+x)^{n+1} \implies (1+x)^n (1+x) \implies (1+nx)(1+x)$$

Ora se svolgiamo il prodotto otterremo

$$1 + x + nx + nx^2 \implies 1 + (n+1)x + nx^2$$

Come possiamo notare abbiamo ottenuto un qualcosa (che sappiamo già essere $\geq 1 + (n+1)x$) + qualcosa che sicuramente sarà ≥ 0. Facendo ciò abbiamo verificato che il membro di sinistra è $\geq$ al membro di destra.

4.3.3 Numeri pentagonali (Esercizio con funzione)

Dimostrare che

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(n+1) = f(n) + 3n + 1. \end{cases}$$

$$\forall n \geq 1 \quad \text{vale} \quad f(n) = \frac{n(3n-1)}{2}$$

Apparentemente questo tipo di esercizi ad occhio sembrano difficili, ma non è così. Quello che dobbiamo fare è verificare che f(n+1) del sistema risulti uguale a f(n+1).
Passo base:

$$f(1) = \frac{1(3*1-1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Una volta verificato che f(1) = 1, andiamo a svolere il **passo induttivo**.
Cosa vogliamo ottenere, se sostituiamo con n+1 ad $f(n)$ avremo:

$$f(n+1) = \frac{(n+1)(3(n+1)-1)}{2} = \frac{(n+1)(3n+2)}{2} = \frac{3n^2+5n+2}{2}$$

Passo induttivo (Sostituire $f(n)$ con $f(n)$):

$$f(n+1) = \frac{n(3n-1)}{2} + 3n + 1 = \frac{n(3n-1)+6n+2}{2} = \frac{3n^2+5n+2}{2}$$

Che è proprio quello che volevamo ottenere.

Parte 3

5 Logica proposizionale

5.1 Sintassi e semantica

La **Sintassi** è esattamente (la struttura) di come si scrivono le cose (es. struttura delle formule).
La **Semantica** è il significato delle cose che si scrivono (es. sequenza di simboli), il significato che noi andiamo ad attribuire a questi "simboli". Ad esempio la parola "cane" sappiamo riconoscere subito la parola ed il suo significato dalla sua sequenza di caratteri.

5.2 Albero sintattico

Esempio di albero sintattico di una formula (da guardare dal basso verso l'alto):

$$\begin{array}{c} A \quad B \\ \hline (A - B) \qquad C \\ \hline (A - B) \iff C \\ \hline \neg((A - B) \iff C) \end{array}$$

Una cosa fondamentale è capire la gerarchia dei **connettori logici** nella sintassi.
Connettori logici e la loro tabella di verità:

A	B	$A \land B$	$A \lor B$	$A \implies B$	$A \iff B$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Nella logica proposizionale le nostre ”variabili” come A o B possono assumere qualsiasi valore noi vogliamo attribuire.

5.3 Interpretazione

Un concetto fondamentale da sapere è quello dell'**interpretazione**. Nella logica proposizionale essa non è altro il valore che vogliamo attribuire ai nostri simboli. Ovvero mappare ogni simbolo proposizionale ad un valore di verità vero o falso.

5.3.1 Valori delle formule

In base ai nostri modelli/contromodelli la formula può essere:

- **Tautologia**: La formula ha solo interpretazioni vere (es. $A \lor \neg A$)
- **Insoddisfacibile**: La formula ha solo interpretazioni vere (es. $A \land \neg A$)
- **Soddisfacibile**: Esiste almeno una interpretazione che rende vera la formula
- **Falsificabile**: Esiste almeno una interpretazione che rende falsa la formula

- Se è **Tautologia** allora è anche **Soddisfacibile**
- Se è **Insoddisfacibile** allora è anche **Falsificabile**

5.3.2 Equivalenza logica

L'equivalenza logica non è altro che la verifica che due formule sono uguali.
es.
$A \implies B = \neg A \lor B$
$A \land B = B \land A$

5.3.3 Conseguenza logica

La conseguenza logica è un connettivo logico di implicazione logica e si indica con $\models$. Per capire meglio guardiamo un esempio (senza vere formule):

$$P_1, P_2, P_3 \models Q$$

Q è vero tutte le volte che sono vere le formule P_1,P_2 e P_3. Negli esercizi viene chiesto proprio di verificare se la formula è una conseguenza logica.

> $\models Q$ senza nulla prima è sempre vero (Tautologia)

Vedremo esercizi più avanti con la logica predicativa.

5.4 Esercizi

5.4.1 Esercizi formule

1) $(A \lor B) \implies B$

A	B	$A \lor B$	$(A \lor B) \implies B$
V	V	V	V
V	F	V	F
F	V	V	V
F	F	F	V

Avendo interpretazioni che rendono la formula sia vera che falsa la formula sarà **soddisfacibile** e **falsificabile**.

---

2) $B \implies (A \lor B)$

A	B	$A \lor B$	$B \implies (A \lor B)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	V

Avendo solo interpretazioni che rendono la formula vera allora è una **tautologia**.

In generale quando si svolgono questo tipo di esercizi la migliore cosa da fare è una stesura della tavola di verità.

5.4.2 Esercizi verbali

In questo tipo di esercizi vi sarà la necessità di creare delle formule da un descrizione verbale. Per evitare ripetizioni le interpretazioni degli esercizi sono in comune (ad esempio M vale per tutti e tre gli esercizi).
Ecco alcuni esempi di esercizi:

1) Menelao assedia Troia se Elena non lo sposa. $\begin{cases} M \rightarrow \text{Menelao assedia Troia} \\ E \rightarrow \text{Elena sposa Menelao} \end{cases}$

Soluzione: $\neg E \implies M$

---

2) Paride non sposa Elena eppure Menelao assedia Troia. $\begin{cases} P \rightarrow \text{Paride sposa Elena} \end{cases}$
Soluzione: $\neg P \lor M$

---

3) Menelao assedia Troia se Paride non caccia Elena. $\begin{cases} Q \rightarrow \text{Paride caccia Elena} \end{cases}$
Soluzione: $\neg Q \implies M$

5.5 Tableaux Proposizionali

I Tableaux Proposizionali non sono necessari per lo svolgimento dell'esame ma possono tornarci utili se vogliamo verificare se una formula è tautologia o meno. In questi appunti non ci saranno esercizi dei Tableux proposizionali ma solo la teoria.

5.5.1 Natura congiuntiva

Per essere vera la parte sopra deve essere vera anche la parte sotto.

$$\begin{array}{ccccc} X \land Y & \neg(X \lor Y) & \neg(X \implies Y) & X \iff Y & \neg\neg X \\ | & | & | & | & | \\ X \text{ e } Y & \neg X \text{ e } \neg Y & X \text{ e } \neg Y & X \implies Y \text{ e } Y \implies X & X \end{array}$$

5.5.2 Natura disgiuntiva

Per essere vera la parte sopra deve essere una delle due parti sotto.

$$
\begin{array}{ccccc}
X \vee Y & \neg(X \wedge Y) & X \implies Y & X \vee Y & X \vee Y \\
\wedge & \wedge & \wedge & \wedge & \wedge \\
X \quad Y & \neg X \quad \neg Y & \neg X \quad Y & X \quad Y & X \quad Y
\end{array}
$$

Ci si ferma solamente se avremo alla fine X o $\neg X$, sennò si rientra nei casi soprastanti.

5.5.3 Rami chiusi

Quando tutti i rami sono chiusi, allora la formula iniziale è insoddisfacibile.

$$
\begin{array}{c}
\ldots \\
\wedge \\
A \quad \neg A
\end{array}
$$

$$\Diamond \ \boxed{A, \neg A, \ldots}$$

5.5.4 Controllo tautologia

Per vedere se la formula è una tautologia basta negare la formula di partenza. Se otteniamo che tutti i rami sono chiusi allora la tautologia è confermata.
es. $P \wedge (\neg Q \vee \neg P)$

$$
\begin{array}{c}
\neg(P \wedge (\neg Q \vee \neg P)) \\
\wedge \\
\neg P \quad \neg(\neg Q \vee \neg P)
\end{array}
$$

La formula non è una tautologia perché quel $\neg P$ non lo chiuderemo mai.

5.5.5 Correttezza e Completezza

Correttezza
Se non fornice falsi positivi, cioè non vi dice che una cosa è vera quando non è vera. La dimostrazione dimostra sempre il vero.
Completezza
È completo quando tutto quello che è vero risulta vero nel metodo, la dimostrazione dimostra tutto il vero.

6 Logica predicativa

Nella logica vengono utilizzati diversi simboli (per convenzione) per indicare diverse attributi:

- Variabili: x,y,z
- Costanti: a,b,c
- Simboli funzionali: f,g,h
- Simboli predicativi: P,Q,R
- Connettivi: $\neg, \wedge, \vee, \implies, \iff$
- Quantificatori: $\forall, \exists$

I Simboli predicativi che hanno **arietà** 0 (l'arietà di un simbolo è il suo numero di argomenti) non sono altro che gli stessi simboli della logica proposizionale. Nella logica proposizionale noi scriviamo solo P (o è vero o è falso).
es. $P(x)$ è unario.

6.1 Termini

- Variabili e costanti sono Termini
- Se $t_1 .... t_n$ sono termini ed f è un simbolo funzionale di arietà n, allora $f(t_1, ..., t_n)$ è un **termine**.

es.
$f(x, y, z) \rightarrow$ È un termine, simbolo funzionale a 3 posti
$g(x, 3, z) \rightarrow$ // stessa cosa
$g(1, 2, 3) \rightarrow$ // stessa cosa
$f(g(1, 2, 3), 3) \rightarrow$ // stessa cosa, $f(g(...), 3)$ è binaria, $g(1, 2, 3)$ è ternaria.

6.2 Formule

- Se p è un simbolo predicativo a n posti e $t_1 ... t_n$ allora $P(t_1, ..., t_n)$ è una formula
  es.
  $P(x, y, z) \rightarrow$ È una formula $P(f(1, 2, 3), 3 \rightarrow$ // anche
- Connettivi tra formule producono formule

- Se a è una formula e x una variabile
  $\exists x A \; \forall x A \rightarrow$ ovvero $\forall x P(x)$ è una formula
  $\exists x \forall y \; Q(x, y)$

Esempio sul concetto di simmetria
$\forall x \forall y \quad (x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R$
$R(x, y) = (x, y) \in R$

* è una formula

$\forall x \forall y \quad R(x, y) \rightarrow R(y, x)$
$\forall x \forall y \quad R(x, y) \rightarrow R(y, x)$
$\forall x \forall y \quad R(x, y) \rightarrow R(y, x)$
$\forall x \forall y \quad R(x, y) \rightarrow R(y, x)$

6.3 Interpretazione

Quando si parla di interpretazione nella logica predicativa significa definire il **Dominio** o anche comunemente chiamato **universo del discorso**.
es.
1) Il dominio è **le macchine** ed a $R(x, y)$ gli attribuiamo x più veloce di y.
2) Se $R(x, y)$ significa $x > y$ allora avremo:
  $\forall x \forall y \mid x > y$ allora $y > x \rightarrow$ (falsa)
3) Se $R(x, y)$ significa $x = y$ allora avremo:
  $\forall x \forall y \mid x = y$ allora $y = x \rightarrow$ (vera)

L'interpretazione di una formula è stabilire l'universo del discorso (numeri, simboli) e stabilire una interpretazione dei simboli che appaiono dentro la formula..

- Il valore di un predicato è il valore di verità.
- Il valore di una funzione è un valore qualsiasi in base a dove è definita.
- Dobbiamo interpretare anche le costanti (a, b, c), ovvero dire che $a = 6$ o che $b = 5$.

es.
P è automobile e x è blu
$\forall x P(x)$ - Falso, non tutte le auto sono blu $\exists x P(x)$ - Vero, esistono auto blu

6.3.1 Modello e Contromodello

Un **Modello** è un'interpretazione che rende vera la formula.
Un **Contromodello** è un'interpretazione che rende falsa la formula.
Ovvero:

- è falsificabile se esiste un contromodello
- è soddisfacibile se esiste un modello

6.4 Esercizi

Dominio: **Numeri pari**

$$\forall x(P(x) \implies \neg Q(x))$$

Interpretazione 1
P è pari
Q è dispari
"Per ogni numero pari (il numero è pari allora il numero non è dispari)"
Come possiamo notare questa interpretazione è **vera**.
Interpretazione 2
P è pari
Q è pari
"Per ogni numero pari (il numero è pari allora il numero non è pari)"
Come possiamo notare questa interpretazione è **falsa**.
Ciò significa che la formula è **soddisfacibile** e **falsificabile**.

6.4.1 Verità logiche

Dire verità logica equivale a dire che la formula è vera per ogni modello. Uno degli esercizi, per alcuni, difficili da comprendere è capire se una formula è una tautologia (ovvero vera per ogni interpretazione).
Il metodo più veloce per svolgere questi è trovare una **intepretazione che falsifichi la formula**. Ricordiamo che nella logica predicativa il valore dei simboli non vale più o vero o falso, ma essi possono prendere il valore di **tautologia, insoddisfacibile, soddisfacibile o falsificabile**.
Ad esempio se abbiamo una formula del tipo $A \implies B$ quello che vogliamo ottenere è A vera (tautologia o soddisfacibile) e B falsa (insoddisfacibile o falsificabile) dato che

nell'implicazione è l'unico modo di falsificare la formula. Vediamo alcuni esempi:

$$\exists x(A(x) \implies B(x))$$

La formula è **soddisfacibile** e **falsificabile**. In questo caso quello che vogliamo ottenere è $A(x) \implies B(x)$ insoddisfacibile cosi che $\exists$ di insoddisfacibile è sempre falsa. Se mettiamo quindi $A(x)$ tautologia e $B(x)$ insoddisfacibile allora **V** $\implies$ **F** sarà sempre falso. Quindi la formula non è una tautologia.

Esempio esercizio di esame

Il seguente enunciato è una verità logica: Vero o Falso?

$$\forall x(P(x) \implies \neg Q(x)) \implies (\forall x \neg P(x) \implies \neg\exists Q(x))$$

Come detto precedentemente notiamo che il pattern è identico all'esercizio di sopra, il connettivo "più importante" in questa formula è quello di implicazione e dobbiamo provare ad ottenere V $\implies$ F. I passaggi sono:

- Trovare il membro di sinistra $\forall x(P(x) \implies \neg Q(x))$ sempre vero.
  Basta semplicemente interpretare $P(x)$ come insoddisfacibile cosi da avere $\forall x(F \implies \text{non importa})$ che è sempre vera dato che $\forall x(\text{sempre vero})$ è sempre vero.

- Trovare il membro di destra $\forall x \neg P(x) \implies \neg\exists Q(x)$ sempre falso.
  Ricordiamo che $P(x)$ lo abbiamo interpretato come **insoddisfacibile**, quindi abbiamo $\forall x \neg P(x)$ sempre vera dato che $\forall x \neg(\text{sempre falsa})$ è sempre vera. Ora abbiamo libera scelta per quanto riguarda $Q(x)$ dato che non è divincolato nel membro di sinistra, dato che vogliamo che il membro di destra diventa falso si necessita di interpretare $Q(x)$ **tautologia** cosi da avere $\neg\exists(\text{sempre vero})$ che è sempre falsa.

Siamo riusciti a falsificare la formula quindi questa formula **non** è una verità logica.

Esercizi esami svolti

(Sezione in corso di sviluppo)