Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 9
17 Maggio 2022 — Compito n. 00284 — □■□□□■■■□□

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: | | | | | | | |

Punteggi: 1 punto per ogni risposta esatta, 0 punti per risposte sbagliate o lasciate in bianco.

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
F	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
C	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□

---

1) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = (4t+2)\,y(t) + A\,\mathrm{e}^{2t^2+2t}\,.$$

1A) Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che $y(10) = 9$.
1B) Se $A = 0$, la funzione $y(t) = 4\,\mathrm{e}^{2t^2+2t}$ non è soluzione dell'equazione.
1C) La funzione $y(t) = (6+A\,t)\,\mathrm{e}^{2t^2+2t}$ è soluzione dell'equazione.
1D) Se $y(0) = 0$ e $A = 2$, si ha

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0\,.$$

---

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = 4\,\cos(t)\,y(t) + 7\,\sin(t)\,\cos(t)\,.$$

2A) Se $y(0) = 0$, si ha $y'(0) \neq 0$.
2B) Se $y(0) = 0$, si ha $y''(0) = 4$.
2C) Se $y(0) = 6$, la soluzione $y(t)$ è decrescente in un intorno di $t = 0$.
2D) Se $y(\frac{\pi}{2}) = 5$, si ha $T_1(y(t); \frac{\pi}{2}) = 5 + (t - \frac{\pi}{2})$.

---

3) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = \frac{\mathrm{e}^{y(t)} - 1}{\mathrm{e}^{y(t)}}\,\cos(t)\,.$$

3A) L'equazione non è a variabili separabili.
3B) Se $y(0) = 0$, la soluzione $y(t)$ non è costante.
3C) Se $y(0) = 5$, esiste $t_0 > 0$ tale che $y(t_0) = 0$.
3D) Se $y(0) = \ln(6)$, si ha

$$y(s) = \ln(5\,\mathrm{e}^{\sin(s)} + 1)\,.$$

---

4) Si consideri l'equazione differenziale $y'(t) = t\,(y(t)^3 - 9y(t))$.

4A) Se $y(0) = 3$, la soluzione è costante.
4B) Se $y(0) = 1$, si ha $y'(0) = 0$.
4C) Se $y(0) = -1$, si ha $T_2(y(t); 0) = -1 - 4\,t^2$.
4D) Se $y(0) = 1$, la soluzione ha un massimo relativo per $t = 0$.

5) Si consideri il problema di Cauchy

(1)
$$\begin{cases} y'(t) = a(t)\,y(t) + b(t)\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases}$$

a) Si risolva (1) se $a(t) = -10$, $b(t) = 3$ e $y_0 = 0$.
b) Si risolva (1) se $a(t) = \sin(t)$, $b(t) = 2\,\sin(t)$ e $y(0) = \pi$.
c) Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 1 di $y(t)$ nell'origine se $a(t) = \mathrm{e}^{8\,t}$, $b(t) = 5\,\cos(t)$ e $y_0 = 2$.
d) Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 2 di $y(t)$ nell'origine se $a(t) = 8\,t$, $b(t) = 9\,t^2$ e $y_0 = 4$.

6) Si risolvano le seguenti equazioni differenziali a variabili separabili.

a) $y'(t) = 8\,y(t) + 13$, se $y(0) = 0$.

b) $y'(t) = 12\,t\,(25 + y^2(t))$, se $y(0) = 0$.

c) $y'(t) = \mathrm{e}^{-y(t)}\,\mathrm{e}^{5\,t}$, se $y(0) = 0$.

d) $y'(t) = \frac{6\,(1+y^2(t))}{y(t)}$, se $y(0) = 1$.

Soluzioni del compito 00284

1) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = (4t + 2)\, y(t) + A\, \mathrm{e}^{2t^2+2t}\,.$$

Ricordiamo la formula risolutiva per il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)\, y(t) + b(t)\,, \\ y(t_0) = y_0\,. \end{cases} \tag{1}$$

Posto

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds\,,$$

si ha

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)} \left[y_0 + \int_{t_0}^{t} b(s)\, \mathrm{e}^{-A(s)}\, ds \right]. \tag{2}$$

1A) Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che $y(10) = 9$.

Falso: Trattandosi di un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, è sufficiente una sola condizione iniziale affinché esista un'unica soluzione.

1B) Se $A = 0$, la funzione $y(t) = 4\, \mathrm{e}^{2t^2+2t}$ non è soluzione dell'equazione.

Falso: Se $y(t) = 4\, \mathrm{e}^{2t^2+2t}$, si ha

$$y'(t) = 4\,(4t + 2)\, \mathrm{e}^{2t^2+2t} = (4t + 2)\, y(t) = (4t + 2)\, y(t) + A\, \mathrm{e}^{2t^2+2t}\,,$$

e quindi $y(t)$ è soluzione dell'equazione.

1C) La funzione $y(t) = (6 + A\, t)\, \mathrm{e}^{2t^2+2t}$ è soluzione dell'equazione.

Vero: Se $y(t) = (6 + A\, t)\, \mathrm{e}^{2t^2+2t}$, derivando si ha

$$y'(t) = A\, \mathrm{e}^{2t^2+2t} + (6 + A\, t)\, (4t + 2)\, \mathrm{e}^{2t^2+2t} = (4t + 2)\, y(t) + A\, \mathrm{e}^{2t^2+2t}\,,$$

e quindi $y(t)$ è soluzione dell'equazione.

1D) Se $y(0) = 0$ e $A = 2$, si ha

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0\,.$$

Falso: Il problema rientra nel caso (1) con

$$a(t) = 4t + 2\,, \quad b(t) = 2\, \mathrm{e}^{2t^2+2t}\,, \qquad t_0 = 0\,, \quad y_0 = 0\,.$$

Dato che

$$A(t) = \int_0^t a(s)\, ds = \int_0^t (4s + 2)\, ds = (2s^2 + 2s)\Big|_0^t = 2t^2 + 2t\,,$$

e dato che

$$\int_0^t b(s)\, \mathrm{e}^{-A(s)}\, ds = \int_0^t 2\, \mathrm{e}^{2s^2+2s}\, \mathrm{e}^{-(2s^2+2s)}\, ds = \int_0^t 2\, ds = 2\, t\,,$$

dalla (2) si ha

$$y(t) = 2\, t\, \mathrm{e}^{2t^2+2t}\,,$$

da cui segue che

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty \neq 0\,.$$

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = 4\,\cos(t)\,y(t) + 7\,\sin(t)\,\cos(t)\,.$$

Derivando l'equazione si ha

$$y''(t) = -4\,\sin(t)\,y(t) + 4\,\cos(t)\,y'(t) + 7\,\cos^2(t) - 7\,\sin^2(t)\,. \tag{1}$$

2A) Se $y(0) = 0$, si ha $y'(0) \neq 0$.

Falso: Dall'equazione, sostituendo $t = 0$, si ha

$$y'(0) = 4\,\cos(0)\,y(0) + 7\,\sin(0)\,\cos(0) = 4 \cdot 1 \cdot 0 + 7 \cdot 0 \cdot 1 = 0\,.$$

2B) Se $y(0) = 0$, si ha $y''(0) = 4$.

Falso: Dall'equazione con $t = 0$ si ha (si veda l'esercizio **2A**)

$$y'(0) = 0\,.$$

Dalla (1) con $t = 0$ si ha

$$y''(0) = 7 \neq 4\,,$$

dato che il primo, secondo e quarto termine si annullano.

2C) Se $y(0) = 6$, la soluzione $y(t)$ è decrescente in un intorno di $t = 0$.

Falso: Dall'equazione si ha

$$y'(0) = 4 \cdot \cos(0) \cdot y(0) = 4 \cdot 6 = 24 > 0\,,$$

per ipotesi. Essendo $y'(0) > 0$, si ha $y'(t) > 0$ in un intorno dell'origine (per il teorema di permanenza del segno per funzioni continue) e quindi $y(t)$ è crescente in un intorno dell'origine.

2D) Se $y(\frac{\pi}{2}) = 5$, si ha $T_1(y(t); \frac{\pi}{2}) = 5 + (t - \frac{\pi}{2})$.

Falso: Dall'equazione si ha

$$y'(\tfrac{\pi}{2}) = 4\,\cos(\tfrac{\pi}{2})\,y(\tfrac{\pi}{2}) + 7\,\sin(\tfrac{\pi}{2})\,\cos(\tfrac{\pi}{2}) = 4 \cdot 0 \cdot 5 + 7 \cdot 1 \cdot 0 = 0\,.$$

Ricordando che

$$T_1(y(t); \tfrac{\pi}{2}) = y(\tfrac{\pi}{2}) + y'(\tfrac{\pi}{2})\,(t - \tfrac{\pi}{2})\,,$$

si ha

$$T_1(y(t); \tfrac{\pi}{2}) = 5 \neq 5 + (t - \tfrac{\pi}{2})\,.$$

---

3) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = \frac{e^{y(t)} - 1}{e^{y(t)}} \cos(t)\,.$$

Osserviamo che l'equazione è a variabili separabili, essendo della forma

$$y'(t) = f(y(t))\, g(t)\,,$$

con

$$f(s) = \frac{e^s - 1}{e^s}\,, \qquad g(t) = \cos(t)\,.$$

Dato che $f(0) = 0$, se all'equazione abbiniamo la condizione iniziale $y(0) = 0$ abbiamo la soluzione costante $y(t) \equiv 0$. Se, invece $y(0) = y_0 > 0$ allora $y(t) \neq 0$ per ogni t e possiamo separare le variabili, riscrivendo l'equazione come

$$\frac{e^{y(t)}\, y'(t)}{e^{y(t)} - 1} = \cos(t)\,.$$

Integrando tra zero e s si ha

$$\int_0^s \frac{e^{y(t)}\, y'(t)}{e^{y(t)} - 1}\, dt = \int_0^s \cos(t)\, dt = \sin(s)\,.$$

Per il primo integrale, con la sostituzione $z = y(t)$, da cui $dz = y'(t)\, dt$, si ha

$$\int_0^s \frac{e^{y(t)}\, y'(t)}{e^{y(t)} - 1}\, dt = \int_{y_0}^{y(s)} \frac{e^z}{e^z - 1}\, dz\,.$$

Con la sostituzione $w = e^z - 1$, da cui $dw = e^z\, dz$, si ha

$$\int_{y_0}^{y(s)} \frac{e^z}{e^z - 1}\, dz = \int_{e^{y_0}-1}^{e^{y(s)}-1} \frac{dw}{w} = \ln(|w|)\Big|_{e^{y_0}-1}^{e^{y(s)}-1} = \ln\left(\left|\frac{e^{y(s)} - 1}{e^{y_0} - 1}\right|\right).$$

Essendo $y_0 > 0$ possiamo levare i moduli (perché?) e scrivere che

$$\ln\left(\frac{e^{y(s)} - 1}{e^{y_0} - 1}\right) = \sin(s)\,,$$

da cui segue, dopo alcuni calcoli, che

$$y(s) = \ln[(e^{y_0} - 1)\, e^{\sin(s)} + 1]\,. \tag{1}$$

Osserviamo di passaggio che la (1) è valida anche nel caso in cui $y_0 = 0$.

3A) L'equazione non è a variabili separabili.

Falso: Per quanto detto sopra, l'equazione è a variabili separabili.

3B) Se $y(0) = 0$, la soluzione $y(t)$ non è costante.

Falso: Dato che $f(y_0) = f(0) = 0$, la funzione costante $y(t) \equiv y_0 = 0$ è soluzione dell'equazione.

3C) Se $y(0) = 5$, esiste $t_0 > 0$ tale che $y(t_0) = 0$.

Falso: Se esistesse $t_0 > 0$ tale che $y(t_0) = 0$, il problema di Cauchy con dato iniziale $y(t_0) = 0$ avrebbe due soluzioni: la funzione $y(t)$ che stiamo considerando (e che non è la funzione nulla dato che in $t = 0$ vale 5), e la funzione $w(t) \equiv 0$. Dato che il problema di Cauchy ha un'unica soluzione, si ha $y(t) \neq 0$ per ogni $t > 0$.

3D) Se $y(0) = \ln(6)$, si ha

$$y(s) = \ln(5\, e^{\sin(s)} + 1)\,.$$

Vero: Dalla (1), con $y_0 = \ln(6)$, da cui segue che $\mathrm{e}^{y_0} - 1 = 6 - 1 = 5$, si ha

$$y(s) = \ln(5\,\mathrm{e}^{\sin(s)} + 1)\,.$$

4) Si consideri l'equazione differenziale $y'(t) = t\,(y(t)^3 - 9y(t))$.

Osserviamo che l'equazione è a variabili separabili, essendo della forma

$$y'(t) = f(y(t))\,g(t)\,,$$

con

$$f(s) = s^3 - 9s\,, \qquad g(t) = t\,. \tag{1}$$

4A) Se $y(0) = 3$, la soluzione è costante.

Vero: Se $f(s)$ è come in (1), dato che si ha $f(3) = 0$, la funzione costante $y(t) \equiv 3$ è soluzione dell'equazione.

4B) Se $y(0) = 1$, si ha $y'(0) = 0$.

Vero: Dall'equazione, scritta per $t = 0$, si ha

$$y'(0) = 0 \cdot (y(0)^3 - 9y(0)) = 0 \cdot (1 - 9) = 0\,.$$

4C) Se $y(0) = -1$, si ha $T_2(y(t); 0) = -1 - 4\,t^2$.

Falso: Derivando l'equazione si ha

$$y''(t) = y(t)^3 - 9y(t) + t\,(3y(t)^2 - 9)\,y'(t)\,,$$

da cui segue che $y''(0) = 8$. Dato che dall'equazione segue che $y'(0) = 0$ (si veda l'esercizio **4B**), si ha

$$T_2(y(t); 0) = y(0) + y'(0)\,t + \frac{y''(0)}{2}\,t^2 = -1 + 4\,t^2 \neq -1 - 4\,t^2\,.$$

4D) Se $y(0) = 1$, la soluzione ha un massimo relativo per $t = 0$.

Falso: Derivando l'equazione si ha

$$y''(t) = y(t)^3 - 9y(t) + t\,(3y(t)^2 - 9)\,y'(t)\,,$$

da cui segue che $y''(0) = -8 < 0$. Dato che dall'equazione segue che $y'(0) = 0$ (si veda l'esercizio **4B**), si ha che $t = 0$ è un punto di massimo relativo per $y(t)$.

---

5) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1)\qquad \begin{cases} y'(t) = a(t)\,y(t) + b(t)\,, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases}$$

a) Si risolva (1) se $a(t) = -10$, $b(t) = 3$ e $y_0 = 0$.
b) Si risolva (1) se $a(t) = \sin(t)$, $b(t) = 2\,\sin(t)$ e $y(0) = \pi$.
c) Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 1 di $y(t)$ nell'origine se $a(t) = \mathrm{e}^{8\,t}$, $b(t) = 5\,\cos(t)$ e $y_0 = 2$.
d) Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 2 di $y(t)$ nell'origine se $a(t) = 8\,t$, $b(t) = 9\,t^2$ e $y_0 = 4$.

Soluzione:
Ricordiamo che la soluzione del problema di Cauchy (1) è data da

$$(2)\qquad y(t) = \mathrm{e}^{A(t)}\left[y_0 + \int_0^t b(s)\,\mathrm{e}^{-A(s)}\,ds\right], \qquad \text{dove} \qquad A(t) = \int_0^t a(s)\,ds\,.$$

a) Dato che $a(t) = -10$, si ha

$$A(t) = -\int_0^t 10\,ds = -10\,t\,.$$

Pertanto, per la (2) si ha

$$y(t) = \mathrm{e}^{-10\,t}\left[0 + \int_0^t 3\,\mathrm{e}^{10\,s}\,ds\right] = \mathrm{e}^{-10\,t}\left[\frac{3}{10}\,\mathrm{e}^{10\,s}\Big|_0^t\right] = \frac{3}{10}\,\mathrm{e}^{-10\,t}\,[\mathrm{e}^{10\,t} - 1] = \frac{3}{10}\,[1 - \mathrm{e}^{-10\,t}]\,.$$

b) Dato che $a(t) = \sin(t)$, si ha

$$A(t) = \int_0^t \sin(s)\,ds = -\cos(s)\Big|_0^t = 1 - \cos(t)\,,$$

e quindi, per la (2),

$$y(t) = \mathrm{e}^{1-\cos(t)}\left[\pi + \int_0^t 2\,\sin(s)\,\mathrm{e}^{\cos(s)-1}\,ds\right].$$

Con il cambio di variabile $z = \cos(s) - 1$, da cui $dz = -\sin(s)\,ds$, si ha

$$\int_0^t 2\,\sin(s)\,\mathrm{e}^{\cos(s)-1}\,ds = -2\int_0^{\cos(t)-1} \mathrm{e}^z\,dz = -2\,\mathrm{e}^z\Big|_0^{\cos(t)-1} = 2(1 - \mathrm{e}^{\cos(t)-1})\,.$$

Pertanto

$$y(t) = \mathrm{e}^{1-\cos(t)}\,[\pi + 2\,(1 - \mathrm{e}^{\cos(t)-1})] = (\pi + 2)\,\mathrm{e}^{1-\cos(t)} - 2\,.$$

c) Dall'equazione si ha

$$y'(0) = \mathrm{e}^{8\cdot 0}\,y(0) + 5\,\cos(0) = 1\cdot 2 + 5 = 7\,,$$

da cui segue che

$$T_1(y(t);0) = y(0) + y'(0)\,t = 2 + 7\,t\,.$$

d) Dall'equazione si ha

$$y'(0) = 8\cdot 0\cdot y(0) + 9\cdot 0^2 = 0\,.$$

Derivando l'equazione si ha poi

$$y''(t) = 8\,y(t) + 8\,t\,y'(t) + 18\,t\,,$$

da cui segue che

$$y''(0) = 8\,y(0) + 8\cdot 0\cdot y'(0) + 18\cdot 0 = 32\,.$$

Si ha quindi

$$T_2(y(t);0) = y(0) + y'(0)\,t + \frac{y''(0)}{2}\,t^2 = 4 + 16\,t^2\,.$$

6) Si risolvano le seguenti equazioni differenziali a variabili separabili.
a) $y'(t) = 8\,y(t) + 13$, se $y(0) = 0$.
b) $y'(t) = 12\,t\,(25 + y^2(t))$, se $y(0) = 0$.
c) $y'(t) = \mathrm{e}^{-y(t)}\,\mathrm{e}^{5\,t}$, se $y(0) = 0$.
d) $y'(t) = \frac{6\,(1+y^2(t))}{y(t)}$, se $y(0) = 1$.

Soluzione:
a) Dividendo per $8\,y(t) + 13$, l'equazione è equivalente a
$$\frac{y'(t)}{8\,y(t) + 13} = 1\,.$$
Integrando tra 0 e s si ha
$$\int_0^s \frac{y'(t)}{8\,y(t) + 13}\,dt = \int_0^s 1\,dt = s\,.$$
Con la sostituzione $z = y(t)$ si ha, ricordando che $y(0) = 0$, ed osservando che $8\,y(s) + 13 > 0$ per s vicino a zero,
$$\int_0^s \frac{y'(t)}{8\,y(t) + 13}\,dt = \int_0^{y(s)} \frac{dz}{8\,z + 13} = \frac{1}{8}\,\ln(|8\,z + 13|)\Big|_0^{y(s)} = \frac{1}{8}\,[\ln(8\,y(s) + 13) - \ln(13)]\,.$$
Pertanto,
$$\frac{1}{8}\,[\ln(8\,y(s) + 13) - \ln(13)] = s\,,$$
da cui segue (dopo facili calcoli...) che
$$\frac{8\,y(s) + 13}{13} = \mathrm{e}^{8\,s}\,,$$
e quindi che
$$y(s) = \frac{13\,\mathrm{e}^{8\,s} - 13}{8}\,.$$
b) Separando le variabili, si ha che deve essere
$$\frac{y'(t)}{25 + y^2(t)} = 12\,t\,.$$
Integrando (con la consueta sostituzione $z = y(t)$) si ha
$$\int_0^{y(s)} \frac{dz}{25 + z^2} = \int_0^s 12\,t\,dt = 6\,s^2\,.$$
Dato che
$$\int \frac{dz}{25 + z^2} = \frac{1}{5}\,\arctan\left(\frac{z}{5}\right),$$
si ha
$$\frac{1}{5}\,\arctan\left(\frac{y(s)}{5}\right) = 6\,s^2\,,$$
da cui segue che
$$y(s) = 5\,\tan(30\,s^2)\,.$$
c) Separando le variabili si arriva a
$$\int_0^{y(s)} \mathrm{e}^z\,dz = \int_0^s \mathrm{e}^{5\,t}\,dt = \frac{\mathrm{e}^{5\,s} - 1}{5}\,.$$
Il primo integrale è immediato, e porta a
$$\mathrm{e}^{y(s)} - 1 = \frac{\mathrm{e}^{5\,s} - 1}{5}\,,$$

da cui

$$y(s) = \ln\Big(\frac{e^{5\,s}+4}{5}\Big)\,.$$

d) Separando le variabili si arriva a

$$\int_1^{y(s)} \frac{z}{1+z^2}\,dz = \int_0^s 6\,dt = 6\,s\,.$$

Dato che

$$\int \frac{z}{1+z^2}\,dz = \frac{1}{2}\,\frac{2z}{1+z^2}\,dz = \frac{1}{2}\,\ln(1+z^2)\,,$$

si ha

$$\frac{1}{2}\,\ln(1+y^2(s)) - \frac{1}{2}\,\ln(2) = 6\,s\,,$$

da cui

$$y^2(s) = 2\,e^{12\,s} - 1\,,$$

e quindi

$$y(s) = \sqrt{2\,e^{12\,s} - 1}\,.$$

Perché, tra le due radici, si è scelta quella positiva?