Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 10
24 Maggio 2022 — Compito n. 00285 — □■□□□■■■□■

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso.
La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ⊠ o ☑).

Nome: ______________________

Cognome: ______________________

Matricola: | | | | | | | |

Punteggi: 1 punto per ogni risposta esatta, 0 punti per risposte sbagliate o lasciate in bianco.

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
F	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
C	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□

---

1) Si consideri l'equazione differenziale:

$$y'' + 4\,y' + 8\,y = 0\,.$$

1A) L'equazione ha un'unica soluzione.
1B) Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che $y(3) = 7$.
1C) Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che $y(4) = 6$ e $y'(4) = 7$.
1D) Non esistono soluzioni dell'equazione tali che

$$y(7) = 6\,,\ y'(7) = 3\,,\ y''(7) = 48\,.$$

---

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' - 17\,y' + 66\,y = 198\,. \tag{1}$$

2A) Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 + 17L + 66$.
2B) La funzione $y_0(t) = 6\,e^{6\,t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata a (1).
2C) La funzione $\overline{y}(t) = 3$ è una soluzione particolare di (1).
2D) Se $y(0) = 4$ e $y'(0) = 0$, la soluzione di (1) è costante.

---

3) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) + A\,y(t) + B\,y(t) = 0\,.$$

3A) Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 + A\,L + B$.
3B) Se $A = 0$ e $B = -9$, la funzione $y(t) = 10\,e^{3\,t} - 5\,e^{-3\,t}$ non è soluzione dell'equazione.
3C) Se $A = -8$ e $B = 0$, la funzione $y(t) = 8$ è soluzione dell'equazione.
3D) Se $A = -4$ e $B = 8$, la funzione $y(t) = 4\,e^{2\,t}\,\sin(2\,t)$ non è soluzione dell'equazione.

---

4) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' - 2\,y' = -14\,.$$

4A) Tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da $y_0(t) = C\,e^{2\,t}$.
4B) Esistono soluzioni costanti dell'equazione.
4C) La funzione $\overline{y}(t) = 7\,t$ è soluzione dell'equazione.
4D) Se $y(0) = 8$ e $y'(0) = 7$, la soluzione dell'equazione è un'esponenziale.

5) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' - 19\,y' + 78\,y = -7\,\mathrm{e}^{6\,t}\,. \tag{1}$$

a) Scrivere il polinomio caratteristico dell'equazione in (1) e trovarne le radici.
b) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).
c) Trovare una soluzione particolare di (1).
d) Trovare l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

6) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' - 12\,y' + 36\,y = 2\,\mathrm{e}^{6\,t}\,. \tag{1}$$

a) Si determini il polinomio caratteristico di (1) e si trovino tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).
b) Si trovi una soluzione particolare di (1).
c) Si trovi l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 8$.
d) Si trovi l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 2$ e $y'(0) = 0$.

Soluzioni del compito 00285

1) Si consideri l'equazione differenziale:

$$y'' + 4\,y' + 8\,y = 0\,.$$

1A) L'equazione ha un'unica soluzione.

Falso: Trattandosi di un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine, ha infinite soluzioni, dipendenti da due parametri reali.

1B) Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che $y(3) = 7$.

Vero: L'equazione ha infinite soluzioni, dipendenti da due parametri reali. Assegnando una sola condizione, si "fissa" uno solo dei due parametri, e quindi l'equazione ha infinite soluzioni tali che $y(3) = 7$.

1C) Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che $y(4) = 6$ e $y'(4) = 7$.

Falso: Assegnando due condizioni, una sulla funzione e una sulla derivata, si ottiene un problema di Cauchy, che ha un'unica soluzione.

1D) Non esistono soluzioni dell'equazione tali che

$$y(7) = 6\,,\ y'(7) = 3\,,\ y''(7) = 48\,.$$

Vero: Se $y(7) = 6$ e $y'(7) = 3$, dall'equazione segue che deve essere

$$0 = y''(7) + 4\,y'(7) + 8\,y(7) = y''(7) + 4 \cdot 6 + 8 \cdot 3 = y''(7) + 48\,,$$

da cui segue che $y''(7) = -48$. Pertanto, l'unica soluzione dell'equazione che soddisfa le condizioni $y(7) = 6$ e $y'(7) = 3$ è tale che $y''(7) = -48 \neq 48$; in altre parole, non esistono soluzioni dell'equazione che soddisfano le tre condizioni richieste.

---

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' - 17\,y' + 66\,y = 198\,. \tag{1}$$

2A) Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 + 17L + 66$.

Falso: Sostituendo y'' con L^2, y' con L e y con 1, si trova che

$$P(L) = L^2 - 17L + 66 \neq L^2 + 17L + 66\,.$$

2B) La funzione $y_0(t) = 6\,\mathrm{e}^{6\,t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata a (1).

Vero: Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 17L + 66$, che si annulla per $L_1 = 6$ e $L_2 = 11$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da

$$y_0(t) = C\,\mathrm{e}^{6\,t} + D\,\mathrm{e}^{11\,t}\,,$$

con C e D numeri reali. Scegliendo $C = 6$ e $D = 0$, si ha che $y_0(t) = 6\,\mathrm{e}^{6\,t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata a (1).

2C) La funzione $\overline{y}(t) = 3$ è una soluzione particolare di (1).

Vero: Sostituendo nell'equazione si ha, essendo nulle sia la derivata prima che la derivata seconda di $\overline{y}(t)$,

$$y'' - 17\,y' + 66\,y = 66 \cdot 3 = 198\,,$$

e quindi $\overline{y}(t) = 3$ è una soluzione particolare di (1).

2D) Se $y(0) = 4$ e $y'(0) = 0$, la soluzione di (1) è costante.

Falso: Se (1) avesse una soluzione costante tale che $y(0) = 4$, chiaramente tale soluzione non può che essere $y(t) \equiv y(0) = 4$ (si noti che la condizione $y'(0) = 0$ è verificata). Sostituendo però nell'equazione $y(t) = 4$ si trova

$$y'' - 17\,y' + 66\,y = 66 \cdot 4 = 264 \neq 198\,,$$

e quindi $y(t) \equiv 4$ non è soluzione dell'equazione; questo vuol dire che l'unica soluzione di (1) che soddisfa le condizioni $y(0) = 4$ e $y'(0) = 0$ non è costante.

---

3) Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) + A\,y(t) + B\,y(t) = 0\,.$$

3A) Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 + A\,L + B$.

Vero: Sostituendo y'' con L^2, y' con L e y con 1, si trova che

$$P(L) = L^2 + A\,L + B\,.$$

3B) Se $A = 0$ e $B = -9$, la funzione $y(t) = 10\,\mathrm{e}^{3\,t} - 5\,\mathrm{e}^{-3\,t}$ non è soluzione dell'equazione.

Falso: Se $A = 0$ e $B = -9$, il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 9$ che si annulla per $L = \pm 3$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(t) = C\,\mathrm{e}^{3\,t} + D\,\mathrm{e}^{-3\,t}\,.$$

Scegliendo $C = 10$ e $D = -5$, si ha che $y(t) = 10\,\mathrm{e}^{3\,t} - 5\,\mathrm{e}^{-3\,t}$ è soluzione dell'equazione.

3C) Se $A = -8$ e $B = 0$, la funzione $y(t) = 8$ è soluzione dell'equazione.

Vero: Se $A = -8$ e $B = 0$, il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 8\,L$ che si annulla per $L = 0$ e per $L = 8$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(t) = C\,\mathrm{e}^{0\,t} + D\,\mathrm{e}^{8\,t} = C + D\,\mathrm{e}^{8\,t}\,.$$

Scegliendo $C = 8$ e $D = 0$, si ha che $y(t) = 8$ è soluzione dell'equazione.

3D) Se $A = -4$ e $B = 8$, la funzione $y(t) = 4\,\mathrm{e}^{2\,t}\,\sin(2\,t)$ non è soluzione dell'equazione.

Falso: Se $A = -4$ e $B = 8$, il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 4\,L + 8$, che si annulla per $L = 2 \pm 2\,i$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(t) = \mathrm{e}^{2\,t}[C\,\cos(2\,t) + D\,\sin(2\,t)]\,.$$

Scegliendo $C = 0$ e $D = 4$, si ha che $y(t) = 4\,\mathrm{e}^{2\,t}\,\sin(2\,t)$ è soluzione dell'equazione.

---

4) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' - 2\,y' = -14\,.$$

4A) Tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da $y_0(t) = C\,\mathrm{e}^{2\,t}$.

Falso: Il polinomio caratteristico dell'equazione è $P(L) = L^2 - 2\,L$, che si annulla per $L = 0$ e $L = 2$. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da

$$y_0(t) = C\,\mathrm{e}^{0\cdot t} + D\,\mathrm{e}^{2\,t} = C + D\,\mathrm{e}^{2\,t}\,.$$

Pertanto, non tutte le soluzioni dell'omogenea associata sono date da $y_0(t) = C\,\mathrm{e}^{2\,t}$: mancano le soluzioni costanti.

4B) Esistono soluzioni costanti dell'equazione.

Falso: Se $y(t) \equiv Q$ è una costante, sostituendo nell'equazione si ha

$$y''(t) - 2\,y'(t) = 0 - 2 \cdot 0 = 0 \neq 7\,,$$

e quindi l'equazione non ha soluzioni costanti. Alternativamente, sappiamo dalla domanda **4A** che le costanti sono soluzioni dell'equazione omogenea, e quindi non possono essere soluzioni dell'equazione "completa".

4C) La funzione $\overline{y}(t) = 7\,t$ è soluzione dell'equazione.

Vero: Se $\overline{y}(t) = 7\,t$, si ha $\overline{y}'(t) = 7$ e $\overline{y}''(t) = 0$. Sostituendo nell'equazione si ha

$$\overline{y}''(t) - 2\,\overline{y}'(t) = -2 \cdot 7 = -14\,,$$

e quindi $\overline{y}(t) = 7\,t$ è soluzione dell'equazione.

4D) Se $y(0) = 8$ e $y'(0) = 7$, la soluzione dell'equazione è un'esponenziale.

Falso: Sappiamo già, dagli esercizi **4A** e **4C**, che tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t) = C + D\,\mathrm{e}^{2\,t} + 7\,t\,,$$

da cui segue che

$$y'(t) = 2\,D\,\mathrm{e}^{2\,t} + 7\,.$$

Pertanto, assegnando le condizioni iniziali, si ha

$$8 = C + D\,, \qquad 7 = 2\,D + 7\,.$$

Dalla seconda si ricava $D = 0$, e sostituendo nella prima si ricava $C = 8$. Ne segue che l'unica soluzione dell'equazione è

$$y(t) = 8 + 7\,t\,,$$

che è un polinomio di primo grado (e quindi non è un'esponenziale).

---

5) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' - 19\,y' + 78\,y = -7\,e^{6\,t}\,. \tag{1}$$

a) Scrivere il polinomio caratteristico dell'equazione in (1) e trovarne le radici.
b) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).
c) Trovare una soluzione particolare di (1).
d) Trovare l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

Soluzione:
a) Sostituendo in (1) L^2 a y'', L a y' e 1 a y, si trova

$$P(L) = L^2 - 19\,L + 78\,,$$

che si annulla per $L_1 = 6$ e per $L_2 = 13$.

b) Usando le radici del polinomio caratteristico calcolate al punto precedente, abbiamo che tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1) sono date da

$$y_0(t) = C\,e^{6\,t} + D\,e^{13\,t}\,,$$

con C e D numeri reali.

c) Dato che $g(t) = e^{6\,t}$ è una soluzione dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$\overline{y}(t) = Q\,t\,e^{6\,t}\,.$$

Si ha

$$\overline{y}'(t) = Q\,(1 + 6\,t)\,e^{6\,t}\,, \qquad \overline{y}''(t) = Q\,(12 + 36\,t)\,e^{6\,t}\,.$$

Sostituendo in (1) si ha

$$\overline{y}'' - 19\,\overline{y} + 78\,\overline{y} = Q\,e^{6\,t}\,[12 + 36\,t - 19\,(1 + 6\,t) + 78\,t] = -7\,Q\,e^{6\,t}\,,$$

e quindi $\overline{y}$ è soluzione di (1) se Q è tale che

$$-7\,Q\,e^{6\,t} = -7\,e^{6\,t}\,,$$

da cui segue $Q = 1$ e quindi

$$\overline{y}(t) = t\,e^{6\,t}\,.$$

d) Da **b)** e **c)** abbiamo che tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t) = C\,e^{6\,t} + D\,e^{13\,t} + t\,e^{6\,t}\,,$$

con C e D numeri reali. Dato che

$$y'(t) = 6\,C\,e^{6\,t} + 13\,D\,e^{13\,t} + e^{6\,t} + 6\,t\,e^{6\,t}\,,$$

si ha $y(0) = C + D$ e $y'(0) = 6\,C + 13\,D + 1$. Imponendo le condizioni iniziali, si ha che deve essere $C + D = 0$ e $6\,C + 13\,D + 1 = 1$, da cui si ricava facilmente $C = D = 0$. Ne segue che l'unica soluzione di (1) che soddisfa le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ è

$$y(t) = t\,e^{6\,t}\,.$$

6) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' - 12\,y' + 36\,y = 2\,e^{6\,t}\,. \tag{1}$$

a) Si determini il polinomio caratteristico di (1) e si trovino tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a (1).
b) Si trovi una soluzione particolare di (1).
c) Si trovi l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 8$.
d) Si trovi l'unica soluzione di (1) tale che $y(0) = 2$ e $y'(0) = 0$.

Soluzione:
a) Il polinomio caratteristico è $P(L) = L^2 - 12\,L + 36$, che si annulla per $L_1 = L_2 = 6$. Conseguentemente, tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata ad (1) sono date da

$$y_0(t) = (C + D\,t)\,e^{6\,t}\,,$$

con C e D numeri reali.

b) Dato che sia $e^{6\,t}$ che $t\,e^{6\,t}$ sono soluzioni dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare di (1) della forma

$$\overline{y}(t) = Q\,t^2\,e^{6\,t}\,.$$

Derivando, si ha

$$\overline{y}'(t) = Q\,(2t + 6\,t^2)\,e^{6\,t}\,, \qquad \overline{y}''(t) = Q\,(2 + 24\,t + 36\,t^2)\,e^{6\,t}\,.$$

Sostituendo nell'equazione si ha

$$\overline{y}'' - 12\,\overline{y}' + 36\,\overline{y}(t) = Q\,e^{6\,t}\,[2 + 24\,t + 36\,t^2 - 12\,(2t + 6\,t^2) + 36\,t^2] = 2\,Q\,e^{6\,t}\,,$$

da cui segue che $\overline{y}$ è soluzione di (1) se $Q = 1$. Si ha dunque che tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t) = (C + D\,t + t^2)\,e^{6\,t}\,,$$

da cui segue, derivando, che

$$y'(t) = (6\,C + D + (6\,D + 2)\,t + 6\,t^2)\,e^{6\,t}\,.$$

Pertanto

$$y(0) = C\,, \qquad y'(0) = 6\,C + D\,. \tag{2}$$

c) Da (2) e dalle condizioni date segue che deve essere $C = 0$ e $6\,C + D = 8$, da cui $C = 0$ e $D = 8$. L'unica soluzione di (1) è quindi data da

$$y(t) = (8\,t + t^2)\,e^{6\,t}\,.$$

d) Da (2) e dalle condizioni date segue che deve essere $C = 2$ e $6\,C + D = 0$, da cui $D = -12$. L'unica soluzione di (1) è quindi data da

$$y(t) = (2 - 12\,t + t^2)\,e^{6\,t}\,.$$