Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 8
10 Maggio 2022 — Compito n. 00195 — □□■■□□□□■■

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: ______________________

Cognome: ______________________

Matricola: □□□□□□□

Punteggi: 1 punto per ogni risposta esatta, 0 punti per risposte sbagliate o lasciate in bianco.

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
F	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
C	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□

---

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1A) L'equazione differenziale $y'(t) = 4\,t + 11\,t^2$ è del primo ordine.
1B) L'equazione differenziale $5\,y'(t)\,y''(t) + 10\,[y(t)]^3 = 0$ è del secondo ordine.
1C) L'equazione differenziale $[\sin(4\,y'(t))]' = 0$ è del primo ordine.
1D) L'equazione differenziale $2\,t\,y^{(1)}(t) + 11\,t^2\,y^{(2)}(t) + 5\,t^3\,y^{(3)}(t) = 0$ è del terzo ordine.

---

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = 8\,y(t) + 7\,.$$

2A) L'equazione ha infinite soluzioni.
2B) Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 4$.
2C) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 4$ e $y'(0) = 32$.
2D) Non esistono soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 4$ e $y'(0) = 39$.

---

3) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} y'(t) = \mathrm{e}^{2\,t^2}\,, \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

3A) Esiste un'unica soluzione di (1).
3B) La soluzione si può scrivere esplicitamente in termini di funzioni elementari.
3C) Si ha $y'(0) = 1$.
3D) Si ha $y''(0) = 0$.

---

4) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} y'(t) = -5\,y(t) + 25\,, \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

4A) La funzione $Q\,\mathrm{e}^{-5\,t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata all'equazione di (1) per ogni Q in $\mathbb{R}$.
4B) La funzione $y(t) = 5$ è soluzione dell'equazione di (1).
4C) Si ha $y''(0) = -125$.
4D) Si ha

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = -5\,.$$

5) Si consideri l'equazione differenziale del primo ordine

(1) $$y'(t) = f(t)\,.$$

Scrivere tutte le soluzioni di (1) se

a) $f(t) = 4\,t + 3\,,$ **b)** $f(t) = \cos(6\,t)\,,$ **c)** $f(t) = (10\,t + 7)\,\mathrm{e}^{t}\,,$ **d)** $f(t) = \dfrac{13\,t}{1 + 3\,t^2}\,.$

6) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} y'(t) = 2\,y(t) - 5\,, \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

a) Quante soluzioni ha l'equazione di (1)? E quante soluzioni ha (1)?
b) Scrivere l'equazione omogenea associata all'equazione di (1), e scriverne tutte le soluzioni.
c) Trovare una soluzione particolare dell'equazione di (1).
d) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione di (1) e la soluzione di (1).

Soluzioni del compito 00195

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

Ricordiamo che un'equazione differenziale si dice di ordine $n \geq 1$ se la derivata di ordine massimo della funzione incognita $y(t)$ è la derivata $y^{(n)}(t)$.

1A) L'equazione differenziale $y'(t) = 4\,t + 11\,t^2$ è del primo ordine.

Vero: Infatti vi compare la derivata prima di $y(t)$, e non derivate di ordine superiore.

1B) L'equazione differenziale $5\,y'(t)\,y''(t) + 10\,[y(t)]^3 = 0$ è del secondo ordine.

Vero: Infatti vi compare la derivata seconda di $y(t)$, e non derivate di ordine superiore.

1C) L'equazione differenziale $[\sin(4\,y'(t))]' = 0$ è del primo ordine.

Falso: Infatti, derivando si ha
$$4\,\cos(4\,y'(t))\,y''(t) = 0\,,$$
e quindi l'equazione è del secondo ordine.

1D) L'equazione differenziale $2\,t\,y^{(1)}(t) + 11\,t^2\,y^{(2)}(t) + 5\,t^3\,y^{(3)}(t) = 0$ è del terzo ordine.

Vero: Infatti vi compare la derivata terza di $y(t)$, e non derivate di ordine superiore.

---

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = 8\,y(t) + 7\,.$$

2A) L'equazione ha infinite soluzioni.

Vero: Essendo un'equazione del primo ordine, ha infinite soluzioni, dipendenti da un'unica costante reale.

2B) Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 4$.

Falso: Assegnando la conidzione iniziale $y(0) = 4$ si ottiene un problema di Cauchy, che ha un'unica soluzione.

2C) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 4$ e $y'(0) = 32$.

Falso: Se $y'(0) = 4$, sostituendo nell'equazione si ha

$$y'(0) = 8\,y(0) + 7 = 8 \cdot 4 + 7 = 39 \neq 32\,,$$

e quindi non esiste alcuna soluzione dell'equazione che verifica le due condizioni assegnate.

2D) Non esistono soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 4$ e $y'(0) = 39$.

Falso: Sappiamo già che esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 4$ (si veda la domanda **2B**). Dall'equazione, scritta per $t = 0$, si ricava

$$y'(0) = 8\,y(0) + 7 = 8 \cdot 4 + 7 = 39\,,$$

e quindi la seconda condizione è automaticamente verificata.

---

3) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} y'(t) = \mathrm{e}^{2\,t^2}\,, \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

Integrando tra 0 e s si ha, per il Teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$y(s) - y(0) = \int_0^s y'(t)\,dt = \int_0^s \mathrm{e}^{2\,t^2}\,dt\,,$$

da cui, ricordando che $y(0) = 0$, segue che l'unica soluzione del problema di Cauchy è data da:

$$(2) \qquad y(s) = \int_0^s \mathrm{e}^{2\,t^2}\,dt\,.$$

3A) Esiste un'unica soluzione di (1).

Vero: Trattandosi di un problema di Cauchy, esiste un'unica soluzione (si veda anche (2)).

3B) La soluzione si può scrivere esplicitamente in termini di funzioni elementari.

Falso: La soluzione è data da (2), e l'integrale non si sa calcolare esplicitamente.

3C) Si ha $y'(0) = 1$.

Vero: Sostituendo $t = 0$ nell'equazione si trova

$$y'(0) = \mathrm{e}^{2\cdot 0^2} = 1\,.$$

3D) Si ha $y''(0) = 0$.

Vero: Derivando l'equazione si ha

$$y''(t) = [y'(t)]' = [\mathrm{e}^{2\,t^2}]' = 4\,t\,\mathrm{e}^{2\,t^2}\,,$$

da cui segue che

$$y''(0) = 4 \cdot 0 \cdot \mathrm{e}^{2\cdot 0^2} = 0\,.$$

---

4) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} y'(t) = -5\,y(t) + 25\,, \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

L'equazione omogenea associata all'equazione di (1) è

$$(2) \qquad y'(t) = -5\,y(t)\,.$$

4A) La funzione $Q\,\mathrm{e}^{-5\,t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata all'equazione di (1) per ogni Q in $\mathbb{R}$.

Vero: Se $y(t) = Q\,\mathrm{e}^{-5\,t}$, allora

$$y'(t) = -Q \cdot 5\,\mathrm{e}^{-5\,t} = -5 \cdot [Q\,\mathrm{e}^{-5\,t}] = -5\,y(t)\,,$$

e quindi la funzione proposta risolve la (2), ovvero l'equazione omogenea associata all'equazione di (1).

4B) La funzione $y(t) = 5$ è soluzione dell'equazione di (1).

Vero: Basta sostituire...

4C) Si ha $y''(0) = -125$.

Vero: Iniziamo con l'osservare che dall'equazione, e dalla condizione iniziale, segue che

$$y'(0) = -5\,y(0) + 25 = -5 \cdot 0 + 25 = 25\,.$$

Inoltre, derivando l'equazione si ha

$$y''(t) = -5\,y'(t)\,,$$

e quindi

$$y''(0) = -5\,y'(0) = -5 \cdot 25 = -125\,.$$

4D) Si ha

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = -5\,.$$

Falso: Sappiamo, dalle domande **4A** e **4B** che $y_0(t) = Q\,\mathrm{e}^{-5\,t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata (qualsiasi sia Q numero reale) e che $\overline{y}(t) = 5$ è soluzione (particolare) dell'equazione. Per la teoria generale delle equazioni lineari, le funzioni della forma

$$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t) = Q\,\mathrm{e}^{-5\,t} + 5$$

sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione di (1). Assegnando la condizione iniziale, si trova

$$0 = y(0) = Q + 5\,,$$

da cui $Q = -5$. Ne segue che

$$y(t) = -5\,\mathrm{e}^{-5\,t} + 5 = 5\,(1 - \mathrm{e}^{-5\,t})$$

è l'unica soluzione del problema di Cauchy (1), ed è tale che

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = \lim_{t \to +\infty} 5\,(1 - \mathrm{e}^{-5\,t}) = 5 \neq -5\,.$$

---

5) Si consideri l'equazione differenziale del primo ordine

$$y'(t) = f(t)\,. \tag{1}$$

Scrivere tutte le soluzioni di (1) se

$$\textbf{a)}\ f(t) = 4\,t + 3\,, \quad \textbf{b)}\ f(t) = \cos(6\,t)\,, \quad \textbf{c)}\ f(t) = (10\,t + 7)\,\mathrm{e}^t\,, \quad \textbf{d)}\ f(t) = \frac{13\,t}{1 + 3\,t^2}\,.$$

Soluzione:
L'equazione differenziale $y'(t) = f(t)$ si può riformulare così: "la funzione $y(t)$ è una primitiva di $f(t)$." Pertanto, trovare tutte le soluzioni di (1) è equivalente a trovare tutte le primitive di $f(t)$, ovvero — come è noto... — è equivalente ad integrare $f(t)$.

a) Dato che

$$\int [4\,t + 3]\,dt = 2\,t^2 + 3\,t\,,$$

si ha che tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = 2\,t^2 + 3\,t + c\,,$$

con c costante arbitraria.

b) Dato che

$$\int \cos(6\,t)\,dt = \frac{\sin(6\,t)}{6}\,,$$

si ha che tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = \frac{\sin(6\,t)}{6} + c\,,$$

con c costante arbitraria.

c) Dato che, integrando per parti,

$$\int (10\,t + 7)\,\mathrm{e}^t\,dt = (10\,t + 7)\,\mathrm{e}^t - \int 10\,\mathrm{e}^t\,dt = (10t - 3)\,\mathrm{e}^t\,,$$

si ha che tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = (10t - 3)\,\mathrm{e}^t + c\,,$$

con c costante arbitraria.

a) Dato che

$$\int \frac{13\,t}{1 + 3\,t^2}\,dt = \frac{13}{6}\int \frac{6\,t\,dt}{1 + 3\,t^2} = \frac{13}{6}\,\ln(1 + 3\,t^2)\,,$$

si ha che tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = \frac{13}{6}\,\ln(1 + 3\,t^2) + c\,,$$

con c costante arbitraria.

6) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} y'(t) = 2\,y(t) - 5\,, \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

a) Quante soluzioni ha l'equazione di (1)? E quante soluzioni ha (1)?
b) Scrivere l'equazione omogenea associata all'equazione di (1), e scriverne tutte le soluzioni.
c) Trovare una soluzione particolare dell'equazione di (1).
d) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione di (1) e la soluzione di (1).

Soluzione:
a) L'equazione di (1) ha infinite soluzioni (dipendenti da un parametro reale), mentre il problema di Cauchy (1) ha un'unica soluzione.

b) L'equazione omogenea associata all'equazione di (1) è

$$y_0'(t) = 2\,y_0(t)\,,$$

le cui soluzioni sono date (per quanto visto a lezione) da

$$y_0(t) = A\,\mathrm{e}^{2\,t}\,,$$

con A costante reale arbitraria.

c) Per trovare una soluzione particolare dell'equazione di (1), cerchiamo

$$\overline{y}(t) = C\,,$$

con C costante reale. Sostituendo, si ha che deve essere

$$0 = 2\,C - 5\,,$$

da cui segue $C = \frac{5}{2}$.
d) Per quanto visto a lezione, tutte le soluzioni dell'equazione di (1) sono date da

$$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t) = A\,\mathrm{e}^{2\,t} + \frac{5}{2}\,,$$

con A costante reale arbitraria. Assegnando la condizione iniziale, si ha che deve essere

$$0 = A\,\mathrm{e}^{2\cdot 0} + \frac{5}{2} = A + \frac{5}{2}\,,$$

da cui segue che $A = -\frac{5}{2}$ e quindi l'unica soluzione di (1) è data da

$$y(t) = -\frac{5}{2}\,\mathrm{e}^{2\,t} + \frac{5}{2} = \frac{5}{2}\,[1 - \mathrm{e}^{2\,t}]\,.$$