Calcolo integrale — Compito di pre-esonero
27 Maggio 2022 — Compito n. 00138 — □□■□□□■□■□

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: ______________________

Cognome: ______________________

Matricola: | | | | | | | |

Punteggi: 1 punto per ogni risposta esatta, 0 punti per risposte sbagliate o lasciate in bianco.

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
F	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
C	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□

---

1) Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = (3t+7)\,y + 6t^2 + 10t + 9$$

1A) L'equazione ha infinite soluzioni.
1B) Esiste un'unica soluzione tale che $y(0) = 2$.
1C) Esiste un'unica soluzione tale che $y(0) = 4$ e $y'(0) = 37$.
1D) Se $y(0) = 0$, si ha $y''(0) = 73$.

---

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = e^{7\,t}\,(4y^2 + 3y - 7)\,.$$

2A) Se $y(0) = 1$, la soluzione è costante.
2B) Se $y(0) = 0$, la soluzione è crescente in un intorno dell'origine.
2C) Se $y(0) = 3$, si ha $T_1(y;0) = 3 + 38\,t$.
2D) Se $y(0) = 0$, si ha $y''(0) = -46$.

---

3) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} y' = 12\,t\,y + 7\,e^{6\,t^2}\,(6\,t+5) \\ y(0) = 5\,. \end{cases}$$

3A) Si ha $y'(0) = 35$.
3B) La funzione $y(t) = 2\,e^{6\,t^2}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata all'equazione di (1).
3C) La funzione $y(t) = (21\,t^2 + 35\,t)\,e^{6\,t^2}$ non è soluzione dell'equazione in (1).
3D) Si ha

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty\,.$$

---

4) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' - 10\,y' + B\,y = 0\,.$$

4A) Se $B = 0$, le funzioni costanti non sono soluzioni dell'equazione.
4B) Se $B = -39$, la funzione $y(t) = 6\,e^{8\,t}$ non è soluzione dell'equazione.
4C) Se $B = 25$, la funzione $y(t) = 7\,t\,e^{5\,t}$ è soluzione dell'equazione.
4D) Se $B = 89$, la funzione $y(t) = 5\,e^{5\,t}\cos(8\,t)$ è soluzione dell'equazione.

☐☐☐☐☐☐☐☐ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00138**

5) Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = \frac{y\,(y-14)}{t+3}\,. \tag{1}$$

a) Quante soluzioni ha l'equazione (1)? E quante soluzioni ha, se aggiungiamo la condizione $y(0) = 4$?
b) Determinare la soluzione di (1) se $y(0) = 14$.
c) Scrivere $T_1(y;0)$ se $y(0) = 3$.
d) Determinare la soluzione di (1) se $y(0) = 7$.

6) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' - 10\,y' + 24\,y = 48\,. \tag{1}$$

a) Quante soluzioni ha l'equazione (1)? E quante soluzioni tali che $y(0) = 2$ ha l'equazione (1)?
b) Scrivere il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea associata all'equazione (1) e scrivere tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata.
c) Trovare una soluzione particolare dell'equazione (1) e scrivere tutte le soluzioni dell'equazione (1).
d) Trovare la soluzione di (1) con le condizioni $y(0) = 2$ e $y'(0) = 2$.

Soluzioni del compito 00138

1) Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = (3t + 7)\,y + 6t^2 + 10t + 9$$

1A) L'equazione ha infinite soluzioni.

Vero: Trattandosi di un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, esistono infinite soluzioni, dipendenti da un unico parametro reale.

1B) Esiste un'unica soluzione tale che $y(0) = 2$.

Vero: Assegnando una condizione iniziale ad un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, si ottiene un problema di Cauchy che ha un'unica soluzione.

1C) Esiste un'unica soluzione tale che $y(0) = 4$ e $y'(0) = 37$.

Vero: L'equazione ha un'unica soluzione tale che $y(0) = 4$; d'altra parte, dall'equazione, sostituendo $t = 0$, si ha

$$y'(0) = 7\,y(0) + 9 = 7 \cdot 4 + 9 = 37\,,$$

e quindi la condizione sulla derivata è automaticamente verificata. Ne consegue che esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 4$ e $y'(0) = 37$.

1D) Se $y(0) = 0$, si ha $y''(0) = 73$.

Vero: Dall'equazione si ha

$$y'(0) = 7\,y(0) + 9 = 7 \cdot 0 + 9 = 9\,,$$

mentre, derivando l'equazione, si ha

$$y'' = 3\,y + (3t + 7)\,y' + 12t + 10\,,$$

da cui segue che

$$y''(0) = 3\,y(0) + 7\,y'(0) + 10 = 3 \cdot 0 + 7 \cdot 9 + 10 = 73\,.$$

---

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = e^{7t}\,(4y^2 + 3y - 7)\,.$$

L'equazione è un'equazione a variabili separabili della forma

$$y' = f(y)\,g(t)\,,$$

con

$$f(y) = 4y^2 + 3y - 7 \qquad \text{e} \qquad g(t) = e^{7t}\,. \tag{1}$$

2A) Se $y(0) = 1$, la soluzione è costante.

Vero: Se $f(y)$ è come in (1), dato che $f(1) = 0$, la funzione costante $y \equiv 1$ è soluzione dell'equazione.

2B) Se $y(0) = 0$, la soluzione è crescente in un intorno dell'origine.

Falso: Dato che, sostituendo $t = 0$ nell'equazione, si ha

$$y'(0) = e^{7\cdot 0}\,(4y(0)^2 + 3y(0) - 7) = 1 \cdot (-7) = -7 < 0\,,$$

per il teorema della permanenza del segno si ha $y' \leq 0$ in un intorno dell'origine, e quindi la soluzione è decrescente in un intorno dell'origine.

2C) Se $y(0) = 3$, si ha $T_1(y; 0) = 3 + 38\,t$.

Vero: Dall'equazione, sostituendo $t = 0$, si ha

$$y'(0) = e^{7\cdot 0}\,(4y(0)^2 + 3y(0) - 7) = 1 \cdot 38 = 38\,.$$

Pertanto,

$$T_1(y; 0) = y(0) + y'(0)\,t = 3 + 38\,t\,.$$

2D) Se $y(0) = 0$, si ha $y''(0) = -46$.

Falso: Se $y(0) = 0$, si ha dall'equazione che $y'(0) = -7$. Inoltre, derivando l'equazione, si ha

$$y'' = 7\,e^{7t}\,(4y^2 + 3y - 7) + e^{7t}\,(8\,y + 3)\,y'\,,$$

da cui, sostituendo $t = 0$, si ha

$$y''(0) = 7\,(-7) + 3\,(-7) = -70 \neq -46\,.$$

---

3) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} y' = 12\,t\,y + 7\,\mathrm{e}^{6\,t^2}\,(6\,t+5) \\ y(0) = 5\,. \end{cases}$$

Ricordiamo che per il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = a(t)\,y + b(t) \\ y(0) = 5\,, \end{cases}$$

la soluzione è data da

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)}\left[5 + \int_0^t b(s)\,\mathrm{e}^{-A(s)}\,ds\right],$$

dove

$$A(t) = \int_0^t a(s)\,ds\,.$$

Nel nostro caso, $a(t) = 12\,t$, $b(t) = 7\,\mathrm{e}^{6\,t^2}\,(6\,t+5)$. Pertanto

$$A(t) = \int_0^t 12\,s\,ds = 6\,t^2\,,$$

e quindi

$$(2) \qquad y(t) = \mathrm{e}^{6\,t^2}\left[5 + \int_0^t 7\,\mathrm{e}^{6\,s^2}\,(6\,s+5)\,\mathrm{e}^{-6\,s^2}\,ds\right] = \mathrm{e}^{6\,t^2}\,[21\,t^2 + 35\,t + 5]\,.$$

3A) Si ha $y'(0) = 35$.

Vero: Sostituendo $t = 0$ nell'equazione si ha

$$y'(0) = 12 \cdot 0 \cdot y(0) + 7 \cdot \mathrm{e}^{6 \cdot 0^2} \cdot 5 = 7 \cdot 5 = 35\,.$$

3B) La funzione $y(t) = 2\,\mathrm{e}^{6\,t^2}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata all'equazione di (1).

Vero: L'equazione omogenea associata è

$$y' = 12\,t\,y\,.$$

Se $y(t) = 2\,\mathrm{e}^{6\,t^2}$, si ha

$$y'(t) = 2 \cdot 12\,t\,\mathrm{e}^{6\,t^2} = 12\,t \cdot 2\,\mathrm{e}^{6\,t^2} = 12\,t\,y(t)\,,$$

e quindi $y(t)$ è soluzione dell'equazione omogenea associata.

3C) La funzione $y(t) = (21\,t^2 + 35\,t)\,\mathrm{e}^{6\,t^2}$ non è soluzione dell'equazione in (1).

Falso: Se $y(t) = (21\,t^2 + 35\,t)\,\mathrm{e}^{6\,t^2}$, si ha

$$y'(t) = (21\,t^2 + 35\,t)\,12\,t\,\mathrm{e}^{6\,t^2} + (42\,t + 35)\,\mathrm{e}^{6\,t^2} = 12\,t\,y(t) + 7\,\mathrm{e}^{6\,t^2}\,(6\,t+5)\,,$$

e quindi $y(t)$ è soluzione dell'equazione in (1).

3D) Si ha

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = +\infty\,.$$

Vero: Per la (2), si ha

$$y(t) = \mathrm{e}^{6\,t^2}\,[21\,t^2 + 35\,t + 5]\,,$$

che è tale che

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = +\infty\,.$$

---

4) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' - 10\,y' + B\,y = 0\,.$$

4A) Se $B = 0$, le funzioni costanti non sono soluzioni dell'equazione.

Falso: Se $B = 0$, l'equazione diventa

$$y'' - 10\,y' = 0\,.$$

Se $y(t) \equiv c$, allora $y''(t) = y'(t) = 0$, e quindi $y(t)$ è soluzione dell'equazione.

4B) Se $B = -39$, la funzione $y(t) = 6\,\mathrm{e}^{8\,t}$ non è soluzione dell'equazione.

Falso: Se $B = -39$, l'equazione diventa

$$y'' - 10\,y' - 39\,y = 0\,.$$

Il polinomio caratteristico associato è

$$P(L) = L^2 - 10\,L - 39\,,$$

che si annulla per $L_1 = 13$ e $L_2 = -3$; le soluzioni dell'equazione sono quindi date da

$$y(t) = C\,\mathrm{e}^{13\,t} + D\,\mathrm{e}^{-3\,t}\,,$$

con C e D numeri reali. Scegliendo $C = 6$ e $D = 0$, abbiamo che $y(t) = 6\,\mathrm{e}^{13\,t}$ è soluzione dell'equazione.

4C) Se $B = 25$, la funzione $y(t) = 7\,t\,\mathrm{e}^{5\,t}$ è soluzione dell'equazione.

Vero: Se $B = 25$, l'equazione diventa

$$y'' - 10\,y' + 25\,y = 0\,.$$

Il polinomio caratteristico associato è

$$P(L) = L^2 - 10\,L + 25\,,$$

che ha la radice doppia $L = 5$; le soluzioni dell'equazione sono quindi date da

$$y(t) = C\,\mathrm{e}^{5\,t} + D\,t\,\mathrm{e}^{5\,t}\,,$$

con C e D numeri reali. Scegliendo $C = 0$ e $D = 7$, abbiamo che $y(t) = 7\,t\,\mathrm{e}^{5\,t}$ è soluzione dell'equazione.

4D) Se $B = 89$, la funzione $y(t) = 5\,\mathrm{e}^{5\,t}\,\cos(8\,t)$ è soluzione dell'equazione.

Vero: Se $B = 89$, l'equazione diventa

$$y'' - 10\,y' + 89\,y = 0\,.$$

Il polinomio caratteristico associato è

$$P(L) = L^2 - 10\,L + 89\,,$$

le cui radici sono $L = 5 \pm 8\,i$; le soluzioni dell'equazione sono quindi date da

$$y(t) = \mathrm{e}^{5\,t}\,[C\,\cos(8\,t) + D\,\sin(8\,t)]\,,$$

con C e D numeri reali. Scegliendo $C = 5$ e $D = 0$, abbiamo che $y(t) = 5\,\mathrm{e}^{5\,t}\,\cos(8\,t)$ è soluzione dell'equazione.

---

5) Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = \frac{y\,(y-14)}{t+3}\,. \tag{1}$$

a) Quante soluzioni ha l'equazione (1)? E quante soluzioni ha, se aggiungiamo la condizione $y(0) = 4$?
b) Determinare la soluzione di (1) se $y(0) = 14$.
c) Scrivere $T_1(y;0)$ se $y(0) = 3$.
d) Determinare la soluzione di (1) se $y(0) = 7$.

Soluzione:
a) Infinite, dipendenti da un parametro reale, e una.

b) L'equazione è a variabili separabili, della forma

$$y' = g(t)\,f(y)\,,$$

con $g(t) = \frac{1}{t+3}$ e $f(y) = y\,(y-14)$. Dato che $f(14) = 0$, se $y(0) = 14$ si ha che la funzione costante $y(t) \equiv 14$ è la soluzione di (1).

c) Dall'equazione si ha

$$y'(0) = \frac{y(0)\,(y(0)-14)}{0+3} = \frac{3\,(3-14)}{3} = -11\,.$$

Pertanto,

$$T_1(y;0) = y(0) + y'(0)\,t = -11t + 3\,.$$

d) Separando le variabili, possiamo riscrivere l'equazione come

$$\frac{y'(t)}{y(t)\,(y(t)-14)} = \frac{1}{t+3}\,.$$

Integrando tra 0 e s, sostituendo $z = y(t)$ nel primo integrale, e ricordando la condizione iniziale $y(0) = 7$, si ha

$$\int_7^{y(s)} \frac{dz}{z\,(z-14)} = \int_0^s \frac{dt}{t+3} = \ln(|t+3|)\Big|_0^s = \ln(s+3) - \ln(3) = \ln\Big(\frac{s+3}{3}\Big)\,.$$

Ricordando che

$$\int \frac{dz}{z\,(z-14)} = \frac{1}{14}\,\ln\Big(\Big|\frac{z-14}{z}\Big|\Big)\,,$$

si ha

$$\int_7^{y(s)} \frac{dz}{z\,(z-14)} = \frac{1}{14}\,\ln\Big(\Big|\frac{y(s)-14}{y(s)}\Big|\Big) - \frac{1}{14}\,\ln\Big(\Big|\frac{7-14}{7}\Big|\Big) = \frac{1}{14}\,\ln\Big(\Big|\frac{y(s)-14}{y(s)}\Big|\Big)\,.$$

Si ha pertanto che

$$\frac{1}{14}\,\ln\Big(\Big|\frac{y(s)-14}{y(s)}\Big|\Big) = \ln\Big(\frac{s+3}{3}\Big)\,,$$

da cui segue (osservando che $0 < y(s) < 14$ per s vicino a zero dato che $y(0) = 7$) che

$$\frac{14-y(s)}{y(s)} = \Big(\frac{s+3}{3}\Big)^{14}\,.$$

Da questa relazione si ricava facilmente che

$$y(s) = \frac{14}{\big(\frac{s+3}{3}\big)^{14} + 1}\,.$$

6) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' - 10\,y' + 24\,y = 48\,. \tag{1}$$

a) Quante soluzioni ha l'equazione (1)? E quante soluzioni tali che $y(0) = 2$ ha l'equazione (1)?
b) Scrivere il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea associata all'equazione (1) e scrivere tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata.
c) Trovare una soluzione particolare dell'equazione (1) e scrivere tutte le soluzioni dell'equazione (1).
d) Trovare la soluzione di (1) con le condizioni $y(0) = 2$ e $y'(0) = 2$.

Soluzione:
a) Infinite, dipendenti da due parametri reali, e infinite, dipendenti da un parametro reale.

b) Il polinomio caratteristico è

$$P(L) = L^2 - 10L + 24\,.$$

Dato che $P(L) = 0$ per $L = 6$ e per $L = 4$, le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono date da

$$y_0(t) = C\,\mathrm{e}^{6\,t} + D\,\mathrm{e}^{4\,t}\,,$$

con C e D parametri reali.

c) Essendo il dato una costante, e dato che le costanti **non sono** soluzioni dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare della forma $\overline{y}(t) = Q$, con Q numero reale. Sostituendo nell'equazione, si ha che deve essere

$$24\,Q = 48\,,$$

da cui segue $Q = 2$. Tutte le soluzioni dell'equazione (1) sono pertanto date da

$$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t) = C\,\mathrm{e}^{6\,t} + D\,\mathrm{e}^{4\,t} + 2\,,$$

con C e D parametri reali.

d) Si ha $y(0) = C + D + 2$ e

$$y'(t) = 6\,C\,\mathrm{e}^{6\,t} + 4\,D\,\mathrm{e}^{4\,t}\,,$$

da cui segue che $y'(0) = 6\,C + 4\,D$. Pertanto, assegnando le condizioni iniziali si ha che deve essere

$$C + D + 2 = 2\,, \quad 6\,C + 4\,D = 2\,.$$

Dalla prima equazione si ricava che deve essere $C = -D$; sostituendo nella seconda si ha

$$-6\,D + 4\,D = -2\,D = 2\,,$$

da cui segue che $D = -1$ (e quindi $C = -D = 1$). In definitiva, l'unica soluzione di (1) è data da

$$y(t) = \mathrm{e}^{6\,t} - \mathrm{e}^{4\,t} + 2\,.$$