Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 8
10 Maggio 2022 — Compito n. 00281 — □■□□□■■□□■

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: | | | | | | | |

Punteggi: 1 punto per ogni risposta esatta, 0 punti per risposte sbagliate o lasciate in bianco.

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
F	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
C	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□

---

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1A) L'equazione differenziale $y'(t) = 8\,t + 5\,t^2$ è del primo ordine.
1B) L'equazione differenziale $3\,y'(t)\,y''(t) + 8\,[y(t)]^3 = 0$ è del secondo ordine.
1C) L'equazione differenziale $[\sin(5\,y'(t))]' = 0$ è del secondo ordine.
1D) L'equazione differenziale $10\,t\,y^{(1)}(t) + 5\,t^2\,y^{(2)}(t) + 3\,t^3\,y^{(3)}(t) = 0$ è del terzo ordine.

---

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = 4\,y(t) + 5\,.$$

2A) L'equazione ha infinite soluzioni.
2B) Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 6$.
2C) Non esistono soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 6$ e $y'(0) = 24$.
2D) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 6$ e $y'(0) = 29$.

---

3) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} y'(t) = \mathrm{e}^{3\,t^2}\,, \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

3A) Esiste un'unica soluzione di (1).
3B) La soluzione si può scrivere esplicitamente in termini di funzioni elementari.
3C) Si ha $y'(0) = 3$.
3D) Si ha $y''(0) = 0$.

---

4) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} y'(t) = -6\,y(t) + 36\,, \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

4A) La funzione $Q\,\mathrm{e}^{6\,t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata all'equazione di (1) per ogni Q in $\mathbb{R}$.
4B) La funzione $y(t) = 6$ è soluzione dell'equazione di (1).
4C) Si ha $y''(0) = 216$.
4D) Si ha
$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = -6\,.$$

5) Si consideri l'equazione differenziale del primo ordine

$$y'(t) = f(t)\,. \tag{1}$$

Scrivere tutte le soluzioni di (1) se

$$\textbf{a)}\ f(t) = 14\,t + 4\,, \quad \textbf{b)}\ f(t) = \cos(5\,t)\,, \quad \textbf{c)}\ f(t) = (6\,t + 9)\,\mathrm{e}^t\,, \quad \textbf{d)}\ f(t) = \frac{7\,t}{1 + 7\,t^2}\,.$$

6) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} y'(t) = 6\,y(t) - 9\,, \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

a) Quante soluzioni ha l'equazione di (1)? E quante soluzioni ha (1)?
b) Scrivere l'equazione omogenea associata all'equazione di (1), e scriverne tutte le soluzioni.
c) Trovare una soluzione particolare dell'equazione di (1).
d) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione di (1) e la soluzione di (1).

Soluzioni del compito 00281

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

Ricordiamo che un'equazione differenziale si dice di ordine $n \geq 1$ se la derivata di ordine massimo della funzione incognita $y(t)$ è la derivata $y^{(n)}(t)$.

1A) L'equazione differenziale $y'(t) = 8\,t + 5\,t^2$ è del primo ordine.

Vero: Infatti vi compare la derivata prima di $y(t)$, e non derivate di ordine superiore.

1B) L'equazione differenziale $3\,y'(t)\,y''(t) + 8\,[y(t)]^3 = 0$ è del secondo ordine.

Vero: Infatti vi compare la derivata seconda di $y(t)$, e non derivate di ordine superiore.

1C) L'equazione differenziale $[\sin(5\,y'(t))]' = 0$ è del secondo ordine.

Vero: Infatti, derivando si ha

$$5\,\cos(5\,y'(t))\,y''(t) = 0\,,$$

e quindi l'equazione è del secondo ordine.

1D) L'equazione differenziale $10\,t\,y^{(1)}(t) + 5\,t^2\,y^{(2)}(t) + 3\,t^3\,y^{(3)}(t) = 0$ è del terzo ordine.

Vero: Infatti vi compare la derivata terza di $y(t)$, e non derivate di ordine superiore.

---

2) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) = 4\,y(t) + 5\,.$$

2A) L'equazione ha infinite soluzioni.

Vero: Essendo un'equazione del primo ordine, ha infinite soluzioni, dipendenti da un'unica costante reale.

2B) Esistono infinite soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 6$.

Falso: Assegnando la conidzione iniziale $y(0) = 6$ si ottiene un problema di Cauchy, che ha un'unica soluzione.

2C) Non esistono soluzioni dell'equazione tali che $y(0) = 6$ e $y'(0) = 24$.

Vero: Se $y'(0) = 6$, sostituendo nell'equazione si ha

$$y'(0) = 4\,y(0) + 5 = 4 \cdot 6 + 5 = 29 \neq 24\,,$$

e quindi non esiste alcuna soluzione dell'equazione che verifica le due condizioni assegnate.

2D) Esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 6$ e $y'(0) = 29$.

Vero: Sappiamo già che esiste un'unica soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 6$ (si veda la domanda **2B**). Dall'equazione, scritta per $t = 0$, si ricava

$$y'(0) = 4\,y(0) + 5 = 4 \cdot 6 + 5 = 29\,,$$

e quindi la seconda condizione è automaticamente verificata.

---

3) Si consideri il problema di Cauchy

$$
(1) \qquad \begin{cases} y'(t) = \mathrm{e}^{3\,t^2}\,, \\ y(0) = 0\,. \end{cases}
$$

Integrando tra 0 e s si ha, per il Teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$
y(s) - y(0) = \int_0^s y'(t)\,dt = \int_0^s \mathrm{e}^{3\,t^2}\,dt\,,
$$

da cui, ricordando che $y(0) = 0$, segue che l'unica soluzione del problema di Cauchy è data da:

$$
(2) \qquad y(s) = \int_0^s \mathrm{e}^{3\,t^2}\,dt\,.
$$

3A) Esiste un'unica soluzione di (1).

Vero: Trattandosi di un problema di Cauchy, esiste un'unica soluzione (si veda anche (2)).

3B) La soluzione si può scrivere esplicitamente in termini di funzioni elementari.

Falso: La soluzione è data da (2), e l'integrale non si sa calcolare esplicitamente.

3C) Si ha $y'(0) = 3$.

Falso: Sostituendo $t = 0$ nell'equazione si trova

$$
y'(0) = \mathrm{e}^{3 \cdot 0^2} = 1 \neq 3\,.
$$

3D) Si ha $y''(0) = 0$.

Vero: Derivando l'equazione si ha

$$
y''(t) = [y'(t)]' = [\mathrm{e}^{3\,t^2}]' = 6\,t\,\mathrm{e}^{3\,t^2}\,,
$$

da cui segue che

$$
y''(0) = 6 \cdot 0 \cdot \mathrm{e}^{3 \cdot 0^2} = 0\,.
$$

---

4) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} y'(t) = -6\,y(t) + 36\,, \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

L'equazione omogenea associata all'equazione di (1) è

$$(2) \qquad y'(t) = -6\,y(t)\,.$$

4A) La funzione $Q\,\mathrm{e}^{6\,t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata all'equazione di (1) per ogni Q in $\mathbb{R}$.

Falso: Se $y(t) = Q\,\mathrm{e}^{6\,t}$, allora

$$y'(t) = Q \cdot 6\,\mathrm{e}^{6\,t} = 6 \cdot [Q\,\mathrm{e}^{6\,t}] = 6\,y(t) \neq -6\,y(t)\,,$$

e quindi la funzione proposta non risolve la (2), ovvero l'equazione omogenea associata all'equazione di (1).

4B) La funzione $y(t) = 6$ è soluzione dell'equazione di (1).

Vero: Basta sostituire...

4C) Si ha $y''(0) = 216$.

Falso: Iniziamo con l'osservare che dall'equazione, e dalla condizione iniziale, segue che

$$y'(0) = -6\,y(0) + 36 = -6 \cdot 0 + 36 = 36\,.$$

Inoltre, derivando l'equazione si ha

$$y''(t) = -6\,y'(t)\,,$$

e quindi

$$y''(0) = -6\,y'(0) = -6 \cdot 36 = -216 \neq 216\,.$$

4D) Si ha

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = -6\,.$$

Falso: Sappiamo, dalle domande **4A** e **4B** che $y_0(t) = Q\,\mathrm{e}^{-6\,t}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata (qualsiasi sia Q numero reale) e che $\overline{y}(t) = 6$ è soluzione (particolare) dell'equazione. Per la teoria generale delle equazioni lineari, le funzioni della forma

$$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t) = Q\,\mathrm{e}^{-6\,t} + 6$$

sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione di (1). Assegnando la condizione iniziale, si trova

$$0 = y(0) = Q + 6\,,$$

da cui $Q = -6$. Ne segue che

$$y(t) = -6\,\mathrm{e}^{-6\,t} + 6 = 6\,(1 - \mathrm{e}^{-6\,t})$$

è l'unica soluzione del problema di Cauchy (1), ed è tale che

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = \lim_{t \to +\infty} 6\,(1 - \mathrm{e}^{-6\,t}) = 6 \neq -6\,.$$

---

5) Si consideri l'equazione differenziale del primo ordine

$$y'(t) = f(t)\,. \tag{1}$$

Scrivere tutte le soluzioni di (1) se

$$\textbf{a)}\ f(t) = 14\,t + 4\,, \quad \textbf{b)}\ f(t) = \cos(5\,t)\,, \quad \textbf{c)}\ f(t) = (6\,t + 9)\,\mathrm{e}^t\,, \quad \textbf{d)}\ f(t) = \frac{7\,t}{1 + 7\,t^2}\,.$$

Soluzione:
L'equazione differenziale $y'(t) = f(t)$ si può riformulare così: "la funzione $y(t)$ è una primitiva di $f(t)$." Pertanto, trovare tutte le soluzioni di (1) è equivalente a trovare tutte le primitive di $f(t)$, ovvero — come è noto... — è equivalente ad integrare $f(t)$.

a) Dato che

$$\int [14\,t + 4]\,dt = 7\,t^2 + 4\,t\,,$$

si ha che tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = 7\,t^2 + 4\,t + c\,,$$

con c costante arbitraria.

b) Dato che

$$\int \cos(5\,t)\,dt = \frac{\sin(5\,t)}{5}\,,$$

si ha che tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = \frac{\sin(5\,t)}{5} + c\,,$$

con c costante arbitraria.

c) Dato che, integrando per parti,

$$\int (6\,t + 9)\,\mathrm{e}^t\,dt = (6\,t + 9)\,\mathrm{e}^t - \int 6\,\mathrm{e}^t\,dt = (6t + 3)\,\mathrm{e}^t\,,$$

si ha che tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = (6t + 3)\,\mathrm{e}^t + c\,,$$

con c costante arbitraria.

a) Dato che

$$\int \frac{7\,t}{1 + 7\,t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{14\,t\,dt}{1 + 7\,t^2} = \frac{1}{2}\,\ln(1 + 7\,t^2)\,,$$

si ha che tutte le soluzioni di (1) sono date da

$$y(t) = \frac{1}{2}\,\ln(1 + 7\,t^2) + c\,,$$

con c costante arbitraria.

6) Si consideri il problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} y'(t) = 6\,y(t) - 9\,, \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

a) Quante soluzioni ha l'equazione di (1)? E quante soluzioni ha (1)?
b) Scrivere l'equazione omogenea associata all'equazione di (1), e scriverne tutte le soluzioni.
c) Trovare una soluzione particolare dell'equazione di (1).
d) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione di (1) e la soluzione di (1).

Soluzione:
a) L'equazione di (1) ha infinite soluzioni (dipendenti da un parametro reale), mentre il problema di Cauchy (1) ha un'unica soluzione.

b) L'equazione omogenea associata all'equazione di (1) è

$$y_0'(t) = 6\,y_0(t)\,,$$

le cui soluzioni sono date (per quanto visto a lezione) da

$$y_0(t) = A\,\mathrm{e}^{6\,t}\,,$$

con A costante reale arbitraria.

c) Per trovare una soluzione particolare dell'equazione di (1), cerchiamo

$$\overline{y}(t) = C\,,$$

con C costante reale. Sostituendo, si ha che deve essere

$$0 = 6\,C - 9\,,$$

da cui segue $C = \frac{3}{2}$.
d) Per quanto visto a lezione, tutte le soluzioni dell'equazione di (1) sono date da

$$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t) = A\,\mathrm{e}^{6\,t} + \frac{3}{2}\,,$$

con A costante reale arbitraria. Assegnando la condizione iniziale, si ha che deve essere

$$0 = A\,\mathrm{e}^{6\cdot 0} + \frac{3}{2} = A + \frac{3}{2}\,,$$

da cui segue che $A = -\frac{3}{2}$ e quindi l'unica soluzione di (1) è data da

$$y(t) = -\frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{6\,t} + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}\,[1 - \mathrm{e}^{6\,t}]\,.$$