Calcolo integrale — Scheda di esercizi n. 4

5 Aprile 2022 — Compito n. 00204 — □□■■□□■■□□

Istruzioni: le prime due caselle (**V** / **F**) permettono di selezionare la risposta vero/falso. La casella "**C**" serve a correggere eventuali errori invertendo la risposta data.
Per selezionare una casella, annerirla completamente: ■ (non ☒ o ☑).

Nome: ______________________

Cognome: ______________________

Matricola: □□□□□□□

Punteggi: 1 punto per ogni risposta esatta, 0 punti per risposte sbagliate o lasciate in bianco.

	1A	1B	1C	1D	2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	3D	4A	4B	4C	4D
V	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
F	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
C	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□

---

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1A) La funzione $f(x) = 3x^2 - 3x + 3$ è integrabile su $[2, 9]$.
1B) La funzione $f(x) = x\,|x|$ non è integrabile su $[3, 8]$.
1C) La funzione

$$f(x) = \begin{cases} 4x + 2 & \text{se } x < 0, \\ -4x - 2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

è integrabile su $[-3, 5]$.
1D) La funzione $f(x) = [x]$, dove $[x]$ è la parte intera di x, è integrabile su $[-4, 3]$.

---

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A) Se

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{se } x \geq 0, \\ 7 & \text{se } x < 0, \end{cases} \qquad \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 13\,.$$

2B) Se

$$f(x) = \begin{cases} 7 & \text{se } x \leq 1, \\ 14\,x - 7 & \text{se } x > 1, \end{cases} \qquad \int_{0}^{2} f(x)\,dx = 14\,.$$

2C) Se

$$f(x) = \begin{cases} 12\,x & \text{se } x \leq 1, \\ 24 - 12\,x & \text{se } x > 1, \end{cases} \qquad \int_{0}^{2} f(x)\,dx = 24\,.$$

2D) Se

$$f(x) = \begin{cases} 8\,x & \text{se } x \leq 1, \\ 32 - 16\,x & \text{se } x > 1, \end{cases} \qquad \int_{0}^{2} f(x)\,dx = 8\,.$$

---

3) Siano

$$f(x) = \begin{cases} 10 & \text{se } x \leq 0, \\ 9 & \text{se } x > 0. \end{cases} \qquad F(x) = \int_0^x f(t)\,dt\,.$$

3A) Si ha $F(0) = 10$.
3B) Si ha

$$F(6) = 60\,.$$

3C) Si ha

$$F(-3) = -30\,.$$

3D) Si ha $F(x) = -10\,x$ per ogni $x < 0$.

---

4) Sia

$$F(x) = \int_0^x \cos^2(t)\,dt\,.$$

4A) La funzione $F(x)$ è definita per ogni x in $\mathbb{R}$.
4B) Si ha $F(0) = 0$.
4C) La funzione $F(x)$ è derivabile su tutto $\mathbb{R}$.
4D) La funzione $F(x)$ è decrescente su $\mathbb{R}$.

$\square\square\square\square\square\square\square\square$ **Cognome** **Nome** **Matricola** **Compito 00204**

5) Calcolare i seguenti integrali:

$$\textbf{a1)}\ \int_0^{\pi} \sin(5\,x)\,dx\,, \qquad \textbf{a2)}\ \int_0^1 e^{3\,x}\,dx\,, \qquad \textbf{b1)}\ \int_0^1 \frac{6\,x\,dx}{1+3\,x^2}\,, \qquad \textbf{b2)}\ \int_0^1 \frac{dx}{1+49\,x^2}\,,$$

$$\textbf{c1)}\ \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} x^2\,\cos(5\,x^3)\,dx\,, \qquad \textbf{c2)}\ \int_0^1 x^7\,e^{x^8}\,dx\,, \qquad \textbf{d1)}\ \int_0^1 \frac{dx}{14\,x+7}\,, \qquad \textbf{d2)}\ \int_0^1 \frac{dx}{(3-x)^2}\,.$$

6) Calcolare una primitiva delle seguenti funzioni

$$\mathbf{a1})\ x\,\sin(x)\,,\qquad \mathbf{a2})\ x^3\,e^x\,,\qquad \mathbf{b1})\ x^2\,\ln(x)\,,\qquad \mathbf{b2})\ (x^2-2x+5)\,e^x\,,$$

$$\mathbf{c1})\ x\,e^{4\,x}\,,\qquad \mathbf{c2})\ x\,\cos(7\,x)\,,\qquad \mathbf{d1})\ e^{\sqrt{x}}\,,\qquad \mathbf{d2})\ \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,,$$

Soluzioni del compito 00204

1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1A) La funzione $f(x) = 3x^2 - 3x + 3$ è integrabile su $[2, 9]$.

Vero: Trattandosi di una funzione continua (è un polinomio) definita su un intervallo chiuso e limitato, la funzione è integrabile (come tutte le funzioni continue su intervalli chiusi e limitati).

1B) La funzione $f(x) = x\,|x|$ non è integrabile su $[3, 8]$.

Falso: Trattandosi di una funzione continua (è un polinomio) definita su un intervallo chiuso e limitato, la funzione è integrabile (come tutte le funzioni continue su intervalli chiusi e limitati).

1C) La funzione

$$f(x) = \begin{cases} 4x + 2 & \text{se } x < 0, \\ -4x - 2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

è integrabile su $[-3, 5]$.

Vero: La funzione è continua sia per $x < 0$ che per $x \geq 0$ (essendo un polinomio); essendo continua, è integrabile sia su $[-3, 0]$ che su $[0, 5]$, e quindi è integrabile sull'unione dei due intervalli.

1D) La funzione $f(x) = [x]$, dove $[x]$ è la parte intera di x, è integrabile su $[-4, 3]$.

Vero: La funzione "parte intera" è una funzione costante a tratti; sull'intervallo $[-4, 3]$ è discontinua in -3, -2, $\ldots$, 2, 3. Avendo un numero finito di punti di discontinuità, è integrabile su $[-4, 3]$.

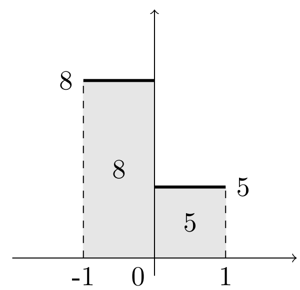
---

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

2A) Se

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{se } x \geq 0, \\ 7 & \text{se } x < 0, \end{cases} \qquad \int_{-1}^{1} f(x)\, dx = 13\,.$$

Vero: Si ha (ricordando le formule per l'area di un rettangolo)



Disegno non in scala

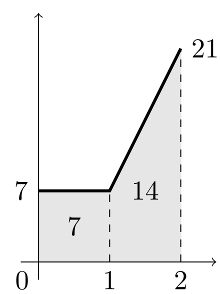
e quindi

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = 8 + 5 = 13\,.$$

2B) Se

$$f(x) = \begin{cases} 7 & \text{se } x \leq 1, \\ 14\,x - 7 & \text{se } x > 1, \end{cases} \qquad \int_{0}^{2} f(x)\, dx = 14\,.$$

Falso: Si ha (ricordando le formule per l'area di un rettangolo e di un trapezio)



Disegno non in scala

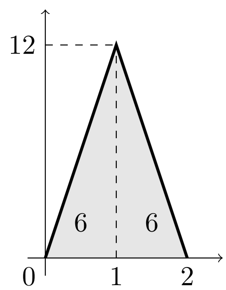
e quindi

$$\int_{0}^{2} f(x)\, dx = 7 + 14 = 21 \neq 14\,.$$

2C) Se

$$f(x) = \begin{cases} 12\,x & \text{se } x \leq 1, \\ 24 - 12\,x & \text{se } x > 1, \end{cases} \qquad \int_{0}^{2} f(x)\, dx = 24\,.$$

Falso: Si ha (ricordando le formule per l'area di un triangolo)



Disegno non in scala

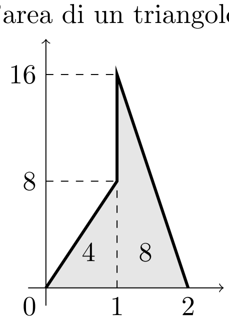
e quindi

$$\int_0^2 f(x)\,dx = 6 + 6 = 12 \neq 24\,.$$

2D) Se

$$f(x) = \begin{cases} 8\,x & \text{se } x \le 1, \\ 32 - 16\,x & \text{se } x > 1, \end{cases} \qquad \int_0^2 f(x)\,dx = 8\,.$$

Falso: Si ha (ricordando le formule per l'area di un triangolo)



Disegno non in scala

e quindi

$$\int_0^2 f(x)\,dx = 4 + 8 = 12 \neq 8\,.$$

---

3) Siano

$$f(x) = \begin{cases} 10 & \text{se } x \leq 0, \\ 9 & \text{se } x > 0. \end{cases} \qquad F(x) = \int_0^x f(t)\,dt\,.$$

3A) Si ha $F(0) = 10$.

Falso: Infatti

$$F(0) = \int_0^0 f(x)\,dx = 0 \neq 10\,,$$

dato che, per ogni $f(x)$ e per ogni a,

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0\,.$$

3B) Si ha

$$F(6) = 60\,.$$

Falso: Infatti

$$F(6) = \int_0^6 f(x)\,dx = \int_0^6 9\,dx = 9 \cdot 6 = 54 \neq 60\,.$$

3C) Si ha

$$F(-3) = -30\,.$$

Vero: Infatti

$$F(-3) = \int_0^{-3} f(x)\,dx = -\int_{-3}^0 f(x)\,dx = -\int_{-3}^0 10\,dx = -10 \cdot 3 = -30\,.$$

3D) Si ha $F(x) = -10\,x$ per ogni $x < 0$.

Falso: Infatti, dato che $f(t) \equiv 10$ per ogni $t < 0$, si ha

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x 10\,dt = 10\,x \neq -10\,x\,.$$

---

4) Sia
$$F(x) = \int_0^x \cos^2(t)\,dt\,.$$

4A) La funzione $F(x)$ è definita per ogni x in $\mathbb{R}$.

Vero: Dato che la funzione $t \mapsto \cos^2(t)$ è continua su ogni intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$, è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato. In particolare, lo è sugli intervalli della forma $[0, x]$ (se $x \geq 0$) o $[x, 0]$ (se $x < 0$), e quindi la funzione $F(x)$ è definita per ogni x in $\mathbb{R}$.

4B) Si ha $F(0) = 0$.

Vero: Dato che, qualsiasi sia a, e qualsiasi sia $f(x)$, si ha
$$\int_a^a f(x)\,dx = 0\,,$$
allora
$$F(0) = \int_0^0 \cos^2(t)\,dt = 0\,.$$

4C) La funzione $F(x)$ è derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

Vero: Dato che la funzione $t \mapsto \cos^2(t)$ è continua, per il Teorema fondamentale del calcolo integrale la funzione $F(x)$ è derivabile ovunque e si ha
$$F'(x) = \cos^2(x)\,, \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

4D) La funzione $F(x)$ è decrescente su $\mathbb{R}$.

Falso: Per quanto detto nell'esercizio **4C)**, si ha
$$F'(x) = \cos^2(x)\,, \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$
Dato che $F'(x) \geq 0$ per ogni x, la funzione $F(x)$ è crescente su $\mathbb{R}$ (e quindi non è decrescente).

---

5) Calcolare i seguenti integrali:

$$\textbf{a1)}\ \int_0^{\pi} \sin(5\,x)\,dx\,,\qquad \textbf{a2)}\ \int_0^1 \mathrm{e}^{3\,x}\,dx\,,\qquad \textbf{b1)}\ \int_0^1 \frac{6\,x\,dx}{1+3\,x^2}\,,\qquad \textbf{b2)}\ \int_0^1 \frac{dx}{1+49\,x^2}\,,$$

$$\textbf{c1)}\ \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} x^2\,\cos(5\,x^3)\,dx\,,\qquad \textbf{c2)}\ \int_0^1 x^7\,\mathrm{e}^{x^8}\,dx\,,\qquad \textbf{d1)}\ \int_0^1 \frac{dx}{14\,x+7}\,,\qquad \textbf{d2)}\ \int_0^1 \frac{dx}{(3-x)^2}\,.$$

Soluzione:

a1) Con la sostituzione $y = 5\,x$, da cui $dy = 5\,dx$, si ha, dato che $\cos(5\,\pi) = -1$,

$$\int_0^{\pi} \sin(5\,x)\,dx = \int_0^{5\,\pi} \sin(y)\,\frac{dy}{5} = -\frac{\cos(y)}{5}\Big|_0^{5\,\pi} = -\frac{\cos(5\,\pi)-1}{5} = \frac{2}{5}\,.$$

a2) Con la sostituzione $y = 3\,x$, da cui $dy = 3\,dx$, si ha

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{3\,x}\,dx = \int_0^3 \mathrm{e}^y\,\frac{dy}{3} = \frac{\mathrm{e}^y}{3}\Big|_0^3 = \frac{\mathrm{e}^3-1}{3}\,.$$

b1) Con la sostituzione $y = 1+3\,x^2$, da cui $dy = 6\,x\,dx$, si ha

$$\int_0^1 \frac{6\,x\,dx}{1+3\,x^2} = \int_1^4 \frac{dy}{y} = \ln(|y|)\Big|_1^4 = \ln(4)-\ln(1) = \ln(4)\,.$$

b2) Con la sostituzione $y = 7\,x$, da cui $dy = 7\,dx$, si ha

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+49\,x^2} = \int_0^7 \frac{1}{7}\,\frac{dy}{1+y^2} = \frac{\arctan(y)}{7}\Big|_0^7 = \frac{\arctan(7)-\arctan(0)}{7} = \frac{\arctan(7)}{7}\,.$$

c1) Con la sostituzione $y = 5\,x^3$, da cui $dy = 15\,x^2\,dx$, si ha

$$\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} x^2\,\cos(5\,x^3)\,dx = \int_0^{5\,\pi} \cos(y)\,\frac{dy}{15} = \frac{\sin(y)}{15}\Big|_0^{5\,\pi} = \frac{\sin(5\,\pi)-\sin(0)}{15} = 0\,.$$

c2) Con la sostituzione $y = x^8$, da cui $dy = 8\,x^7\,dx$, si ha

$$\int_0^1 x^7\,\mathrm{e}^{x^8}\,dx = \int_0^1 \mathrm{e}^y\,\frac{dy}{8} = \frac{\mathrm{e}^y}{8}\Big|_0^1 = \frac{\mathrm{e}-1}{8}\,.$$

d1) Ricordando che

$$\int \frac{dy}{a\,y+b} = \frac{\ln(|a\,y+b|)}{a}\,,$$

si ha

$$\int_0^1 \frac{dx}{14\,x+7} = \frac{\ln(|14\,x+7|)}{14}\Big|_0^1 = \frac{\ln(21)-\ln(7)}{14} = \frac{\ln(3)}{21}\,.$$

d2) Ricordando che

$$\int \frac{dy}{(a-y)^2} = \int \frac{dy}{(y-a)^2} = -\frac{1}{y-a}\,,$$

si ha

$$\int_0^1 \frac{dx}{(3-x)^2} = -\frac{1}{x-3}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}-\frac{1}{3} = \frac{1}{6}\,.$$

6) Calcolare una primitiva delle seguenti funzioni

$$\mathbf{a1})\ x\,\sin(x)\,,\qquad \mathbf{a2})\ x^3\,\mathrm{e}^x\,,\qquad \mathbf{b1})\ x^2\,\ln(x)\,,\qquad \mathbf{b2})\ (x^2-2x+5)\,\mathrm{e}^x\,,$$

$$\mathbf{c1})\ x\,\mathrm{e}^{4\,x}\,,\qquad \mathbf{c2})\ x\,\cos(7\,x)\,,\qquad \mathbf{d1})\ \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,,\qquad \mathbf{d2})\ \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,,$$

Soluzione:

a1) Integriamo per parti, derivando x e integrando $\sin(x)$:

$$\int x\,\sin(x)\,dx = \left[\begin{array}{ccc} f'(x)=\sin(x) & \to & f(x)=-\cos(x) \\ g(x)=x & \to & g'(x)=1 \end{array}\right] = -x\,\cos(x) - \int(-\cos(x))\,dx\,,$$

da cui

$$\int x\,\sin(x)\,dx = -x\,\cos(x)+\sin(x)\,.$$

a1) Integriamo per parti, derivando x^3 e integrando e^x:

$$\int x^3\,\mathrm{e}^x\,dx = \left[\begin{array}{ccc} f'(x)=\mathrm{e}^x & \to & f(x)=\mathrm{e}^x \\ g(x)=x^3 & \to & g'(x)=3\,x^2 \end{array}\right] = x^3\,\mathrm{e}^x - 3\int x^2\,\mathrm{e}^x\,dx\,.$$

Per l'integrale rimasto, integriamo per parti, derivando x^2 e integrando e^x:

$$\int x^2\,\mathrm{e}^x\,dx = \left[\begin{array}{ccc} f'(x)=\mathrm{e}^x & \to & f(x)=\mathrm{e}^x \\ g(x)=x^2 & \to & g'(x)=2\,x \end{array}\right] = x^2\,\mathrm{e}^x - 2\int x\,\mathrm{e}^x\,dx\,.$$

Per l'ultimo integrale, integriamo per parti, derivando x e integrando e^x:

$$\int x\,\mathrm{e}^x\,dx = \left[\begin{array}{ccc} f'(x)=\mathrm{e}^x & \to & f(x)=\mathrm{e}^x \\ g(x)=x & \to & g'(x)=1 \end{array}\right] = x\,\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,dx = x\,\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x\,.$$

Rimettendo insieme i risultati, si ha

$$\int x^3\,\mathrm{e}^x = x^3\,\mathrm{e}^x - 3\,x^2\,\mathrm{e}^x + 6\,x\,\mathrm{e}^x - 6\,\mathrm{e}^x = (x^3-3x^2+6x-6)\,\mathrm{e}^x\,.$$

b1) Integriamo per parti, derivando $\ln(x)$ e integrando x^2:

$$\int x^2\,\ln(x)\,dx = \left[\begin{array}{ccc} f'(x)=x^2 & \to & f(x)=\frac{x^3}{3} \\ g(x)=\ln(x) & \to & g'(x)=\frac{1}{x} \end{array}\right] = \frac{x^3\,\ln(x)}{3} - \int \frac{x^3}{3}\,\frac{1}{x}\,dx\,,$$

da cui

$$\int x^2\,\ln(x)\,dx = \frac{x^3\,\ln(x)}{3} - \int\frac{x^2}{3}\,dx = \frac{x^3\,\ln(x)}{3} - \frac{x^3}{9} = \frac{x^3}{9}\,(3\,\ln(x)-1)\,.$$

b2) Ricordiamo il seguente risultato: se $P(x)$ è un polinomio, allora

$$\int P(x)\,\mathrm{e}^x\,dx = Q(x)\,\mathrm{e}^x\,,$$

dove $Q(x)$ è un polinomio dello stesso grado di $P(x)$ e tale che

$$Q(x)+Q'(x)=P(x)\,.$$

Pertanto,

$$\int (x^2-2x+5)\,\mathrm{e}^x\,dx = Q(x)\,\mathrm{e}^x\,,$$

dove $Q(x)$ è un polinomio di secondo grado tale che

$$Q(x)+Q'(x)=x^2-2x+5\,.$$

Scrivendo $Q(x)=a\,x^2+b\,x+c$, si ha $Q'(x)=2a\,x+b$, da cui

$$Q'(x)+Q(x)=a\,x^2+(2a+b)\,x+(b+c)=x^2-2x+5\,,$$

e quindi,per il principio di identità dei polinomi, deve essere $a = 1$, $2a + b = -2$ e $b + c = 5$, da cui segue $a = 1$, $b = -4$ e $c = 9$. In definitiva,

$$\int (x^2 - 2x + 5)\, \mathrm{e}^x \, dx = (x^2 - 4x + 9)\, \mathrm{e}^x \, .$$

c1) Sostituiamo $y = 4\,x$, da cui $dy = 4\,dx$; si ha

$$\int x\, \mathrm{e}^{4\,x} \, dx = \frac{1}{16} \int y\, \mathrm{e}^y \, dy \, .$$

L'ultimo integrale si svolge per parti:

$$\int y\, \mathrm{e}^y \, dy = \left[\begin{array}{ccc} f'(x) = \mathrm{e}^y & \to & f(x) = \mathrm{e}^y \\ g(x) = y & \to & g'(x) = 1 \end{array} \right] = y\, \mathrm{e}^y - \int \mathrm{e}^y \, dy = (y - 1)\, \mathrm{e}^y \, ,$$

e quindi

$$\int x\, \mathrm{e}^{4\,x} \, dx = \frac{(4\,x - 1)\, \mathrm{e}^{4\,x}}{16} \, .$$

c2) Sostituiamo $y = 7\,x$, da cui $dy = 7\,dx$; si ha

$$\int x\, \cos(7\,x) \, dx = \frac{1}{49} \int y\, \cos(y) \, dy \, .$$

L'ultimo integrale si svolge per parti:

$$\int y\, \cos(y) \, dy = \left[\begin{array}{ccc} f'(x) = \cos(y) & \to & f(x) = \sin(y) \\ g(x) = y & \to & g'(x) = 1 \end{array} \right] = y\, \sin(y) - \int \sin(y) \, dy = y\, \sin(y) + \cos(y) \, ,$$

e quindi

$$\int x\, \cos(7\,x) \, dx = \frac{7\,x\, \sin(7\,x) + \cos(7\,x)}{49} \, .$$

d1) Sostituiamo $x = y^2$, da cui $dx = 2\,y\,dy$. Pertanto,

$$\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}} \, dx = 2 \int \mathrm{e}^y \, y \, dy \, .$$

Svolgendo l'ultimo integrale per parti, si ha

$$\int y\, \mathrm{e}^y \, dy = \left[\begin{array}{ccc} f'(x) = \mathrm{e}^y & \to & f(x) = \mathrm{e}^y \\ g(x) = y & \to & g'(x) = 1 \end{array} \right] = y\, \mathrm{e}^y - \int \mathrm{e}^y \, dy = (y - 1)\, \mathrm{e}^y \, ,$$

da cui segue che

$$\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}} \, dx = 2\,(\sqrt{x} - 1)\, \mathrm{e}^{\sqrt{x}} \, .$$

d2) Sostituiamo $y = \frac{1}{x}$, da cui $dy = -\frac{dx}{x^2}$. Pertanto,

$$\int \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^3} \, dx = \int \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{y}}}{x} \, \frac{dx}{x^2} = -\int y\, \mathrm{e}^y \, dy \, .$$

Svolgendo l'ultimo integrale per parti, come nell'esercizio **d1)**, si ha

$$\int y\, \mathrm{e}^y \, dy = (y - 1)\, \mathrm{e}^y \, ,$$

da cui segue che

$$\int \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^3} \, dx = \left(1 - \frac{1}{x}\right) \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \, .$$