MA4702. Programación Lineal Mixta. 2020.
Profesor: José Soto
Auxiliar: Diego Garrido
Fecha: 30 de abril de 2020.

Dualidad

	min	max	
Restricciones	$\geq b_i$	≥ 0	Variables
	$\leq b_i$	≤ 0	
	$= b_i$	Libre	
Variables	≥ 0	$\leq c_j$	Restricciones
	≤ 0	$\geq c_j$	
	Libre	$= c_j$	

Primal/Dual	**Optimo finito**	**No acotado**	**Infactible**
Optimo finito	Posible	Imposible	Imposible
No acotado	Imposible	Imposible	Posible
Infactible	Imposible	Posible	Posible

1. Lema de Farkas

Pruebe otras versiones del lema de Farkas:

a) $\{Ax = b,\ x \geq 0\} \neq \emptyset \iff \{A^T y \leq 0,\ b^T y > 0\} = \emptyset$

b) $\{Ax \leq 0,\ x \geq 0,\ c^T x > 0\} \neq \emptyset \iff \{A^T y \geq c,\ y \geq 0\} = \emptyset$

Solución:

(a) Consideremos el siguiente par primal (P)-dual(D):

$$\begin{aligned} \text{mín } & 0^T x \\ \text{s.a. } & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \text{máx } & b^T y \\ \text{s.a. } & A^T y \leq 0 \end{aligned}$$

($\Longrightarrow$)
Si $\{Ax = b,\ x \geq 0\}$ es factible se tiene que (P) es factible, además cualquier solución factible es óptima y el óptimo es $c^T x^* = 0$, por dualidad débil se tiene que $b^T y \leq 0\ \forall y \in (D)$, por tanto $\{A^T y \leq 0,\ b^T y > 0\}$ es infactible.

($\Longleftarrow$)
Sabemos por dualidad fuerte que si (D) tiene óptimo finito, entonces (P) es factible y con mismo valor óptimo. Notar que (D) es siempre factible, basta tomar $y = 0$, por ende, debemos demostrar que (D) es acotado, en efecto, por hipótesis tenemos que $\{A^T y \leq 0,\ b^T y > 0\}$ es infactible lo que implica que $b^T y \leq 0\ \forall y \in (D)$, por tanto (D) tiene óptimo finito e $\{Ax = b,\ x \geq 0\}$ es factible.

(b) Consideremos el siguiente par primal (P)-dual(D):

$$\begin{aligned} \text{mín } & 0^T y \\ \text{s.a. } & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \text{máx } & c^T x \\ \text{s.a. } & Ax \leq 0 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

($\Longrightarrow$)
Sabemos que si (D) es no acotado (P) es infactible, para que D sea no acotado debe existir una dirección de mejora de la función objetivo en la cual podemos movernos infinitamente sin salirnos de la región factible, formalmente esto es:

$\exists d \in R^m$ tal que $A(x+\lambda d) \leq 0 \; \forall \lambda \geq 0$ y $c^T d > 0$, notar que $Ad \leq 0$, ya que si existe $i \in \{1,\ldots,m\}$ tal que $(Ad)_i > 0$ basta que tomemos un λ lo suficientemente grande como $\lambda = +\infty$ obteniendosé que $\lambda(Ad)_i = +\infty$ lo que sería una contradicción. Del argumento anterior se tiene que el siguiente sistema tiene que ser factible $\{Ad \leq 0, \; c^T d > 0\}$ para que el primal sea infactible, en efecto, se tiene que el sistema anterior es factible por hipótesis, basta tomar $x = d$, por tanto, como el dual es no acotado $\{A^T y \geq c, \; y \geq 0\}$ es infactible.

($\Longleftarrow$)
Si $\{A^T y \geq c, \; y \geq 0\}$ es infactible se tiene que (P) es infactible entonces (D) debe ser infactible o no acotado, pero (D) es factible, basta tomar $x = 0$, por ende, (D) es no acotado, esto significa que $\exists d \in R^m$ tal que $A(x+\lambda d) \leq 0 \; \forall \lambda \geq 0$ y $c^T d > 0$, esto implica que el siguiente sistema de ecuaciones $\{Ad \leq 0, \; c^T d > 0\}$ es factible, tomado $x = d$ se tiene que $\{Ax \leq 0, \; x \geq 0, \; c^T x > 0\}$ es factible.

2. Dualidad y relajación Lagrangeana

Consideré el siguiente problema primal:

$$\begin{aligned} \min \;& c^T x \\ \text{s.a. } & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Demuestre que la mejor cota (cota inferior más cercana al valor óptimo del primal) lagrangeana del primal es su dual. *Hint*: Escriba la relajación lagrangeana del primal e imponga condiciones sobre los multiplicadores para que sea una cota inferior distinta de $-\infty$.

Solución:
La relajación lagrangena del primal es:

$$L(y) = \min_{x \geq 0} \; c^T x + y^T (b - Ax)$$

Notar que el multiplicador $y \leq 0$ puesto que se quiere penalizar cuando $b - Ax \leq 0$. Sea $c^T x^*$ el valor óptimo del primal, notar que $L(y) \leq c^T x^* + y^T (b - Ax^*) \leq c^T x^*$, ya que $y^T (b - Ax^*) \leq 0$.

$$L(y) = \min_{x \geq 0} \; c^T x + y^T (b - Ax) = y^T b + \min_{x \geq 0} \; (c^T - y^T A)x$$

Notar que

$$\min_{x \geq 0} \; (c^T - y^T A)x = \begin{cases} 0, \; si \; (c^T - y^T A) \geq 0 \\ -\infty, \; \sim \end{cases}$$

Al maximizar $L(y)$ necesitamos considerar solo aquellos valores de y para los cuales $L(y)$ no es igual a $-\infty$. Luego maximizar $L(y)$ respecto a y sujeto a las restricciones que evitan que sea $-\infty$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \max \;& y^T b \\ \text{s.a. } & y^T A \leq c^T \\ & y \leq 0 \end{aligned}$$

Lo que es equivalente al dual de nuestro problema primal.

3. Maximum Flow Problem

Considere el grafo dirigido $G(V, E)$, el objetivo del problema de flujo máximo es enviar la mayor cantidad de flujo desde un nodo s a un nodo t, donde los arcos tienen capacidades positivas $c = (c_e)_{e\in E}$.

a) Formule el PL y obtenga su dual

b) Obtenga el dual usando relajación lagrangeana

Solución

(a)

$$\begin{aligned} \text{máx} \;\; & x_{ts} \\ \text{s.a.} \;\; & \sum_{e\in\delta^+(i)} x_e - \sum_{e\in\delta^-(i)} x_e = 0 \qquad \forall i \in V\backslash\{s,t\} \\ & \sum_{e\in\delta^+(s)} x_e - \sum_{e\in\delta^-(s)} x_e = x_{ts} \\ & \sum_{e\in\delta^+(t)} x_t - \sum_{e\in\delta^-(t)} x_e = -x_{ts} \\ & 0 \leq x_e \leq c_e \quad \forall e \in E \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{mín} \;\; & c^T z \\ \text{s.a.} \;\; & y_i - yj + z_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in E \\ & y_t - y_s = 1 \\ & y_i \; libre, \; z_e \geq 0 \quad \forall i \in V, e \in E \end{aligned}$$

La dificultad de calcular el dual en este problema recae en observar en qué restricciones del primal aparece x_{ij}, para esto debemos notar que el arco (i, j) aparece en el conjunto de arcos que salen de i y que entran a j, es decir, $\delta^+(i)$ y $\delta^-(j)$ respectivamente, por ende, debemos mirar la restricción i y j las cuales estan asociadas a las variables duales y_i e y_j respectivamente, luego el componente que acompaña a x_{ij} en el primer conjunto es 1 y en el segundo -1, obteniendosé así $y_i - yj + z_{ij} \geq 0$.

(b)
Por relajación lagrangeana se tiene:

$$\begin{aligned} L(\hat{y}, z) &= \max_{x_{ts},\, x_e \geq 0\ \forall e\in E} x_{ts}\big[1 + \hat{y}_t - \hat{y}_s\big] + \sum_{i\in V} \hat{y}_i \Big[\sum_{e\in\delta^+ i} x_e - \sum_{e\in\delta^- i} x_e\Big] + \sum_{e\in E} z_e\big[c_e - x_e\big] \\ &= \max_{x_{ts},\, x_e \geq 0\ \forall e\in E} x_{ts}\big[1 + \hat{y}_t - \hat{y}_s\big] + \sum_{(i,j)\in E} x_e\big[\hat{y}_i - \hat{y}_j - z_{ij}\big] + c^T z \end{aligned}$$

Notar que:

$$\max_{x_{st}} x_{ts}\big[1 + \hat{y}_t - \hat{y}_s\big] = \begin{cases} 0, \; si \; 1 + \hat{y}_t - \hat{y}_s = 0 \\ +\infty, \; \sim \end{cases}$$

Además se tiene que $\forall (i,j) \in E$:

$$\max_{x_{ij}\geq 0} x_{ij}\left[\hat{y}_i - \hat{y}_j - z_{ij}\right] = \begin{cases} 0, \ si \ \hat{y}_i - \hat{y}_j - z_{ij} \leq 0 \\ +\infty, \ \sim \end{cases}$$

Luego la mejor cota lagrangeana es:

$$\begin{array}{lll} \min \ c^T z & & \\ \text{s.a.} & \hat{y}_j - \hat{y}_i + z_{ij} \geq 0 & \forall (i,j) \in E \\ & \hat{y}_s - \hat{y}_t = 1 & \\ & \hat{y}_i \ libre, \ z_e \geq 0 & \forall i \in V, e \in E \end{array}$$

Para obtener el mismo problema de la parte anterior basta tomar $\hat{y} = -y$.

4. Teorema Carathéodory

Sea $P \subset R^n$ un politopo y $W = \{x^1, \ldots, x^k\}$ sus puntos extremos.

a) Demuestre que $P = conv(W)$.

b) Muestre que todo elemento de P puede ser expresado como una combinación convexa de a lo más $n+1$ puntos extremos. *Hint:* plantee el poliedro asociado a un punto cualquiera de P.

Solución:

$$Q = \left\{ x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i \middle| \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \lambda \geq 0 \right\}$$

(a)

$(Q \subset P)$
Todo punto de Q es combinación convexa de puntos extremos de P y como P es un conjunto convexo cualquier combinación convexa de una colección finita de puntos de P pertenece a P, por tanto, todo punto de Q pertence a P.

$(P \subset Q)$
Sea P un poliedro acotado y sin pérdida de generalidad $P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b\}$ y sea $x \in P$ y I el conjunto de restricciones activas l.i., si $|I| = k < n$ existe una dirección $d \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ ortogonal a todas las restricciones activas $a_i^T d = 0 \ \forall i \in I$ si nos movemos en esa dirección en ambos sentidos chocaremos con una restricción debido a que el poliedro es acotado, sean $y = x - \mu^* d$, $z = x + \lambda^* d$ con $\mu^* > 0$, $\lambda^* > 0$ los puntos formados por movernos en esa dirección en ambos sentidos hasta chocar con una restricción, notar que z e y tienen $k+1$ restricciones activas l.i y que x esta en el segmento que une y con z por tanto se puede escribir como la combinación convexa de estos, $x = \lambda^0 y + (1-\lambda^0) z$ con $\lambda^0 \in (0,1)$. El procedimiento anterior se puede repetir $n-k$ veces hasta llegar a puntos extremos que tienen n restricciones l.i por lo que ya no podemos encontrar direcciones ortongales no nulas (Nota: un arco tiene al menos un punto extremo, al ser un poliedro cerrado siempre tiene dos), por ejemplo, si $k = n-2$ el resultado de la primera iteración sería y y z, ambos puntos están dentro de una arista (una arista tiene n-1 restricciones l.i.), una siguiente iteración dejaría 4 puntos extremos, $\{\text{x}^1, x^2\}$ puntos extremos adyacentes asociados a y y $\{x^3, x^4\}$ puntos extremos adyacentes asociados a z, luego $y = \lambda^1 x^1 + (1-\lambda^1) x^2$ y $z = \lambda^2 x^3 + (1-\lambda^2) x^4$, con $\lambda^1, \lambda^2 \in (0,1)$, por ende $x = \lambda^0 y + (1-\lambda^0) z = \lambda^0(\lambda^1 x^1 + (1-\lambda^1)x^2) + (1-\lambda^0)(\lambda^2 x^3 + (1-\lambda^2)x^4) = \sum_{i=1}^4 \theta_i x^i, \sum_{i=1}^4 \theta_i = 1, \theta \geq 0$. Para concluir se tiene que un punto cualquiera puede ser generado por la combinación convexa de dos puntos, puntos que a su vez fueron

generados por la combinacion convexa de otros dos puntos y así sucesivamente hasta llegar a puntos extremos, luego esa combinación convexa recursiva se puede escribir en términos de combinación convexa de puntos extremos.

(b)
Sea $W = x^1, \ldots, x^k$ la matriz cuyas columas son los puntos extremos de un poliedro acotado cualquiera P(Nota: todo poliedro acotado no vacío tiene al menos un punto extremo), por la parte anterior todo punto de $x \in P$ puede ser representado como una combinación convexa de las columnas de W, luego P se puede escribir como:

$$P = \left\{ x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i \middle| \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \lambda \geq 0 \right\}$$

Lo que se quiere demostrar es que cualquier punto $x \in P$ se puede escribir como $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i$, donde $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ y $\lambda_i \geq 0 \ \forall i \in 0, \ldots, k$, con a lo más $n+1$ coeficientes λ_i no nulos. Para demostrar esto consideremos el siguiente poliedro Q para un $x \in P$ cualquiera:

$$\begin{aligned} W\lambda &= x \\ 1^T \lambda &= 1 \\ \lambda &\geq 0 \end{aligned}$$

Notar que Q siempre es factible dado que $P = conv(W)$, además Q tiene al menos un punto extremo (Nota: todo poliedro en forma estándar no vacío tiene al menos un punto extremo), todo punto extremo de Q debe tener k restricciones l.i. activas. Supongamos que $k > n+1$ (sino no hay nada que demostrar) y sea $\hat{\lambda}$ un punto extremo de Q, como $\hat{\lambda}$ es un punto extremo debe tener k restriciones l.i., sea I el conjunto de restricciones l.i provenientes de $\begin{bmatrix} W \\ 1^T \end{bmatrix} \lambda = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$ y J el conjunto de restricciones l.i provenientes de las restricciones de no negatividad con $\lambda_j = 0 \ \forall j \in J$, se tiene que $|I| + |J| = k$ y que $|I| \leq n+1$, esto implica que $|J| \geq k - (n+1)$, por lo que a lo más $n+1$ componentes de $\hat{\lambda}$ son no nulos, por tanto x se puede escribir por la combinación convexa de a lo más $n+1$ puntos extremos.