

**MA4702. Programación Lineal Mixta. 2020.****Profesor:** José Soto**Auxiliar:** Diego Garrido**Fecha:** 30 de abril de 2020.

# Dualidad

	min	max	
Restricciones	$\geq b_i$	$\geq 0$	Variables
	$\leq b_i$	$\leq 0$	
	$= b_i$	Libre	
Variables	$\geq 0$	$\leq c_j$	Restricciones
	$\leq 0$	$\geq c_j$	
	Libre	$= c_j$	

Primal/Dual	Optimo finito	No acotado	Infactible
Optimo finito	Posible	Imposible	Imposible
No acotado	Imposible	Imposible	Posible
Infactible	Imposible	Posible	Posible

## 1. Lema de Farkas

Pruebe otras versiones del lema de Farkas:

- a)  $\{Ax = b, x \geq 0\} \neq \emptyset \iff \{A^T y \leq 0, b^T y > 0\} = \emptyset$   
 b)  $\{Ax \leq 0, x \geq 0, c^T x > 0\} \neq \emptyset \iff \{A^T y \geq c, y \geq 0\} = \emptyset$

## 2. Dualidad y relajación Lagrangeana

Consideré el siguiente problema primal:

$$\begin{aligned} \text{mín } & c^T x \\ \text{s.a. } & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Demuestre que la mejor cota (cota inferior más cercana al valor óptimo del primal) lagrangeana del primal es su dual.  
*Hint:* Escriba la relajación lagrangeana del primal e imponga condiciones sobre los multiplicadores para que sea una cota inferior distinta de  $-\infty$ .

## 3. Maximum Flow Problem

Considere el grafo dirigido  $G(V, E)$ , el objetivo del problema de flujo máximo es enviar la mayor cantidad de flujo desde un nodo  $s$  a un nodo  $t$ , donde los arcos tienen capacidades positivas  $c = (c_e)_{e \in E}$ .

- a) Formule el PL y obtenga su dual  
 b) Obtenga el dual usando relajación lagrangeana

## 4. Teorema Carathéodory

Sea  $P \subset \mathbb{R}^n$  un politopo y  $W = \{x^1, \dots, x^k\}$  sus puntos extremos.

- a) Demuestre que  $P = \text{conv}(W)$ .  
 b) Muestre que todo elemento de  $P$  puede ser expresado como una combinación convexa de a lo más  $n + 1$  puntos extremos. *Hint:* planteé el poliedro asociado a un punto cualquiera de  $P$ .