ITAM	Integrantes	Clave única
	Ricardo Alonso Mendiola	174759
	Marcela Alejandra Carrillo Gámez	155145
3^{er} proyecto de Cálculo Numérico	Enrique Ampudia González	164581

Ecuación del transporte

Durante este proyecto se utiliza la ecuación del transporte

$$u_t + cu_x = 0,$$

con velocidad positiva, es decir $c > 0$.

Ejercicio 1 [Teórico]: Soluciones exactas.

Muestre la veracidad de la solución de cada uno de los PVI dados a continuación:

a) Consideren el problema de valor inicial para la ecuación

$$u_t + cu_x = f(x,t),$$

con $u(x,0) = 0$ y

$$f(x,t) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para c positiva, muestren que la solución es dada por

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ x/c, & \text{si } x \in [0, ct] \\ t, & \text{si } x \geq 0 \text{ y } x - ct \geq 0. \end{cases}$$

b) Consideren el problema de valor inicial para la ecuación

$$u_t + uu_x = 0,$$

para la condición inicial discontinua

$$u(x,0) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Muestren que para $t > 0$,

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ x/t, & \text{si } x \in [0,t], \\ 1, & \text{si } x > t, \end{cases}$$

es solución.(Observen la continuidad de la solución).

Resultados

a) Verificamos que $u(x,t)$ que cumple la condición inicial:

- Cuando $x < 0$, claramente $u(x,0) = 0$.
- Si $x \in [0, ct]$, como $t = 0$, entonces $x = 0$, por tanto $u(x,0) = 0$.
- si $x \geq 0$ y $x - ct \geq 0$, $u(x,t) = t$ entonces $u(x,0) = 0$.

Ahora verificamos que la EDP es satisfecha para cada uno de las regiones de la solución:

- si $x < 0$, entonces las derivadas parciales están dadas por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

  y

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

  Claramente $u_t + cu_x = 0$. Por tanto, la EDP es satisfecha cuando $x < 0$.

- Si $x \in [0, ct]$ las derivadas parciales están dadas por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

  y

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{c}.$$

  Entonces $u_t + cu_x = 0 + c\left(\frac{1}{c}\right) = 1$. Por tanto, la EDP es satisfecha cuando $x \in [0, ct]$.

- Finalmente, si $x \geq 0$ y $x - ct \geq 0$ las derivadas parciales están dadas por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 1$$

  y

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

  Entonces $u_t + cu_x = 1 + 0 = 1$. Por tanto, la EDP es satisfecha cuando $x \geq 0$ y $x - ct \geq 0$.

b) Verificamos que $u(x,t)$ que cumple la condición inicial:

- Cuando $x < 0$, claramente $u(x,0) = 0$.
- Cuando $x > 0$, $u(x,t) = 1$ entonces $u(x,0) = 1$

Verificamos que la EDP es satisfecha para cada uno de las regiones de la solución:

- Si $x < 0$ tenemos que:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

  y

$$u(x,t) = 0.$$

  Claramente, $u_t + uu_x = 0$. Por tanto, la EDP es satisfecha cuando $x < 0$.

- Si $x \in [0, t]$ tenemos que:
$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{x}{t^2},$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{t},$$
y
$$u(x,t) = \frac{x}{t}.$$
Entonces,
$$\begin{aligned} u_t + uu_x &= -\frac{x}{t^2} + \left(\frac{1}{t}\right)\left(\frac{x}{t}\right) \\ &= -\frac{x}{t^2} + \frac{x}{t^2} = 0. \end{aligned}$$
Por tanto, la EDP es satisfecha cuando $x \in [0, t]$.
- Si $x > t$ tenemos que:
$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$
y
$$u(x,t) = 1$$
Entonces, $u_t + uu_x = 0 + 0(1) = 0$. Por tanto, la EDP es satisfecha cuando $x > t$.

Ejercicio 2 [Práctico]: Comportamiento numérico.

Tomaremos la ecuación de transporte (1) con la velocidad $c = 2$, en el dominio $x \in [-2, 3]$ con condiciones de frontera periódicas y la condición inicial

$$u(x,0) \quad = \quad \begin{cases} 1 - |x|, & \text{si } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Se considera el espaciamiento $H = 0.1$ fijo y con $\lambda = 0.2, 0.4, 0.6$ y 1.2 realiza las simulaciones con cada uno de los cinco códigos implementados hasta el tiempo final $T = 10$.

a) Observamos que *leapfrog* necesita un .$^{\text{em}}$pujoncito". Para ello, hay que hacer una única iteración con un esquema de un paso. Utilicen Lax-Friederichs y *ForwardTime-CentralSpace* para decidir cual parece mejor. (Es completamente subjetivo hasta este punto.)

b) Muestren que la solución al tiempo final es tal que $u(x,T) = u(x,0)$.

Finalmente, además de la percepción de cuál esquema parecer ser más apropiado, comparen $\mathbf{v}^0$ contra $\mathbf{v}^N$ en tablas, para los cuatro valores de λ, tomando en cuenta

- Las normas 1 y 2 de la diferencia, $||\mathbf{v}^N - \mathbf{v}^0||_1$ y $||\mathbf{v}^N - \mathbf{v}^0||_2$.
- Los valores m, $\tilde{m}$ para los cuales v_m^0 y $v_{\tilde{m}}^N$ es el valor máximo en ese tiempo.
- Las alturas de los valores máximos de v_m^0 y $v_{\tilde{m}}^N$.
- Si existen valores negativos en la solución numérica y la magnitud de estos.

Observación: hay algunos valores de λ que no nos dan información relevante. (Pueden quitarlos de las tablas argumentando su extracción.)

Concluyan qué esquema les parece más adecuado y porqué.

Resultados

Las siguientes tablas corresponden a el valor de $|v^N - v^0|$, para las normas 1 y 2, en cada uno de los métodos. Asimismo, las tablas corresponden a un valor de λ en específico. Los resultados son los siguientes:

Con $\lambda = 0.2$:

	Metodo02	Norma102	Norma202
1	'FwT-FwS'	10	2.5884
2	'FwT-BwS'	10	2.5884
3	'FwT-CS'	3.2963e+15	5.6976e+14
4	'LF'	10	2.5884

Con $\lambda = 0.4$:

Metodo04	Norma104	Norma204
'FwT-FwS'	10	2.5884
'FwT-BwS'	10	2.5884
'FwT-CS'	1.8667e+26	3.0409e+25
'LF'	10	2.5884

Con $\lambda = 0.6$:

Metodo06	Norma106	Norma206
'FwT-FwS'	10	2.5884
'FwT-BwS'	10.0000	2.5884
'FwT-CS'	5.4139e+31	8.9966e+30
'LF'	10.0000	2.5884

Con $\lambda = 1.2$:

Metodo12	Norma112	Norma212
'FwT-FwS'	7.4409e+40	5.5287e+40
'FwT-BwS'	10	2.5884
'FwT-CS'	9.0392e+33	1.6642e+33
'LF'	10	2.5884

Se puede notar que, los mejores métodos son "Lax-Friedrichsz "Forward-time, Backward space"debido a la consistencia en el valor de las normas para distintos valores de λ.

Ejercicio 3 [Práctico]: Convergencia numérica.

Para el mayor λ aceptable, realicen las mismas pruebas con $h = 0.01$ y $h = 0.001$ y digan si su esquema ganador continua siéndolo. ¿Pueden argumentar con la precisión del esquema?

Resultados

Estos fueron los resultados de $|v^N - v^0|$ con las normas 1 y 2 con h = 0.01:

Con $\lambda = 0.2$:

Metodo02	Norma102	Norma202
'FwT-FwS'	Inf	Inf
'FwT-BwS'	100.0000	8.1652
'FwT-CS'	8.7310e+305	8.0741e+304
'LF'	100.0000	8.1652

Con $\lambda = 0.4$:

Metodo04	Norma104	Norma204
'FwT-FwS'	9.9386e+295	8.4537e+294
'FwT-BwS'	100.0000	8.1652
'FwT-CS'	1.0411e+225	9.5794e+223
'LF'	100.0000	8.1652

Con $\lambda = 0.6$:

Metodo06	Norma106	Norma206
'FwT-FwS'	2.2300e+228	1.8103e+227
'FwT-BwS'	1.6725e+224	2.6168e+223
'FwT-CS'	1.2510e+178	1.2354e+177
'LF'	100.0000	8.1652

Con $\lambda = 1.2$:

Metodo12	Norma112	Norma212
'FwT-FwS'	8.5441e+140	6.9557e+139
'FwT-BwS'	8.5441e+136	1.3091e+136
'FwT-CS'	1.3568e+113	1.6628e+112
'LF'	100.0000	8.1652

En las tablas podemos observar que el mejor método es "Lax-Friedrichs"debido a su constancia para los distintos valores de λ. Asismismo, las siguientes tablas muestran los resultados para $h = 0.001$:

Con $\lambda = 0.2$:

Metodo02	Norma102	Norma202
'FwT-FwS'	Inf	Inf
'FwT-BwS'	NaN	NaN
'FwT-CS'	NaN	NaN
'LF'	1000.0000	25.8199

Con $\lambda = 0.4$:

Metodo04	Norma104	Norma204
'FwT-FwS'	Inf	Inf
'FwT-BwS'	NaN	NaN
'FwT-CS'	NaN	NaN
'LF'	1000.0000	25.8199

Con $\lambda = 0.6$:

Metodo06	Norma106	Norma206
'FwT-FwS'	Inf	Inf
'FwT-BwS'	NaN	NaN
'FwT-CS'	NaN	NaN
'LF'	1000.0000	25.8199

Con $\lambda = 1.2$:

Metodo12	Norma112	Norma212
'FwT-FwS'	4.0985e+225	1.0582e+224
'FwT-BwS'	4.0985e+219	6.2791e+218
'FwT-CS'	1.2890e+195	1.5486e+194
'LF'	1000.0000	25.8199

Claramente podemos concluir que el mejor método es ”Lax-Friedrichs”para los diferentes valores de λ y h.

Ejercicio 4 [Teórico/Práctico]: Esquemas implícitos.

En este ejercicio se construye un esquema implícito para la ecuación del transporte (1).

a) A partir de series de Taylor, aproximen el *punto auxiliar* $u_{m+1/2}^{n+1/2}$ con diferencias centradas tanto para la derivada en el tiempo como en el espacio. Encuentren un esquema que utiliza los puntos $u_{m+1/2}^{n+1/2}$, $u_m^{n+1/2}$, $u_{m+1/2}^n$ y u_m^n. Este es considerado el *esquema de la caja*. Definan su orden teórico de precisión.

b) Realicen las pruebas dadas en el Ej. 2 y determinen la estabilidad del esquema para los cuatro valores de λ. Expliquen sus conclusiones usando otros valores de h si es necesario.

Ayuda: En la implementación del esquema es necesario resolver un sistema de la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, pueden utilizar la contra diagonal de MATLAB.

Resultados

Para aproximar el punto auxiliar $u_{m+1/2}^{n+1/2}$, comenzamos con u_t. Para esto comenzamos por escribir la expansión de $u_{m+1/2}^{n+1/2\pm1/2}$:

$$\begin{aligned} u(x_m + h/2,\ t_n + k/2 \pm k/2) = {} & u(x_m + h/2,\ t_n + k/2) \\ & \pm \frac{k}{2}\ u_t(x_m + h/2,\ t_n + k/2) \\ & + \frac{k^2}{8}\ u_{tt}(x_m + h/2,\ t_n + k/2) \\ & + \mathcal{O}(k^3), \end{aligned}$$

con la cual podemos escribir la diferencia centrada $u_{m+1/2}^{n+1} - u_{m+1/2}^n$ como:

$$u(x_m + h/2,\ t_n + k) - u(x_m + h/2,\ t_n) = k \cdot u_t(x_m + h/2,\ t_n + k/2) + \mathcal{O}(k^3). \qquad (1)$$

Para ajustar este punto tomaremos el punto $u_{m+1/2\pm1/2}^{n+1}$:

$$\begin{aligned} u(x_m + h/2 \pm h/2,\ t_n + k) = {} & u(x_m + h/2,\ t_n + k) \\ & \pm \frac{h}{2} u_x(x_m + h/2,\ t_n + k) \\ & + \frac{h^2}{8} u_{xx}(x_m + h/2,\ t_n + k) \\ & + \mathcal{O}(h^3) \end{aligned}$$

y el punto $u^n_{m+1/2\pm 1/2}$:

$$\begin{aligned}u(x_m+h/2\pm h/2,\ t_n) = u(x_m+h/2,\ t_n)\\ \pm\frac{h}{2}u_x(x_m+h/2,\ t_n)\\ +\frac{h^2}{8}u_{xx}(x_m+h/2,\ t_n)\\ +\mathcal{O}(h^3).\end{aligned}$$

En ambos casos tomamos las sumas de las diferencias, es decir, $u^{n+1}_{m+1}+u^{n+1}_m$:

$$u(x_m+h,\ t_n+k)+u(x_m,\ t_n+k) = 2\cdot u(x_m+h/2,\ t_n+k)+\mathcal{O}(h^2) \tag{2.1}$$

y $u^n_{m+1}+u^n_m$:

$$u(x_m+h,\ t_n)+u(x_m,\ t_n) = 2\cdot u(x_m+h/2,\ t_n)+\mathcal{O}(h^2). \tag{2.2}$$

Finalmente podemos escribir u_t como:

$$\begin{aligned}u_t &= \frac{u(x_m+h/2,\ t_n+k)-u(x_m+h/2,\ t_n)}{k}+\mathcal{O}(k^2) && \text{(Despejando } u_t \text{ de 1)}\\ &= \frac{u(x_m+h,\ t_n+k)+u(x_m,\ t_n+k)+\mathcal{O}(h^2)}{2k} && \text{(Sustituyendo 2.1)}\\ &- \frac{(u(x_m+h,\ t_n)+u(x_m,\ t_n))+\mathcal{O}(h^2)}{2k} && \text{(Sustituyendo 2.2)}\\ &+\mathcal{O}(k^2),\end{aligned}$$

por lo que escribiremos esta aproximación de la forma:

$$v_t = \frac{v^{n+1}_{m+1}+v^{n+1}_m-v^n_{m+1}-v^n_m}{2k},$$

que cuenta con un orden teórico de precisión de

$$\mathcal{O}(\frac{h^2}{k},k^2).$$

Continuamos con la expansión de $u^{n+1/2}_{m+1/2\pm 1/2}$, para aproximar u_x

$$\begin{aligned}u(x_m+h/2\pm h/2,\ t_n+k/2) = u(x_m+h/2,\ t_n+k/2)\\ \pm\frac{h}{2}\ u_x(x_m+h/2,\ t_n+k/2)\\ +\frac{h^2}{8}\ u_{xx}(x_m+h/2,\ t_n+k/2)\\ +\mathcal{O}(h^3),\end{aligned}$$

con la cual podemos escribir la diferencia centrada $u^{n+1/2}_{m+1}-u^{n+1/2}_m$ como:

$$u(x_m+h,\ t_n+k/2)-u(x_m,\ t_n+k/2) = h\cdot u_t(x_m+h/2,\ t_n+k/2)+\mathcal{O}(h^3). \tag{3}$$

Para ajustar este punto tomaremos el punto $u_{m+1}^{n+1/2\pm 1/2}$:

$$\begin{aligned} u(x_m+h,\ t_n+k/2\pm k/2) &= u(x_m+h,\ t_n+k/2) \\ &\pm \frac{k}{2}u_t(x_m+h,\ t_n+k/2) \\ &+ \frac{k^2}{8}u_{tt}(x_m+h,\ t_n+k/2) \\ &+ \mathcal{O}(k^3) \end{aligned}$$

y el punto $u_m^{n+1/2\pm 1/2}$:

$$\begin{aligned} u(x_m,\ t_n+k/2\pm k/2) &= u(x_m,\ t_n+k/2) \\ &\pm \frac{k}{2}u_t(x_m,\ t_n+k/2) \\ &+ \frac{k^2}{8}u_{tt}(x_m,\ t_n+k/2) \\ &+ \mathcal{O}(k^3). \end{aligned}$$

En ambos casos tomamos las sumas de las diferencias, es decir, $u_{m+1}^{n+1}+u_{m+1}^{n}$:

$$u(x_m+h,\ t_n+k)+u(x_m+h,\ t_n) = 2\cdot u(x_m+h,\ t_n+k/2)+\mathcal{O}(k^2) \tag{4.1}$$

y $u_m^{n+1}+u_m^n$:

$$u(x_m,\ t_n+k)+u(x_m,\ t_n) = 2\cdot u(x_m,\ t_n+k/2)+\mathcal{O}(k^2). \tag{4.2}$$

Finalmente podemos escribir u_x como

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{u(x_m+h,\ t_n+k/2)-u(x_m,\ t_n+k/2)}{h}+\mathcal{O}(h^2) && \text{(Despejando } u_x \text{ de 3)} \\ &= \frac{u(x_m+h,\ t_n+k)+u(x_m+h,\ t_n)+\mathcal{O}(k^2)}{2h} && \text{(Sustituyendo 4.1)} \\ &- \frac{(u(x_m,\ t_n+k)+u(x_m,\ t_n))+\mathcal{O}(k^2)}{2h} && \text{(Sustituyendo 4.2)} \\ &+ \mathcal{O}(h^2), \end{aligned}$$

por lo que escribiremos esta aproximación de la forma

$$v_x = \frac{v_{m+1}^{n+1}+v_{m+1}^{n}-v_m^{n+1}-v_m^n}{2h},$$

que cuenta con un orden teórico de precisión de

$$\mathcal{O}(\frac{k^2}{h}, h^2).$$

Como podemos ver, formamos el *esquema de la caja*, con las ecuaciones

$$v_t = \frac{v_{m+1}^{n+1}+v_m^{n+1}-v_{m+1}^{n}-v_m^n}{2k}$$

$$\text{y} \qquad v_x = \frac{v_{m+1}^{n+1}+v_{m+1}^{n}-v_m^{n+1}-v_m^n}{2h},$$

con una precisión de

$$\mathcal{O}(h^2, k^2, \frac{h^2}{k}, \frac{k^2}{h}).$$

Analizando esta precisión podemos ver que esta varía según lo que se quiera mejorar, pues, si sólo se busca mejorar una de las dos mallas entonces esta mejorará cuadráticamente, mientras que la otra se mantendrá constante; pero, si lo que se busca es mejorar ambas resoluciones al mismo tiempo, esta convergencia se vuelve lineal.