ITAM	Integrantes	Clave única
	Ricardo Alonso Mendiola	174759
	Marcela Alejandra Carrillo Gamez	155145
2^{do} proyecto de Cálculo Numérico	Enrique Ampudia González	164581

Ejercicio 1: Euler explícito

Aplica el método de Euler (explícito) con paso $h = 0.1$ al PVI:

$$y' = -2y + 4t, \quad y(0) = 3 \qquad \text{(PVI (1))}$$

en el intervalo [0,1].

a) Lista los valores de la solución numérica w_k para $k = 0, 1, \ldots, 10$.

b) Dada la familia de soluciones

$$y(t) = (y_0 - 2t_0 + 1)e^{-2t} + 2t - 1 \qquad \text{(PVI (2))}$$

- encuentra el error global en $t = 1$ usando la solución exacta.
- dibuja una gráfica log-log del error **global** del método de Euler en $t = 1$ como función de $h = 0.1 \times 2^{-k}$ para $k = 0, 1, \ldots, 5$.
- crea una tabla con las columnas como abajo, que contienen en la fila k los valores asociados al paso $h_k := 0.1 \times 2^{-k}$ donde $k = 0, 1, \ldots, 5$.

k	paso	máximo de los errores **locales** del método de Euler	`eoc`
1	...		
$\vdots$	...		

- Interpreta la gráfica y la tabla. ¿Cómo se relacionan los resultados con la teoría? Nota: Guarda la gráfica con formato `PDF` (o `EPS`) de preferencia.

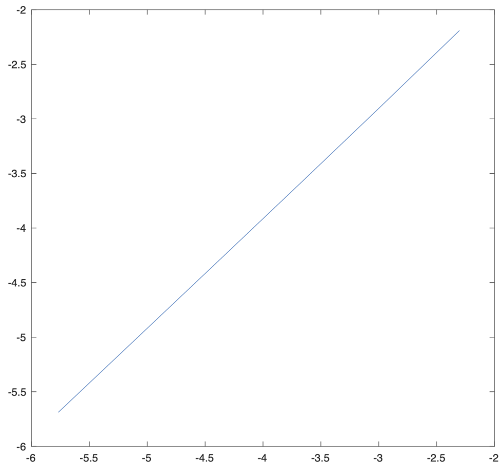
Resultados

Los valores numéricos obtenidos por el método de Euler fueron:

`k`	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
w_k	3	2.4	1.96	1.648	1.4384	1.3107	1.2485	1.2388	1.2710	1.3368	1.4294

El valor real en $t = 1$ es 1.5413, por lo que el error global es de **0.11184440334645**

La gráfica log-log del error global del Método de Euler en $t = 1$ es:



Mientras que el máximo de los errores locales y sus respectivos **eoc** son:

k	paso h_k	Máximo de los errores locales	eoc
1	0.05	0.35	1
2	0.025	0.175	1
3	0.0125	0.0875	1
4	0.00625	0.04375	1
5	0.003125	0.0218749	1

Como podemos ver, tanto por la pendiente de la gráfica log-log del error global como por el **eoc** del error local, el método de Euler tiene una convergencia prácticamente lineal. Esto además cuadra perfectamente con la teoría ya que, como sabemos, el método de Euler se puede clasificar como Runge-Kutta de orden 1, los cuales tienen un error de $\mathcal{O}(h)$.

Ejercicio 2: Trabajo *vs* precisión *vs* orden

Para este ejercicio usa el PVI (1) y su solución general exacta PVI (2). El trabajo realizado por un método depende del número de intervalos y "estados" (evaluaciones de funciones).

- Aplica el método del Trapecio (explícito) con el paso $h1 = 1/10$ y calcula el error global $E_{Trapecio}(h_1)$ en el punto $t = 1$.
- Después dobla el trabajo de las siguientes formas:
  a) usa el mismo método con el paso $h_2 = h_1/2$ y calcula $E_{Trapecio}(h_2)$,
  b) ahora usa el método Runge-Kutta 4 con el mismo paso h_1 y calcula $E_{RK4}(h_1)$.
- Rellena la tabla siguiente.

	Trapecio(h_1)	Trapecio (h_2)	RK4(h_1)
Error (global en t=1)	.	.	.
Número de estados	.	.	.

¿Cuál es la forma más conveniente para reducir el error (en este caso) y porqué?

Resultados

Tabla de errores y números de estados:

	Trapecio(h_1)	Trapecio(h_2)	RK4(h_1)
Error (global en t=1)	0.00845099	0.00194869	0.00001706
Número de estados	10	20	10

En este caso nos parece que la mejor manera de reducir el error es el método de Runge-Kutta 4 pues, a pesar de que tiene una mayor carga de trabajo, el orden y la precisión del mismo es mucho mayor que en el caso del Trapecio con 10 estados y el Trapecio con 20 estados.

Ejercicio 3: Punto medio implícito

Aplica el método del Punto Medio implícito con pasos $h = 1/10$ y $h = 1/100$ al PVI

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + 2y_2 \\ y_2' &= -2y_1 - y_2 \end{aligned} \quad \text{con} \quad \begin{aligned} y_1(0) &= 1 \\ y_2(0) &= 0 \end{aligned}$$

para $t \in [0, 1]$. La solución exacta es:

$$y_1(t) = e^{-t} \cos 2t$$

$$y_2(t) = e^{-t} \sin 2t\,.$$

a) Para ambos pasos ($h = 1/10$ y $h = 1/100$) encuentra los errores globales aproximando los componentes y_1 y y_2 en $t = 1$.

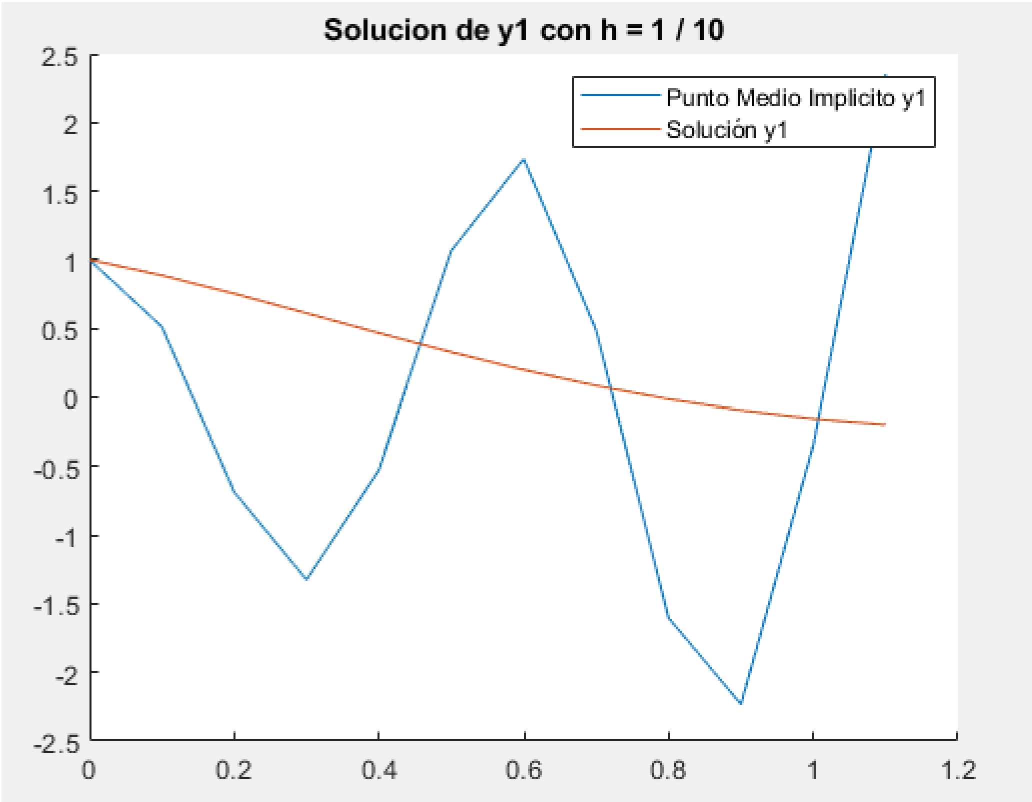
b) ¿Es consistente la reducción del error (al pasar de $h = 1/10$ a $h = 1/100$) con el orden del método del Punto Medio? Explica.

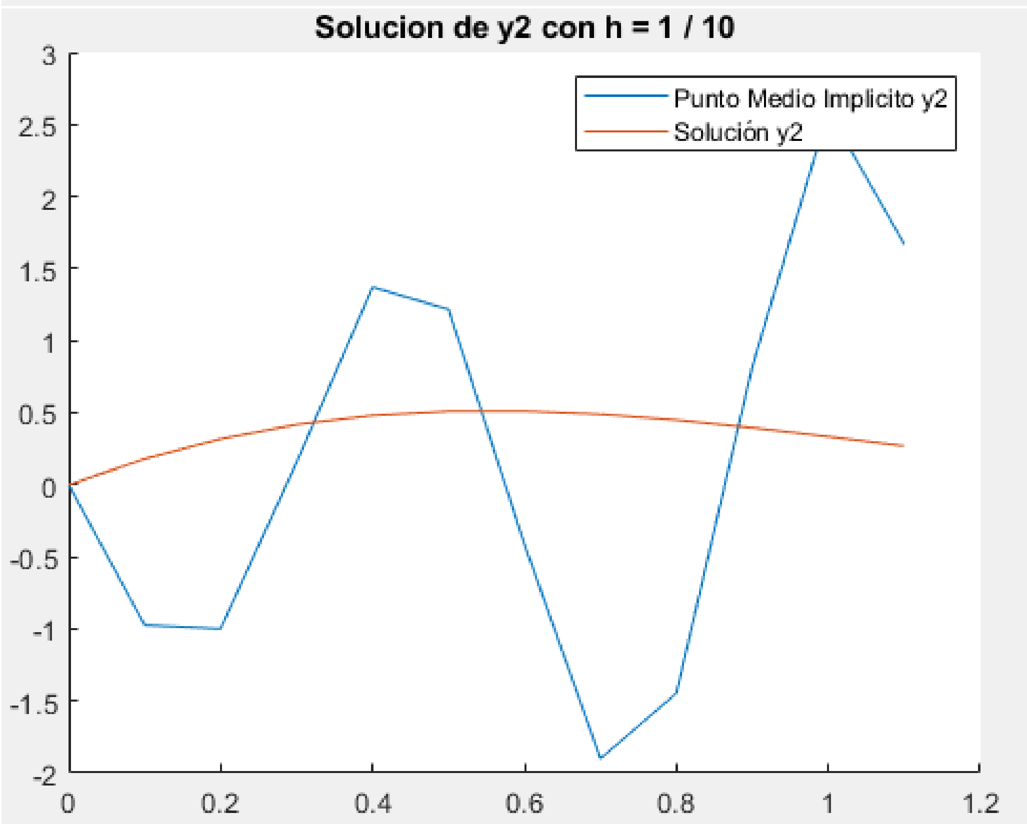
Resultados

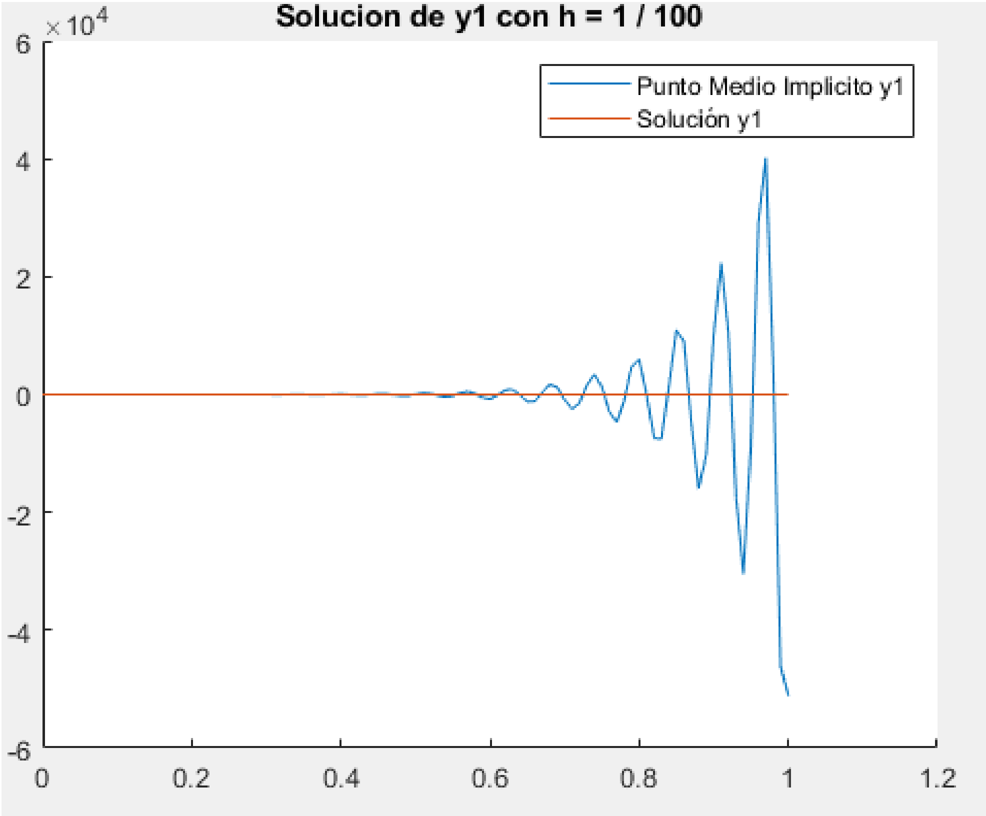
Los errores globales para y_1 y y_2 son los siguientes:

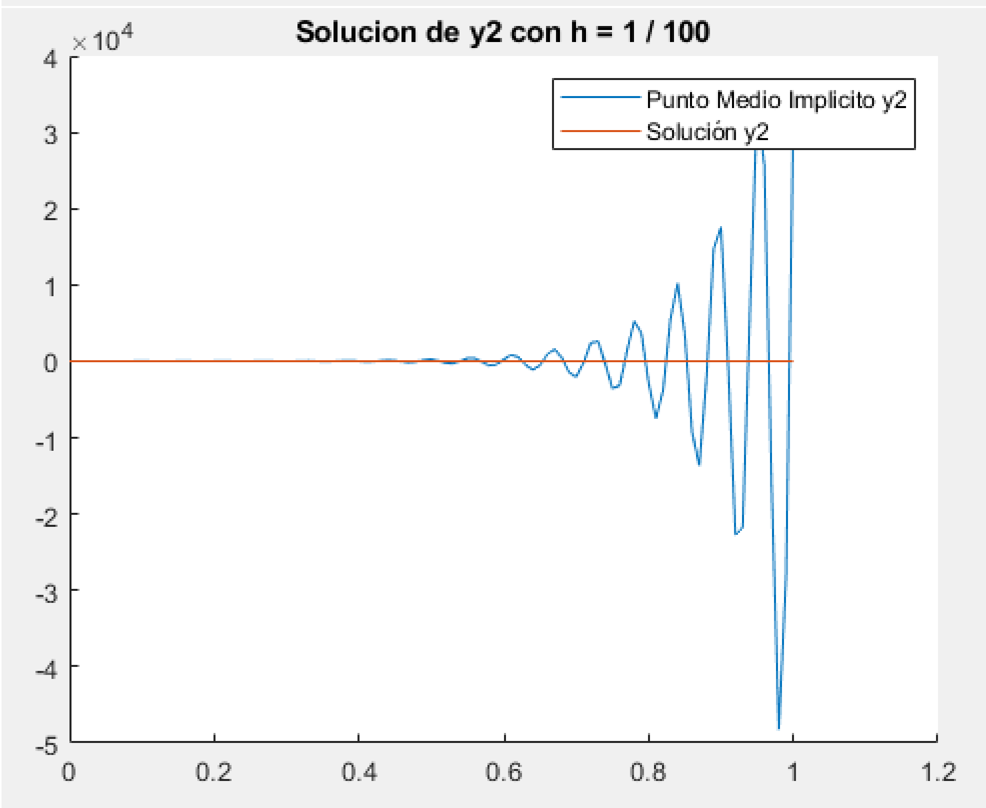
h	y1	y2
0.1	0.1929	2.667
0.01	5.1133x10^4	3.1938x10^4

Podemos observar que el error no mejora, y los resultados no coinciden con el orden del método. Estos resultados probablemente se obtuvieron debido a un error en el método. Al utilizar otra forma de encontrar la raíz en el método del punto medio implícito o usando un método explícito podríamos obtener mejores resultados. Por otro lado, podría ser que estas ecuaciones tienen intervalos de cambios altos. Es decir, al aumentar el número de pasos estamos acumulando más errores. Por lo tanto, existen ecuaciones en las que aumentar el paso no disminuye el error. Se pueden ver las aproximaciones en las siguientes gráficas:


Solucion de y1 con h = 1 / 10
Punto Medio Implicito y1
Solución y1
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2


Solucion de y2 con h = 1 / 10
Punto Medio Implicito y2
Solución y2
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2





Al ver las gráficas podemos concluir que, efectivamente, las funciones dadas cambian constantemente. Esto tiene sentido debido a que las soluciones son funciones trigonométricas. Es decir, podemos ver un movimiento "oscilatorio" en las aproximaciones.

Ejercicio 4: Ecuaciones *stiff*: explícitio *vs* implícito

Concidera el PVI

$$y' = -5y + 6y^2 - y^3, \quad y(0) = 3, \quad t \in [0, 10]\,.$$

a) Aplica *Euler implícito* con paso constante $h = \frac{1}{5}$ al PVI.
Lista el valor $y(10)$.
¿Hacia cuál de las soluciones de equilibrio converge la trayectoria?

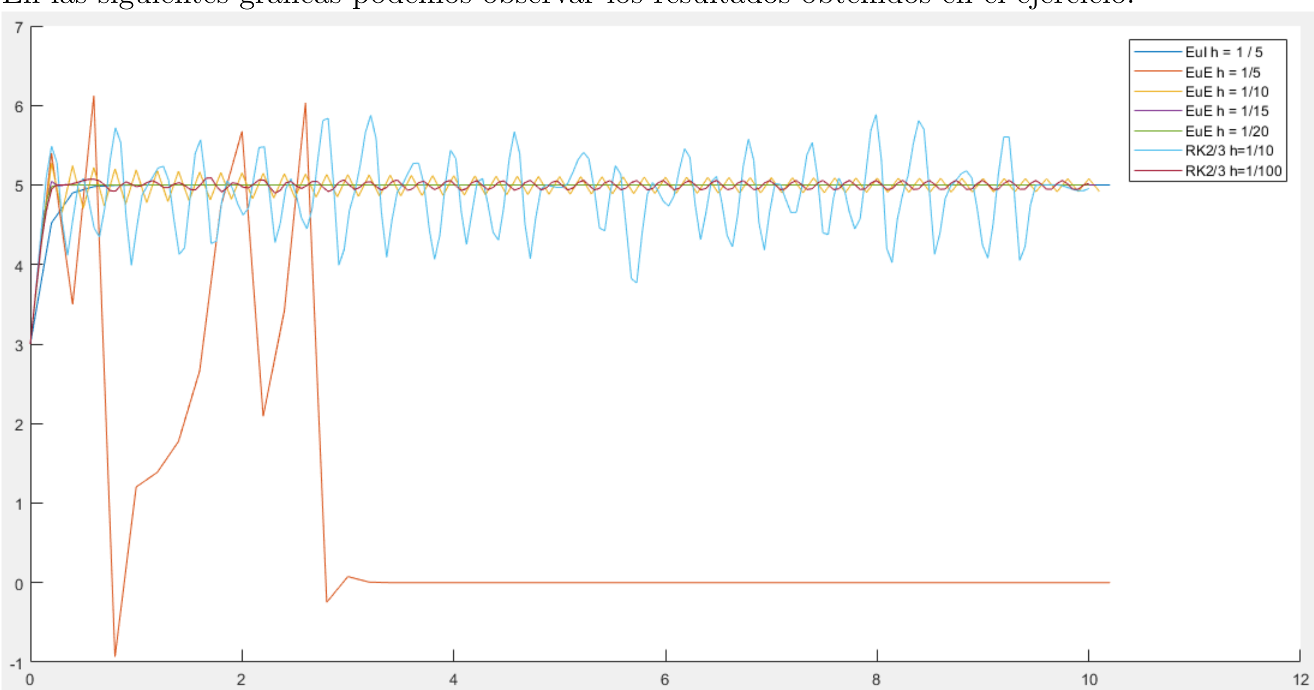
b) Ahora aplica *Euler explícito* con pasos constantes $h \in \{\frac{1}{20}, \frac{1}{15}, \frac{1}{10}, \frac{1}{5}\}$.
¿Para que valores de h funciona bien el método de Euler explícito? (es decir, la trayectoria converge hacia la solución de equilibrio correcta). Usando la teoría explica porqué.

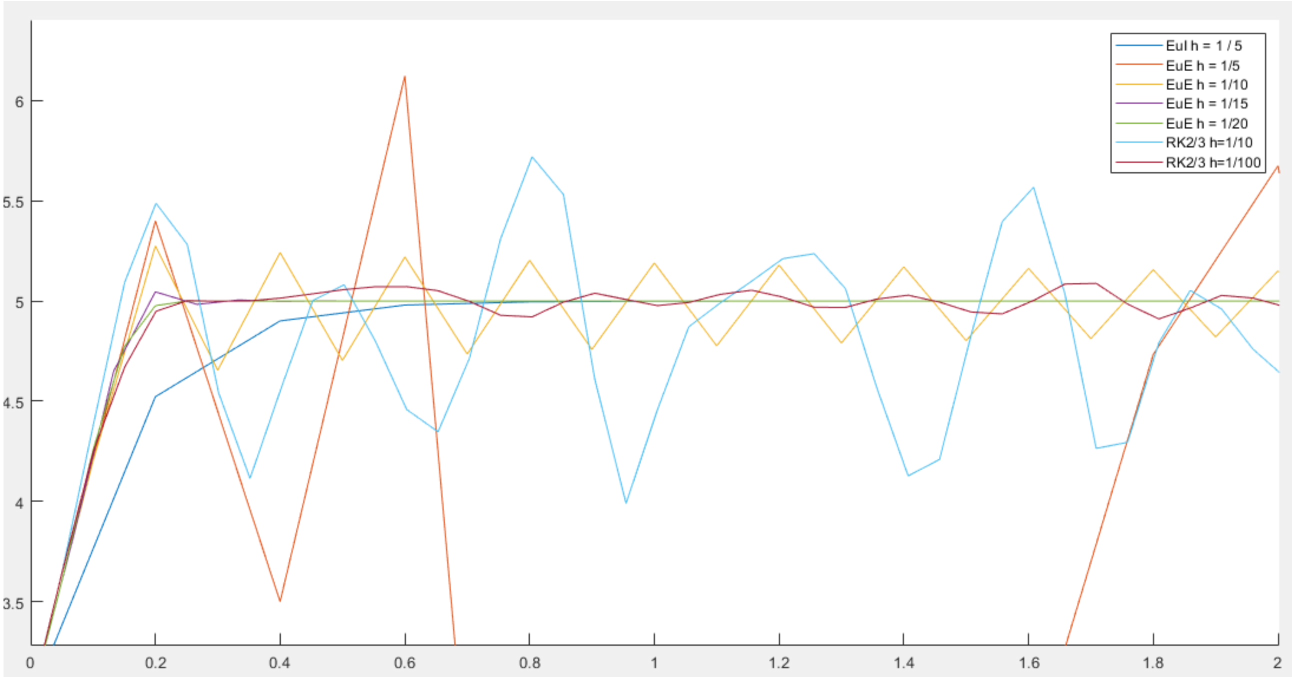
c) Aplica el método RK2/3 adaptativo con tolerancia relativa *tol* $\in \{\frac{1}{10}, \frac{1}{100}\}$ y compara con los resultados anteriores. ¿Qué es mejor, el método implícito o un método explícito adaptativo?

d) Determina el paso máximo estable para el método RK2/3 adaptativo (sin extrapolación).

Resultados

En las siguientes gráficas podemos observar los resultados obtenidos en el ejercicio:





Podemos observar que el método de Euler Explícito con $h = \frac{1}{15}$ y $h = \frac{1}{20}$ son cercanas al método de Euler Implícito con $h = \frac{1}{5}$ en la gráfica. Asimismo, Euler Explícito con con $h = \frac{1}{20}$ converge en 7 iteraciones al punto atractor (cinco) mientras que Euler Explícito con $h = \frac{1}{15}$ y Euler Implícito con $h = \frac{1}{5}$ convergen en 8 iteraciones. Asimismo, Euler Explicíto con $h = \frac{1}{5}$ y $h = \frac{1}{10}$ dan malas aproximaciones debido a que la primera se aleja de las demás gráficas, y la segunda gráfica oscila entre dos valores. Por otro lado, el método RK2/3 con $h = \frac{1}{10}$ y $\frac{1}{100}$ oscilan en el punto atractor. La amplitud de la oscilación es mayor con $h = \frac{1}{10}$ que con $h = \frac{1}{100}$. Podemos concluir que para este problema es mejor utilizar Euler Implícito porque converge al punto atractor con un h más pequeño en el mismo número de iteraciones.

Ejercicio 5: Verificar orden

El objetivo de este ejercicio es comparar método y verificar sus orden global. Usando una (y solo una) ecuación de tu preferencia, verificar el orden y comparar los errores de los siguientes métodos:

- `Euler` (explícito)
- `Trapecio` (explícito), `Punto Medio` (explícito)
- `RK4`

Se recomienda presentar los resultados de este ejercicio (junto con tu ecuación y la solución exacta) en forma (de preferencia) de una gráfica (log-log) o en forma de tablas. Viendo los resultados se debe poder comparar los errores y el orden de los métodos (usa los 3 valores de h dadpos por 1/50, 1/100, 1/200).

Resultados

Para este ejercicio utilizamos el PVI:

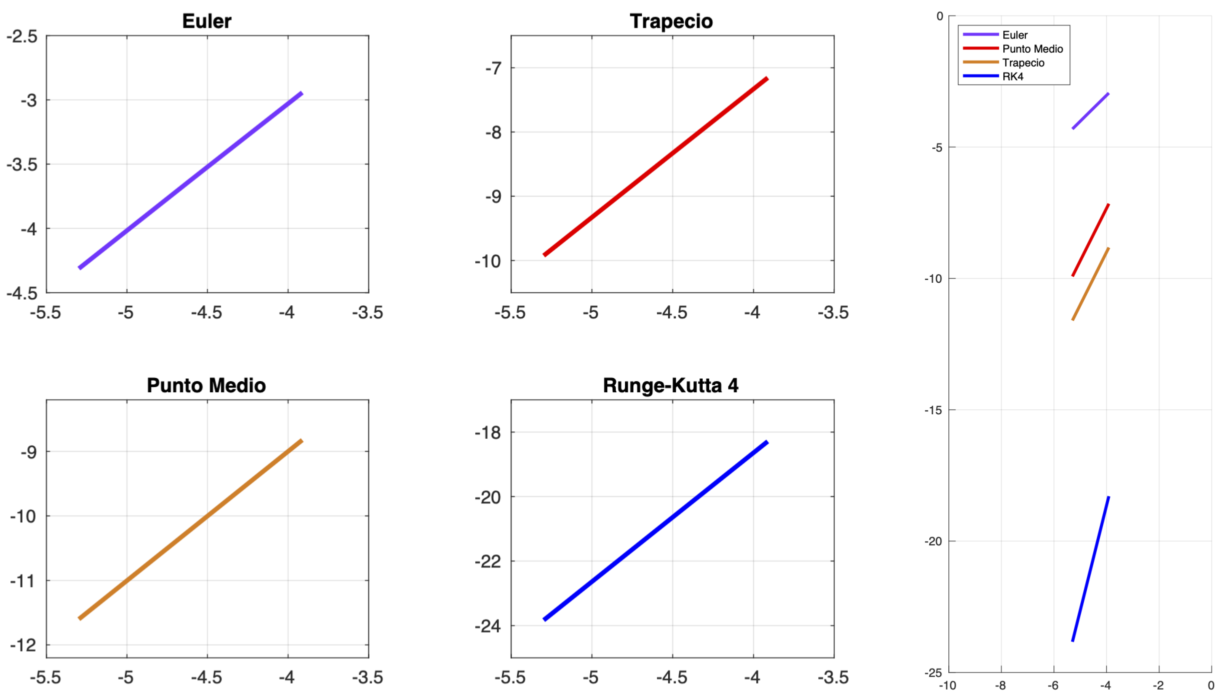
$$y' = y - t^2 + 1 \quad \text{con} \quad y(0) = \frac{1}{2}$$

en el intervalo [0,2] y su solución real:

$$y = -\frac{1}{2}e^t + (t+1)^2$$

Para este PVI, podemos ver que el comportamiento es el esperado según la teoría ya que, como se muestra en las gráficas a continuación, el método de **Euler** muestra una aproximación de <u>orden 1</u>, los métodos del **Trapecio** y **Punto Medio** de <u>orden 2</u>, mientras que **Runge-Kutta 4** tiene un <u>orden 4</u>. En el primer *set* de gráficas esto se puede notar ya que la escala del eje 'y' es dos veces más grande según el orden.

Además de esto, podemos en la segunda gráfica que el método de **Runge-Kutta 4** es el mas acertado, pues es el que tiene errores más pequeños, mientras que el **Trapecio** y **Punto Medio** son bastante cercanos, por último el método **Euler** es el más impreciso.



Ejercicio 6: *Shooting method*

Dado el PVF

$$\begin{cases} y'' = 4y'(2-y) \quad para \quad t \in (0, 1/2) \\ y(0) = 2 \\ y(1/2) = 2 - \dfrac{\pi}{4} \end{cases} \tag{3}$$

aporxima su solución con el *shooting method* utilizando una pendiente inicial $s > -1$ de tu agrado e iteraciones del método Newton para aproximar la pendeinte exacta.
Para eso,

a) Define el PVI. (También debe estar en el documento.)

b) Escoge una pendiente inicial s_0 y aproxima la pendiente exacta con el método (con tolerancia 10^{-10}). Después, documenta el resultado (número de iteraciones de Newton, las pendientes obtenidas en cada iteración de Newton, digamos s_i y el valor de la función $F(s_1) = w(b; s_i) - y_b$.

c) Compara la solución obtenida con la solución exacta, dada por

$$y(t) = 2 - \frac{\pi t}{4} \tan\left(\frac{\pi t}{2}\right),$$

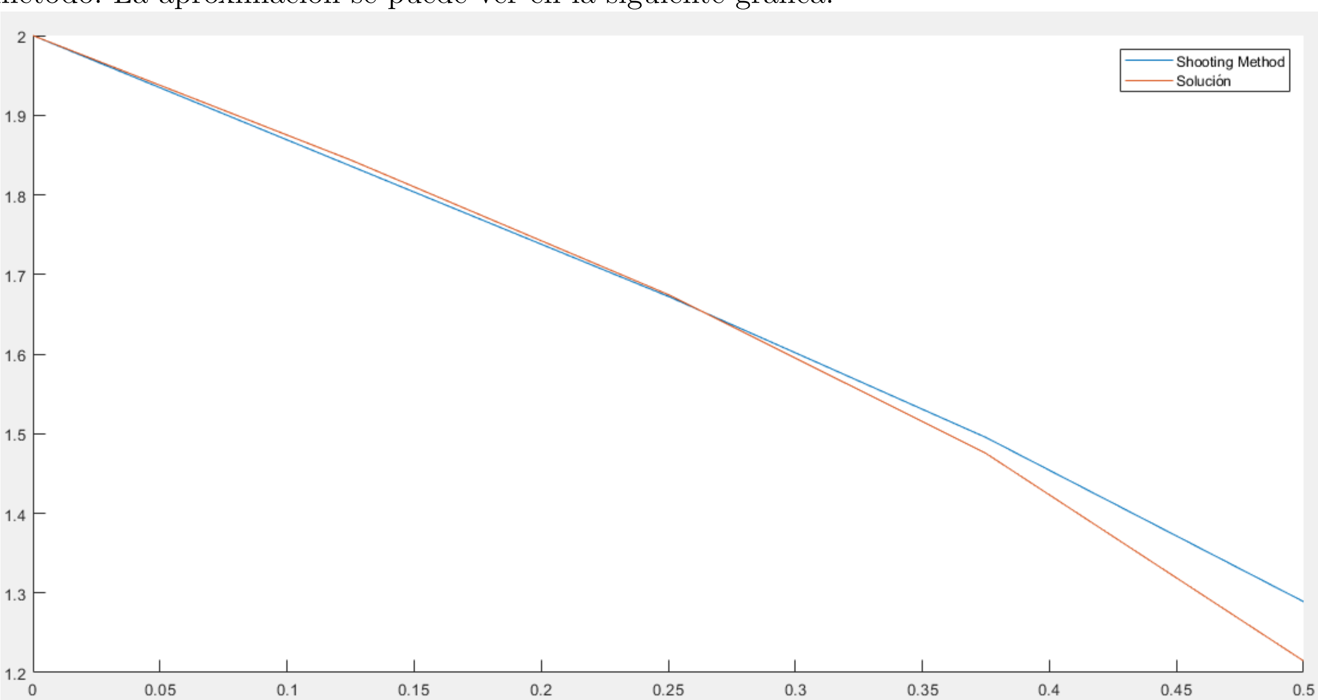
es decir, calcula y documenta el máximo de los errores en el intervalo [0,1/2].

Resultados

El PVI es el siguiente:

$$\begin{cases} y' = z, \quad y(0) = 2, \\ z' = y'' = 4z(2-y), \quad z(0) = y'(0) = -0.5. \end{cases}$$

Usamos a 0.5 como la pendiente inicial s_0. Utilizando una tolerancia de 10^{-10}, el método no se detiene debido a que la aproximación obtenida se aleja del resultado deseado en cada iteración. Sin embargo, utilizando una tolerancia de 0.1 obtenemos una buena aproximación para la función en $t = \frac{1}{2}$ porque el error relarivo es de 0.0613. Asimismo, el máximo de los errores en la solución aproximada fue de 0.0744. Por lo tanto, con una tolerancia de 0.1 tuvimos una buena aproximación del método. La aproximación se puede ver en la siguiente gráfica:



Aproximaciones de $y(\frac{1}{2})$ con 30 iteraciones (el vector llamado "aprox3" en el *script* que se obtiene con "shooting3"):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0.4114	0.4554	0.5057	0.5640	0.6322	0.7132	0.8117	0.9349	1.0965	1.3258	1.7104	2.8584	1.1984	1.4854	2.0590

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
-22.7842	-22.8680	-22.9519	-23.0358	-23.1196	-23.2034	-23.2872	-23.3711	-23.4549	-23.5386	-23.6224	-23.7062	-23.7900	-23.8737	-23.9575

Aproximaciones de $y(\frac{1}{2})$ con tolerancia de 0.1 (el vector llamado "aprox4" en el *script*):

1	2
3.0352	1.2890

Nota: Al final del método están los intentos que hicimos con el método de la secante y el método de Newton para un número específico de iteraciones. Sin embargo, el método requerido en el ejercicio se llama "shooting4".