

波浪能装置的原理与优化设计

摘要

本文主要研究在波浪激励的作用下，一种波浪能装置在实际工作中的运动规律。建立了基于牛顿三大定律和胡克定律的刚体运动模型，给出了在一定条件下装置输出最大功率时的阻尼系数。

对于问题 1，首先受力分析，并得出浮子和振子的运动规律，建立仅在竖直方向上的一维运动微分方程。利用给定的在静水中的静止条件，先求解出微分方程的初始条件，后根据 4 阶的 Runge-Kutta 方法求解微分方程。对于阻尼系数是定值的情况解出答案：

时间 (s)	浮子		振子	
	位移 (m)	速度 (m/s)	位移 (m)	速度 (m/s)
10	-0.19064	-0.64043	-0.00962	-0.69363
20	-0.59057	-0.24049	-0.43219	-0.27197
40	0.285364	0.313454	0.498483	0.333203
60	-0.31446	-0.47911	-0.12949	-0.51534
100	-0.08363	-0.60404	0.117887	-0.64293

对于阻尼系数是变化的情况。仅需改变微分方程中的某些项，也可用 4 阶的 Runge-Kutta 方法解微分方程。

对于问题 2，仅考虑稳定情况下的波浪能装置的平均输出功率，其稳定状态下的规律运动可以三角函数表示。通过最小二乘法拟合出该三角函数，进而简化计算功率所对应的被积函数，大大减少计算量。求解出不同阻尼系数下对应的功率，进而找出最优的组合。在阻尼系数为 $36807.9 \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}$ 取得最大平均输出功率为 229.984 W 。

对于问题 3，装置变为平面运动。将浮子和振子视为两个刚体，每个刚体的运动可以转化为平面上的平动和转动。这两个刚体的运动规律可用 6 个微分方程进行描述。由于平行于水平面上的平动分量幅度较小，可以简化为 4 个微分方程进行近似描述，求解出浮子和振子的运动规律。

对于问题 4，直线阻尼器系数和旋转阻尼器系数改变了微分方程中的某些项，先以某一步长对系数取值范围进行遍历，找出不同系数所对应的功率值，分析出最大功率值所对应的阻尼系数的大致范围，再在这个局部范围内以更小的步长重复上述操作，进而找到一个较为准确的最大功率值，为 331.82 W 。

关键词： 牛顿三大定律 微分方程 4 阶的 Runge-Kutta 方法 最小二乘法 平面运动

一、 问题重述

1.1 问题的背景

随着经济社会和工业的发展，人类面临日渐严重的环境污染和能源短缺问题，发展可再生、无污染的新能源已经成为当前亟待解决的问题。波浪能就是一种无污染、可再生的新型能源，其分布广泛，储量丰富，具有巨大的大规模利用价值；然而开发波浪能面临着很大的挑战：波动的能量大小和传播特性同样具有波动性，这种波动性会影响动力输出系统向外输出电能的质量；此外，波浪能的能量密度较低，因此，波浪能装置的能量转化效率是规模化利用波浪能的关键。

1.2 问题的提出

现在有一种波浪能装置，它由浮子、振子、中轴和能量输出系统（即 PTO，由弹簧和阻尼器构成）四个部分组成；为了有效指导波浪能装置的设计，需要建立数学模型解决下列问题：

问题 1： 设初始时刻浮子和振子平衡于静水中，考虑浮子在波浪中只做垂荡运动，建立浮子与振子的运动模型，计算浮子和振子在波浪激励力作用下的前 40 个波浪周期内时间间隔为 0.2 s 的垂荡位移和速度。

问题 2： 仍考虑浮子在波浪中只做垂荡运动，确定直线阻尼器的最优阻尼系数，使得 PTO 系统的平均输出功率最大。

问题 3： 在中轴底座中心增加一个转轴，如此中轴便能绕转轴转动；考虑浮子在波浪中做垂荡和纵摇运动，计算浮子和振子在波浪激励力和激励力矩作用下的前 40 个波浪周期内时间间隔为 0.2 s 的垂荡位移与速度和纵摇角位移与角速度。

问题 4： 考虑浮子在波浪中只做垂荡和纵摇的情形，针对直线阻尼器和旋转阻尼器的阻尼系数与固定区间的情况，建立确定直线阻尼器和旋转阻尼器最优阻尼系数的数学模型，并计算最大输出功率及相应的最优阻尼系数。

二、 问题分析

问题 1：

问题要求我们求解浮子和振子的位移与速度，所以本题的关键在于对浮子和振子受力分析，列出运动微分方程并求解；考虑浮子在波浪中只做垂荡运动，所以仅需计算一维方向中的运动；在浮子和振子运动时，两个部件的振动将发生耦合，题给阻尼系数将带来线性和非线性两种耦合项，所以本题的难点在于分别求解线性和非线性微分方程组。

问题 2：

在第一问已求得浮子和振子运动方程的基础上，又给定阻尼系数范围和函数关系，要求确定 PTO 系统最大输出功率和最优的阻尼系数。本题可通过在题给取值范围内选取阻尼系数的值，对每个阻尼系数求解出第一问的运动方程，随后拟合出相应的相对速度振幅与阻尼系数的函数关系，然后求得功率的表达式，最后根据极值条件求出最优阻尼系数和最大输出功率。

问题 3：

在第一问的基础上考虑装置可以发生纵摇运动，这时浮子和振子的运动为二维运动，其他要求与第一问类似；所以这题的难度在于求出浮子和振子的转动方程；转动方程的复杂性来源于力矩参考点的选取，我们考虑静水恢复力矩的机理，最终可以消去由参考点选取带来的复杂耦合项；随后用第一问类似的方法求解运动方程。

问题 4：

第四问与第二问对应，但只需考虑阻尼系数为常数时的最大输出功率与最优系数。

同样对每个阻尼系数求解第三问的运动方程，随后拟合出相对角速度振幅、相对速度振幅与两种阻尼系数的函数关系，从而可以求出功率的表达式，最后求出最优阻尼系数与最大输出功率。

三、 模型假设

- (1) 考虑海水为无粘、无旋的。
- (2) 浮子在波浪作用下会受到波浪激励力（矩）、附加惯性力（矩）、兴波阻尼力（矩）和静水恢复力（矩）。
- (3) 忽略中轴、底座、隔层及 PTO 的质量以及各种摩擦。
- (4) 假设紧贴浮子的海水层与浮子有相同的运动状态。
- (5) 假设波浪能装置处于稳定状态后才开始输出能量。
- (6) 假设水平面位置恒定，无起伏，波浪对浮子的影响仅体现为力(矩)的作用。
- (7) 假设阻尼器的能量转换效率为100%。

四、 符号系统

符号	说明	单位
m_f	浮子质量	kg
m_z	振子质量	kg
r_f	浮子底半径	m
r_z	振子半径	m
h_1	浮子圆柱部分高度	m
h_2	浮子圆锥部分高度	m
h_z	振子高度	m
l_0	弹簧原长	m
ρ	海水密度	kg/m^3
g	重力加速度	m/s^2
k_f	弹簧刚度	N/m
k_m	扭转弹簧刚度	$N \cdot m$
γ	静水恢复力矩系数	$N \cdot m$
ω	入射波频率	s^{-1}
m_{ad}	垂荡附加质量	kg
J_{ad}	纵摇附加转动惯量	$kg \cdot m^2$
μ_f	垂荡兴波阻尼系数	$N \cdot s/m$
μ_m	纵摇兴波阻尼系数	$N \cdot s \cdot m$
f	垂荡激励力振幅	N
L	纵摇激励力矩振幅	$N \cdot m$
λ_f	直线阻尼器系数	$N \cdot s/m$
λ_m	旋转阻尼器系数	$N \cdot s \cdot m$
λ_b	阻尼系数的比例系数	$/$

五、 模型建立与求解

5.1 问题 1：装置只做垂荡运动时的分析和求解：

1) 确定坐标系：

对于问题 1、2 而言，由于只考虑垂荡，可化为在竖直方向（ z 方向）上的一维运动，设起始时刻在静水中的浮子的中轴底座为原点 O ，建立一维坐标系，如图：

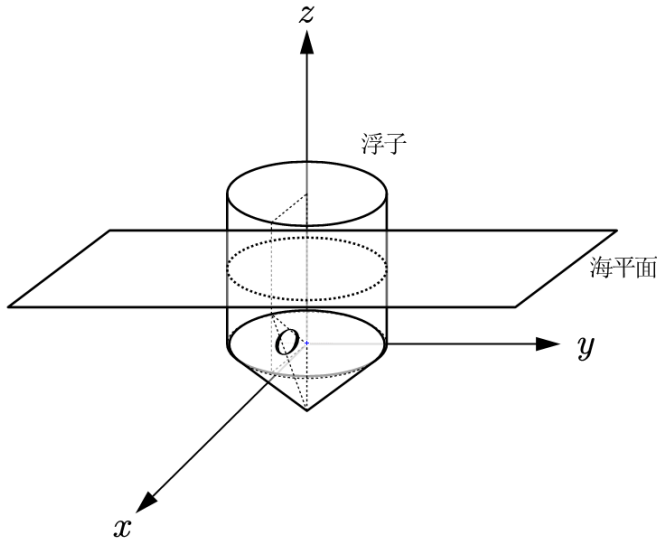


图 1 示意图

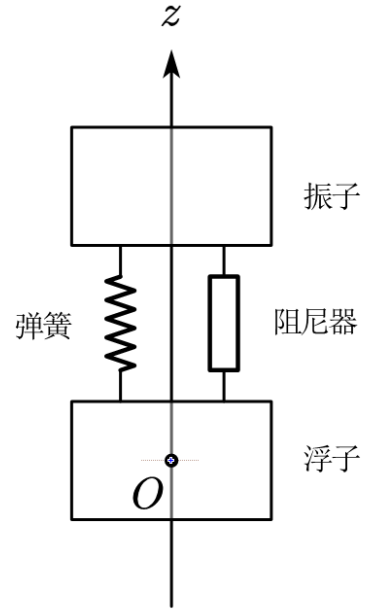


图 2 一维情况的浮子-振子模型

2) 受力分析：

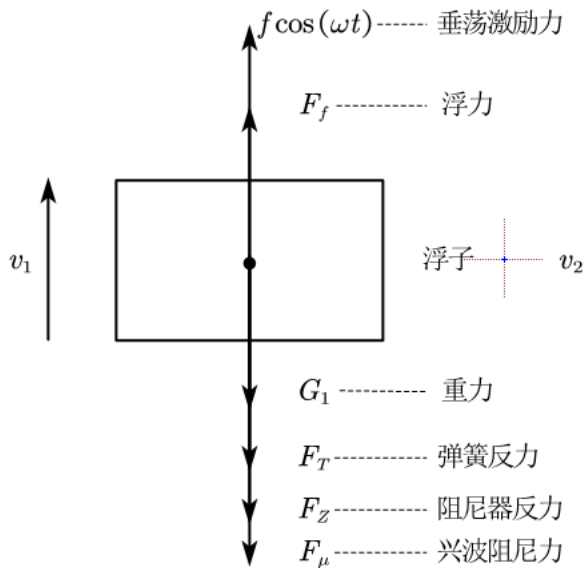


图 3-1 浮子的受力分析图

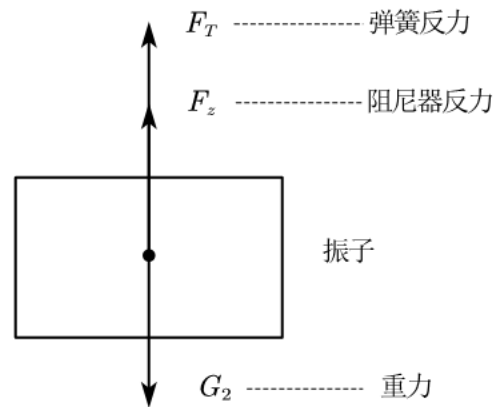


图 3-2 振子的受力分析图

设浮子的位移为 z_1 ，振子的位移为 z_2

根据牛顿第二定律 $ma = F$ 对浮子和振子建立微分方程组如下：

$$\begin{cases} (m_f + m_{ad}) \frac{d^2 z_1}{dt^2} = f \cos(\omega t) + (F_f - G_1) - F_T - F_Z - F_\mu \\ m_z \frac{d^2 z_2}{dt^2} = F_T + F_Z - G_2 \end{cases} \quad (1.1)$$

将浮力项、重力项、弹簧反力项、阻尼器反力项、兴波阻尼力项展开得：

$$\begin{cases} (m_f + m_{ad}) \frac{d^2 z_1}{dt^2} = f \cos(\omega t) - (\rho g \pi r_f^2 z_1 + m_z g) - k[l_0 - (z_2 - z_1)] - \lambda_f \left(\frac{dz_1}{dt} - \frac{dz_2}{dt} \right) - \mu_f \frac{dz_1}{dt} \\ m_z \frac{d^2 z_2}{dt^2} = k[l_0 - (z_2 - z_1)] + \lambda_f \left(\frac{dz_1}{dt} - \frac{dz_2}{dt} \right) - m_z g \end{cases} \quad (1.2)$$

初始时刻浮子和振子平衡于静水中，计算初始条件得：

$$\begin{cases} z_1(0) = 0 \\ \dot{z}_1(0) = 0 \\ z_2(0) = 0.2019575 \\ \dot{z}_2(0) = 0 \end{cases}$$

当直线阻尼器的阻尼系数为常量 $\lambda_f = 10000 N \cdot s/m$ 时，联立初始条件和微分方程组，采用 4 阶 Runge-Kutta 法解微分方程得如下图像：

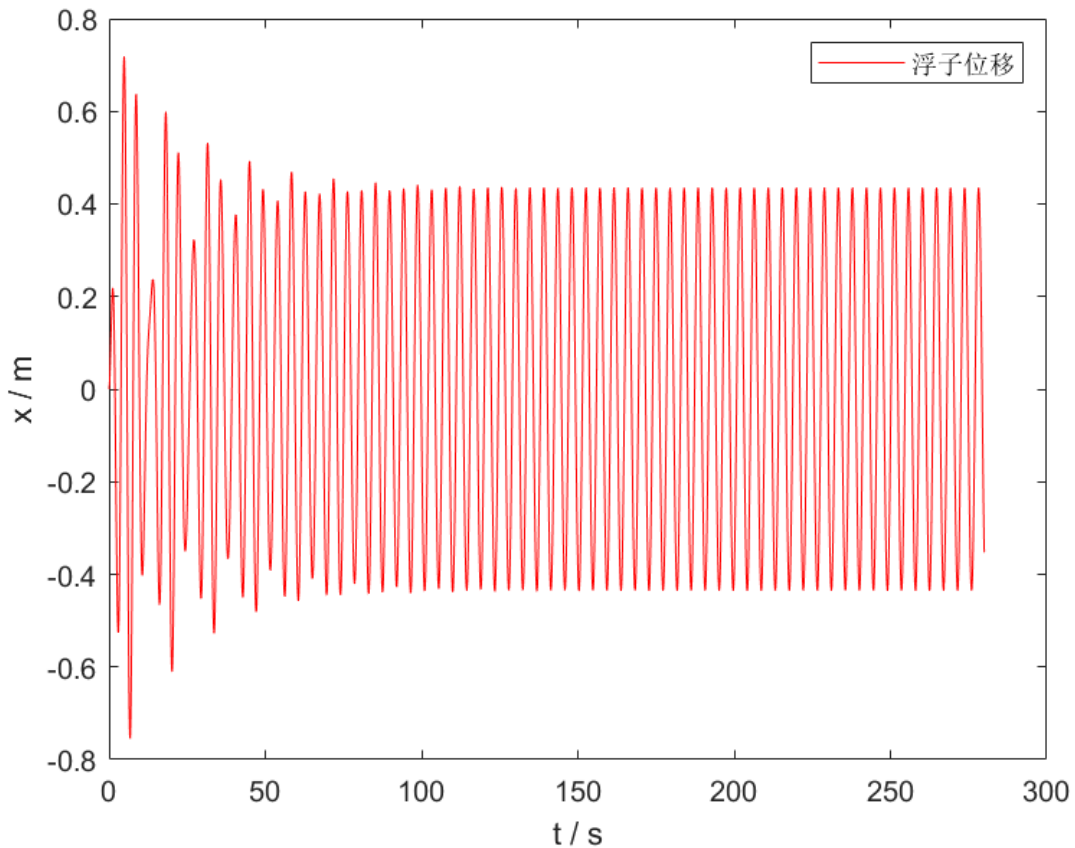


图 4-1 浮子位移图

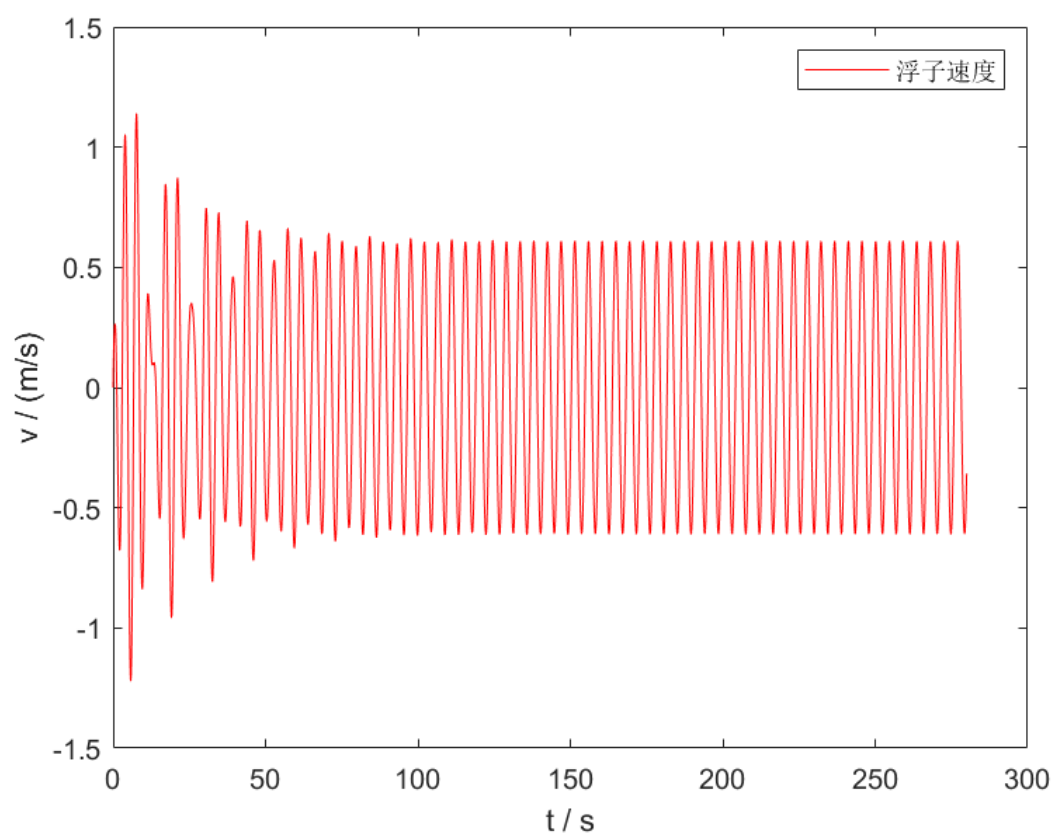


图 4-2 浮子速度图

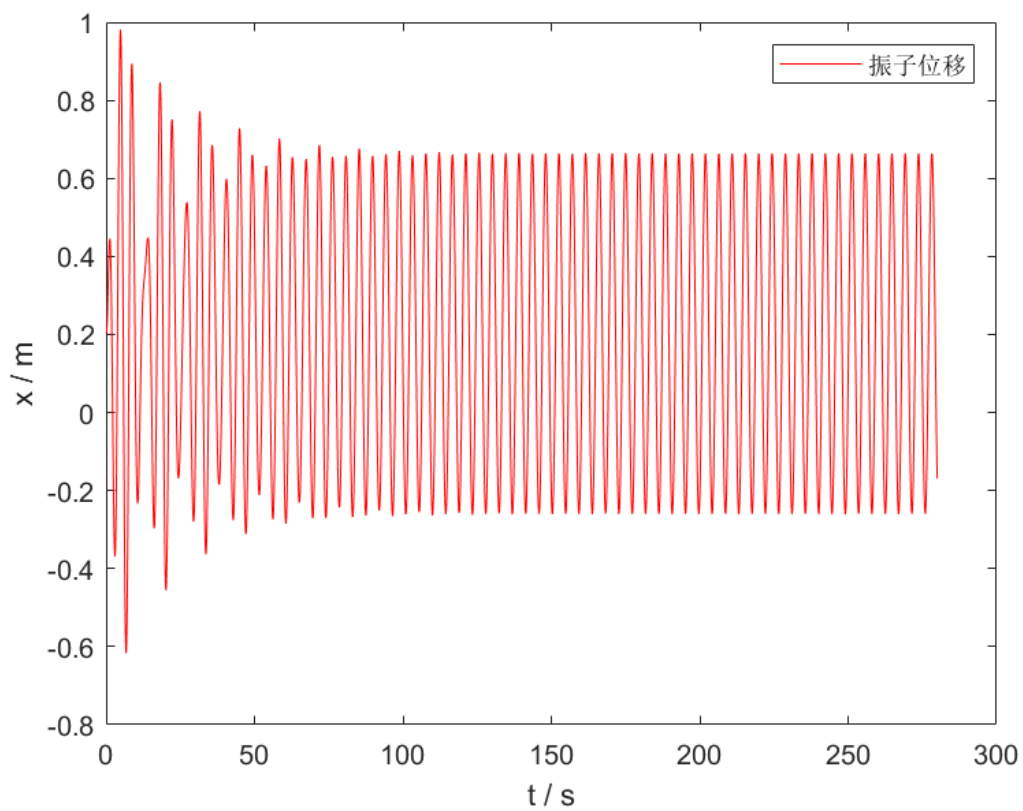


图 4-3 振子位移图

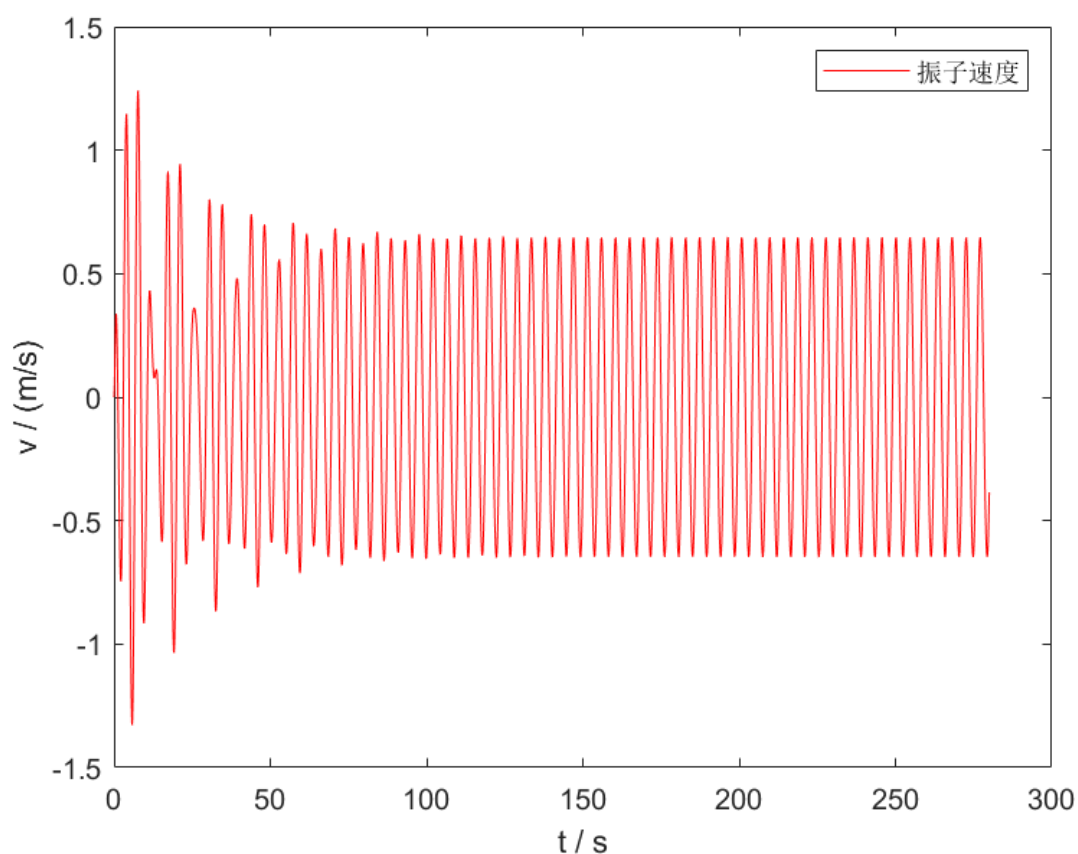


图 4-4 振子速度图

现给出 10 s、20 s、40 s、60 s、100 s 时，浮子与振子的垂荡位移和速度：

表一 问题 1 (1) 结果

时间 (s)	浮子		振子	
	位移 (m)	速度 (m/s)	位移 (m)	速度 (m/s)
10	-0.19064	-0.64043	-0.00962	-0.69363
20	-0.59057	-0.24049	-0.43219	-0.27197
40	0.285364	0.313454	0.498483	0.333203
60	-0.31446	-0.47911	-0.12949	-0.51534
100	-0.08363	-0.60404	0.117887	-0.64293

当 $\lambda_f = \lambda_b \sqrt{\left| \frac{dz_1}{dt} - \frac{dz_2}{dt} \right|}$ 时，其中 $\lambda_b = 10000$ ，联立初始条件和微分方程组，用同样方法解出如下图像：

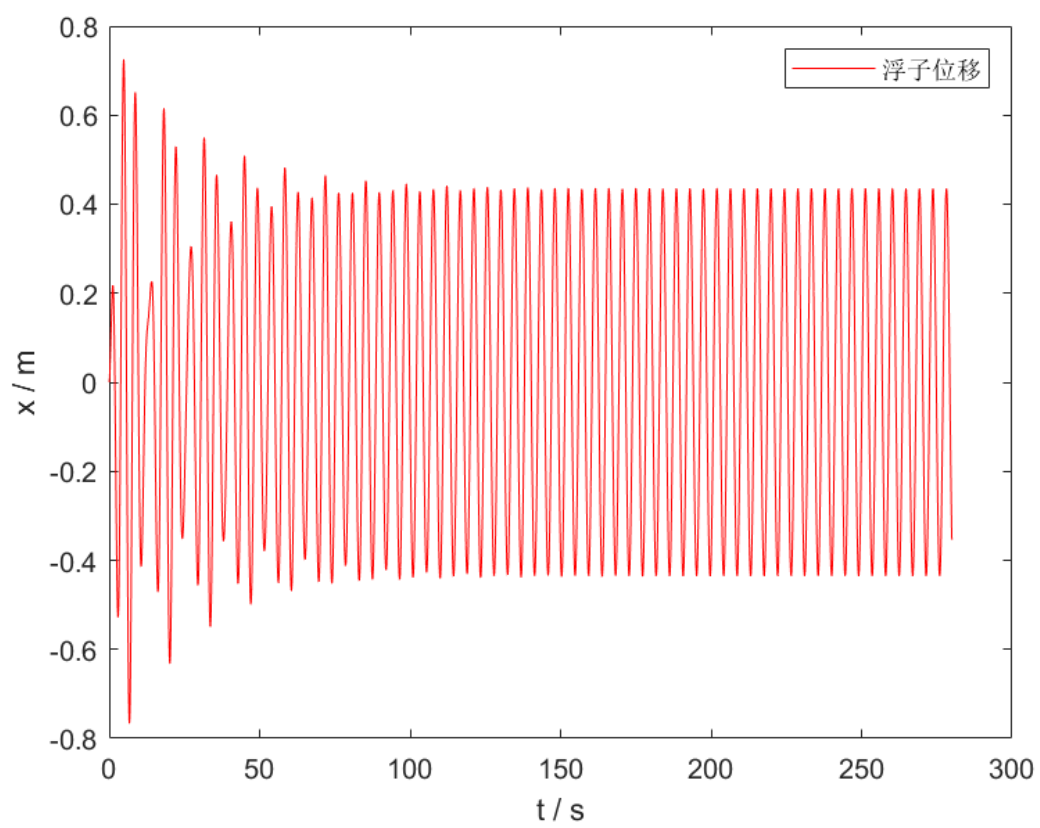


图 5-1 浮子位移图

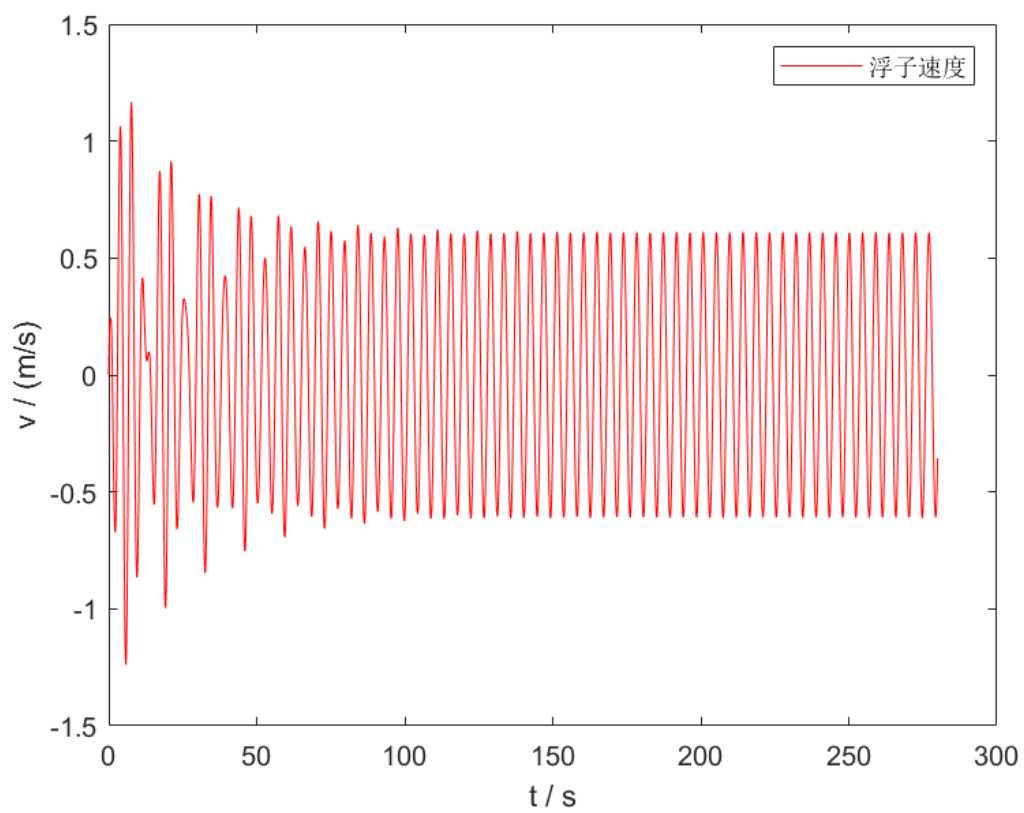


图 5-2 浮子速度图

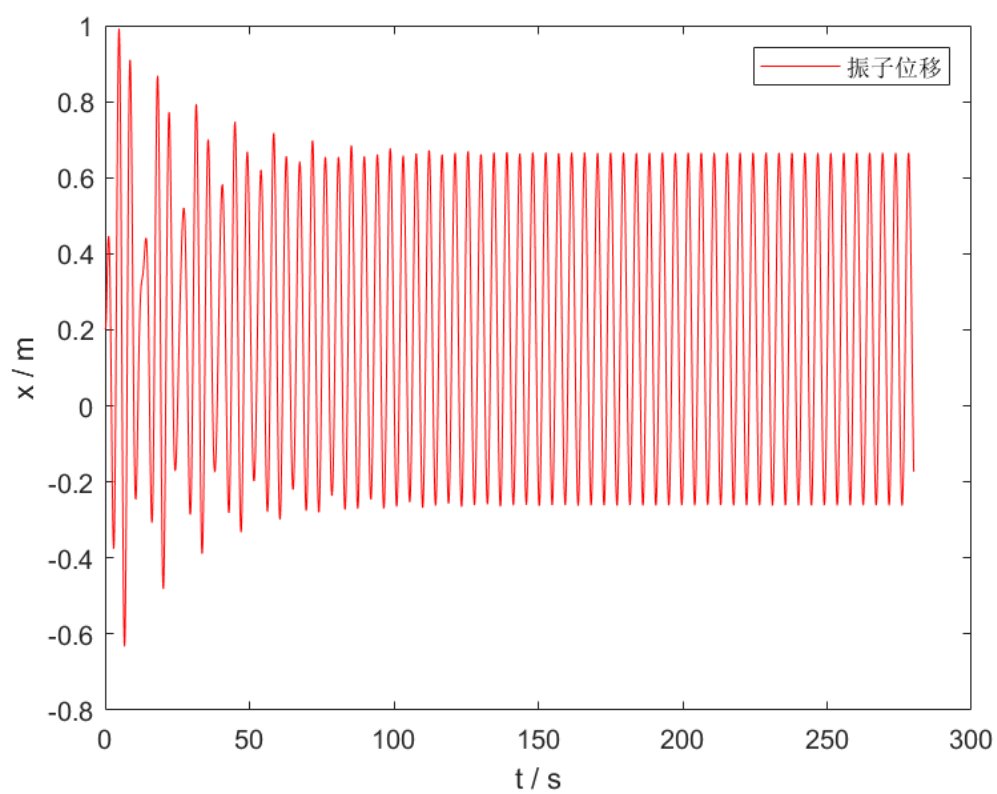


图 5-3 振子位移图

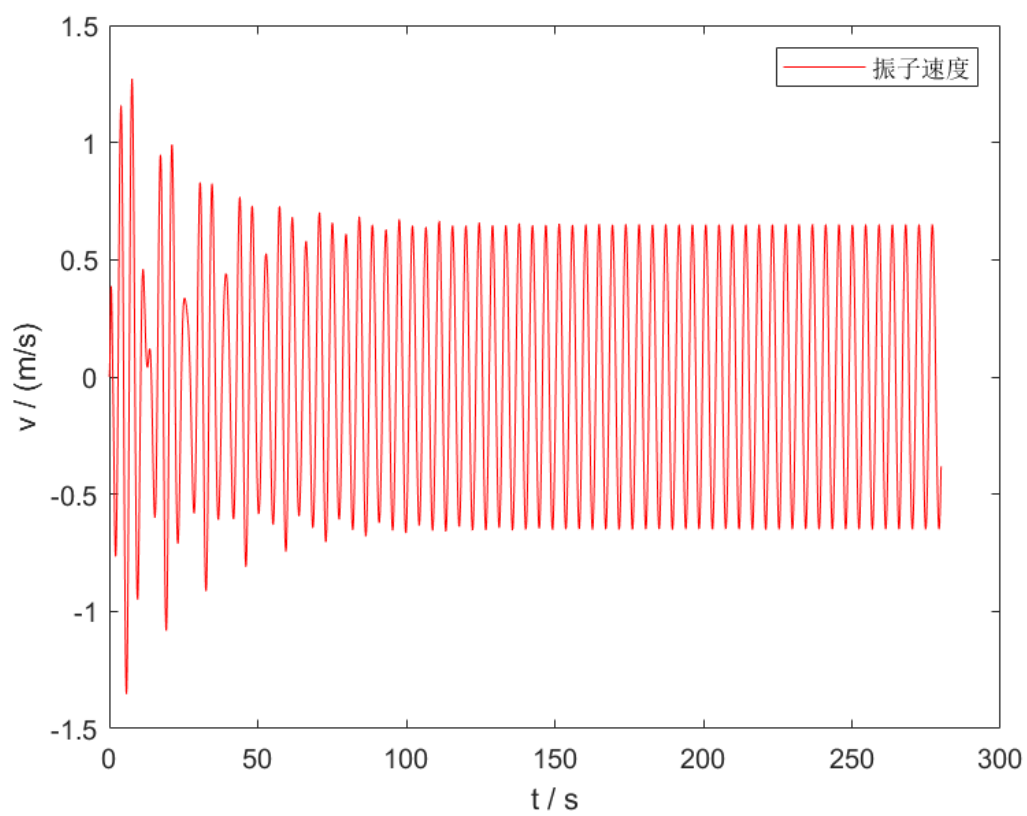


图 5-4 振子速度图

在这种情况下，重新给出 10 s、20 s、40 s、60 s、100 s 时，浮子与振子的垂荡位移和速度：

表二 问题 1 (2) 结果

时间 (s)	浮子		振子	
	位移 (m)	速度 (m/s)	位移 (m)	速度 (m/s)
10	-0.205864	-0.652561	-0.032781	-0.697671
20	-0.611126	-0.253734	-0.458902	-0.27629
40	0.268659	0.295898	0.482119	0.313934
60	-0.32729	-0.490383	-0.147353	-0.525645
100	-0.088365	-0.609775	0.10823	-0.649079

5.2 问题 2：装置只做垂荡运动时的功率的分析和求解

分别计算两种情况下最大的输出功率及相应的最优阻尼系数

5.2.1 阻尼系数在区间 $[0, 100000]$ 内取值

选取稳态作为 PTO 系统的平均输出功率的计算，由问题 1 图像得，问态图像是一个规律正弦量，结合到“强迫振动的解与强迫力有相同的频率^[1]”可知，在经历足够长的时间后（即 $t \rightarrow \infty$ 时），浮子和振子的相对速度 v_r 满足关系式： $v_r = A \sin(\omega t - \omega)$ 。

为验证该结论，现代入问题 2 的参数，并在 $[0, 100000]$ 间随机取一 λ_f ，可以看出当 $t > 100$ 时， $v_r - t$ 图像上的散点与该函数拟合的相关系数 $R^2=0.999$

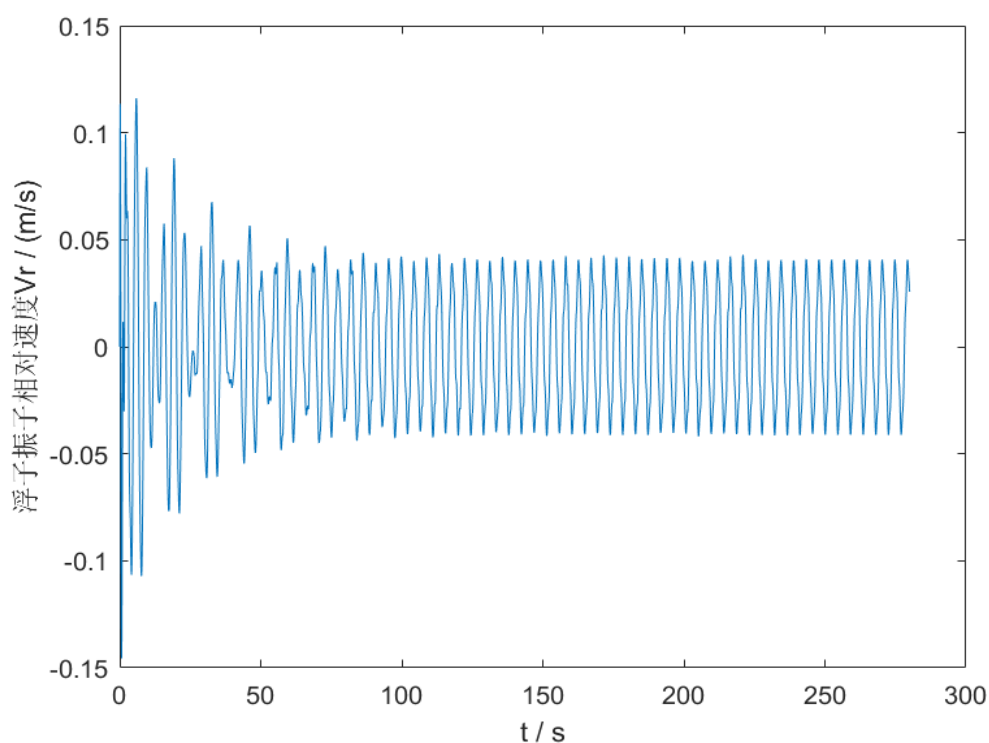


图 6 浮子振子相对速度图

进一步分析可知，对于 $\lambda_f > 500$ 的情况，在 $t > 100$ 后，图像均可用 $v_r = A \sin(\omega t - \omega)$

φ)表示出。且几乎没有误差。而经分析得：功率最大值 p_{max} 所对应的 λ_f 不在区间 $[0,500]$ 内。每一个垂荡阻尼系数 λ_f 对应一个相对速度的振幅 A 拟合关系如下图所示：

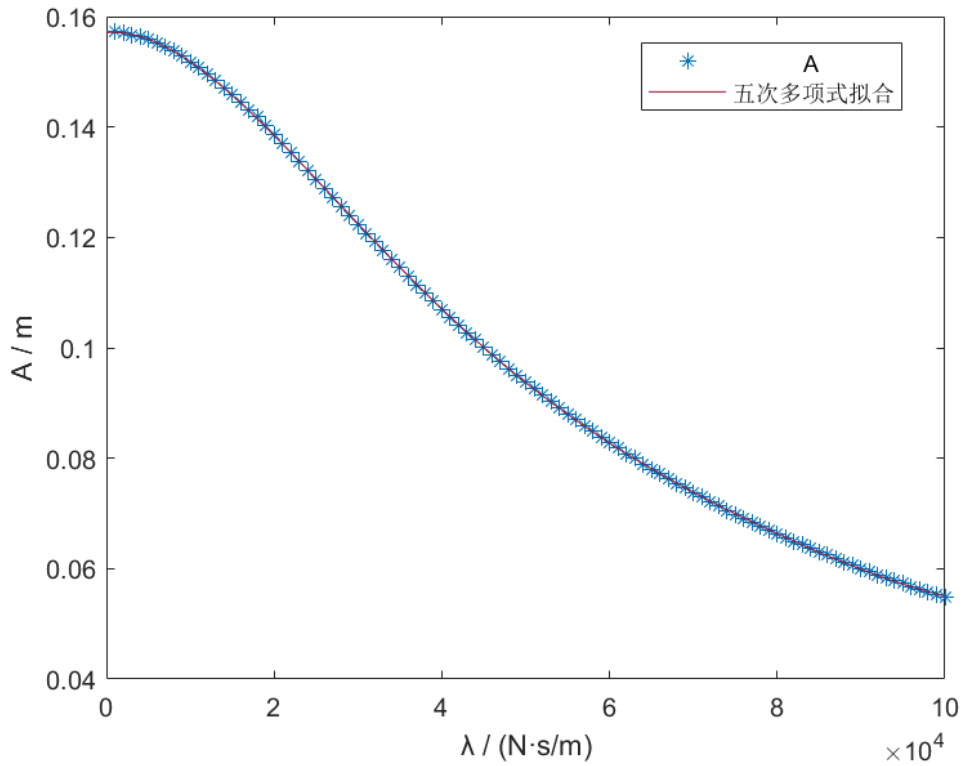


图 7 $A - \lambda_f$ 拟合函数图像

$A - \lambda_f$ 拟合函数如下：

$$A = 4.079 * 10^{-26} * \lambda_f^5 - 1.315 * 10^{-20} * \lambda_f^4 + 1.585 * 10^{-15} * \lambda_f^3 - 7.918 * 10^{-11} * \lambda_f^2 + 1.169 * 10^{-7} * \lambda_f + 0.1571$$

则可进行功率计算公式的推导：

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{1}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} F_z v_r dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} \lambda_f [A \sin(\omega t - \varphi)]^2 dt \\ &= \frac{1}{2} \lambda_f A^2 \end{aligned}$$

将 $A - \lambda_f$ 的拟合函数代入，得出 $\bar{P} - \lambda_f$ 的函数图像：

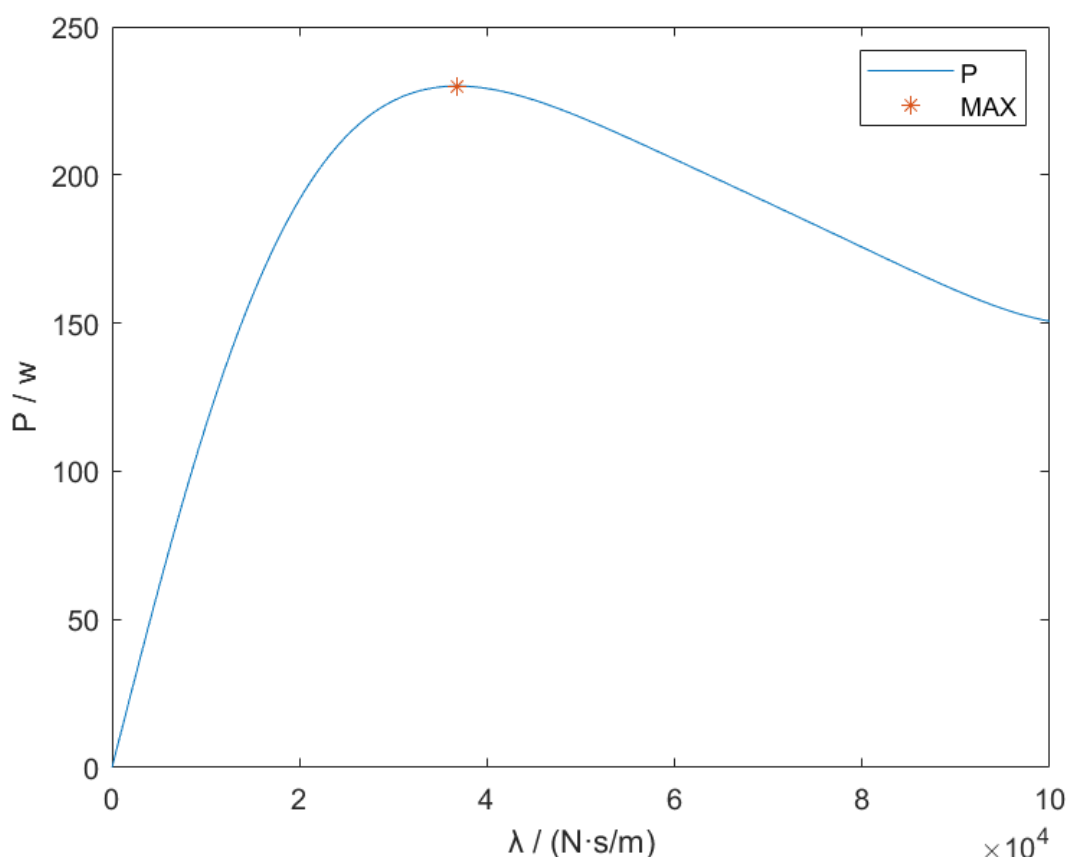


图 8 $P - \lambda_f$ 拟合函数图像

对 λ_f 求导可得，当 $\frac{dp}{d\lambda_f} = 0$ 时所对应的 λ_f 值即为取得最大功率 $\overline{P_{max}}$ 时对应的 λ_f :

表三 问题 2 (1) 结果

$P_{max}(W)$	$\lambda_f(N \cdot \frac{s}{m})$
229.984	36807.9

5.2.2 阻尼系数的比例系数在区间 $[0, 100000]$ 内取值，幂指数在区间 $[0, 1]$ 内取值。

对于这种情况，将 $\lambda_f = \lambda_b \left| \frac{dz_1}{dt} - \frac{dz_2}{dt} \right|^n$ 代入到方程(1.2)得：

$$\begin{cases} (m_f + m_{ad}) \frac{d^2 z_1}{dt^2} = \\ f \cos(\omega t) - (\rho g \pi r_f^2 z_1 + m_z g) - k[l_0 - (z_2 - z_1)] - \lambda_b \left| \frac{dz_1}{dt} - \frac{dz_2}{dt} \right|^n \left(\frac{dz_1}{dt} - \frac{dz_2}{dt} \right) - \mu_f \frac{dz_1}{dt} \\ m_z \frac{d^2 z_2}{dt^2} = \\ k[l_0 - (z_2 - z_1)] + \lambda_b \left| \frac{dz_1}{dt} - \frac{dz_2}{dt} \right|^n \left(\frac{dz_1}{dt} - \frac{dz_2}{dt} \right) - m_z g \end{cases}$$

经分析可知，对于 $\lambda_b > 500$ 的情况，在 $t > 100$ 后，图像均可用 $v_r = A \sin(\omega t - \varphi)$ 表示出。且几乎没有误差。而经分析得：功率最大值 p_{max} 所对应的 λ_b 不在区间 $[0, 500]$ 内。

$$\begin{aligned}\bar{P} &= \frac{1}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} F_z v_r dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} \lambda_b [A \sin(\omega t - \varphi)]^{(2+n)} dt \quad n \in [0.1]\end{aligned}$$

由于 $2 + n$ 在指数项上是一个分数，只能对该式进行数值积分计算平均功率 \bar{P} 。对于每一对幂指数 n 和垂荡阻尼系数的比例系数 λ_b 对应一个平均功率 \bar{P} 拟合关系如下图所示：

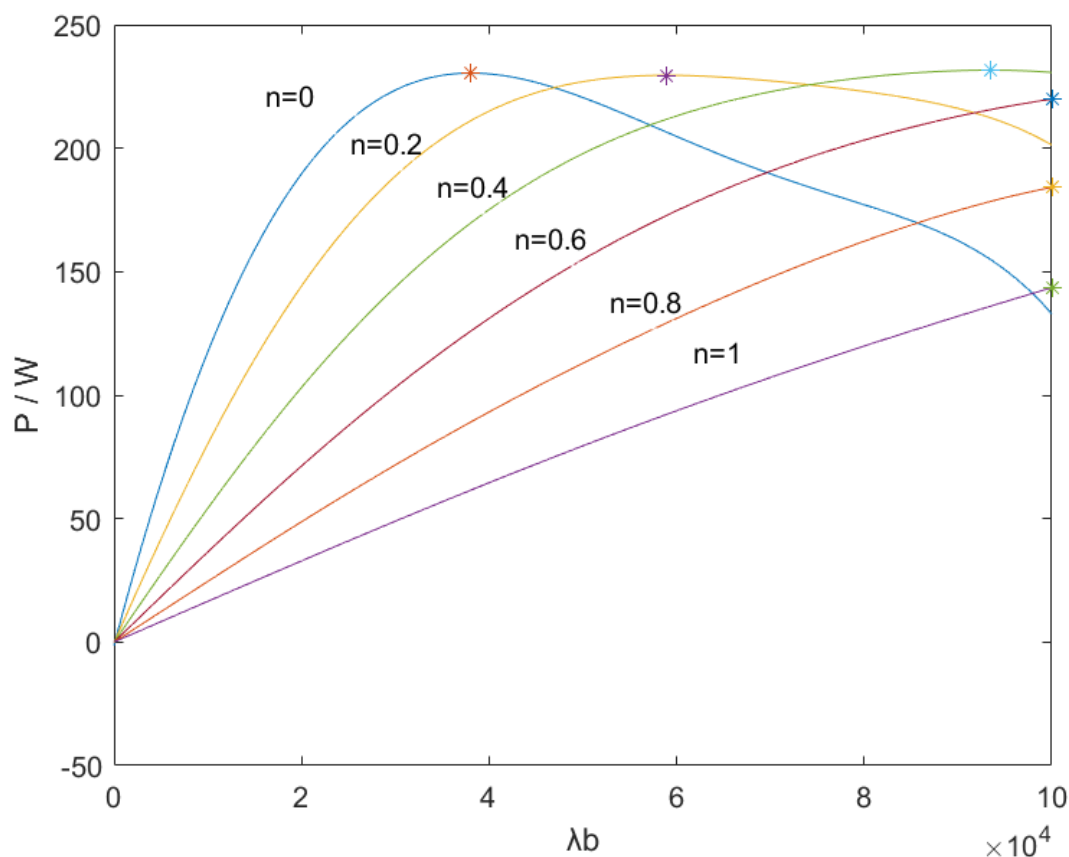


图 8-1 在不同 n 下，曲线 $P - \lambda_b$ 拟合函数簇图像

可以看出最大输出功率 $\overline{P_{max}}$ 在 $n \in [0, 0.6]$ 的曲线簇上，在该区间内继续细分 n 的步长得到下一张图：

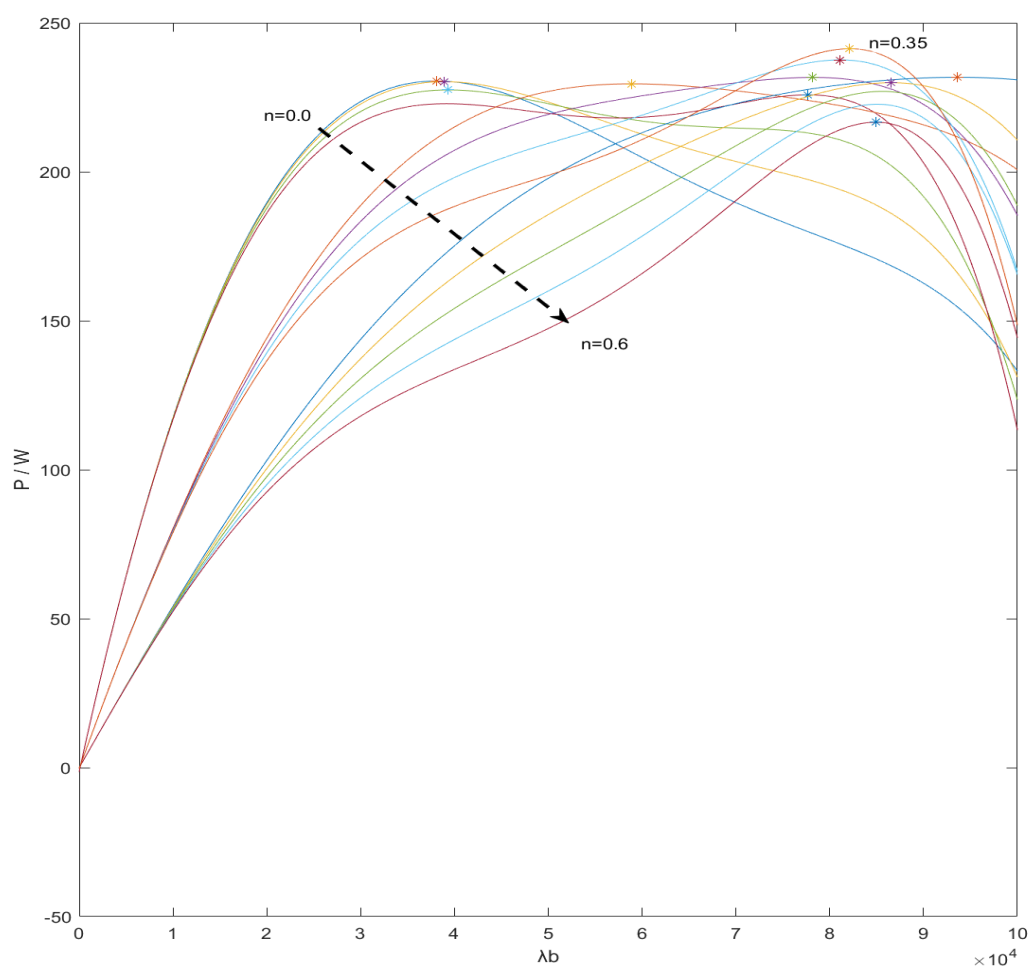


图 8-2 在不同 n 下，曲线 $P - \lambda_b$ 拟合函数簇图像

可以看出最大输出功率 $\overline{P_{max}}$ 在 $n = 0.35$ 对应的曲线上取得，现在 $n = 0.35$ 的附近继续细分 λ_b 的步长得：

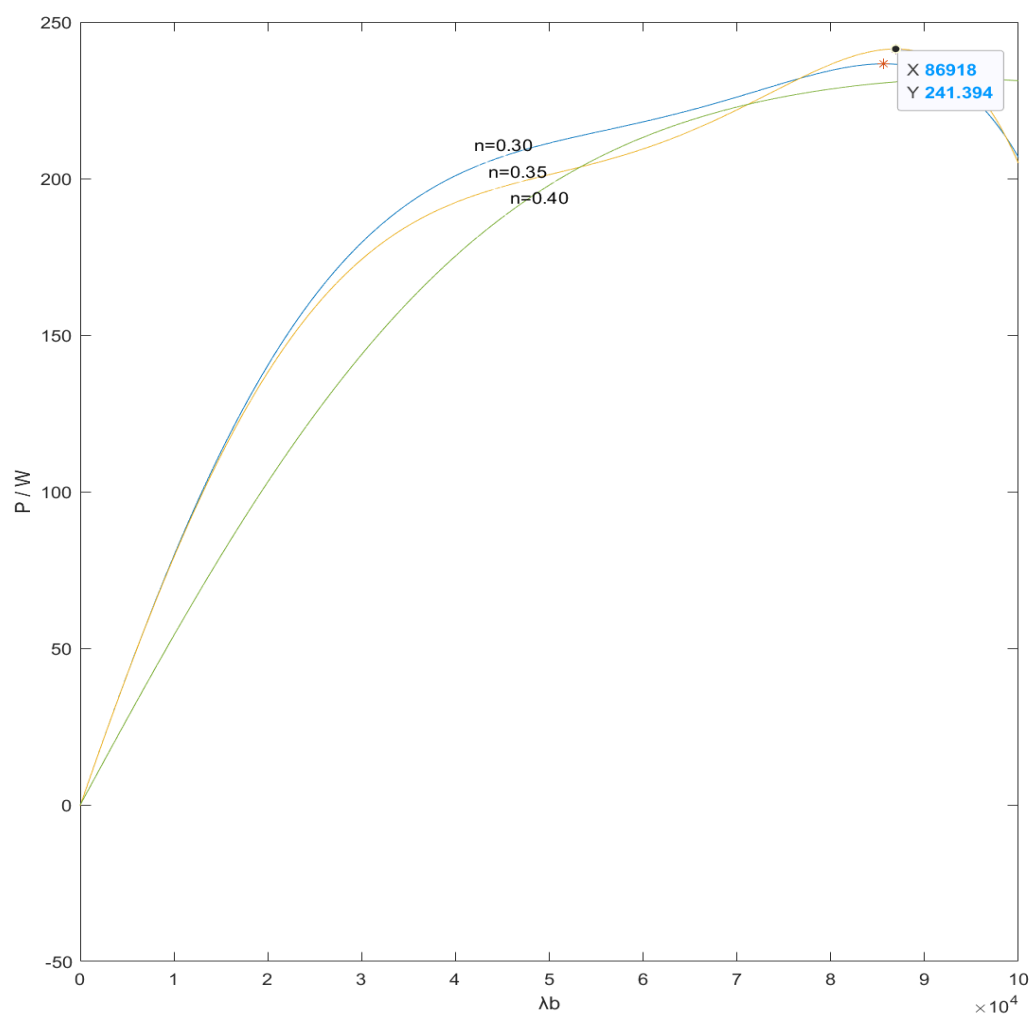


图 8-3 在不同 n 下，曲线 $P - \lambda_b$ 拟合函数簇图像

可得到结果：

表四 问题 2 (2) 结果

$\overline{P_{max}}(W)$	n	λ_b
241.394	0.35	86918

5.3 问题 3：装置做垂荡和纵摇运动时的分析和求解

1) 确定坐标系：

对于问题 3、4 而言，由于同时考虑垂荡和纵摇运动，但考虑海水为无粘、无旋的。可化为在 $z-y$ 平面上的二维运动。

设起始时刻在静水中的浮子的中轴底座为原点 O ，建立平面坐标系。运动时，浮子的中轴底座为 A 、浮子的质心为 C_1 、振子的质心为 C_2 。由于浮子和振子均为刚体，故可用两向量分别表示浮子和振子，其各自关于水平面的夹角为 α 、 β ，如图：

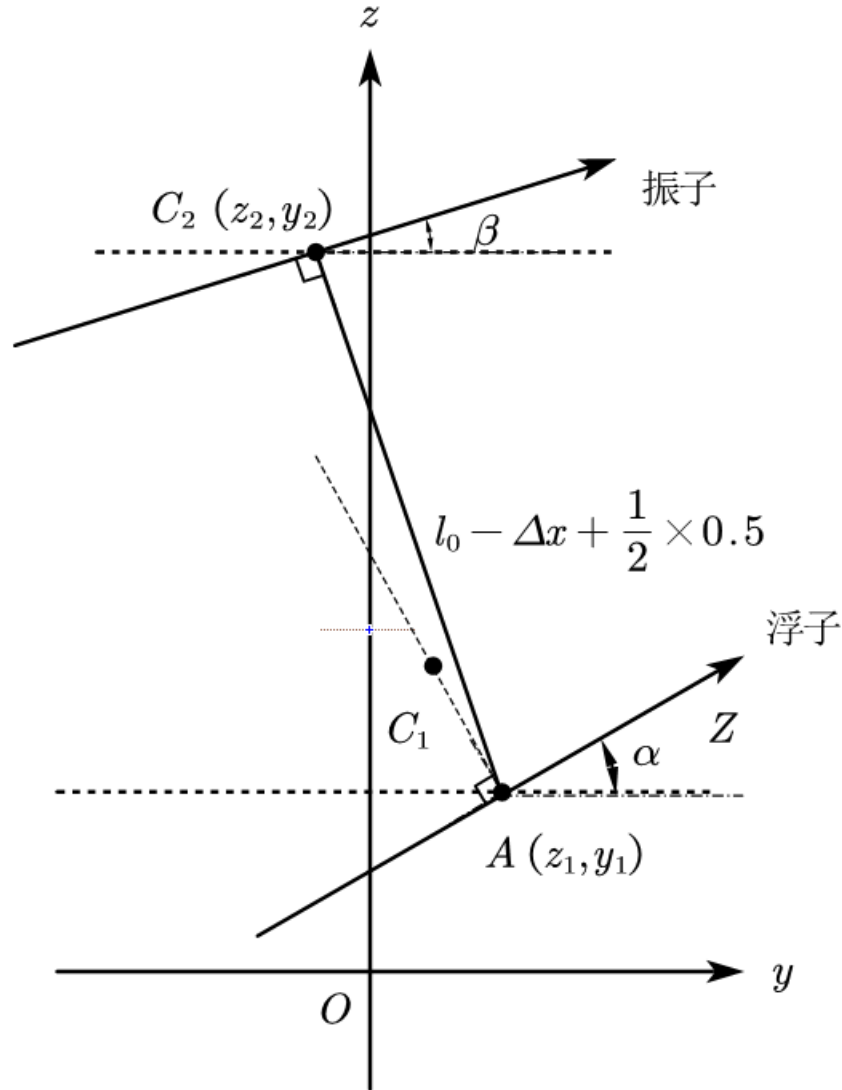


图 9 浮子振子在 $z-y$ 平面上的二维运动简图

其中 $|AC_2| = \text{弹簧原长} - \text{弹簧压缩量} + \frac{1}{2} \times \text{振子高度}(0.5\text{m})$

而 $|AC_1|$ 为定值 $= \frac{49}{45}$ (由题出给出的几何参数和质量算出)

现分别取浮子和振子进行受力分析：
先取浮子：

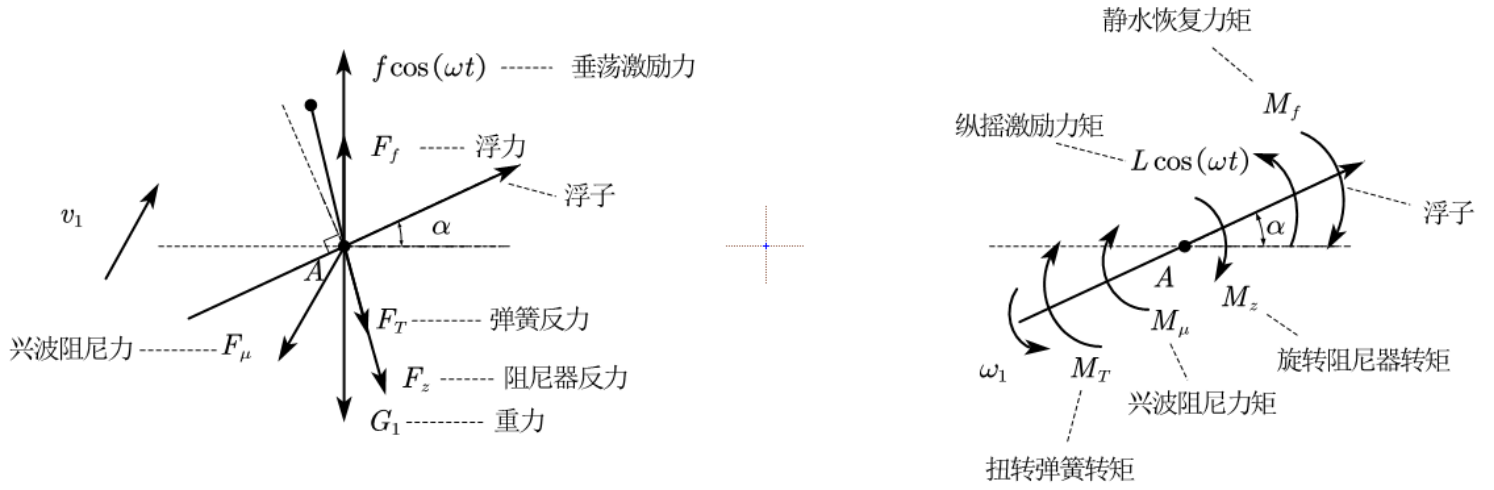


图 10-1 浮子受力分析（左图为力，右图为力矩）

得到浮子的微分方程组得：

$$\begin{cases} (m_f + m_{ad}) \frac{d^2 z_1}{dt^2} = f \cos(\omega t) + (F_f - G_1) - F_T \cos \beta - F_z \cos \beta - (F_\mu)_z \\ (m_f + m_{ad}) \frac{d^2 y_1}{dt^2} = F_T \sin \beta + F_z \sin \beta - (F_\mu)_y \\ (J_{1c} + J_{ad})_A \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = L \cos(\omega t) - M_T - M_z - M_f - M_\mu \end{cases} \quad (2.1)$$

再取振子：

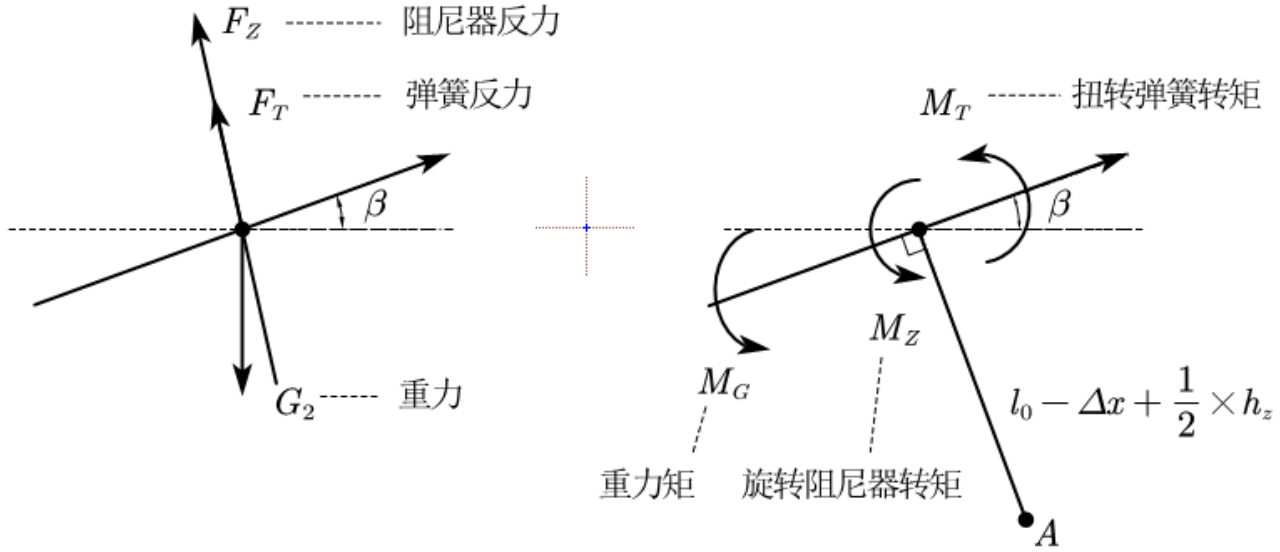


图 10-2 振子受力分析（左图为力，右图为力矩）

得到振子的微分方程组得：

$$\begin{cases} m_z \frac{d^2 z_2}{dt^2} = F_T \cos \beta + F_z \cos \beta - G_1 \\ m_z \frac{d^2 y_2}{dt^2} = -F_T \sin \beta - F_z \sin \beta \\ J_{2A} \frac{d^2 \beta}{dt^2} = M_T + M_Z + M_G \end{cases} \quad (2.2)$$

联立(2.1) (2.2)得：

$$\begin{cases} (m_f + m_{ad}) \frac{d^2 z_1}{dt^2} = f \cos(\omega t) + (F_f - G_1) - F_T \cos \beta - F_z \cos \beta - (F_\mu)_z \\ (m_f + m_{ad}) \frac{d^2 y_1}{dt^2} = F_T \sin \beta + F_z \sin \beta - (F_\mu)_y \\ (J_{1c} + J_{ad})_A \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = L \cos(\omega t) - M_T - M_Z - M_f - M_\mu \\ m_z \frac{d^2 z_2}{dt^2} = F_T \cos \beta + F_z \cos \beta - G_1 \\ m_z \frac{d^2 y_2}{dt^2} = -F_T \sin \beta - F_z \sin \beta \\ J_{2A} \frac{d^2 \beta}{dt^2} = M_T + M_Z + M_G \end{cases} \quad (2.3)$$

方程(2.3)即为该系统的多自由度受迫阻尼振动的微分方程组。

但其求解太过复杂，现需进行化简，由于y方向的振动微弱，故不考虑y方向的部分

分量。

$$\text{即: } \frac{d^2 y_1}{dt^2} = 0, \frac{d^2 y_2}{dt^2} = 0$$

故方程组(2.3)化简为:

$$\left\{ \begin{array}{l} (m_f + m_{ad}) \frac{d^2 z_1}{dt^2} = f \cos(\omega t) + (F_f - G_1) - F_T \cos \beta - F_z \cos \beta - (F_\mu)_z \\ (J_{1c} + J_{ad})_A \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = L \cos(\omega t) - M_T - M_Z - M_f - M_\mu \\ m_z \frac{d^2 z_2}{dt^2} = F_T \cos \beta + F_z \cos \beta - G_1 \\ J_{2A} \frac{d^2 \beta}{dt^2} = M_T + M_Z + M_G \end{array} \right. \quad (2.4)$$

方程组(2.4)即为需要求解的微分方程组，代入初始时刻浮子和振子平衡于静水中初始条件:

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1(0) = 0 \\ \dot{z}_1(0) = 0 \\ \alpha(0) = 0 \\ \dot{\alpha}(0) = 0 \\ z_2(0) = 0.4519575 \\ \dot{z}_2(0) = 0 \\ \beta(0) = 0 \\ \dot{\beta}(0) = 0 \end{array} \right.$$

当直线阻尼器的阻尼系数为常量 $\lambda_f = 10000N \cdot s/m$ ，当旋转阻尼器的阻尼系数为常量 $\lambda_m = 1000N \cdot s \cdot m$ 时，联立初始条件和微分方程组，依旧采用 4 阶 Runge-Kutta 法解微分方程得如下图像:

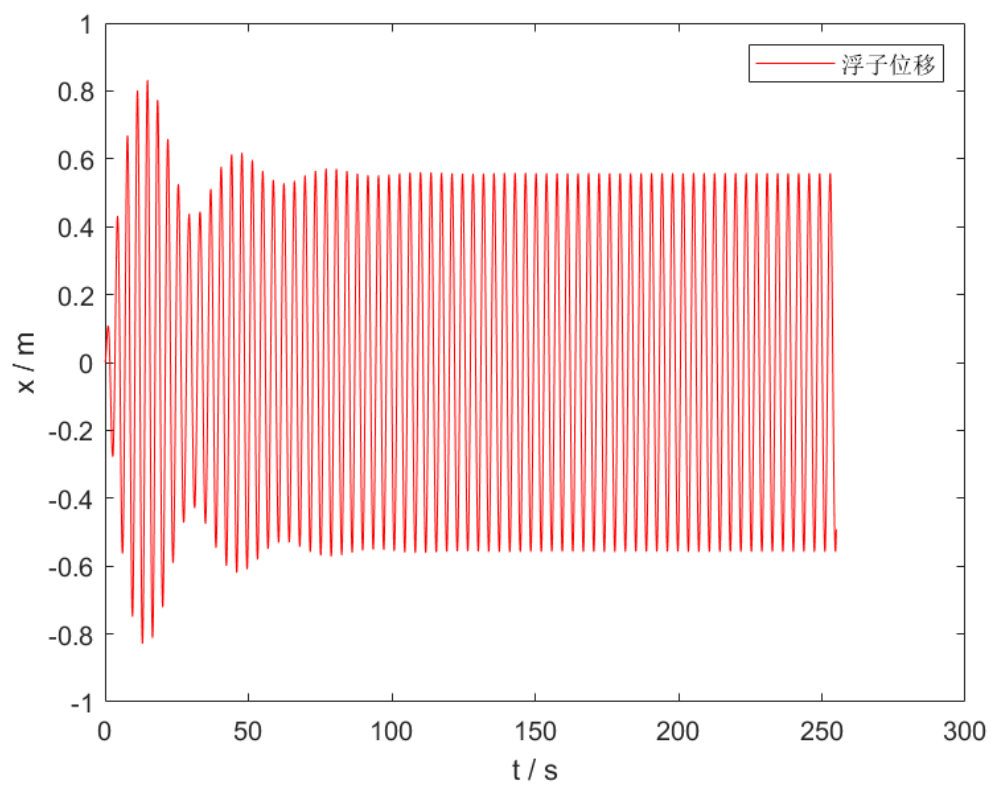


图 11-1 浮子位移

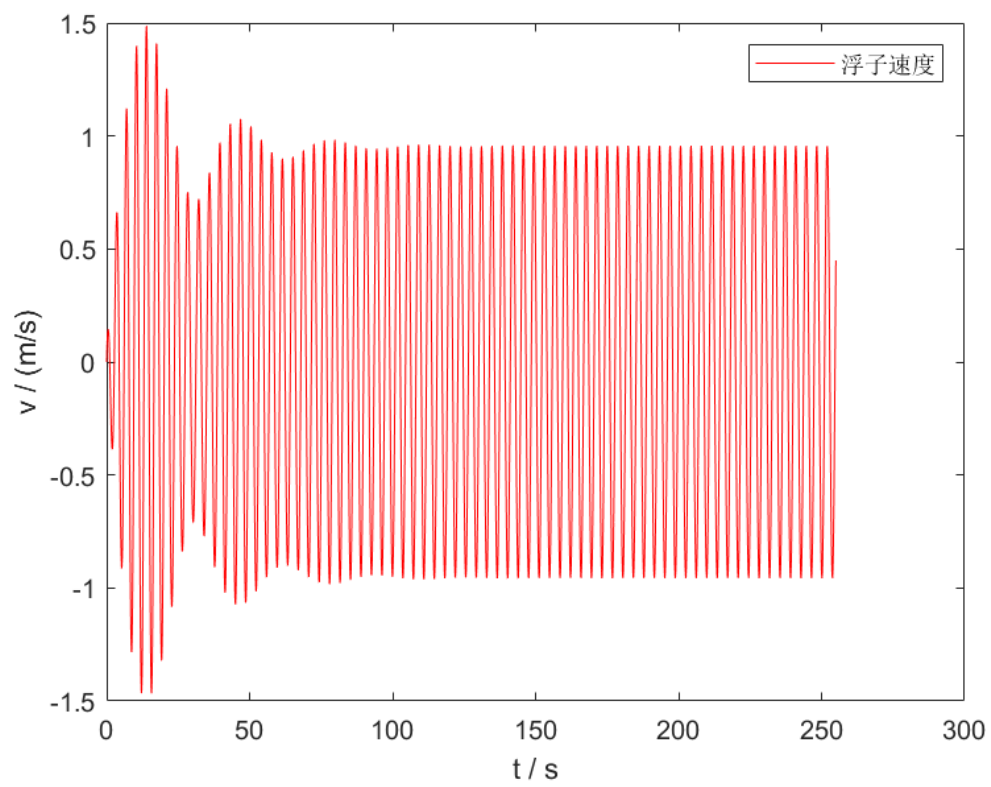


图 11-2 浮子速度

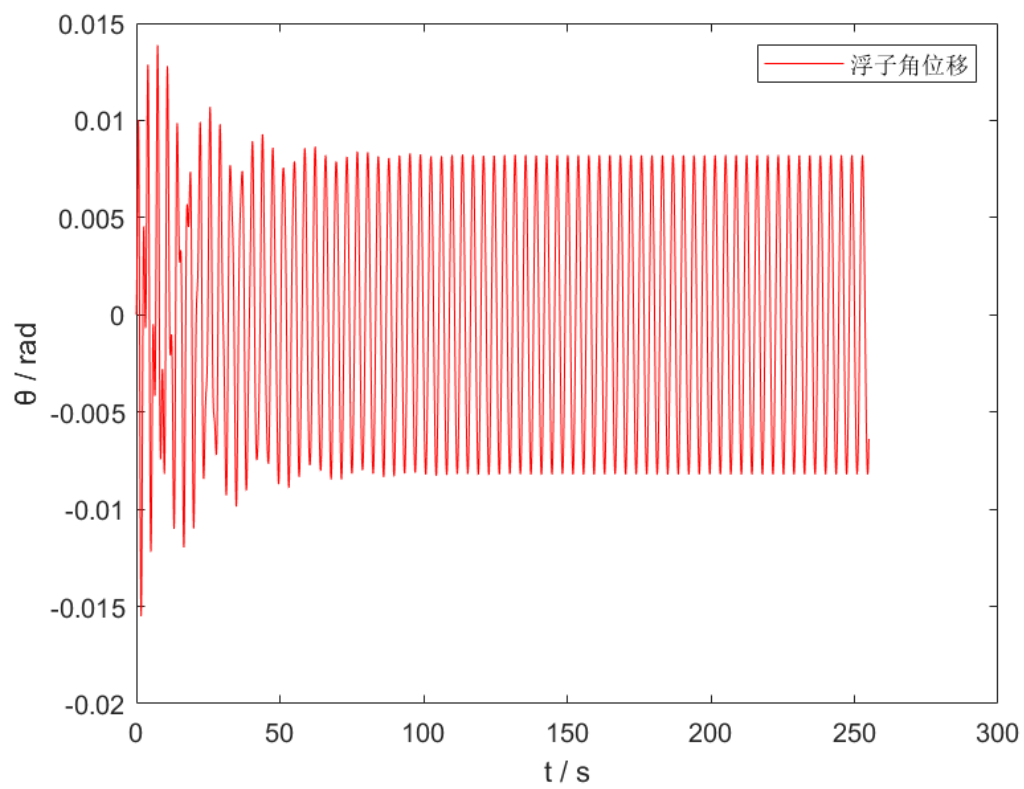


图 11-3 浮子角位移

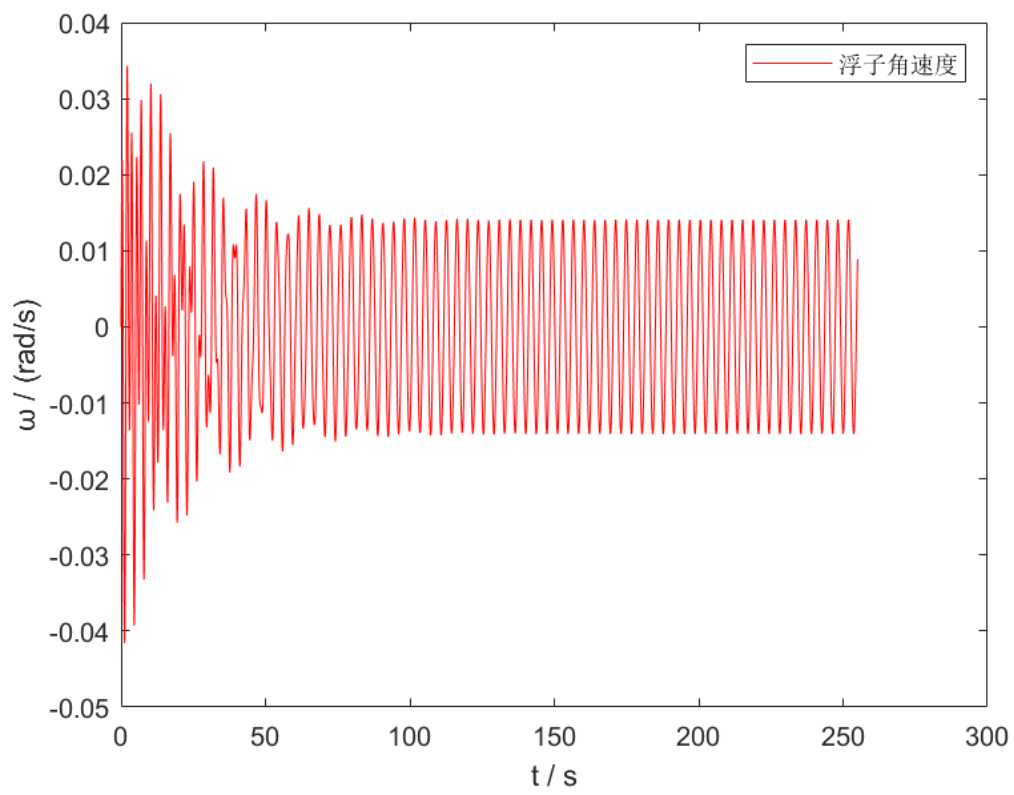


图 11-4 浮子角速度

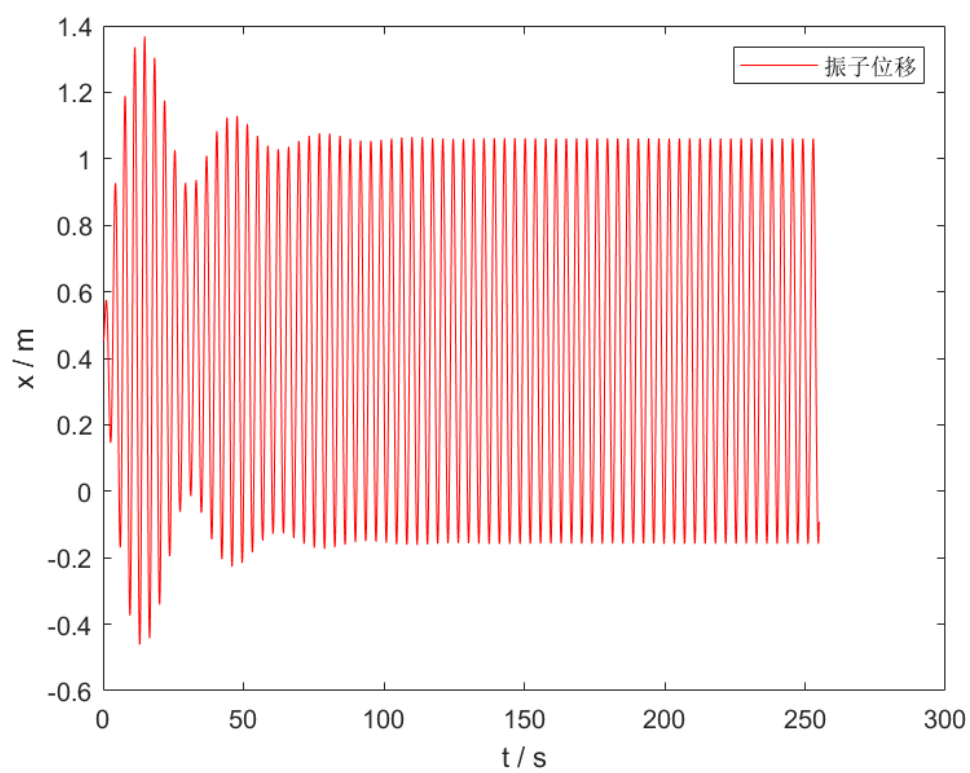


图 11-5 振子位移

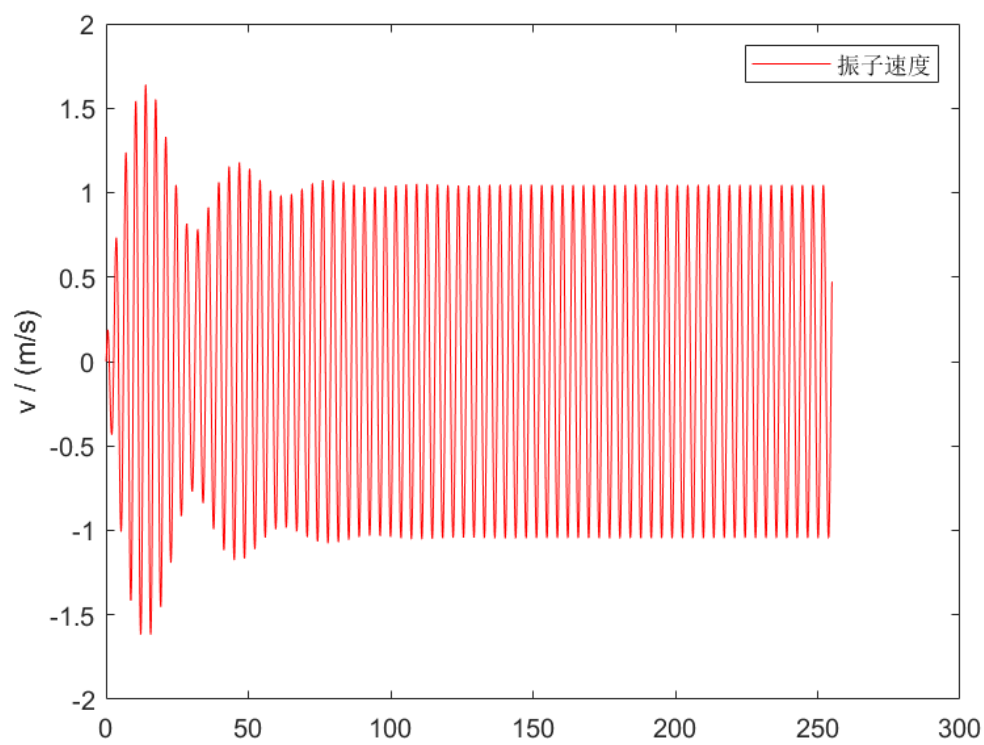


图 11-6 振子速度

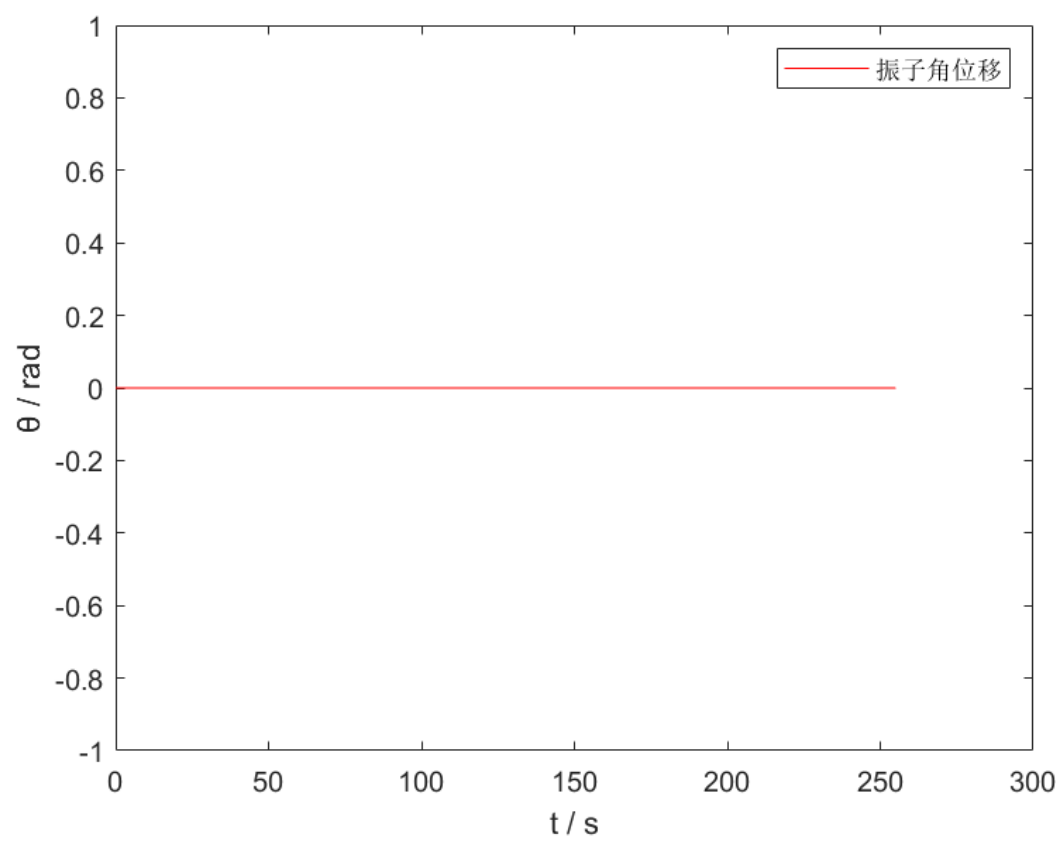


图 11-7 振子角位移

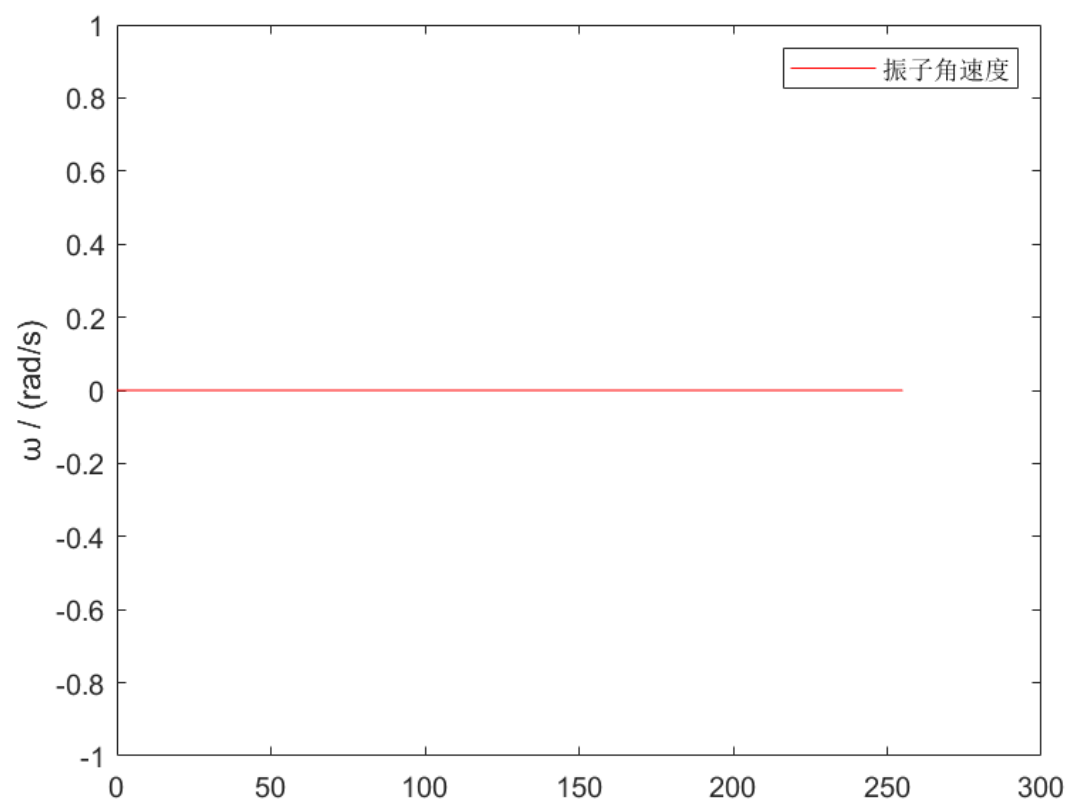


图 11-8 振子角速度

现给出 10 s、20 s、40 s、60 s、100 s 时，浮子与振子的垂荡位移与速度与纵摇位移与角速度：

表五 问题 3 结果

时间 (s)	浮子				振子			
	垂荡位移 (m)	垂荡速度 (m/s)	纵摇角位移	纵摇角速度 (s ⁻¹)	垂荡位移 (m)	垂荡速度 (m/s)	纵摇角位移	纵摇角速度 (s ⁻¹)
10	-0.528252	0.969837	0.969837	0.017458	-0.146746	1.038194	0	0
20	-0.704761	-0.269283	-0.269283	0.000742	-0.320278	-0.319037	0	0
40	0.369358	0.757545	0.757545	0.010375	0.844628	0.84481	0	0
60	-0.320587	-0.721768	-0.721768	-0.008075	0.110623	-0.799313	0	0
80	0.197949	0.920514	0.920514	0.012823	0.656717	1.014348	0	0
100	-0.050138	-0.946655	-0.946655	-0.013214	0.409369	-1.03651	0	0

5.4 问题 4：装置做垂荡和纵摇运动时功率的分析和求解

直线阻尼器的输出功率：

$$\begin{aligned}
 \overline{P_1} &= \frac{1}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} F_z v_r dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} \lambda_f [A_v \sin(\omega t - \varphi)]^2 dt \\
 &= \frac{1}{2} \lambda_f A_v^2
 \end{aligned}$$

同理得旋转阻尼器的输出功率：

$$\begin{aligned}
 \overline{P_2} &= \frac{1}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} M_z \omega_r dt \\
 &= \frac{1}{2} \lambda_m A_\omega^2
 \end{aligned}$$

总平均输出功率 $\overline{P} = \overline{P_1} + \overline{P_2}$

用与问题 2 相似的方法，拟合得到一个 \overline{P} 关于 λ_f 和 λ_m 的曲面：

先取一个较大的步长，在整个 (100000 × 100000) 的曲面上找到大致的极值所在的位置，再对这个大致的局部 (5000 × 5000) 取更小的步长，进行更精确的计算，图像如下：

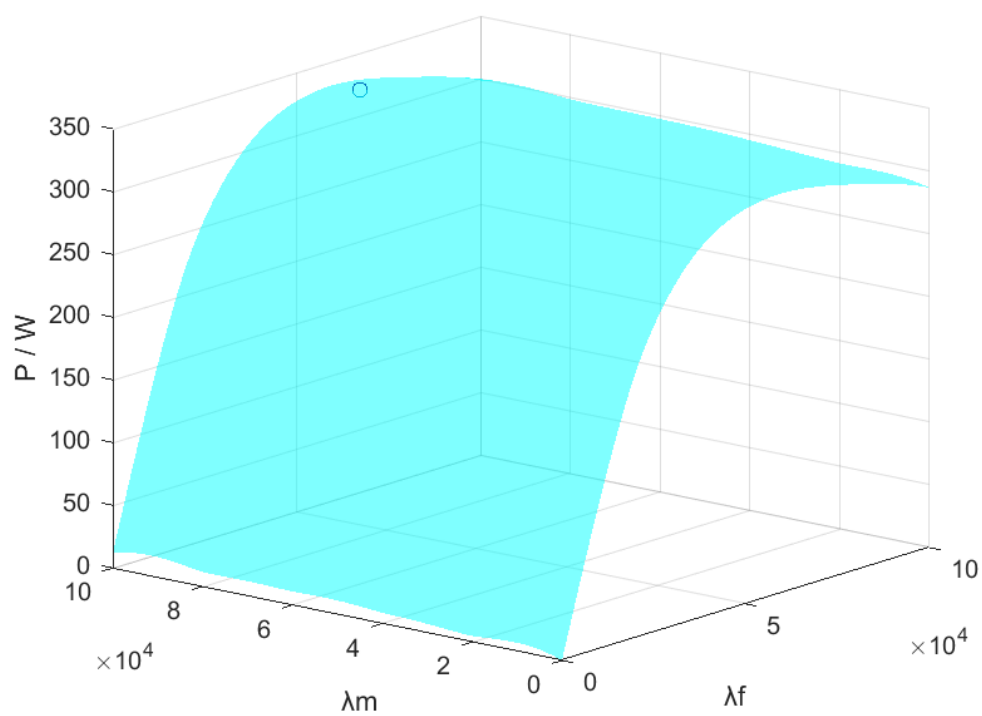


图 12-1 \bar{P} 关于 λ_f 和 λ_m 的曲面 (100000 \times 100000整体)

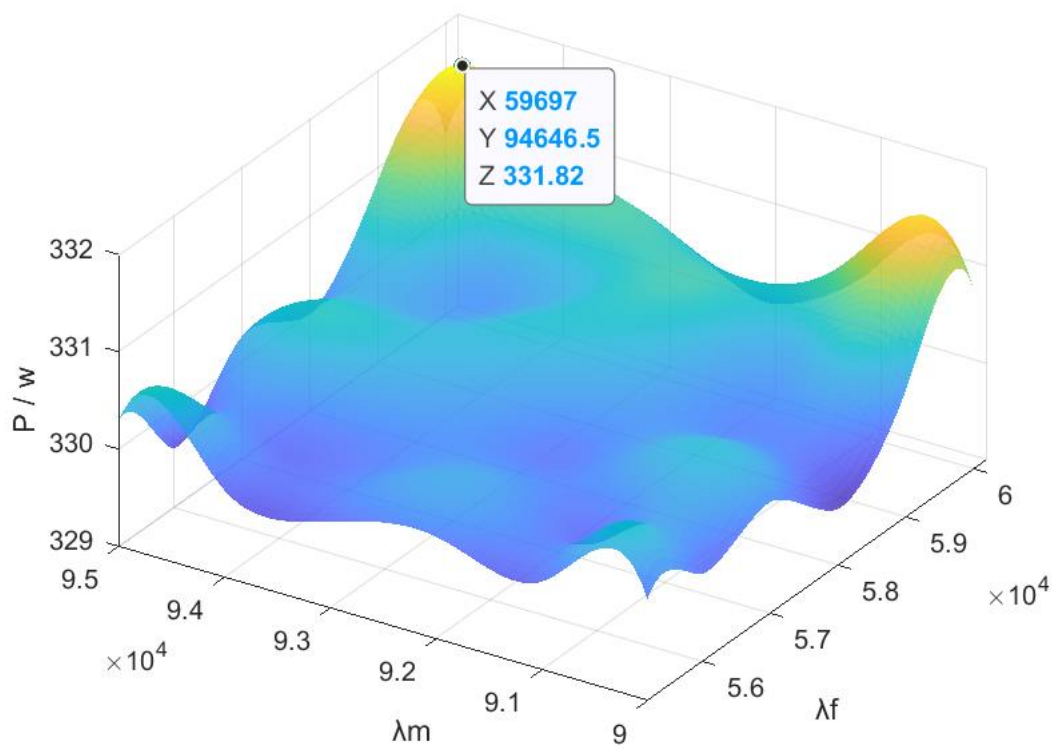


图 12-1 \bar{P} 关于 λ_f 和 λ_m 的曲面 (5000 \times 5000局部)

可由局部图得到问题 4 的答案：

表六 问题 4 结果

$\overline{P_{max}}(W)$	λ_f	λ_m
331.82	59697	94646.5

六、 模型分析

7.1 模型优点

1. 参考系选择合理，直接在地面参考系受力分析，避免了处理非惯性参考系中繁杂的惯性力，减小了分析复杂性
2. 强迫运动的频率和强迫力相同，由此可以使用三角函数拟合稳定状态下的相对速度与阻尼系数的函数关系，拟合精度高，同时也减小了计算量
3. 采用解析的方法，运用牛顿运动定律列出装置的运动微分方程，误差很小
4. 使用 4 阶 Runge-Kutta 方法求解微分方程精度高

7.2 模型缺点

1. 装置的运动仅考虑在流体无粘无旋的情况下，与实际流体有差距。
2. 使用一个强迫力代替波浪对装置的作用，忽略了水面起伏对装置影响。

7.3 敏感性分析

分析图 8-1、图 8-2、图 8-3 知，平均输出功率 \overline{P} 对幂指数 n 和 λ_b 都敏感，其中幂指数 n 的影响更显著。由图 12-1 可知，平均输出功率 \overline{P} 对直线阻尼器系数 λ_f 敏感，对旋转阻尼系数 λ_n 不敏感。

七、 模型推广

7.1 模型的优化

由表五、图 11-7、图 11-8 可知振子的角速度几乎为零，这是与实际情况有所偏差的，偏差的原因是将方程组 (2.3) 忽略了 y 方向的变化，简化为了 (2.4)，这使本该在 y 方向使振子偏转的力，被忽略掉了。

在计算时间充足的情况下，建议用 4 阶 Runge-Kutta 方法求解方程组(2.3)而非方程组(2.4)。

7.2 模型的应用

1. 将实际流体的性质和装置的体积考虑在内，分析流体对装置的附加力与装置作用时的机理，以此更精确地受力分析
2. 计算阻尼系数与相对速度振幅的函数关系时步长选择有最优值，可使求解精度更高的同时计算速度更快
3. 为了使装置的振动幅度更大，可以考虑装置本身的固有频率与波浪频率的关系，两者发生共振则能产生更大的振幅，使得输出功率更大
4. 波浪能装置模型属于多自由度强迫阻尼振动模型，此类模型对于车辆、船舶减震有指导作用

八、 参考文献

- [1] 朗道. 力学. 高等教育出版社, 2007.
- [2] 武清玺. 理论力学. 高等教育出版社, 2016.
- [3] 机械工程师手册编委会. 机械工程师手册. 机械工业出版社, 2021
- [4] 张万超. 轴对称垂荡浮子式波能装置水动力及能量转换解析研究[D]. 哈尔滨工程大学, 2017(09).

附录

支撑材料列表:

问题结果:

result1-1

result1-2

result3

代码 rar:

问题 1:

func1 (解问题 1 第 1 小问的微分方程函数)

main1 (解问题 1 第 1 小问的主函数)

func2 (解问题 1 第 2 小问的微分方程函数)

main2 (解问题 1 第 2 小问的主函数)

ques1 (涉及数值整理)

问题 2:

ques2_1 (问题 2 第 1 小问的主函数)

func (解问题 2 第 1 小问的微分方程的函数)

cal_coe (计算各数值函数)

findA (寻找振幅函数)

createFit (cftool 自生成函数)

func_plus (解问题 2 第 12 小问的微分方程的函数改进版)

func_plus_plus (解问题 2 第 12 小问的微分方程的函数改进改进版)

ques2_2 (问题 2 第 1 小问的主函数改进版)

ques2_2_plus (问题 2 第 1 小问的主函数改进版)

问题 3:

func (解问题 3 的微分方程的函数)

cal_coe (计算各数值函数)

ques3 (问题 3 的主函数)

问题 4:

ques4 (问题 4 的主函数)

cal_coe (计算各数值函数)

func (解问题 4 的微分方程的函数)

func_plus (解问题 3 的微分方程的函数改进版)

func_plus_plus (解问题 3 的微分方程的函数改进改进版)

图表 rar;

问题 1 图表

问题 2 图表

问题 3 图表

问题 4 图表

问题 1:

func1 (解问题 1 第 1 小问的微分方程函数)

```
function dy = func1(t,x)
dy=zeros(4,1);
dy(1)=x(2);
dy(2)=-1.718342571637506*x(2)+1.612504001025553*x(4) -
17.988658969966224*x(1)+12.900032008204422*x(3)+1.007815000640970*cos(1.4005*t) -
2.605258214296944;
dy(3)=x(4);
dy(4)=4.1102*x(2)-4.1102*x(4)+32.8812*x(1)-32.8812*x(3)+6.6406;
end
```

main1 (解问题 1 第 1 小问的主函数)

```
clc,clear
w=1.4005;
T=2*pi/w;

[t,x]=ode45(@func1 , [0:0.01:280] , [0 0 0.2019575 0]);
```

```
x1=x(21:20:4000*T,1);
x2=x(21:20:4000*T,2);
x3=x(21:20:4000*T,3);
x4=x(21:20:4000*T,4);
table=[x1,x2,x3,x4]
```

```
%%
subplot(2,2,1)
plot(t,x(:,1),'r')
xlabel('t / s')
ylabel('x / m')
legend('浮子位移')
```

```
%%
subplot(2,2,2)
plot(t,x(:,2),'r')
xlabel('t / s')
ylabel('v / (m/s)')
legend('浮子速度')
```

```
%%
subplot(2,2,3)
plot(t,x(:,3),'r')
xlabel('t / s')
ylabel('x / m')
legend('振子位移')
```

```
%%
subplot(2,2,4)
plot(t,x(:,4),'r')
xlabel('t / s')
ylabel('v / (m/s)')
legend('振子速度')
```

func2 (解问题 1 第 2 小问的微分方程函数)

```
function dy = func2(t,x)
dy=zeros(4,1);
% dy(1)=x(2);
% dy(2)=-1.7183*x(2)+1.6125*x(4)-17.9887*x(1)+12.9*x(3)+1.0078*cos(1.4005*t) -
2.6053;
% dy(3)=x(4);
% dy(4)=4.1102*x(2)-4.1102*x(4)+32.8812*x(1)-32.8812*x(3)+6.6406;
dy(1)=x(2);
```

```

dy(2)=-1.6125*(x(2)-x(4))*sqrt(abs(x(2)-x(4)))-0.1058*x(2)-
17.9887*x(1)+12.9*x(3)+1.0078*cos(1.4005*t)-2.6053;
dy(3)=x(4);
dy(4)=4.1102*(x(2)-x(4))*sqrt(abs(x(2)-x(4)))+32.8812*x(1)-32.8812*x(3)+6.6406;
end

```

main2（解问题 1 第 2 小问的主函数）

```

clc,clear
w=1.4005;
T=2*pi/w;

[t,x]=ode45(@func2 , [0:0.01:280] , [0 0 0.2019575 0]);

x1=x(21:20:4000*T,1);
x2=x(21:20:4000*T,2);
x3=x(21:20:4000*T,3);
x4=x(21:20:4000*T,4);
table=[x1,x2,x3,x4]
%%

plot(t,x(:,1),'r')
xlabel('t / s')
ylabel('x / m')
legend('浮子位移')
%%

plot(t,x(:,2),'r')
xlabel('t / s')
ylabel('v / (m/s)')
legend('浮子速度')
%%

plot(t,x(:,3),'r')
xlabel('t / s')
ylabel('x / m')
legend('振子位移')
%%

plot(t,x(:,4),'r')
xlabel('t / s')
ylabel('v / (m/s)')
legend('振子速度')

```

ques1（涉及数值整理）

```

clc,clear
format long
%%
mf = 4866    ;% 浮子质量
rf = 1      ;% 浮子底半径
hfz= 3      ;% 浮子圆柱部分高度
hV = 0.8    ;% 浮子圆锥部分高度
mz = 2433   ;% 振子质量
rz = 0.5    ;% 振子半径 (m)
hz = 0.5    ;% 振子高度 (m)
p = 1025    ;% 海水的密度 (kg/m3)
g = 9.8     ;% 重力加速度 (m/s2)

```

```

kg = 80000 ;% 弹簧刚度 (N/m)
l0 = 0.5 ;% 弹簧原长 (m)
kn = 250000 ;% 扭转弹簧刚度 (N·m)
j = 8890.7 ;% 静水恢复力矩系数 (N·m)

f = 1.4005 ;% 入射波浪频率 (s-1)
mad = 1335.535 ;% 垂荡附加质量 (kg)
Jad = 6779.315 ;% 纵摇附加转动惯量 (kg·m2)
L_r = 656.3616 ;% 垂荡兴波阻尼系数 (N·s/m)
L_z = 151.4388 ;% 纵摇兴波阻尼系数 (N·m·s)
A = 6250 ;% 垂荡激励力振幅 (N)
M = 1230 ;% 纵摇激励力矩振幅 (N·m)

La1=10000;
Lab=10000;

%%D2y
m1 = mf + mad;
dy111 = -1*La1;
dy112 = -1*L_r;
dz111 = La1;
z111 = kg;
y111 = -1*pi*rf*rf*g*p;
y112 = -1*kg;
C111 = -1*kg*l0;
C112 = mz*g;

dy11 = (dy111+dy112)/m1;
dz11 = dz111/m1;
z11 = z111/m1;
y11 = (y111+y112)/m1;
cos_t11 = A/m1;
C11 = (C111+C112)/m1;

%coefficient
coefficient1_1=[dy11,dz11,y11,z11,cos_t11,C11]
%%
m2 = mz;
dy121 = La1;
dz121 = -1*La1;
y121 = kg;
z121 = -1*kg;
C121 = kg*l0;
C122 = -1*mz*g;

dy12 = dy121/m2;
dz12 = dz121/m2;
y12 = y121/m2;
z12 = z121/m2;
C12 = (C121+C122)/m2;
%coefficient
coefficient1_2=[dy12,dz12,y12,z12,C12];

%%
absx1 = -1*Lab/m1;
dy211 = -1*L_r;
y211 = -1*np.pi*rf*rf*g*p;
y212 = -1*kg;

```

```

z211    = kg;
cos_t21 = A/m1;
C211    = -1*kg*10;
C212    = mz*g;

dy21    = dy211/m1;
y21     = (y211+y212)/m1;
z21     = z211/m1;
C21     = (C211+C212)/m1;
%coefficient
coefficient2_1=[absx1,dy21,y21,z21,cos_t21,C21];

%%
absx2    = Lab/m2;
y221    = kg;
z221    = -1*kg;
C221    = kg*10;
C222    = -mz*g;

y22     = y221/m2;
z22     = z221/m2;
C22     = (C221+C222)/m2;
%coefficient
coefficient2_2=[absx2,y22,z22,C22]

```


问题 2:

ques2_1 (问题 2 第 1 小问的主函数)

```
clc,clear
tic
%%

% La1=10000;%阻尼系数
Lab=10000;%阻尼系数的比例系数

%%
% Max=zeros(1,23);
% Min=zeros(1,23);
tmp2=zeros(1,501);

cnt=1;
for La1=0:1000:100000

    cal_coe(La1);
    [t,x]=ode45(@func,[0:0.2:255],[0 0 0.2019575 0]);

    % [Maxt,Mint]=findA(x(:,1),Max,Min);
    % Max(end+1,:)=Maxt(end,:);
    % Min(end+1,:)=Mint(end,:);
    tmp2(cnt,:)=x(751:1251,2)-x(751:1251,4);
    tmp1=0:0.2:100;
    fitresult=createFit(tmp1,tmp2(cnt,:))
    cnt=cnt+1
end
% tmp2=x(751:1251,2)-x(751:1251,4)

toc
%%
load La1coe.mat
La1coe=table2array(La1coe);
La1=La1coe(:,1);
A=La1coe(:,2);
plot(La1,A,'*')
%%
% A = 4.079e-26*x^{5} - 1.315e-20*x^{4} + 1.585e-15*x^{3} -7.918e-11*x^{2} +
1.169e-07*x + 0.1571
x=0:0.1:100000;
P = 0.5.*x.*(4.079e-26.*x.^5 - 1.315e-20.*x.^4 + 1.585e-15.*x.^3 -7.918e-
11.*x.^2 + 1.169e-07.*x + 0.1571).^2;
index=find(P==max(P));

disp('最大大输出功率')
max(P)
disp('最优阻尼系数')
x(index)
plot(x,P);
hold on
plot(x(index),P(index),'*')

% DP=diff(P)
% DP=simplify(DP)
% solve(DP,x)
```

func (解问题 2 第 1 小问的微分方程的函数)

```
function dy = func(t,x)
```

```
load coe.mat dy11 dz11 y11 z11 cos_t11 C11 dy12 dz12 y12 z12 C12
dy=zeros(4,1);
dy(1)=x(2);
dy(2)=dy11*x(2)+dz11*x(4)+y11*x(1)+z11*x(3)+cos_t11*cos(2.2143*t)+C11;
dy(3)=x(4);
dy(4)=dy12*x(2)+dz12*x(4)+y12*x(1)+z12*x(3)+C12;
% dy(1)=x(2);
% dy(2)=-1.6125*(x(2)-x(4))*sqrt(abs(x(2)-x(4)))-0.1058*x(2)-
17.9887*x(1)+12.9*x(3)+1.0078*cos(1.4005*t)-2.6053;
% dy(3)=x(4);
% dy(4)=4.1102*(x(2)-x(4))*sqrt(abs(x(2)-x(4)))+32.8812*x(1)-
32.8812*x(3)+6.6406;
end
```

cal_coe (计算各数值函数)

```
function [dy11,dz11,y11,z11,cos_t11,C11,dy12,dz12,y12,z12,C12] = cal_coe(La1)
```

```
mf = 4866 ;% 浮子质量
rf = 1 ;% 浮子底半径
hfz= 3 ;% 浮子圆柱部分高度
hV = 0.8 ;% 浮子圆锥部分高度
mz = 2433 ;% 振子质量
rz = 0.5 ;% 振子半径 (m)
hz = 0.5 ;% 振子高度 (m)
p = 1025 ;% 海水的密度 (kg/m3)
g = 9.8 ;% 重力加速度 (m/s2)
kg = 80000 ;% 弹簧刚度 (N/m)
l0 = 0.5 ;% 弹簧原长 (m)
kn = 250000 ;% 扭转弹簧刚度 (N·m)
j = 8890.7 ;% 静水恢复力矩系数 (N·m)
%%
f = 2.2143 ;% 入射波浪频率 (s-1)
mad = 1165.992 ;% 垂荡附加质量 (kg)
Jad = 7131.29 ;% 纵摇附加转动惯量 (kg·m2)
L_r = 167.8395 ;% 垂荡兴波阻尼系数 (N·s/m)
L_z = 2992.724 ;% 纵摇兴波阻尼系数 (N·m·s)
A = 4890 ;% 垂荡激励力振幅 (N)
M = 2560 ;% 纵摇激励力矩振幅 (N·m)
```

```
% La1=10000;%阻尼系数
```

```
Lab=10000;%阻尼系数的比例系数
```

```
%%
```

```
%D2y
```

```
m1 = mf + mad;
dy112 = -1*L_r;
z111 = kg;
y111 = -1*pi*rf*rf*g*p;
y112 = -1*kg;
C111 = -1*kg*l0;
C112 = mz*g;
z11 = z111/m1;
y11 = (y111+y112)/m1;
```

```

cos_t11 = A/m1;
C11     = (C111+C112)/m1;
%D2z
m2      = mz;
y121    = kg;
z121    = -1*kg;
C121    = kg*10;
C122    = -1*mz*g;
y12     = y121/m2;
z12     = z121/m2;
C12     = (C121+C122)/m2;

dy111   = -1*La1;
dy11    = (dy111+dy112)/m1;
dz111   = La1;
dz11    = dz111/m1;
dy121   = La1;
dz121   = -1*La1;
dy12    = dy121/m2;
dz12    = dz121/m2;
save coe.mat dy11 dz11 y11 z11 cos_t11 C11 dy12 dz12 y12 z12 C12
end

```

findA (寻找振幅函数)

```
function [Max,Min] = findA(x,Max,Min)
```

```

count1=1;
count2=1;
for i=2:size(x)-1

    if x(i)>x(i-1) && x(i)>x(i+1)
        Max(end,count1)=x(i);
        count1=count1+1;
    end
    if x(i)<x(i-1) && x(i)<x(i+1)
        Min(end,count2)=x(i);
        count2=count2+1;
    end
end
% A=mean(Max);

```

createFit (cftool 自生成函数)

```

function [fitresult, gof] = createFit(tmp1, tmp2)
%CREATEFIT(TMP1,TMP2)
% Create a fit.
%
% Data for 'untitled fit 1' fit:
%     X Input : tmp1
%     Y Output: tmp2
% Output:
%     fitresult : a fit object representing the fit.
%     gof       : structure with goodness-of fit info.
%
% 另请参阅 FIT, CFIT, SFIT.

% 由 MATLAB 于 17-Sep-2022 18:43:45 自动生成

```

```

%% Fit: 'untitled fit 1'.
[xData, yData] = prepareCurveData( tmp1, tmp2 );

% Set up fittype and options.
ft = fittype( 'a*sin(2.2143*x+b)', 'independent', 'x', 'dependent', 'y' );
opts = fitoptions( 'Method', 'NonlinearLeastSquares' );
opts.Display = 'Off';
opts.StartPoint = [0.56963158839996 0.252116048764013];

% Fit model to data.
[fitresult, gof] = fit( xData, yData, ft, opts );

% Plot fit with data.
% figure( 'Name', 'untitled fit 1' );
% h = plot( fitresult, xData, yData );
% legend( h, 'tmp2 vs. tmp1', 'untitled fit 1', 'Location', 'NorthEast',
'Interpreter', 'none' );
% Label axes
% xlabel( 'tmp1', 'Interpreter', 'none' );
% ylabel( 'tmp2', 'Interpreter', 'none' );
% grid on
func_plus (解问题 2 第 12 小问的微分方程的函数改进版)
function y = func_plus(p,xdata)
w=2.2143;

t=xdata(:,1);

A=p(1);
b=p(2);
y=A.*sin(w.*t+b);
end

func_plus_plus (解问题 2 第 12 小问的微分方程的函数改进改进版)
function z = func_plus_plus(p,xdata)

x=xdata(:,1);

a=p(1);
b=p(2);
c=p(3);
d=p(4);
e=p(5);
f=p(6);
z=a.*x.^5+b.*x.^4+c.*x.^3+d.*x.^2+e.*x+f;
end

ques2_2 (问题 2 第 1 小问的主函数改进版)
clc,clear
tic
%%

%La1=10000;%阻尼系数
%Lab=10000;%阻尼系数的比例系数

%%

```

```

% Max=zeros(1,23);
% Min=zeros(1,23);
tmp2=zeros(1,501);
tmp1=0:0.2:100;
cnt=1;
for n=0:0.2:1

    for Lab=500:10000:100000

        cal_coe(Lab,n);
        [t,x]=ode45(@func,[0:0.2:255],[0 0 0.2019575 0]);
        tmp2(cnt,:)=x(751:1251,2)-x(751:1251,4);
        fitresult=createFit(tmp1,tmp2(cnt,:))
        cnt=cnt+1
    end
end
% [Maxt,Mint]=findA(x(:,1),Max,Min);
% Max(end+1,:)=Maxt(end,:);
% Min(end+1,:)=Mint(end,:);

```

ques2_2_plus (问题 2 第 1 小问的主函数改进版)

```

clc,clear
tic
%%

%La1=10000;%阻尼系数
%Lab=10000;%阻尼系数的比例系数

%%

% tmp2=zeros(1,501);

tmp1=0:0.2:100;
tmp1=tmp1';
cnt=1;
for n=0.3:0.05:0.4

    for Lab=500:2000:100000

        cal_coe(Lab,n);
        [t,x]=ode45(@func,[0:0.2:255],[0 0 0.2019575 0]);
%         tmp2(cnt,:)=x(751:1251,2)-x(751:1251,4);
        tmp2=x(751:1251,2)-x(751:1251,4);

%         fitresult=createFit(tmp1,tmp2(cnt,:))
        p0=[0.1 0];
        [p1]=lsqcurvefit(@func_plus,p0,tmp1,tmp2);
        table2(cnt,1:2)=p1;
%         y1=func_plus(p1,tmp1);
%         plot(tmp1,y1(:,1));
%         hold on
%         plot(tmp1,tmp2);
%         legend('拟合值','真实值')
        cnt=cnt+1
    end
end
end

```

```

toc
%%
load table2.mat

Lab=500:2000:100000;
Lab=Lab';
A=table2(:,1);

% plot(Lab(1:10),A(1:10),'Marker','*','color','r')
% hold on
% plot(Lab(11:20),A(11:20),'Marker','*','color','k')
% plot(Lab(21:30),A(21:30),'Marker','*','color','r')
% plot(Lab(31:40),A(31:40),'Marker','*','color','k')
% plot(Lab(41:50),A(41:50),'Marker','*','color','r')
% plot(Lab(51:60),A(51:60),'Marker','*','color','k')
%%
w=2.2143;
T=2*pi/w;
d=0.001;
t=0:d:T;
x=0:1:100000;
x=x';
%%
n=0;

for i=1:10
    P1(i,1)=trapz(Lab(i).*(abs(A(i).*sin(w.*t))).^(n+2)).*d/T;
end

p0=[-1.471e-22 2.388e-17 3.713e-13 -2.597e-07 0.01443 -1.427];
[p2]=lsqcurvefit(@func_plus_plus,p0,Lab,P1);

P1=func_plus_plus(p2,x);

% P1 = -1.471e-22.*x.^5 + 2.388e-17.*x.^4 + 3.713e-13.*x.^3-2.597e-07.*x.^2 +
0.01443.*x - 1.427;
% P1 = 0.5.*x.*(4.358e-26.*x.^5 - 1.358e-20.*x.^4 + 1.593e-15.*x.^3 -7.766e-
11.*x.^2 + 4.529e-08.*x + 0.1578).^(2+n);
index=find(P1==max(P1));

disp('最大大输出功率')
max(P1)
disp('最优阻尼系数')
x(index)
plot(x,P1);

hold on
plot(x(index),P1(index),'*')
legend('n=0','M1')
%%
n=0.05;

for i=11:20
    P2(i-10,1)=trapz(Lab(i-10).*(abs(A(i).*sin(w.*t))).^(n+2)).*d/T;
end

p0=[-1.471e-22 2.388e-17 3.713e-13 -2.597e-07 0.01443 -1.427];
[p2]=lsqcurvefit(@func_plus_plus,p0,Lab,P2);

```

```

P2=func_plus_plus(p2,x);

% P2 = - 1.233e-22.*x.^5 + 2.932e-17.*x.^4 - 1.923e-12.*x.^3 -4.405e-08.*x.^2 +
0.008661.*x - 0.3197;
% P2 = 0.5.*x.*(5.462e-27.*x.^5 - 2.673e-21.*x.^4 + 4.613e-16.*x.^3 -3.228e-
11.*x.^2 + 3.799e-09.*x + 0.1578).^(2+n);
index=find(P2==max(P2));

disp('最大大输出功率')
max(P2)
disp('最优阻尼系数')
x(index)
plot(x,P2);
hold on
plot(x(index),P2(index),'*')
legend('n=0.05','M2')
%%
n=0.1;

for i=21:30
    P3(i-20,1)=trapz(Lab(i-20).*(abs(A(i).*sin(w.*t))).^(n+2)).*d/T;
end
p0=[-1.471e-22 2.388e-17 3.713e-13 -2.597e-07 0.01443 -1.427];
[p2]=lsqcurvefit(@func_plus_plus,p0,Lab,P3);

P3=func_plus_plus(p2,x);
% P3 = - 4.57e-23.*x.^5 + 1.297e-17.*x.^4 - 1.162e-12.*x.^3 +3.093e-11.*x.^2 +
0.005524.*x - 0.0304;
% P3 = 0.5.*x.*(-5e-27.*x.^5 + 8.301e-22.*x.^4 + 2.03e-17.*x.^3 - 9.633e-
12.*x.^2 -5.421e-08.*x + 0.1578).^(2+n);
index=find(P3==max(P3));

disp('最大大输出功率')
max(P3)
disp('最优阻尼系数')
x(index)
plot(x,P3);
hold on
plot(x(index),P3(index),'*')
legend('n=0.10','M3')
%%
n=0.15;

for i=31:40
    P4(i-30,1)=trapz(Lab(i-30).*(abs(A(i).*sin(w.*t))).^(n+2)).*d/T;
end
p0=[-1.471e-22 2.388e-17 3.713e-13 -2.597e-07 0.01443 -1.427];
[p2]=lsqcurvefit(@func_plus_plus,p0,Lab,P4);

P4=func_plus_plus(p2,x);
% P4 = - 9.836e-24.*x.^5 + 3.465e-18.*x.^4 - 4.141e-13.*x.^3 +1.924e-09.*x.^2 +
0.003666.*x + 0.007211;
% P4 = 0.5.*x.*(-3.462e-27.*x.^5 + 7.773e-22.*x.^4 - 3.948e-17.*x.^3 -2.83e-
12.*x.^2 - 4.098e-08.*x + 0.1576).^(2+n);
index=find(P4==max(P4));

disp('最大大输出功率')
max(P4)

```

```

disp('最优阻尼系数')
x(index)
plot(x,P4);
hold on
plot(x(index),P4(index),'*')
legend('n=0.15','M4')
%%
n=0.2;

for i=41:50
    P5(i-40,1)=trapz(Lab(i-40).*(abs(A(i).*sin(w.*t))).^(n+2)).*d/T;
end
p0=[-1.233e-22 2.932e-17 -1.923e-12 -4.405e-08 0.008661 -0.3197];
[p2]=lsqcurvefit(@func_plus_plus,p0,Lab,P5);

P5=func_plus_plus(p2,x);
% P5 = - 1.233e-22.*x.^5 + 2.932e-17.*x.^4 - 1.923e-12.*x.^3 -4.405e-08.*x.^2 +
0.008661.*x - 0.3197;
% P2 = 0.5.*x.*(5.462e-27.*x.^5 - 2.673e-21.*x.^4 + 4.613e-16.*x.^3 -3.228e-
11.*x.^2 + 3.799e-09.*x + 0.1578).^(2+n);
index=find(P5==max(P5));

disp('最大大输出功率')
max(P5)
disp('最优阻尼系数')
x(index)
plot(x,P5);
hold on
plot(x(index),P5(index),'*')
legend('n=0.20','M5')
%%
n=0.25;

for i=51:60
    P6(i-50,1)=trapz(Lab(i-50).*(abs(A(i).*sin(w.*t))).^(n+2)).*d/T;
end
p0=[-1.233e-22 2.932e-17 -1.923e-12 -4.405e-08 0.008661 -0.3197];
[p2]=lsqcurvefit(@func_plus_plus,p0,Lab,P6);

P6=func_plus_plus(p2,x);
% P5 = - 1.175e-23.*x.^5 + 2.876e-18.*x.^4 - 2.742e-13.*x.^3 +4.47e-09.*x.^2 +
0.002435.*x + 0.01504;
% P5 = 0.5.*x.*(-6.923e-27.*x.^5 + 1.525e-21.*x.^4 - 1.079e-16.*x.^3 +1.231e-
12.*x.^2 - 3.992e-08.*x + 0.1576).^(2+n);
index=find(P6==max(P6));

disp('最大大输出功率')
max(P6)
disp('最优阻尼系数')
x(index)
plot(x,P6);
hold on
plot(x(index),P6(index),'*')
legend('n=0.25','M6')
%%
n=0.3;

% for i=61:70
for i=1:50

```



```

    P7(i,1)=trapz(Lab(i).*(abs(A(i).*sin(w.*t))).^(n+2)).*d/T;
end
p0=[-1.233e-22 2.932e-17 -1.923e-12 -4.405e-08 0.008661 -0.3197];
[p2]=lsqcurvefit(@func_plus_plus,p0,Lab,P7);

P7=func_plus_plus(p2,x);

index=find(P7==max(P7));

disp('最大大输出功率')
max(P7)
disp('最优阻尼系数')
x(index)
plot(x,P7);
hold on
plot(x(index),P7(index),'*')
% legend('n=0.30','M7')
%%
n=0.35;

% for i=71:80
for i=51:100
    P8(i-50,1)=trapz(Lab(i-50).*(abs(A(i).*sin(w.*t))).^(n+2)).*d/T;
end
p0=[-1.233e-22 2.932e-17 -1.923e-12 -4.405e-08 0.008661 -0.3197];
[p2]=lsqcurvefit(@func_plus_plus,p0,Lab,P8);

P8=func_plus_plus(p2,x);

index=find(P8==max(P8));

disp('最大大输出功率')
max(P8)
disp('最优阻尼系数')
x(index)
plot(x,P8);
hold on
plot(x(index),P8(index),'*')
% legend('n=0.35','MAX')
%%
n=0.4;

% for i=81:90
for i=101:150
    P9(i-100,1)=trapz(Lab(i-100).*(abs(A(i).*sin(w.*t))).^(n+2)).*d/T;
end
p0=[-4.57e-23 1.297e-17 -1.162e-12 3.093e-11 0.005524 -0.0304];
[p2]=lsqcurvefit(@func_plus_plus,p0,Lab,P9);

P9=func_plus_plus(p2,x);
% P9 = - 4.57e-23.*x.^5 + 1.297e-17.*x.^4 - 1.162e-12.*x.^3 + 3.093e-11.*x.^2 +
0.005524.*x - 0.0304;
% P3 = 0.5.*x.*(-5e-27.*x.^5 + 8.301e-22.*x.^4 + 2.03e-17.*x.^3 - 9.633e-
12.*x.^2 - 5.421e-08.*x + 0.1578).^(2+n);
index=find(P9==max(P9));

disp('最大大输出功率')
max(P9)

```

```

disp('最优阻尼系数')
x(index)
plot(x,P9);
hold on
plot(x(index),P9(index),'*')
% legend('n=0.40','M9')
%%
n=0.45;

for i=91:100
    P10(i-90,1)=trapz(Lab(i-90).*(abs(A(i).*sin(w.*t))).^(n+2)).*d/T;
end
p0=[-4.57e-23 1.297e-17 -1.162e-12 3.093e-11 0.005524 -0.0304];
[p2]=lsqcurvefit(@func_plus_plus,p0,Lab,P10);

P10=func_plus_plus(p2,x);

index=find(P10==max(P10));

disp('最大大输出功率')
max(P10)
disp('最优阻尼系数')
x(index)
plot(x,P10);
hold on
plot(x(index),P10(index),'*')
legend('n=0.45','M10')
%%
n=0.50;

for i=101:110
    P11(i-100,1)=trapz(Lab(i-100).*(abs(A(i).*sin(w.*t))).^(n+2)).*d/T;
end
p0=[-4.57e-23 1.297e-17 -1.162e-12 3.093e-11 0.005524 -0.0304];
[p2]=lsqcurvefit(@func_plus_plus,p0,Lab,P11);

P11=func_plus_plus(p2,x);

index=find(P10==max(P11));

disp('最大大输出功率')
max(P11)
disp('最优阻尼系数')
x(index)
plot(x,P11);
hold on
plot(x(index),P11(index),'*')
legend('n=0.50','M11')
%%
n=0.55;

for i=111:120
    P12(i-110,1)=trapz(Lab(i-110).*(abs(A(i).*sin(w.*t))).^(n+2)).*d/T;
end
p0=[-4.57e-23 1.297e-17 -1.162e-12 3.093e-11 0.005524 -0.0304];
[p2]=lsqcurvefit(@func_plus_plus,p0,Lab,P12);

P12=func_plus_plus(p2,x);

```

```

index=find(P10==max(P12));

disp('最大大输出功率')
max(P12)
disp('最优阻尼系数')
x(index)
plot(x,P12);
hold on
plot(x(index),P12(index),'*')
legend('n=0.55','M12')
%%
n=0.6;
for i=121:130
    P13(i-120,1)=trapz(Lab(i-120).*(abs(A(i).*sin(w.*t))).^(n+2)).*d/T;
end
p0=[-4.57e-23 1.297e-17 -1.162e-12 3.093e-11 0.005524 -0.0304];
[p2]=lsqcurvefit(@func_plus_plus,p0,Lab,P13);

P13=func_plus_plus(p2,x);
index=find(P13==max(P13));

disp('最大大输出功率')
max(P13)
disp('最优阻尼系数')
x(index)
plot(x,P13);
hold on
plot(x(index),P13(index),'*')
legend('n=0.60','M13')
%%

% x=0:1:100000;
% P = 0.5.*x.*(5.078.*10.^-26.*x.^5-1.634.*10.^-20.*x.^4+1.965.*10.^-15.*x.^3-
9.798.*10.^-11.*x.^2 + 1.916.*10.^-7.*x + 0.1869).^2;
% plot(x,P);

% DP=diff(P)
% DP=simplify(DP)
% solve(DP,x)
% DP=(1.2893.*10.^-51.*p).*(31811.9+p).^2.*(1.59395.*10.^10-243954.*p+p)
49692859523187515280913204820608950258892800000000

```

问题 3:

func(解问题 3 的微分方程的函数)

```

function dy = func(t,x)
w=1.7152;
J2=202.75;

```

```

mz=2433;
load coe.mat a11 a12 a13 a14 a15 a16 a17 c11 c12 c13 c14 c15 a21 a22 a23 a24 a25
c21 c22 c23
dy=zeros(8,1);
dy(1)=x(2);
dy(2)=a11.*cos(x(7)).^2.*(x(2)-
x(6))+a12.*x(2)+a13.*x(1)+a14.*x(5)+a15.*cos(x(7))+a16.*cos(w.*t)+a17;
dy(3)=x(4);
dy(4)=c11.*x(4)+c12.*x(8)+c13.*x(3)+c14.*x(7)+c15.*cos(w.*t);
dy(5)=x(6);
dy(6)=a21.*cos(x(7)).^2.*(x(2)-x(6))+a22.*x(1)+a23.*x(5)+a24.*cos(x(7))+a25;
dy(7)=x(8);
dy(8)=c21.*(x(4)-x(8))./(J2+mz.*((x(5)-x(1))./x(7)).^2)+c22.*(x(3)-
x(7))./(J2+mz.*((x(5)-x(1))./x(7)).^2)+c23.*(x(5)-
x(1)).*tan(x(7))./(J2+mz.*((x(5)-x(1))./x(7)).^2);
end

```

cal_coe(计算各数值函数)

function

```

[a11,a12,a13,a14,a15,a16,a17,c11,c12,c13,c14,c15,a21,a22,a23,a24,a25,c21,c22,c23]
= cal_coe()

```

```

mf = 4866 ;% 浮子质量
rf = 1 ;% 浮子底半径
hfz= 3 ;% 浮子圆柱部分高度
hV = 0.8 ;% 浮子圆锥部分高度
mz = 2433 ;% 振子质量
rz = 0.5 ;% 振子半径 (m)
hz = 0.5 ;% 振子高度 (m)
p = 1025 ;% 海水的密度 (kg/m3)
g = 9.8 ;% 重力加速度 (m/s2)
kg = 80000 ;% 弹簧刚度 (N/m)
l0 = 0.5 ;% 弹簧原长 (m)
km = 250000;% 扭转弹簧刚度 (N·m)
j = 8890.7;% 静水恢复力矩系数 (N·m)

f = 1.7152 ;% 入射波浪频率 (s-1)
mad = 1028.876 ;% 垂荡附加质量 (kg)
Jad = 7001.914 ;% 纵摇附加转动惯量 (kg·m2)
L_r = 683.4558 ;% 垂荡兴波阻尼系数 (N·s/m)
L_z = 654.3383 ;% 纵摇兴波阻尼系数 (N·m·s)
A = 3640 ;% 垂荡激励力振幅 (N)
M = 1690 ;% 纵摇激励力矩振幅 (N·m)

La1 = 10000 ;% 直线阻尼器系数
La2 = 1000 ;% 旋转阻尼器系数
% Lab = 10000 % 阻尼系数的比例系数

J_f_C1 = 5268.0135 ;% 浮子相对于 C1 的转动惯量
J_fad_C1 = J_f_C1+Jad ;% 浮子加纵摇附加转动惯量对 C1
L_A_C1 = 49/45 ;% A 与 C1 距离

J_f_A = J_fad_C1+mf*L_A_C1*L_A_C1 ;% 浮子附加后对 A 点的转动惯量
J_Z_C2 = mz*(l0*l0/12+rz*rz/4) ;%202.75

```

```

% J_Z_A      = J_Z_C2+mz;

% 问题三 浮子 z 方向方程参数
m1      = mf+mad;

a11     = -La1/m1;
a12     = -L_r/m1;
a13     = -(kg+p*g*pi)/m1;
a14     = kg/m1;
a15     = -0.75*kg/m1;
a16     = A/m1;
a17     = mz*g/m1;

% 问题三 浮子 alpha 角的方程参数
c11     = -(La2+L_z)/J_f_A;
c12     = La2/J_f_A;
c13     = -(j+km)/J_f_A;
c14     = km/J_f_A;
c15     = M/J_f_A;

% 问题三 振子 z 方向方程参数
m2 = mz;

a21     = La1/m2;
a22     = kg/m2;
a23     = -kg/m2;
a24     = 0.75*kg/m2;
a25     = -g;

% 问题三 振子 b 角的方程参数
c21     = L_z;
c22     = km;
c23     = mz*g;

save coe.mat a11 a12 a13 a14 a15 a16 a17 c11 c12 c13 c14 c15 a21 a22 a23 a24 a25
c21 c22 c23
end

ques3(问题 3 的主函数)
function
[a11,a12,a13,a14,a15,a16,a17,c11,c12,c13,c14,c15,a21,a22,a23,a24,a25,c21,c22,c23]
= cal_coe()

mf = 4866 ;% 浮子质量
rf = 1 ;% 浮子底半径
hfz= 3 ;% 浮子圆柱部分高度
hV = 0.8 ;% 浮子圆锥部分高度
mz = 2433 ;% 振子质量

```

```

rz = 0.5 ;% 振子半径 (m)
hz = 0.5 ;% 振子高度 (m)
p = 1025 ;% 海水的密度 (kg/m3)
g = 9.8 ;% 重力加速度 (m/s2)
kg = 80000 ;% 弹簧刚度 (N/m)
l0 = 0.5 ;% 弹簧原长 (m)
km = 250000;% 扭转弹簧刚度 (N·m)
j = 8890.7;% 静水恢复力矩系数 (N·m)

f = 1.7152 ;% 入射波浪频率 (s-1)
mad = 1028.876 ;% 垂荡附加质量 (kg)
Jad = 7001.914 ;% 纵摇附加转动惯量 (kg·m2)
L_r = 683.4558 ;% 垂荡兴波阻尼系数 (N·s/m)
L_z = 654.3383 ;% 纵摇兴波阻尼系数 (N·m·s)
A = 3640 ;% 垂荡激励力振幅 (N)
M = 1690 ;% 纵摇激励力矩振幅 (N·m)

La1 = 10000 ;% 直线阻尼器系数
La2 = 1000 ;% 旋转阻尼器系数
% Lab = 10000 % 阻尼系数的比例系数

J_f_C1 = 5268.0135 ;% 浮子相对于 C1 的转动惯量
J_fad_C1 = J_f_C1+Jad ;% 浮子加纵摇附加转动惯量对 C1
L_A_C1 = 49/45 ;% A 与 C1 距离

J_f_A = J_fad_C1+mf*L_A_C1*L_A_C1 ;% 浮子附加后对 A 点的转动惯量

J_Z_C2 = mz*(l0*l0/12+rz*rz/4) ;%202.75

% J_Z_A = J_Z_C2+mz;

% 问题三 浮子 z 方向方程参数
m1 = mf+mad;

a11 = -La1/m1;
a12 = -L_r/m1;
a13 = -(kg+p*g*pi)/m1;
a14 = kg/m1;
a15 = -0.75*kg/m1;
a16 = A/m1;
a17 = mz*g/m1;

% 问题三 浮子 alpha 角的方程参数
c11 = -(La2+L_z)/J_f_A;
c12 = La2/J_f_A;
c13 = -(j+km)/J_f_A;
c14 = km/J_f_A;
c15 = M/J_f_A;

% 问题三 振子 z 方向方程参数
m2 = mz;

```

```

a21 = La1/m2;
a22 = kg/m2;
a23 = -kg/m2;
a24 = 0.75*kg/m2;
a25 = -g;

% 问题三 振子 b 角的方程参数
c21 = L_z;
c22 = km;
c23 = mz*g;

save coe.mat a11 a12 a13 a14 a15 a16 a17 c11 c12 c13 c14 c15 a21 a22 a23 a24 a25
c21 c22 c23
end

```

问题 4:

ques4 (问题 4 的主函数)

```

% clc,clear
%
% tic
%
% Laf=58000;
% Lam=93000;
%
% tmp1=0:0.2:100;
% tmp1=tmp1';
% cnt=1;
% for Laf=0:10000:100000
%
%     for Lam=0:10000:100000
%         r1=x(751:1251,2)-x(751:1251,6);
%         r2=x(751:1251,4)-x(751:1251,8);
%
%         cnt=cnt+1
%     end
%
%

```

```

% end
%
%%
clc,clear

tic

p01=[0.113 0];
p02=[0.0198 0];

tmp1=0:0.2:100;
tmp1=tmp1';
cnt=1;

table1=zeros(36,2);
table2=zeros(36,2);
for Laf=55000:1000:60000

    for Lam=90000:1000:95000
        cal_coe(Laf,Lam);
        [t,x]=ode45(@func , [0:0.2:255] , [0 0 0 0 0.4519575 0 0 0]);
        r1=x(751:1251,2)-x(751:1251,6);
        r2=x(751:1251,4)-x(751:1251,8);

        [p11]=lsqcurvefit(@func_plus,p01,tmp1,r1);
        [p12]=lsqcurvefit(@func_plus_plus,p02,tmp1,r2);
        table1(cnt,1)=0.5*Laf*p11(1)^2;
        table1(cnt,2)=0.5*Lam*p12(1)^2;%p2=0.5*Lam*p12(1)^2;
        table2(cnt,1)=Laf;
        table2(cnt,2)=Lam;
        cnt=cnt+1
    end
end

toc
%%
% load table1cnt37.mat
% load table2cnt37.mat
p=table1(1:36,1)+table1(1:36,2);
f=table2(1:36,1);
m=table2(1:36,2);
% scatter3(f,m,p)
[X,Y,Z]=griddata(f,m,p,linspace(min(f),max(f))',linspace(min(m),max(m))','v4');%插
值
disp('P 最大值')
t=max(max(Z))
surf(X,Y,Z,'EdgeColor','none','FaceAlpha',0.8);%三维曲面
hold on
local=find(Z==t);
scatter3(X(local),Y(local),Z(local));
X(local)
Y(local)
%%
% cal_coe(Laf,Lam);
% [t,x]=ode45(@func , [0:0.2:255] , [0 0 0 0 0.4519575 0 0 0]);

%%
% plot(t,x(:,2)-x(:,6))

```



```

%%
% plot(t,x(:,4)-x(:,8))
%%
% r1=x(751:1251,2)-x(751:1251,6);
% r2=x(751:1251,4)-x(751:1251,8);
%
% p01=[0.113 0];
% p02=[0.0198 0];
% [p11]=lsqcurvefit(@func_plus,p01,tmp1,r1);
% [p12]=lsqcurvefit(@func_plus_plus,p02,tmp1,r2);

%拟合 r1=A1sin(wt+b1)的 A1 p11(1)
%拟合 r2=A2sin(wt+b2)的 A2 p12(1)

% p1=0.5*Laf*p11(1)^2;
% p2=0.5*Lam*p12(1)^2;
%
% P=p1+p2;

cal_coe (计算各数值函数)
function
[a11,a12,a13,a14,a15,a16,a17,c11,c12,c13,c14,c15,a21,a22,a23,a24,a25,c21,c22,c23]
= cal_coe(La1,La2)

mf = 4866 ;% 浮子质量
rf = 1 ;% 浮子底半径
hfz= 3 ;% 浮子圆柱部分高度
hV = 0.8 ;% 浮子圆锥部分高度
mz = 2433 ;% 振子质量
rz = 0.5 ;% 振子半径 (m)
hz = 0.5 ;% 振子高度 (m)
p = 1025 ;% 海水的密度 (kg/m3)
g = 9.8 ;% 重力加速度 (m/s2)
kg = 80000 ;% 弹簧刚度 (N/m)
l0 = 0.5 ;% 弹簧原长 (m)
km = 250000;% 扭转弹簧刚度 (N·m)
j = 8890.7;% 静水恢复力矩系数 (N·m)

f = 1.9806 ;% 入射波浪频率 (s-1)
mad = 1091.099 ;% 垂荡附加质量 (kg)
Jad = 7142.493 ;% 纵摇附加转动惯量 (kg·m2)
L_r = 528.5018 ;% 垂荡兴波阻尼系数 (N·s/m)
L_z = 1655.909 ;% 纵摇兴波阻尼系数 (N·m·s)
A = 1760 ;% 垂荡激励力振幅 (N)
M = 2140 ;% 纵摇激励力矩振幅 (N·m)

% La1 = 10000 ;% 直线阻尼器系数
% La2 = 1000 ;% 旋转阻尼器系数
% Lab = 10000 % 阻尼系数的比例系数

J_f_C1 = 5268.0135 ;% 浮子相对于 C1 的转动惯量
J_fad_C1 = J_f_C1+Jad ;% 浮子加纵摇附加转动惯量对 C1
L_A_C1 = 49/45 ;% A 与 C1 距离

```

```

J_f_A    = J_fad_C1+mf*L_A_C1*L_A_C1 ;% 浮子附加后对 A 点的转动惯量

J_Z_C2    = mz*(10*10/12+rz*rz/4) ;%202.75

% J_Z_A    = J_Z_C2+mz;

% 问题三 浮子 z 方向方程参数
m1    = mf+mad;

a11    = -La1/m1;
a12    = -L_r/m1;
a13    = -(kg+p*g*pi)/m1;
a14    = kg/m1;
a15    = -0.75*kg/m1;
a16    = A/m1;
a17    = mz*g/m1;

% 问题三 浮子 alpha 角的方程参数
c11    = -(La2+L_z)/J_f_A;
c12    = La2/J_f_A;
c13    = -(j+km)/J_f_A;
c14    = km/J_f_A;
c15    = M/J_f_A;

% 问题三 振子 z 方向方程参数
m2 = mz;

a21    = La1/m2;
a22    = kg/m2;
a23    = -kg/m2;
a24    = 0.75*kg/m2;
a25    = -g;

% 问题三 振子 b 角的方程参数
c21    = L_z;
c22    = km;
c23    = mz*g;

save coe.mat a11 a12 a13 a14 a15 a16 a17 c11 c12 c13 c14 c15 a21 a22 a23 a24 a25
c21 c22 c23
end

func（解问题 4 的微分方程的函数）
function dy = func(t,x)
w=1.9806;
J2=202.75;
mz=2433;
load coe.mat a11 a12 a13 a14 a15 a16 a17 c11 c12 c13 c14 c15 a21 a22 a23 a24 a25
c21 c22 c23
dy=zeros(8,1);
dy(1)=x(2);
dy(2)=a11.*cos(x(7)).^2.*(x(2)-
x(6))+a12.*x(2)+a13.*x(1)+a14.*x(5)+a15.*cos(x(7))+a16.*cos(w.*t)+a17;
dy(3)=x(4);
dy(4)=c11.*x(4)+c12.*x(8)+c13.*x(3)+c14.*x(7)+c15.*cos(w.*t);
dy(5)=x(6);

```

```

dy(6)=a21.*cos(x(7)).^2.*(x(2)-x(6))+a22.*x(1)+a23.*x(5)+a24.*cos(x(7))+a25;
dy(7)=x(8);
dy(8)=c21.*(x(4)-x(8))./(J2+mz.*((x(5)-x(1))./x(7)).^2)+c22.*(x(3)-
x(7))./(J2+mz.*((x(5)-x(1))./x(7)).^2)+c23.*(x(5)-
x(1)).*tan(x(7))./(J2+mz.*((x(5)-x(1))./x(7)).^2);
end

```

func_plus(拟合问题 4 里方程的函数改进版)

```

function y = func_plus(p,xdata)
w=1.9806;

```

```

t=xdata(:,1);

```

```

A=p(1);
b=p(2);
y=A.*sin(w.*t+b);
end

```

func_plus_plus(解拟合问题 4 里方程的函数改进改进版)

```

function y = func_plus_plus(p,xdata)
w=1.9806;

```

```

t=xdata(:,1);

```

```

A=p(1);
b=p(2);
y=A.*sin(w.*t+b);
end

```