

# استاتیک

دکتر امیری

استاتیک ذرات

# تعادل ذره

شرط تعادل یک ذره را می توان به صورت زیر بیان کرد.

$$\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F} = 0$$

$$(\Sigma F_x)\mathbf{i} + (\Sigma F_y)\mathbf{j} = 0$$

بنابراین شرط لازم و کافی برای تعادل یک ذره را میتوان بصورت زیر نوشت:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0$$

# تعادل ذره

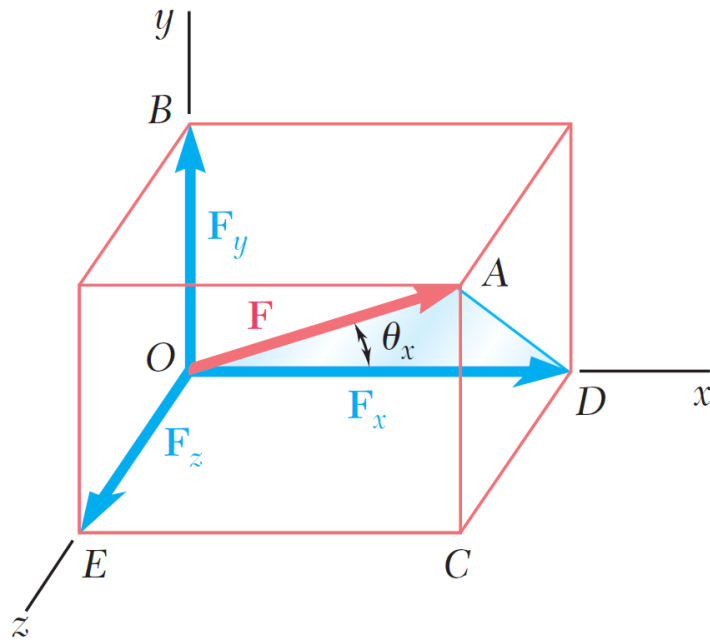
نمودار آزاد جسم:

نخستین گام در حل مسائل تعادل یک ذره، رسم نمودار آزاد جسم است. در این نمودار ذره و تمامی نیروهای وارد بر آن نشان داده شده است. بر روی نمودار آزاد بایستی اندازه نیروهای معلوم و همچنین زاویه یا ابعادی که راستای یک نیرو را مشخص می کند ترسیم نمود. اندازه یا زاویه هر نیروی نامعلوم را بایستی با یک نماد مناسب مشخص نمود.

- اگر تنها سه نیرو بر روی نمودار آزاد جسم وجود داشته باشد بهتر است با رسم مثلث نیروها مسئله را حل نمود.

- اگر بیش از سه نیرو بر روی نمودار آزاد جسم وجود داشته باشد بهتر است از روش تحلیلی استفاده کرد.

# مولفه های متعامد یک نیرو



$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$$

$$F_x = F \cos \theta_x \quad F_y = F \cos \theta_y \quad F_z = F \cos \theta_z$$



$$\mathbf{F} = F(\cos \theta_x \mathbf{i} + \cos \theta_y \mathbf{j} + \cos \theta_z \mathbf{k})$$

# مولفه های متعامد یک نیرو

بردار نیروی  $F$  را میتوان به صورت حاصلضرب اسکالر  $F$  در بردار زیر نوشت :

$$\boldsymbol{\lambda} = \cos \theta_x \mathbf{i} + \cos \theta_y \mathbf{j} + \cos \theta_z \mathbf{k}$$

بردار  $\boldsymbol{\lambda}$  برداری است که مقدار آن واحد و جهت آن همان جهت بردار نیروی  $F$  است .

$$\lambda_x = \cos \theta_x \quad \lambda_y = \cos \theta_y \quad \lambda_z = \cos \theta_z$$

$$\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = 1$$

$$\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1$$

# مولفه های متعامد یک نیرو

هنگامی که مولفه های متعامد نیروی  $F$  مشخص باشد.

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$\cos \theta_x = \frac{F_x}{F} \quad \cos \theta_y = \frac{F_y}{F} \quad \cos \theta_z = \frac{F_z}{F}$$

# جمع نیروهای همرس

برایند چند نیروی همرس

$$\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F}$$

$$\begin{aligned} R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} + R_z \mathbf{k} &= \Sigma (F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}) \\ &= (\Sigma F_x) \mathbf{i} + (\Sigma F_y) \mathbf{j} + (\Sigma F_z) \mathbf{k} \end{aligned}$$

$$R_x = \Sigma F_x \quad R_y = \Sigma F_y \quad R_z = \Sigma F_z$$

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \\ \cos \theta_x &= \frac{R_x}{R} \quad \cos \theta_y = \frac{R_y}{R} \quad \cos \theta_z = \frac{R_z}{R} \end{aligned}$$

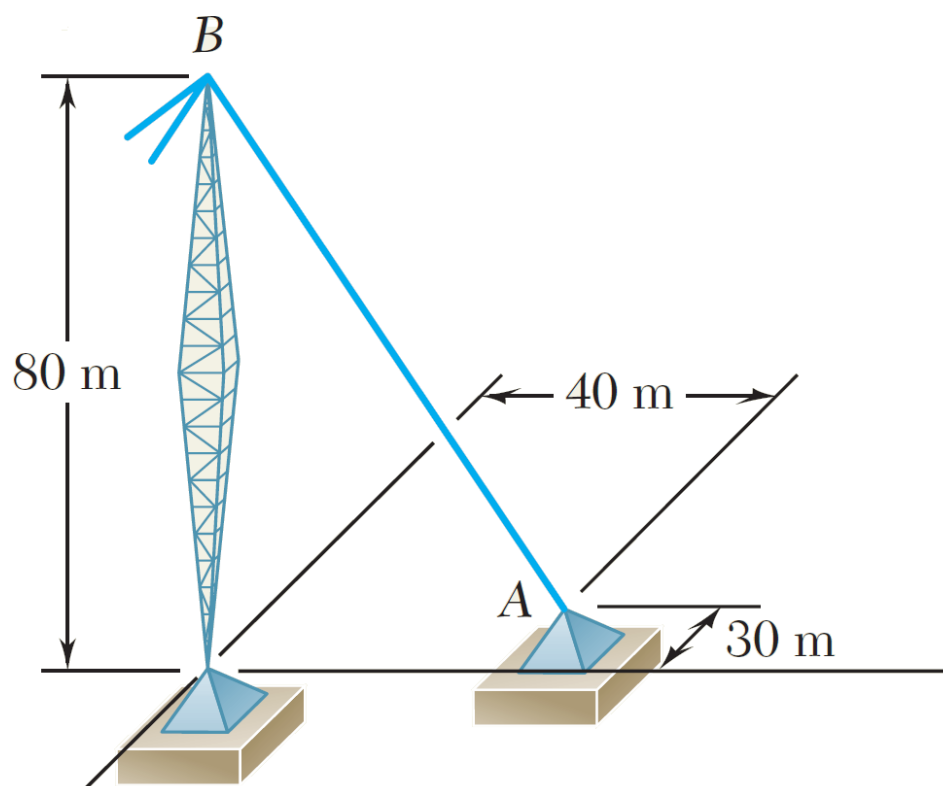
# سوال ۱

استاتیک: دکتر امیری

کابل نگهدارنده یک دکل توسط یک پیچ به نقطه  $A$  متصل شده است.

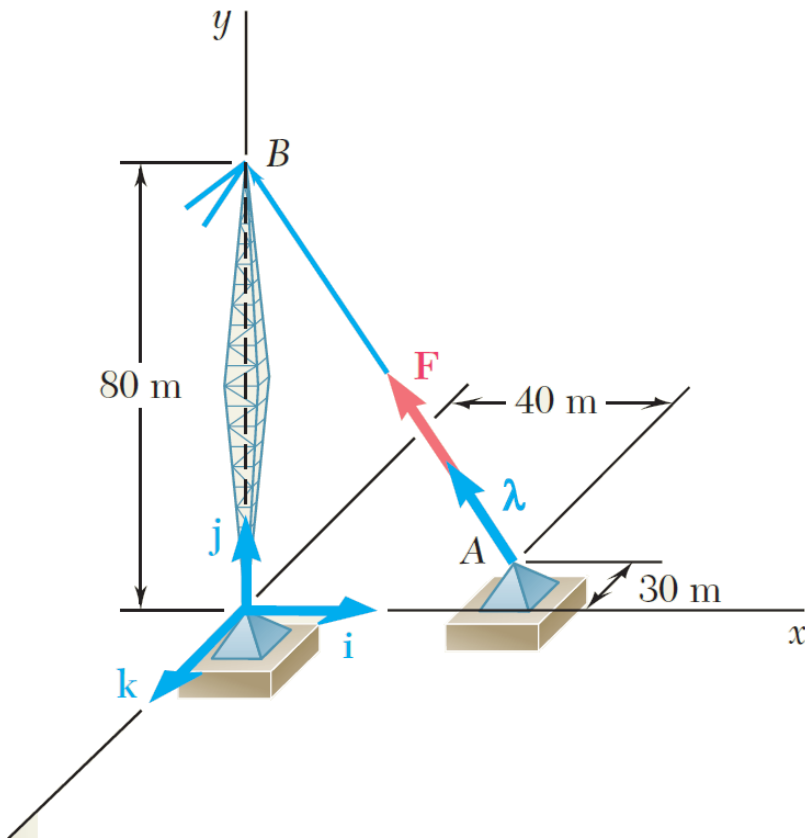
الف) مولفه های متعامد نیروی  $F$  را تعیین کنید.

ب) زوایای نیروی  $F$  با محورهای  $x$ ،  $y$  و  $z$





# حل سوال ۱



$$d_x = -40 \text{ m} \quad d_y = +80 \text{ m} \quad d_z = +30 \text{ m}$$

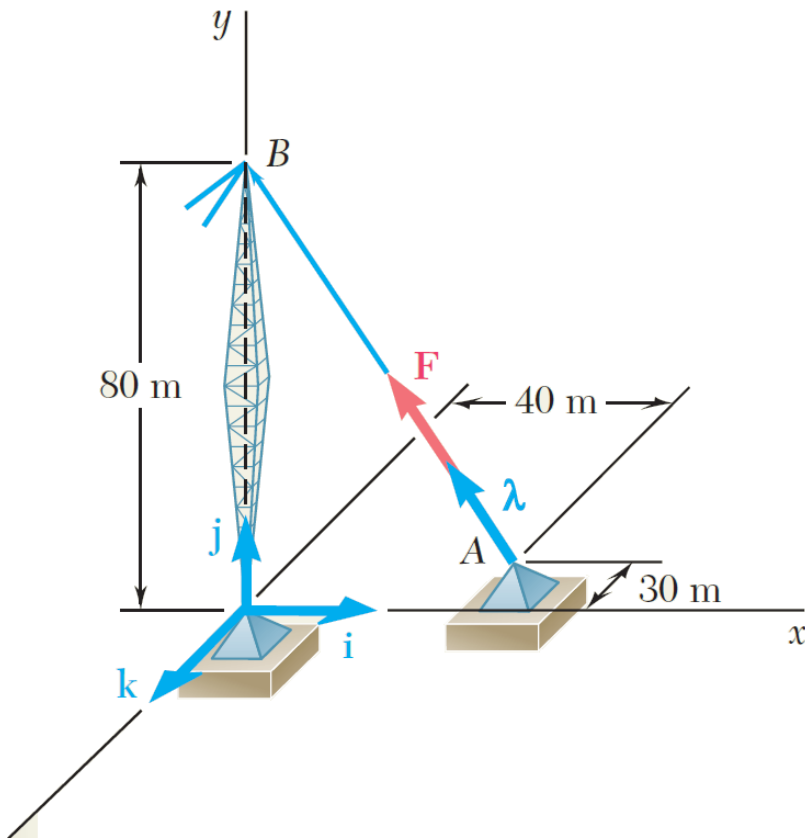
$$AB = d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2} = 94.3 \text{ m}$$

$$\vec{AB} = -(40 \text{ m})\mathbf{i} + (80 \text{ m})\mathbf{j} + (30 \text{ m})\mathbf{k}$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \vec{AB} / AB$$

$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = F \frac{\vec{AB}}{AB} = \frac{2500 \text{ N}}{94.3 \text{ m}} \vec{AB}$$

# حل سوال ۱

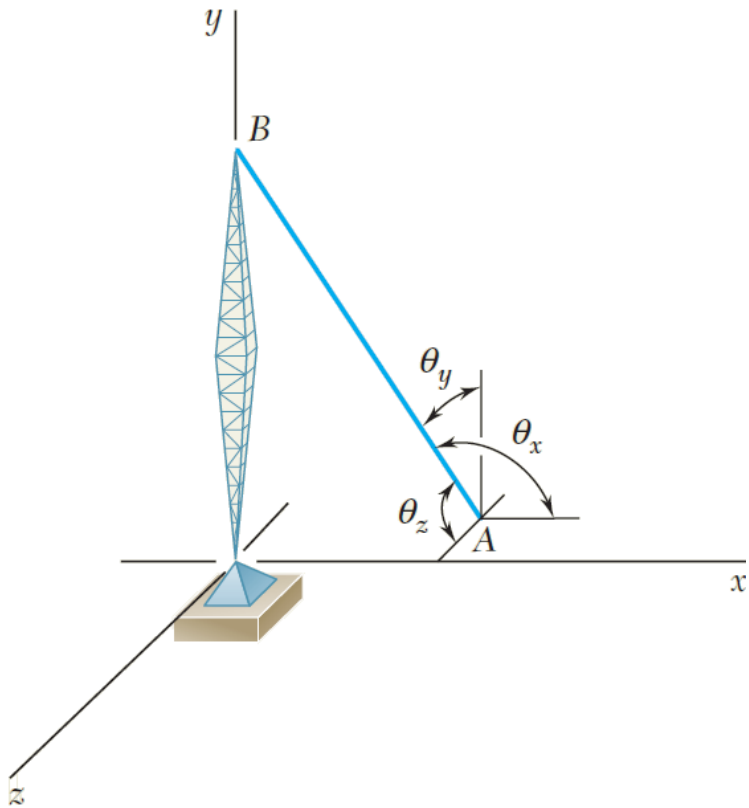


$$\mathbf{F} = \frac{2500 \text{ N}}{94.3 \text{ m}} [-(40 \text{ m})\mathbf{i} + (80 \text{ m})\mathbf{j} + (30 \text{ m})\mathbf{k}]$$

$$\mathbf{F} = -(1060 \text{ N})\mathbf{i} + (2120 \text{ N})\mathbf{j} + (795 \text{ N})\mathbf{k}$$

$$F_x = -1060 \text{ N} \quad F_y = +2120 \text{ N} \quad F_z = +795 \text{ N}$$

# حل سوال ۱



$$\cos \theta_x = \frac{F_x}{F} = \frac{-1060 \text{ N}}{2500 \text{ N}} \quad \cos \theta_y = \frac{F_y}{F} = \frac{+2120 \text{ N}}{2500 \text{ N}}$$

$$\cos \theta_z = \frac{F_z}{F} = \frac{+795 \text{ N}}{2500 \text{ N}}$$

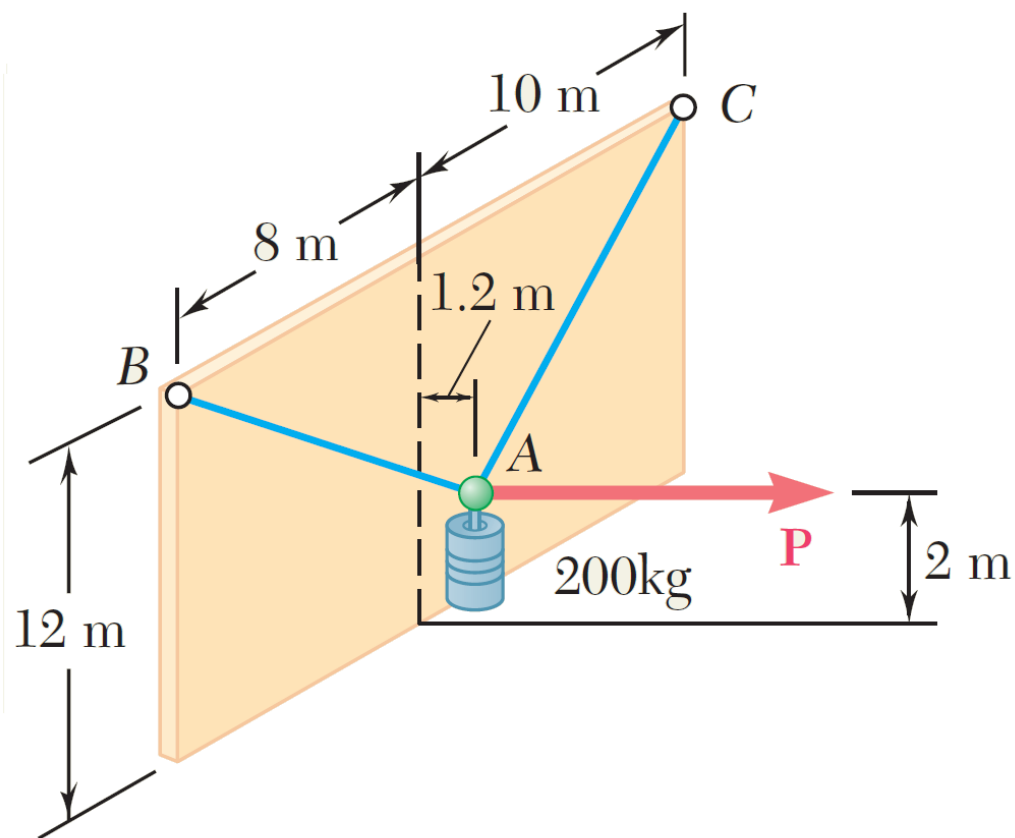
$$\theta_x = 115.1^\circ \quad \theta_y = 32.0^\circ \quad \theta_z = 71.5^\circ$$

# تعادل ذره در فضا

تعادل ذره در فضا

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_z = 0$$

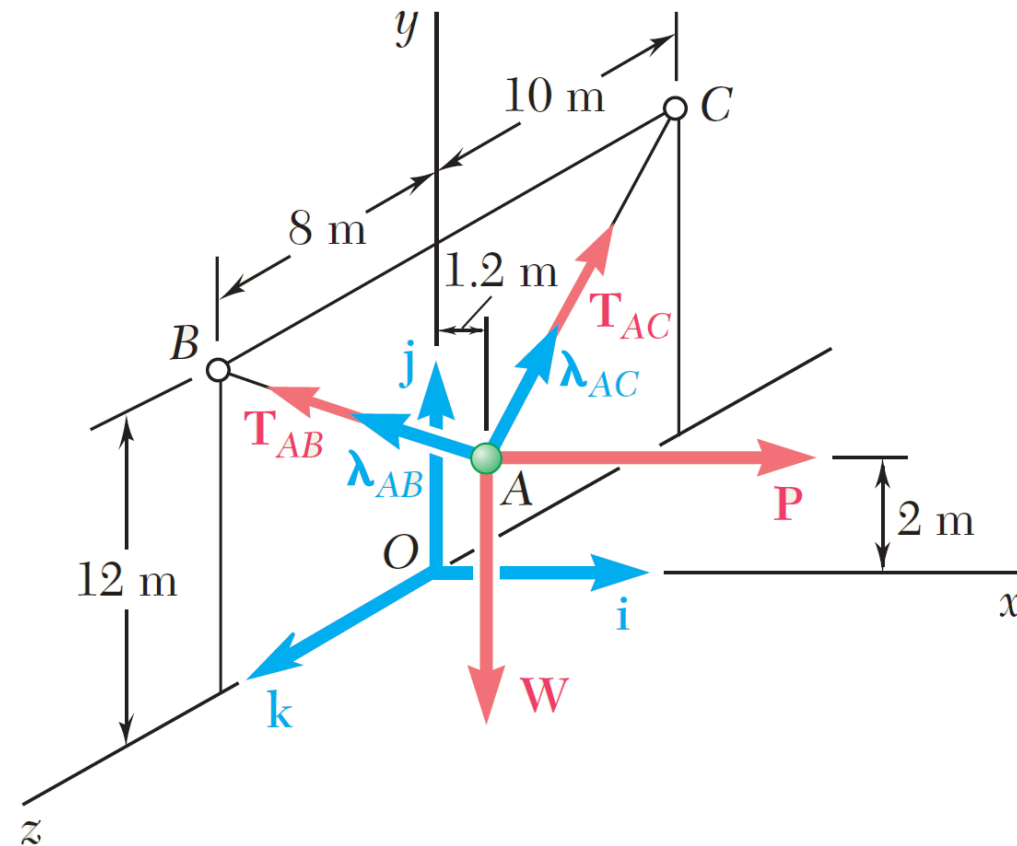
## سوال ۲



استوانه ای به جرم ۲۰۰ کیلوگرم توسط دو کابل AB و AC آویزان شده است و نیروی افقی P عمود بر دیوار استوانه را مطابق شکل نگه داشته است. اندازه نیروی P و کشش در هر یک از کابل ها را تعیین کنید.

## حل سوال ۲

استاتیک: دکتر امیری



## حل سوال ۲

استاتیک: دکتر امیری

$$\mathbf{P} = P\mathbf{i}$$

$$\mathbf{W} = -mg\mathbf{j} = -(200 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} = -(1962 \text{ N})\mathbf{j}$$

$$\overrightarrow{AB} = -(1.2 \text{ m})\mathbf{i} + (10 \text{ m})\mathbf{j} + (8 \text{ m})\mathbf{k} \quad AB = 12.862 \text{ m}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{12.862 \text{ m}} = -0.09330\mathbf{i} + 0.7775\mathbf{j} + 0.6220\mathbf{k}$$

$$\mathbf{T}_{AB} = T_{AB}\boldsymbol{\lambda}_{AB} = -0.09330T_{AB}\mathbf{i} + 0.7775T_{AB}\mathbf{j} + 0.6220T_{AB}\mathbf{k}$$

## حل سوال ۲

استاتیک: دکتر امیری

$$\overrightarrow{AC} = -(1.2 \text{ m})\mathbf{i} + (10 \text{ m})\mathbf{j} - (10 \text{ m})\mathbf{k} \quad AC = 14.193 \text{ m}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{AC} = \frac{\overrightarrow{AC}}{14.193 \text{ m}} = -0.08455\mathbf{i} + 0.7046\mathbf{j} - 0.7046\mathbf{k}$$

$$\mathbf{T}_{AC} = T_{AC}\boldsymbol{\lambda}_{AC} = -0.08455T_{AC}\mathbf{i} + 0.7046T_{AC}\mathbf{j} - 0.7046T_{AC}\mathbf{k}$$

$$\Sigma \mathbf{F} = 0:$$

$$\mathbf{T}_{AB} + \mathbf{T}_{AC} + \mathbf{P} + \mathbf{W} = 0$$



## حل سوال ۲

استاتیک: دکتر امیری

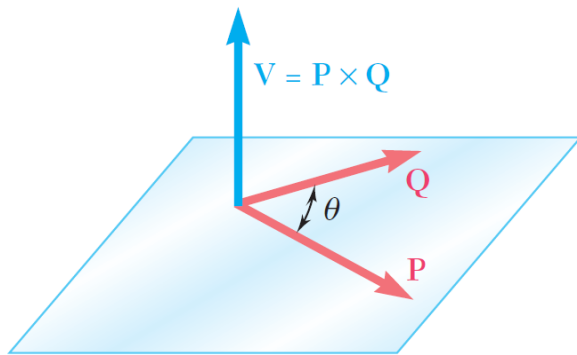
$$\begin{aligned} & (-0.09330T_{AB} - 0.08455T_{AC} + P)\mathbf{i} \\ & + (0.7775T_{AB} + 0.7046T_{AC} - 1962 \text{ N})\mathbf{j} \\ & + (0.6220T_{AB} - 0.7046T_{AC})\mathbf{k} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\Sigma F_x = 0:) & \quad -0.09330T_{AB} - 0.08455T_{AC} + P = 0 \\ (\Sigma F_y = 0:) & \quad +0.7775T_{AB} + 0.7046T_{AC} - 1962 \text{ N} = 0 \\ (\Sigma F_z = 0:) & \quad +0.6220T_{AB} - 0.7046T_{AC} = 0 \end{aligned}$$

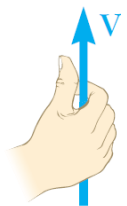
$$P = 235 \text{ N} \quad T_{AB} = 1402 \text{ N} \quad T_{AC} = 1238 \text{ N}$$

# ضرب برداری

استاتیک: دکتر امیری



(a)



$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}$$

$$V = PQ \sin \theta$$

# خواص ضرب برداری

ضرب برداری جابجاپذیر نیست

$$\mathbf{Q} \times \mathbf{P} = -(\mathbf{P} \times \mathbf{Q})$$

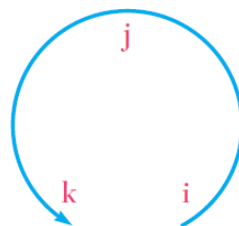
ضرب برداری دارای خاصیت توزیع پذیری است

$$\mathbf{P} \times (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2) = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}_1 + \mathbf{P} \times \mathbf{Q}_2$$

ضرب برداری دارای خاصیت شرکت پذیری نیست .

$$(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \times \mathbf{S} \neq \mathbf{P} \times (\mathbf{Q} \times \mathbf{S})$$

# ضرب برداری بردار های واحد



$$\begin{array}{lll} \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0} & \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} & \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0} & \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} & \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0} \end{array}$$

# ضرب برداری بر حسب مولفه های متعامد

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} = (P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + P_z \mathbf{k}) \times (Q_x \mathbf{i} + Q_y \mathbf{j} + Q_z \mathbf{k})$$

استفاده از بسط دترمینان

$$\mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$$

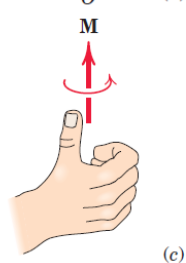
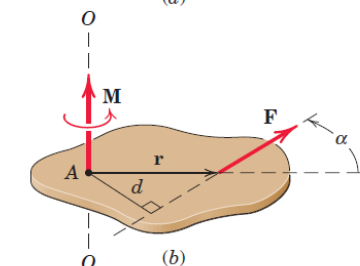
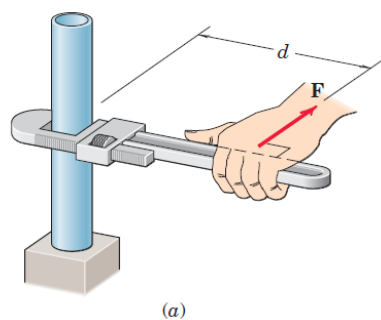
$$\mathbf{V} = (P_y Q_z - P_z Q_y) \mathbf{i} + (P_z Q_x - P_x Q_z) \mathbf{j} + (P_x Q_y - P_y Q_x) \mathbf{k}$$

$$\begin{aligned} V_x &= P_y Q_z - P_z Q_y \\ V_y &= P_z Q_x - P_x Q_z \\ V_z &= P_x Q_y - P_y Q_x \end{aligned}$$

# ضرب برداری بر حسب مولفه های متعامد

گشتاور :

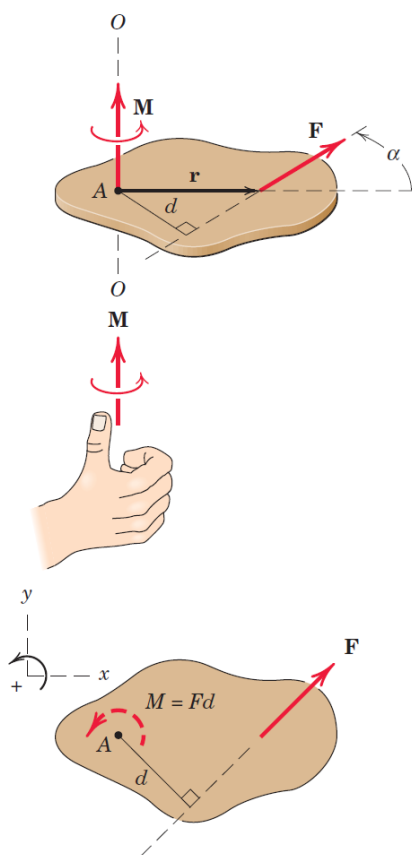
گشتاور یک نیرو نسبت به یک محور را (که گاهی به صورت یک نقطه بر روی جسم نشان داده می شود) را می توان به عنوان معیاری برای تمایل یک نیرو برای چرخاندن جسم حول آن محور تصور کرد.



$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

# ضرب برداری بر حسب مولفه های متعامد

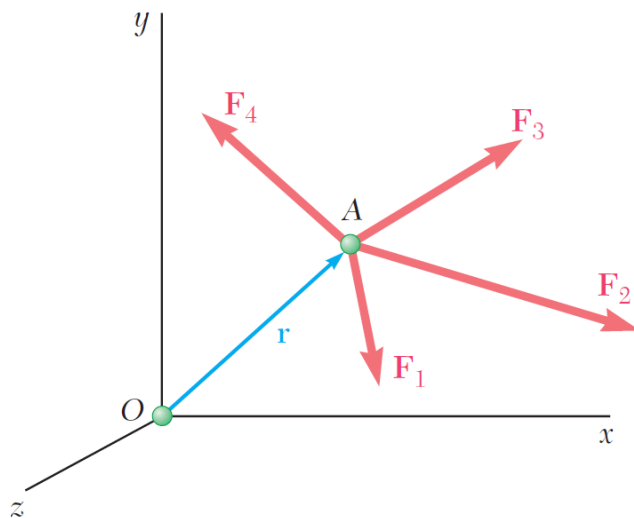
گشتاور:



$$M = Fr \sin \alpha = Fd$$

# قضیه وارینون

قضیه وارینون :



$$\mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 + \cdots$$

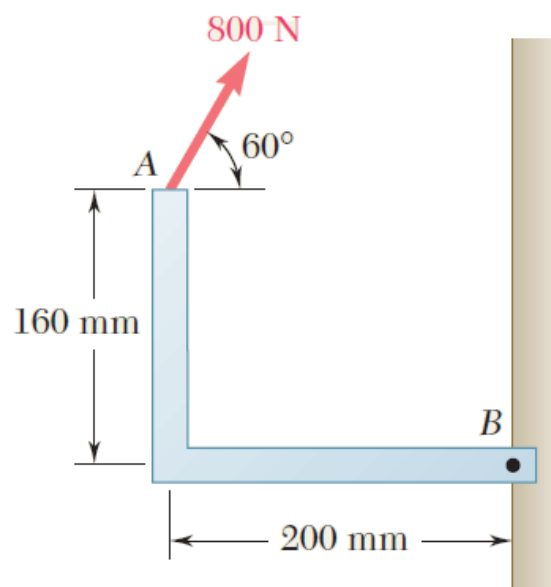


## سوال ۳

استاتیک: دکتر امیری

یک نیروی ۸۰۰ نیوتن به قابی که در شکل می بینید وارد می شود.

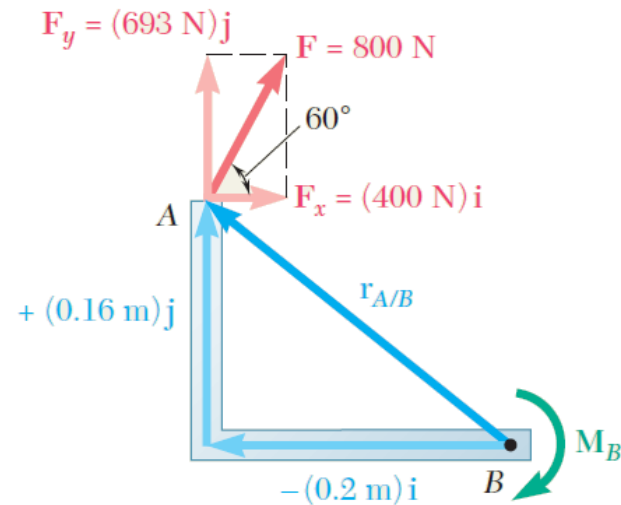
گشتاور این نیرو را نسبت به نقطه B تعیین کنید.



## حل سوال ۳

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{A/B} &= -(0.2 \text{ m})\mathbf{i} + (0.16 \text{ m})\mathbf{j} \\ \mathbf{F} &= (800 \text{ N}) \cos 60^\circ \mathbf{i} + (800 \text{ N}) \sin 60^\circ \mathbf{j} \\ &= (400 \text{ N})\mathbf{i} + (693 \text{ N})\mathbf{j}\end{aligned}$$



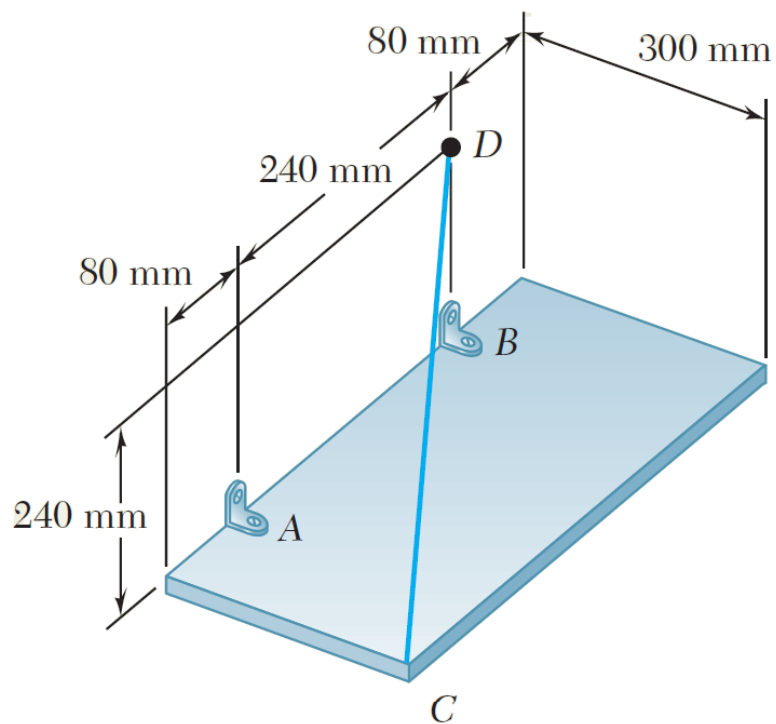
$$\begin{aligned}\mathbf{M}_B &= \mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F} = [-(0.2 \text{ m})\mathbf{i} + (0.16 \text{ m})\mathbf{j}] \times [(400 \text{ N})\mathbf{i} + (693 \text{ N})\mathbf{j}] \\ &= -(138.6 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} - (64.0 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} \\ &= -(202.6 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}\end{aligned}$$

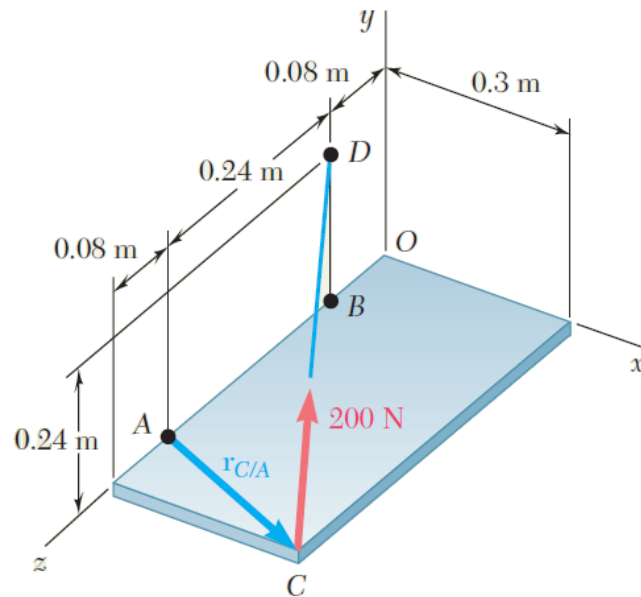
$$\mathbf{M}_B = 203 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow$$

## سوال ۴

استاتیک: دکتر امیری

یک ورق چهارگوش توسط دو بست  $A$  و  $B$  و کابل  $CD$  نگهداری می شود. چنانچه کشش کابل برابر  $200\text{ N}$  باشد، گشتاور نیروی وارد از طرف کابل به نقطه  $C$  را نسبت به نقطه  $A$  تعیین کنید.





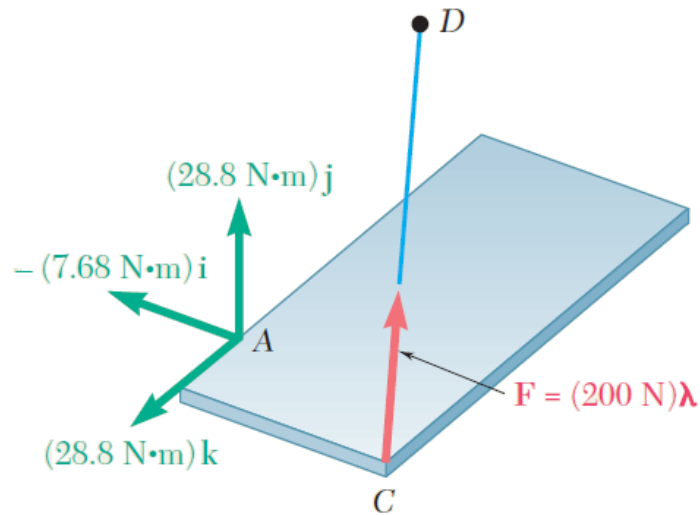
$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{C/A} \times \mathbf{F}$$

$$\mathbf{r}_{C/A} = \overrightarrow{AC} = (0.3 \text{ m})\mathbf{i} + (0.08 \text{ m})\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = (200 \text{ N}) \frac{\overrightarrow{CD}}{CD}$$

$$\overrightarrow{CD} = -(0.3 \text{ m})\mathbf{i} + (0.24 \text{ m})\mathbf{j} - (0.32 \text{ m})\mathbf{k} \quad CD = 0.50 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{200 \text{ N}}{0.50 \text{ m}} [-(0.3 \text{ m})\mathbf{i} + (0.24 \text{ m})\mathbf{j} - (0.32 \text{ m})\mathbf{k}] \\ &= -(120 \text{ N})\mathbf{i} + (96 \text{ N})\mathbf{j} - (128 \text{ N})\mathbf{k} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\mathbf{M}_A &= \mathbf{r}_{C/A} \times \mathbf{F} = (0.3\mathbf{i} + 0.08\mathbf{k}) \times (-120\mathbf{i} + 96\mathbf{j} - 128\mathbf{k}) \\ &= (0.3)(96)\mathbf{k} + (0.3)(-128)(-\mathbf{j}) + (0.08)(-120)\mathbf{j} + (0.08)(96)(-\mathbf{i}) \\ \mathbf{M}_A &= -(7.68 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{i} + (28.8 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{j} + (28.8 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_A &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.3 & 0 & 0.08 \\ -120 & 96 & -128 \end{vmatrix} \\ \mathbf{M}_A &= -(7.68 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{i} + (28.8 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{j} + (28.8 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k}\end{aligned}$$