线性代数

一．行列式

Cramer 法则
Vandermonde 行列式及证明

$$D_n = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ {a_1}^{n-1} & \cdots & {a_n}^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\det D_n == \prod_{1\le j<i\le n} \left(a_i - a_j\right)$$

特殊行列式的计算方法及证明：加边，递推(特征方程)，数学归纳法

二．矩阵

特殊矩阵：正交矩阵($A^T A = AA^T = E$)等
任何一个 n 阶方阵都可以表示成一个对称矩阵与反对称矩阵的和

矩阵的逆：$|A| \neq 0 \leftrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*, (AA^* = |A|E)$

求矩阵的逆方法：分块求逆，初等变换法等
矩阵的秩：

$$\mathrm{r(AB)} \le \min\{\mathrm{r(A)}, \mathrm{r(B)}\}$$

$$\text{Sylvester 公式：}\mathrm{r(AB)} \ge \mathrm{r(A)} + \mathrm{r(B)} - \mathrm{n}, \text{特别 } \mathrm{AB} = 0, \mathrm{r(A)} + \mathrm{r(B)} \le \mathrm{n}$$

$$\mathrm{r(A + B)} \le \mathrm{r(A)} + \mathrm{r(B)}$$

其中$A_{m\times n}$，$B_{n\times k}$，若$A^2 = \mathrm{A}$，证明：$\mathrm{r(A)} + \mathrm{r(I - A)} = n$

三．向量

向量组的线性相关性:

$$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}\text{线性相关} \leftrightarrow \text{存在一组不全为 0 的数}k_i\text{使得}\sum_{i=1}^{m} k_i \alpha_i = 0$$

等价的向量组
向量组的极大线性无关组不唯一
向量空间：基变换从 X 到 Y 的过渡矩阵 C 有

$$\mathrm{X} = \mathrm{C}Y$$

和坐标变换$\mathrm{Y} = C^{-1} X$

欧式空间R^n：$(\alpha,\beta)=\alpha^T\beta$ (α,β 为列向量)

标准正交向量组：Gram-Schmidt 正交化方法

四．相似矩阵

特征值和特征向量

$$|A|=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$$

$$tr(A)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$$

应用：天气 Markov 链的稳态
相似矩阵对角化：

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

推论：n 阶方阵相似于对角矩阵的充要条件是 A 的t_i重特征值有对应的t_i个线性无关的特征向量
应用：人口流动问题，求解常系数线性代数常微分方程组，容易计算A^k

五．二次型

矩阵的合同关系和相似关系是两种不同的关系
任意 n 阶对称矩阵 A，存在 n 阶可逆矩阵

$$P^TAP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

二次型的正定性：

惯性定理 p+q=r

正定二次型 $X^TAX>0$

正定的必要条件：$(1)a_{ii}>0$ ；$(2)|A|>0$