Fourier 级数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\,dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(a_n\cos nx\cos mx+b_n\sin nx\cos mx)\,dx=\pi a_m$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin mx\,dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(a_n\cos nx\sin mx+b_n\sin nx\sin mx)\,dx=\pi b_m$$

同 Taylor 级数一样，必须解决以下问题：

什么时候$f(x)$的 Fourier 级数收敛于$f(x)$：满足 Dirichlet 条件

在[-π, π]展开$f(x)=x^2$为 Fourier 级数，可证：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

若$f(x)$是[-π, π]上的奇函数，则$f(x)\cos nx$为奇函数，$f(x)\sin nx$为偶函数

$$a_n=0,b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\ (n\geq 0)$$

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$$

称为正弦级数，同理有余弦级数

假定下面所涉及的函数在所讨论的区间上满足 Dirichlet 条件

奇延拓和偶延拓

问题：在[0, π]上展开$f(x)$为正弦级数

分析：正弦级数只能表示奇函数，因此做$f(x)$的奇延拓$F(x)$:

$$F(x)=\begin{cases}-f(-x) & -\pi<x<0\\ f(x) & 0<x<\pi\end{cases}$$

在[0,π]上展开$f(x)$=x+1 为余弦级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

$f(x)$在[-l, l]展开 Fourier 级数

令

$$x=\frac{lt}{\pi},\varphi(t)=f(lt/\pi)$$

在

$$\varphi(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)$$

其中

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos nt\,dt=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sin nt\,dt=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

在[a, b]上展开为$f(x)$为 Fourier 级数($2l=b-a$)